# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Classe

der

## k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXII. Jahrgang 1902.

**München.**
Verlag der k. Akademie.
1903.

**In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).**

# Neue Mittelwerthssätze über bestimmte Integrale.

Von **Hermann Brunn.**

*(Eingelaufen 1. März.)*

---

## Geometrische Einleitung.

1. In jeder unserer Figuren 1, 2 und 3 haben wir zwei zu einander senkrechte Ebenen I und II und einen in ihrem Winkel liegenden Körper: $K_1$ in Fig. 1, $K_2$ in Fig. 2, $K_3$ in Fig. 3.

2. Jeder dieser Körper ist ausser durch I und II durch zwei ebene und zwei cylindrische auf I oder II senkrechte Flächen begrenzt, z. B. $K_1$ durch die ebenen Flächen $a c \gamma C$, $b d \delta D$ und die cylindrischen $C \gamma \delta D$ und $c \gamma \delta d$.

3. Sämmtliche drei Körper werden von Ebenen, die senkrecht zur Schnittlinie $a b$ der Ebenen I und II sind, nach Rechtecken geschnitten.

4. Die drei Figuren sind nur der Deutlichkeit wegen auseinander gezeichnet. Man soll sie sich eigentlich in einander geschoben vorstellen, so dass man drei Körper zwischen einem einzigen Paar von Ebenen hat.

5. Dann wird die ebene Grundfläche $abdec$, wie schon durch die gleichbleibende Bezeichnung angedeutet in allen drei Fällen identisch dieselbe. Die drei Flächen $abDEC$, $abD'E'C'$, $abD''E''C''$ werden nicht identisch, sind aber als inhaltsgleich vorausgesetzt.

6. Wichtig ist nun die Charakterisirung der in I und II liegenden Leitlinien der verschiedenen Cylinderflächen. Die Curven $CED$ und $ced$, jene von $C$ nach $D$, diese von $c$ nach $d$ hin durchlaufen, sollen dabei beide entweder der Linie $ab$ niemals näher kommen, oder niemals von ihr sich entfernen. Anders ausgedrückt, sie sollen durch monotone Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ gleichen Charakters (durch „isomonotone", kürzer „isotone" Funktionen) sich ausdrücken, wenn man $ab$ als Abscissenaxe, die Ordinaten in den zu $ab$ senkrechten Richtungen $aC$, resp. $ac$ nimmt.

7. $C''E''D''$ soll symmetrisch zu $CED$, das Flächenstück $abC''E''D''$ eine einfache Umlegung von $abCED$ sein. $C''E''D''$ ist somit ebenfalls monoton, aber nicht gleichen Charakters („anisoton") mit $CED$. $C'E'D'$ ist eine Parallele zu $ab$.

8. Den nichtssagenden Fall, dass $CED$ selbst parallel zu $ab$ ist, und in Folge dessen (s. 5) mit $C'E'D'$ und $C''E''D''$ zusammenfällt, können wir als ausgeschlossen, bezw. von vorneherein erledigt betrachten.

9. Es gilt nun

$$K_1 > K_2 > K_3$$

und diese Beziehung, analytisch eingekleidet (s. VIII und XXII) und bewiesen, sowie mehrfach verallgemeinert, bildet den Inhalt der folgenden Betrachtungen.[1])

## I. Capitel.

10. $f(x)$ und $g(x)$ seien in dem endlich begrenzten Intervall $a \leq x \leq b$ endliche, eindeutige, monotone Funktionen, somit auch integrabel im ganzen Intervall und über jede beliebige Theilstrecke desselben.

---

[1]) Herr Gust. Bauer macht mich aufmerksam, dass die nemliche Art geometrischer Repräsentation für den Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthssatz angewendet wurde von C. Neumann (Ueber die nach Kugel- und Cylinder-Funktionen fortschreitenden Entwickelungen etc. Leipzig 1881).

