Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1901. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Allgemeine Lösung des Problems der magnetischen Induktion.

Von **Arthur Korn.**

(*Eingelaufen 7. Dezember.*)

Es sei ω die stetig gekrümmte Oberfläche eines (auch aus einer endlichen Zahl räumlich getrennter Teile zusammengesetzten) magnetisierbaren Mediums τ, und es seien innerhalb des Aussenraumes irgend welche feste magnetische Ursachen gegeben, deren Potential wir mit V bezeichnen wollen. Das Gesammtpotential jener festen magnetischen Ursachen und der durch sie in τ inducierten magnetischen Verteilung ist dann:

$$1) \qquad Q = \varkappa \int_{\omega} \frac{\partial (Q + V)}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r},$$

wenn $d\omega$ irgend ein Element der Oberfläche ω (mit der inneren Normalen ν) und r die Entfernung von $d\omega \rightarrow$ einem variablen Punkt $(x\,y\,z)$ des Innen- oder Aussenraumes vorstellt, auf den sich die Formel (1) bezieht; $\varkappa$ ist eine dem magnetisierbaren Medium eigentümliche Konstante, positiv für die sogenannten magnetischen, negativ für die sogenannten diamagnetischen Medien.

Man kann die Aufgabe für die unbekannte Funktion Q auch so formulieren:

Es ist eine Potentialfunktion Q_i des Innenraumes und eine Potentialfunktion Q_a des Aussenraumes so zu bestimmen, dass:

$$2) \qquad \left\{ \begin{array}{r} (1 + 4\pi\varkappa) \dfrac{\partial Q_i}{\partial \nu} - \dfrac{\partial Q_a}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa \dfrac{\partial V}{\partial \nu} = 0, \\ Q_a = Q_i \end{array} \right\} \text{ an } \omega.$$

Man mag die alten Fernwirkungstheorieen oder eine der neueren Theorien des Elektromagnetismus zu grunde legen, immer wird man zu diesem mathematischen Problem geführt.

Dieses Problem bildet einen speciellen Fall des allgemeinen Problemes, eine Potentialfunktion U_i des Innenraumes und eine Potentialfunktion U_a des Aussenraumes so zu bestimmen, dass:

$$3)\qquad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial U_a}{\partial \nu} - \dfrac{\partial U_i}{\partial \nu} = \lambda\left(\dfrac{\partial U_a}{\partial \nu} + \dfrac{\partial U_i}{\partial \nu}\right) - 2f, \\ U_a = U_i \end{array}\right\} \text{ an } \omega,$$

wo λ eine gegebene reelle Zahl und f eine eindeutige und stetige, gegebene Funktion der Stelle auf ω vorstellt.[1])

Ist in dem Problem 3)

$$4)\qquad \text{abs. } \lambda < 1,$$

so ist, nach den Untersuchungen in Nr. 5 meiner Abhandlungen zur Potentialtheorie, die Existenz einer und nur einer Lösung U gesichert, und die Lösung ist darstellbar durch die Reihe:

$$5)\qquad U = \mathfrak{V}_0 + \lambda\mathfrak{V}_1 + \lambda^2\mathfrak{V}_2 + \ldots,$$

wenn:

$$6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{V}_0 = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\omega f\,\frac{d\omega}{r}, \\ \mathfrak{V}_j = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\omega\left[\frac{\partial \mathfrak{V}_{j-1,a}}{\partial \nu} + \frac{\partial \mathfrak{V}_{j-1,i}}{\partial \nu}\right]\frac{d\omega}{r} \cdot (j = 1, 2 \ldots). \end{array}\right.$$

U besitzt in ganzer Erstreckung des Innenraumes sowohl, als auch in ganzer Erstreckung des Aussenraumes eindeutige und stetige Ableitungen nach x, y, z.

Wir können nun das Problem der magnetischen Induktion leicht auf ein Problem von der Form 3) zurückführen und durch die Gleichungen 5) 6) somit zu einer allgemeinen

---

[1]) Von der wir überdies voraussetzen, dass $\displaystyle\int_\omega f\frac{d\omega}{r}$ Potentialfunktion des Innen- und Aussenraumes ist.

Lösung des Problemes gelangen. Diese Untersuchung bietet zugleich einen interessanten Fall der Anwendung der Poincaré'schen Fundamentalfunktionen. —

Um das Problem 2) auf die Form 3) zu bringen, konstruieren wir das Potential der Fläche ω mit der Dichte H:

$$7) \qquad \Phi = \int_{\omega} H \frac{d\omega}{r}$$

in solcher Weise, dass im ganzen Innenraum von ω:

$$8) \qquad \Phi \equiv \frac{2\pi\varkappa}{1+2\pi\varkappa} V \text{ (im Innern von } \omega),$$

und wir setzen:

$$9) \qquad U = Q + \Phi,$$

dann lassen sich die Formeln 2) in der folgenden Art und Weise schreiben:

$$10) \begin{cases} \dfrac{\partial U_a}{\partial \nu} - \dfrac{\partial U_i}{\partial \nu} = \dfrac{2\pi\varkappa}{1+2\pi\varkappa}\left(\dfrac{\partial U_a}{\partial \nu} + \dfrac{\partial U_i}{\partial \nu}\right) + \dfrac{1}{1+2\pi\varkappa}\left(\dfrac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} + \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\right), \\ U_a = U_i \end{cases}$$

an ω.