*Fig. 1*

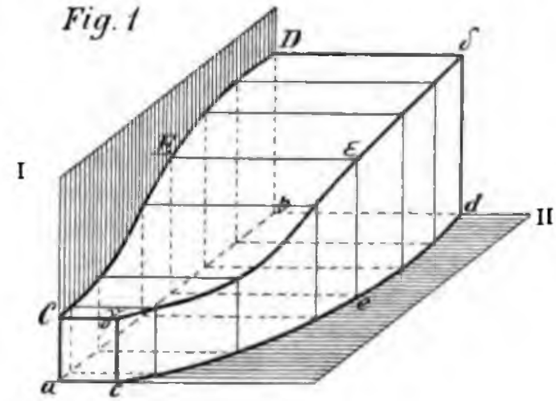



*Fig. 2*

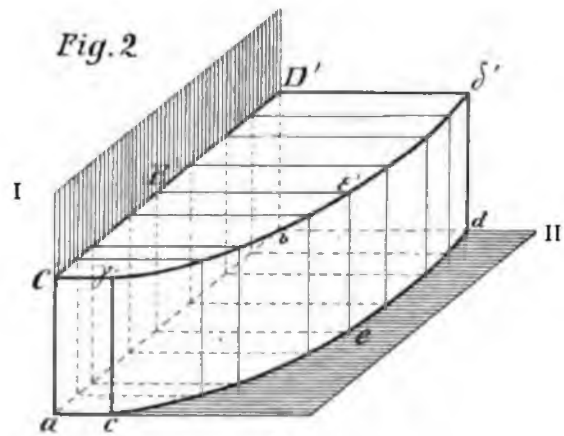
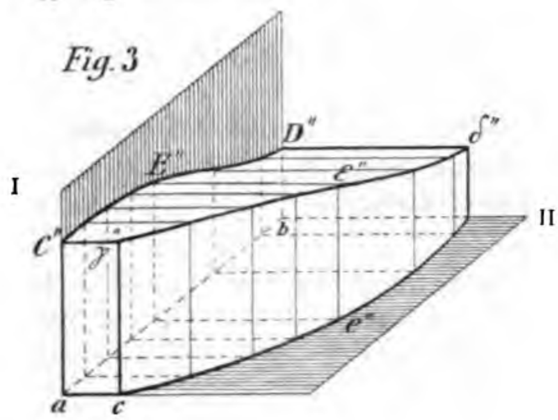



*Fig. 3*



11. Die Integrabilität des Produktes $f(x) \cdot g(x)$ im nemlichen Intervall ist für das Folgende ebenfalls nothwendig, sie ergibt sich aber, wie man weiss, aus den gemachten Voraussetzungen bereits als nothwendige Folge.

12. Zunächst seien $f(x)$ und $g(x)$ nicht nur monoton, sondern — um beim ersten Beweisschritt unseres bevorstehenden Satzes nicht gleich eine Menge verschiedener parallel laufender Fälle zu gleicher Zeit im Auge behalten zu müssen, — auch isoton, und zwar niemals abnehmend, dazu im ganzen Intervall positiv. Schliesslich sei auch der Fall eines völligen Gleichbleibens im ganzen Intervall für beide Funktionen vorläufig ausgeschlossen.

Dann ist

$$\text{I)} \qquad f(a)\int_a^b dx < \int_a^b f(x)\,dx < f(b)\int_a^b dx$$

oder — es ist ja $b - a$ positiv (s. 10) —

$$\text{II)} \qquad f(a) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < f(b).$$

13. Es ist also

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f_m$$

ein mittlerer Werth zwischen $f(a)$ und $f(b)$ und es lässt sich auf alle Fälle ein zwischen $a$ und $b$ liegender Werth $x_m$ bestimmen, für welchen gilt:

$$\text{III)} \qquad f(x_m - \varepsilon) \leq f_m \leq f(x_m + \delta)$$

wobei

$$0 < \varepsilon \leq x_m - a; \quad 0 < \delta \leq b - x_m$$

ist und die beiden Gleichheitszeichen in III) nach Absatz 12 nicht gleichzeitig für alle zugelassenen Werthe von $\varepsilon$ und $\delta$ gelten können.

14. Ob dabei $f_m$ mit $f(x_m)$ zusammenfällt, bleibt unentschieden; die Voraussetzungen über die Funktion sind derartige, dass auch ein Unstetigkeitssprung der Funktion bei

$x = x_m$ zulässig ist, der sie von einem Werthe unterhalb $f_m$ nach einem solchen oberhalb fortreisst.[1])

15. In Worten: Es existirt sicher eine Theilung des Intervalls von der Art, dass die zum einen Theil gehörigen $x$-Werthe die Funktion sämmtlich $\leq f_m$, die zum andern Theil gehörigen sämmtlich sie $\geq f_m$ machen.

16. Dann gilt weiter:

$$\text{IV)}\left\{\begin{array}{l} \int_a^{x_m} f(x)\,g(x)\,dx \leq \int_a^{x_m} f_m \cdot g(x) \cdot dx \\ (= \text{ nur, wenn } f(x) \text{ von } a \text{ bis } x_m \text{ constant } = f_m \text{ ist}) \\ \int_{x_m}^{b} f(x)\,g(x)\,dx \geq \int_{x_m}^{b} f_m \cdot g(x) \cdot dx \\ (= \text{ nur, wenn } f(x) \text{ von } x_m \text{ bis } b \text{ constant } = f_m \text{ ist}) \end{array}\right.$$

oder — indem man die beiden vorstehenden Ungleichungen leicht umformt und neue wichtige daran kettet:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{V}^a) & 0 \leq \int_a^{x_m} (f_m - f(x))\,g(x)\,dx \leq g(x_m) \int_a^{x_m} (f_m - f(x))\,dx \\ & \qquad\qquad\qquad\quad \text{„} \qquad \leq g(x_m)\left[f_m(x_m - a) - \int_a^{x_m} f(x)\,dx\right] \\ \text{und} & \\ \text{V}^b) & 0 \leq \int_{x_m}^{b} (f(x) - f_m)\,g(x)\,dx \geq g(x_m) \int_{x_m}^{b} (f(x) - f_m)\,dx \\ & \qquad\qquad\qquad\quad \text{„} \qquad \geq g(x_m)\left[\int_{x_m}^{b} f(x)\,dx - f_m(b - x_m)\right] \end{array}\right\} \text{beachte III)}$$

Die zweiten Gleichheitszeichen in $V_a$) resp. $V_b$) gelten nur, wenn $g(x)$ von $a$ bis $x_m$, resp. von $x_m$ bis $b$ constant gleich $g(x_m)$ ist oder wenn $f_m - f(x)$ im ganzen Intervall von $a$ bis $x_m$, resp. von $x_m$ bis $b$ gleich Null ist.

---

[1]) Möglicherweise existiren mehrere Werthe für $x_m$; sind $x'_m$ und $x''_m$ zwei davon, so ist sicher $f(x'_m) = f(x''_m) = f_m$ und auch $f(x_m) = f_m$ für jeden beliebigen Werth $x_m = x'''_m$, der zwischen $x'_m$ und $x''_m$ liegt.

17. Hier ist eine Erläuterung der Bedeutung von $g(x_{m})$ erforderlich. Sobald $g(x)$ bei $x_m$ keine Unstetigkeit erleide ist ein Zweifel darüber, was für $g(x_m)$ zu setzen ist, au geschlossen. Sobald $g(x)$ aber dort einen Sprung macht vc $g(x) = \alpha$ bis $g(x) = \beta$, so kann für $g(x_m)$ jeder Wert zwischen $\alpha$ und $\beta$ mit Einschluss dieser Grenzen gesetzt we den, und man kann auch, um die Ungleichungen möglich stringent zu machen, in $\mathrm{V_a}$) einen möglichst kleinen Wert also $\alpha$, in $\mathrm{V_b}$) einen möglichst grossen, also $\beta$ für $g(x_m)$ einsetze

18. Wir kehren zur Entwickelung unseres Satzes zurüc Die beiden eckigen Klammern in $\mathrm{V_a}$) und $\mathrm{V_b}$) erweisen si als gleich, wie man durch Subtraktion ersieht:

$$\text{VI)}\quad \begin{aligned} & f_m(x_m - a) - \int_a^{x_m} f(x)\,dx - \int_{x_m}^b f(x)\,dx + f_m(b - x_m) \\ & \qquad = f_m(b-a) - \int_a^b f(x)\,dx = 0 \quad \text{(nach 13).} \end{aligned}$$