Damit ist die gewünschte Form 3) erhalten; überdies ist für magnetische Medien $\varkappa > 0$, somit:

$$11) \qquad \frac{2\pi\varkappa}{1+2\pi\varkappa} < 1,$$

die Formeln 5) 6) geben uns daher die Lösung U, wenn man in denselben:

$$12) \qquad f = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2\pi\varkappa}\left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\right)$$

setzt, in Gestalt einer unendlichen Reihe, die rascher konvergiert, als eine geometrische Reihe mit dem $j$ten Gliede:

$$\left(\frac{2\pi\varkappa}{1+2\pi\varkappa}\right)^j$$

und hierauf nach 9):

13) $$Q = U - \Phi.$$

Nachdem so zunächst die Existenz der Lösung allgemein bewiesen ist, gehen wir zu der Entwickelung nach Poincaré'schen Fundamentalfunktionen über. Es ist nach Satz Vb S. 58 in Nr. 5 meiner Abhandlungen zur Potentialtheorie:

14) $$U = C_0 \Phi_0 + C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2 + \ldots$$

innerhalb des Innen- und Aussenraumes von ω, wenn $\Phi_0\ \Phi_1\ \Phi_2 \ldots$ die Poincaré'schen Fundamentalfunktionen[1]) sind, welche den Polen:

$$\lambda = \lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$$

der Lösung des Problemes:

$$\frac{\partial u_a}{\partial \nu} - \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = \lambda\left(\frac{\partial u_a}{\partial \nu} + \frac{\partial u_i}{\partial \nu}\right) + \frac{1}{1+2\pi\varkappa}\left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\right),$$

$$u_a = u_i$$

an ω

entsprechen. Die Konstanten $C_0\ C_1\ C_2 \ldots$ in der Entwickelung 14) sind dabei durch die Formeln gegeben:

15)[2]) $$C_j = -\int_\omega U \frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu}\, d\omega = \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\int_\omega U \frac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu}\, d\omega.$$

---

[1]) Die Potentialfunktionen $\Phi_{ji}\ \Phi_{ja}$ des Innen- resp. Aussenraumes von ω haben die wichtigen Eigenschaften ($j = 1, 2 \ldots$):

a) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu} - \dfrac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu} = \lambda_j\left(\dfrac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu} + \dfrac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu}\right), \\ \Phi_{ja} = \Phi_{ji} \end{array}\right| \text{ an } \omega;$$

b) $$\int_i \left[\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = 1,$$

während Φ_0 das Potential der natürlichen Belegung vorstellt.

[2]) für $j = 1, 2 \ldots$; während:

$$C_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\omega \frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu}\, d\omega.$$

Mit Hilfe der ersten Gleichung 10) können wir zeigen, dass wir zur Bestimmung der C_j die Lösung U des Problems 10) gar nicht zu kennen brauchen. Es ist nach der ersten Gleichung 10):

$$\frac{\partial U_a}{\partial \nu} = (1 + 4\pi\varkappa)\frac{\partial U_i}{\partial \nu} + \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\right),$$

somit:

$$C_j \equiv \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\int_\omega U\frac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu}\,d\omega \equiv \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\int_\omega \Phi_j\frac{\partial U_a}{\partial \nu}\,d\omega,$$

$$= (1+4\pi\varkappa)\frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\int_\omega \Phi_j\frac{\partial U_i}{\partial \nu}\,d\omega + \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\int_\omega \Phi_j\left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\right)d\omega,$$

$$= -(1 + 4\pi\varkappa)\frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}C_j + \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\int_\omega \Phi\left(\frac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu}\right)d\omega,$$

oder:

$$C_j = \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1 + (1 + 4\pi\varkappa)(\lambda_j - 1)}\int_\omega \Phi\left(\frac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu}\right)d\omega,$$

$$= -\frac{2}{\lambda_j + 1 + (1 + 4\pi\varkappa)(\lambda_j - 1)}\int_\omega \Phi\frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu}\,d\omega,$$

oder schliesslich:

16) $$C_j{}^{1}) = -\frac{2}{\lambda_j + 1 + (1 + 4\pi\varkappa)(\lambda_j - 1)}\int_\omega \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\Phi_j\,d\omega.$$

Wir können somit die Lösung Q des Problemes der magnetischen Induktion allgemein innerhalb des Innenraumes und Aussenraumes von ω in der Form darstellen:

17) $$Q = -\Phi + C_0\Phi_0 + C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + \ldots,$$

---

[1]) für $j = 1, 2 \ldots$; während nach wie vor:

16') $$C_0 = \frac{1}{4\pi}\int_\omega \frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu}\,d\omega.$$

wo Φ die Lösung des Dirichlet'schen Problemes für den Innen- resp. Aussenraum mit den Randwerten

$$\frac{2\pi\varkappa}{1+2\pi\varkappa} V \text{ an } \omega$$

vorstellt und die Konstanten $C_0 C_1 C_2 \ldots$ durch die Gleichungen 16) (und 16') bestimmt sind.

Im Falle der Kugel, in dem die Poincaré'schen Fundamentalfunktionen mit den Laplace'schen Funktionen

$$\frac{Y_j}{r^{j+1}} \text{ resp. } Y_j \cdot r^j$$

proportional werden, führt uns die Gleichung 17) auf die bekannte Lösung in der Form einer nach Kugelfunktionen fortschreitenden Reihe.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1901

Band/Volume: 1901

Autor(en)/Author(s): Korn Arthur

Artikel/Article: Allgemeine Lösung des Problems der magnetischen Induktion 435-440