Wenn also der mit $g(x_m)$ multiplicirte Werth der eckig Klammern mit $F$ bezeichnet wird, so ist

$$\text{VII)}\quad \begin{aligned} & \int_a^{x_m} (f_m - f(x))\,g(x)\,dx \leqq F \leqq \int_{x_m}^b (f(x) - f_m)\,g(x)\,dx \\ & \int_a^{x_m} (f_m - f(x))\,g(x)\,dx \leqq \int_{x_m}^b (f(x) - f_m)\,g(x)\,dx, \end{aligned}$$

wo das Gleichheitszeichen nur gelten könnte, wenn $g(x)$ i ganzen Intervall, mit Ausnahme etwa der Grenzen $a$ und selbst, constant gleich $g(x_m)$ wäre, was wir ausgeschloss haben (s. 12).

Durch andere Vertheilung und Wiederzusammenfassur der Theilintegrale auf die Seiten der Ungleichung ergibt si hieraus:

$$\text{VIII)}\quad \begin{aligned} & f_m \int_a^b g(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \qquad \text{oder} \\ & \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx > \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx. \end{aligned}$$

19. Wir wollen nun den Satz von allerhand Beschränkungen befreien, welche ihm vorläufig noch anhaften.

Aus der erhaltenen Ungleichung ergibt sich auch die Richtigkeit der folgenden, in der $k$, $l$ beliebige constante Grössen sind:

$$\text{IX)}\quad \int_a^b [f(x)+k][g(x)+l]\,dx > \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)+k]\,dx \int_a^b [g(x)+l]\,dx$$

und umgekehrt, aus dem Bestehen der letzteren für irgend zwei Werthe $k$, $l$ folgt VIII).

Denn durch Ausführung der Multiplikationen und Integrationen ergibt sich für IX) eine Form, die sich von VIII) nur durch die Hinzufügung gleicher Glieder

$$\text{X)}\quad l\int_a^b f(x)\,dx + k\int_a^b g(x)\,dx + k\,l\,(b-a)$$

rechts und links vom Ungleichheitszeichen unterscheidet.

20. Sind nun $f(x)$, $g(x)$ irgend zwei im Intervall $a$ bis $b$ nirgends fallende endliche eindeutige Funktionen, deren Vorzeichen nicht oder nicht überall im Intervall positiv ist, so lassen sich doch stets endliche Constante $k$, $l$ angeben, welche $f(x)+k$ und $g(x)+l$ zu nirgends fallenden, im Intervall stets positiven Funktionen machen, für welche IX) Geltung hat. Dann gilt aber, wie eben ausgesprochen, auch VIII).

Also die das Vorzeichen von $f(x)$ und $g(x)$ beschränkende Bedingung aus Abs. 12 können wir fallen lassen.

21. Ferner: Sind $f(x)$, $g(x)$ zwei im Intervall niemals steigende, so sind $-f(x)$, $-g(x)$ zwei im Intervall niemals fallende Funktionen, für welche gilt:

$$\text{XI)}\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b [-f(x)][-g(x)] > \frac{1}{b-a}\int_a^b [-f(x)]\,dx \cdot \int_a^b [-g(x)]\,dx\ (\text{s. VIII}); \\ \text{somit gilt auch} \\ \displaystyle\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx > \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx \end{array}\right.$$

d. h. der Satz gilt auch für niemals steigende Functionen, endlich und eindeutig sind.

22. Ist schliesslich $f(x)$ eine im Intervall niemals faller $g(x)$ eine ebenda niemals steigende endliche eindeutige Fu tion — oder umgekehrt — so ist nach dem Vorhergehen der Satz sicher giltig für das Paar Funktionen $f(x)$ und $-g$ und es kommt

$$\text{XII)}\quad \left\{\begin{array}{l} -\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx > -\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\int\limits_a^b g(x)\,dx \\ \text{oder} \\ \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx < \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\int\limits_a^b g(x)\,dx. \end{array}\right.$$

Für „anisotone" Funktionen dreht sich also das Unglei heitszeichen unseres Satzes um.

23. Sobald wir das von Kronecker eingeführte Zeic

$$\operatorname{sgn} A = \pm 1 \left(\text{je nachdem } A \begin{array}{l}\text{pos}\\ \text{neg}\end{array}\right)$$

benutzen, ist

$$\text{XIII)}\quad \begin{array}{l} \operatorname{sgn}[f(b)-f(a)]\cdot\operatorname{sgn}[g(b)-g(a)] \\ = \operatorname{sgn}\{[f(b)-f(a)]\,[g(b)-g(a)]\} \end{array}$$

$$\text{abgekürzt} = \operatorname{sgn} q = \pm 1 \left(\text{je nachdem } f \text{ und } g \begin{array}{l}\text{isoton}\\ \text{anisoto}\end{array}\right.$$

Die bisherigen Resultate lassen sich daher in der folg den Form des Satzes zusammenfassen:

$$\text{XIV)}\quad \operatorname{sgn} q \cdot \int\limits_a^b f(x)\,g(x) > \operatorname{sgn} q\,\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\int\limits_a^b g(x)\,dx$$

24. Um endlich auch noch die in 10. gemachte Vora setzung $b > a$ zu beseitigen, sei $b < a$; dann gilt nach d bisherigen sicher

$$\text{XV)}\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sgn} q \int_b^a f(x)\, g(x)\, dx > \frac{\operatorname{sgn} q}{a-b} \int_b^a f(x)\, dx \int_b^a g(x)\, dx \\ \text{oder} \\ -\operatorname{sgn} q \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx > -\operatorname{sgn} q \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \int_a^b g(x)\, dx. \end{array}\right.$$

Die beiden für die entgegengesetzten Annahmen $b > a$ und $b < a$ geltenden Formen der Ungleichung können wieder in eine zusammengefasst werden, indem man in XIV) links wie rechts noch den Factor $\operatorname{sgn}(b-a)$ hinzufügt.

25. Setzt man schliesslich zur Abkürzung das Produkt

$$\text{XVI)} \qquad [f(b)-f(a)]\,[g(b)-g(a)]\,[b-a] = p,$$

so kommt als endgiltige Form des Satzes:

$$\text{XVII)} \quad \operatorname{sgn} p \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx > \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \int_a^b g(x)\, dx,$$

der nun für beliebige endliche, eindeutige monotone Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und beliebige endliche Grenzen $a$, $b$ gilt mit Ausnahme des Falles $a = b$, bei dem die beiden Seiten der Ungleichung als verschwindend und so einander gleichwerdend zu betrachten sind, und des Falles, wo eine der Funktionen $f$, $g$ oder auch beide im ganzen Intervall constant sind und wo ebenfalls Gleichheit eintritt.

26. Eine Vervollständigung des Satzes kann gewonnen werden, indem man der einen Funktion, etwa $f(x)$, die Funktion $f(a+b-x)$ an die Seite stellt, welche im Intervall von $a$ bis $b$ die nemlichen Werthe wie jene, aber in umgekehrter Reihenfolge annimmt, somit ebenfalls endlich, eindeutig und monoton ist, und der Ungleichung

$$\text{XVIII)} \quad \operatorname{sgn} p' \int_a^b f(a+b-x)\, g(x)\, dx > \frac{\operatorname{sgn} p'}{b-a} \int_a^b f(a+b-x)\, dx \int_a^b g(x)\, dx$$

Genüge thut.

Aber es ist, wie die Substitution $x = a + b - y$ sofort erweist

XIX) $$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

und es ist ferner

XX) $$\operatorname{sgn} p' = \operatorname{sgn}\{[f(a)-f(b)]\,[g(b)-g(a)]\,[b-a]\} = -\operatorname{sgn} p,$$

so dass sich ergibt

XXI) $$\operatorname{sgn} p \int_a^b f(a+b-x)\,g(x)\,dx < \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx$$

und wir unserer Ungleichung XVII) noch ein Glied anfügen können:

XXII) $$\begin{aligned}\operatorname{sgn} p \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx &> \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \\ &> \int_a^b f(a+b-x)\,g(x)\,dx.\end{aligned}$$

27. Die vollständig symmetrische Rolle, welche $f(x)$ und $g(x)$ spielen, lässt erkennen, dass $f(x)$ und $g(x)$ im letzten Integral auch vertauscht werden können.

## II. Capitel.

28. Die im ersten Capitel entwickelte Ungleichung hat in einer Beziehung etwas unbefriedigendes. Sie schliesst das Produkt der beiden Integrale über die Factoren $f(x)$ und $g(x)$ in Grenzen ein, für das Integral des Produktes gibt sie nur eine einseitige Grenze. Meist wiegt aber der Wunsch vor, gerade über das Integral des Produktes näher belehrt zu werden.

29. Versuchen wir zuerst, durch eine Transformation der Ungleichung diesem Mangel abzuhelfen. Es sei jetzt eine Funktion $m(x)$ und ihr Produkt mit einer andern $h(x)\cdot m(x)$ eindeutig, endlich und monoton. Dann wird auch $\dfrac{1}{m(x)}$ die nemlichen Eigenschaften haben, wenn nur kein Werth des $x$-Intervalls, auf welches sich die Betrachtung beschränkt, $m(x)$ zu Null macht. Dies sei jetzt vorausgesetzt.

30. Wir wenden nun unsern Satz auf den Fall $f(x) = h(x) m(x)$ und $g(x) = \frac{1}{m(x)}$ an und erhalten, wenn der Abkürzung wegen

$$[b-a]\,[h(b)\,m(b) - h(a)\,m(a)]\left[\frac{1}{m(b)} - \frac{1}{m(a)}\right] = p''$$

XXIII) oder

$$-[b-a]\,[m(b) - m(a)]\left[\frac{h(b)}{m(a)} - \frac{h(a)}{m(b)}\right] = p''$$

gesetzt wird:

XXIV)
$$\operatorname{sgn} p'' \int_a^b h(x)\,dx > \operatorname{sgn} p'' \int_a^b h(x) \cdot m(x)\,dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{m(x)}$$
$$> \operatorname{sgn} p'' \int_a^b \frac{h(a+b-x)\,m(a+b-x)\,dx}{m(x)}.$$

Wir setzen, um die Division mit $\int_a^b \frac{dx}{m(x)}$ vorzubereiten,

XXV)
$$p'' \cdot \int_a^b \frac{dx}{m(x)} = r,$$

dann wird

XXVI)
$$\operatorname{sgn} r \frac{\int_a^b h(x)\,dx}{\int_a^b \frac{dx}{m(x)}} > \operatorname{sgn} r \int_a^b h(x)\,m(x)\,dx$$
$$> \operatorname{sgn} r \frac{\int_a^b \frac{b(a+b-x)\,m(a+b-x)\,dx}{m(x)}}{\int_a^b \frac{dx}{m(x)}}.$$

31. Unser Augenmerk richtet sich natürlich weniger auf die zweite, als auf die erste in XXVI) enthaltene Ungleichung und auf die Frage, ob vielleicht diese sich an die erste Ungleichung von XXII), welche für die bei monotonem $h(x)$ zulässige Verfügung $f(x) = h(x)$, $g(x) = m(x)$ die Form

XXVII) $$\operatorname{sgn} p \int_a^b h(x)\, m(x)\, dx > \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a} \int_a^b h(x)\, dx \cdot \int_a^b m(x)\, d$$

annimmt, — nach vorn angliedern lasse. Dies ist dann d
Fall, wenn
$$\operatorname{sgn} r = \operatorname{sgn} p$$
oder wenn

XXVIII) $$-\operatorname{sgn} \int_a^b \frac{dx}{m(x)} \cdot \left[\frac{h(b)}{m(a)} - \frac{h(a)}{m(b)}\right] = 1$$

ist. Ist dagegen
$$\operatorname{sgn} r = -\operatorname{sgn} p;$$

XXIX) $$-\operatorname{sgn} \int_a^b \frac{dx}{m(x)} \cdot \left[\frac{h(b)}{m(a)} - \frac{h(a)}{m(b)}\right] = -1,$$

so ändre man die Vorzeichen der Glieder von XXVI), dr
dem gemäss die Ungleichheitszeichen um, und man wird
kennen, dass das weniger willkommene Glied
$$\operatorname{sgn} p \frac{\int_a^b \frac{h(a+b-x)\, m(a+b-x)}{m(x)}\, dx}{\int_a^b \frac{dx}{m(x)}}$$
sich vorn an XXII) anschliesst.

32. Nur die erste Ergänzung von XXII) scheint
wichtig und wir wollen sie hier ausführlich anschreiben:

XXX) $$\operatorname{sgn} p \frac{\int_a^b h(x)\, dx}{\int_a^b \frac{dx}{m(x)}} > \operatorname{sgn} p \int_a^b h(x)\, m(x)\, dx$$
$$> \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a} \int_a^b h(x)\, dx \int_a^b m(x)\, dx.$$

Wir sind ihrer Geltung auf Grund der bisherigen E
wicklung nur sicher, wenn XXVIII) und die bei 29. gemach
Voraussetzungen gelten, dazu noch die in 25. für $f(x)$ und $g$

gemachten und nun gemäss 31. auf $h(x)$ und $m(x)$ zu übertragenden, so dass nun also $f(x)$, $m(x)$ und $h(x) \cdot m(x)$ monoton sein müssen. Diese Einschränkungen bilden die Schwäche von XXX).

33. Unser erster Versuch der Vervollständigung unserer Formel ist daher nur theilweise gelungen und lässt den Wunsch rege, eine bessere Ergänzung ausfindig zu machen.

34. Man könnte auf den Gedanken kommen, Ungleichungen wie

$$\text{XXXI)} \quad \begin{aligned} &\int_a^b \frac{f(x)^2 + g(x)^2}{2}\, dx > \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \\ &\int_a^b \left(\frac{f(x) + g(x)}{2}\right)^2 dx > \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx, \end{aligned}$$

welche zunächst für positive $f(x)$, $g(x)$, $dx$ gelten, zu diesem Zwecke heranzuziehen, aber dergleichen würde wenig Verdienst haben, denn diese neuherangezogenen Ungleichungen gelten schon für die Differentiale, stellen also keine den Integralen eigenthümlichen Sätze vor, sondern sind einfache Integrationen bekannter Sätze über integralfreie Funktionen.

Das Gute an unserer Ungleichung XXII) ist eben, dass sie nicht für die Differentiale gilt, sondern den Integralen eigenthümlich ist. Werthvoll wird also die Vervollständigung nur sein, wenn sie gleichen Charakter hat.

## III. Capitel.

35. Die im I. Capitel angestellten Betrachtungen sind einer Verallgemeinerung fähig.

36. Es seien $f(x)$ und $F(x)$ für ein von $a$ bis $b$ laufendes $x$ endliche, eindeutige monotone und zwar zunächst nie abnehmende Funktionen, und es sei

$$\text{XXXII)} \quad \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b F(x)\, dx, \qquad \text{dabei } b > a.$$

Es sei ferner $\xi$ ein Werth von $x$ im Intervall und

$$\text{XXXIII)}\quad \begin{aligned} F(x) &\leqq f(x) \quad \text{für jedes } x \text{ von } a \text{ bis } \xi, \\ F(x) &\geqq f(x) \quad \text{für jedes } x \text{ von } \xi \text{ bis } b, \end{aligned}$$

wobei es für das Folgende ganz gleichgiltig ist, ob die Grei werthe $x = a$, $x = b$ mit einbezogen werden oder nicht u was man für $x = \xi$ festsetzt.

37. Wenn $\xi$ in einem Intervall liegt, dessen sämmtli Werthe $F(x) = f(x)$ machen, so kann jeder beliebige We dieses Intervalls die Stelle von $\xi$ vertreten.

38. Das Bestehen der Gleichungen

$$\int_a^\xi f(x)\,dx = \int_a^\xi F(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_\xi^b f(x) = \int_\xi^b F(x),$$

von denen (mittels XXXII) eine die andere nach sich zie soll ausgeschlossen sein.

Das Bestehen dieser Gleichungen würde die Identität Funktionen an allen Stetigkeitsstellen nach sich zieh

39. Es werden also die Werthe der beiden Funktioı sicher weder im Intervall von $a$ bis $\xi$, noch in dem von $\xi$ bi überall gleich sein.

40. Denkt man sich die Integrale XXXII) in bekann Weise durch Flächenstücke repräsentirt, so ist der Inhalt beiden gleich, beim Integral $\int_a^b F(x)\,dx$ aber mehr nach einen Seite ($b$) verschoben.

41. Unter den gemachten Voraussetzungen ist nun:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b F(x)\,dx$$

$$\text{XXXIV)} = \int_a^\xi [f(x) - F(x)]\,dx + \int_\xi^b [f(x) - F(x)]\,dx = 0$$

oder

$$\int_a^\xi [f(x) - F(x)]\,dx = \int_\xi^b [F(x) - f(x)]\,dx,$$

wobei rechts und links unter dem Integralzeichen positive, höchstens zu Null werdende Funktionen (in den eckigen Klammern) stehen.

Weiter gilt:

$$\text{XXXV)}\quad \begin{aligned} &\int_a^\xi [f(x) - F(x)]\, g(x) \cdot dx \leqq g(\xi) \int_a^\xi [f(x) - F(x)]\, dx \\ &= g(\xi) \int_\xi^b [F(x) - f(x)]\, dx \leqq \int_\xi^b [F(x) - f(x)]\, g(x)\, dx. \end{aligned}$$

42. Das erste Gleichheitszeichen gilt nur für den Fall, dass $g(x)$ im Intervall von $a$ bis $\xi$ constant gleich $g(\xi)$, das zweite nur, wenn es im Intervall von $\xi$ bis $b$ constant gleich $g(\xi)$ ist.

43. Bezüglich der Bedeutung von $g(\xi)$ vergleiche man die Bemerkungen unter 17. Wird, um die Ungleichungen stringenter zu machen, die gelegentlich sich bietende Möglichkeit, für $g(\xi)$ zwei verschiedene Werthe zu setzen, ergriffen, so ist in der letzten Formel das mittlere Gleichheitszeichen durch $<$ zu ersetzen.

44. Durch Subtraktion des ersten Gliedes folgt aus unserer Ungleichung — nach Weglassung der beiden Mittelglieder —

$$0 \leqq \int_\xi^b [F(x) - f(x)]\, g(x)\, dx - \int_a^\xi [f(x) - F(x)]\, g(x)\, dx$$

$$\text{XXXVI)}\quad 0 \leqq \int_a^b F(x)\, g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \qquad \text{oder}$$

$$\int_a^b F(x)\, g(x)\, dx \geqq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Das Gleichheitszeichen kann nur gelten, wenn $g(x)$ im ganzen Intervall von $a$ bis $b$ constant gleich $\xi$ ist.

45. Bei Umkehr der Grenzen dreht sich das Ungleichheitszeichen um; beide Formen der Ungleichung sind zusammengefasst unter

$$\text{XXXVII)}\quad \operatorname{sgn}(b-a) \int_a^b F(x)\, g(x)\, dx \geqq \operatorname{sgn}(b-a) \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

46. Gilt der Satz für $f(x)$ und $F(x)$, so gilt er auch für $f(x) - c$ und $F(x) - c$, wodurch die Beschränkung $f(a) > 0$ wegfällt; gilt er für $f(x)$, $g(x)$ und $F(x)$, so gilt er auch für $-f(x)$, $-g(x)$ und $-F(x)$, d. h. auch für Funktionen, die niemals zunehmen. Und: Wie $F(x)$ eine Funktion war, welche (mindestens stellenweise) grössere Werthe als $f(x)$ aufweist in jenem von $\xi$ ausgehenden Intervall, in welchem $f(x)$ selbst grössere Werthe aufweist als im andern, so ist auch $-F(x)$ eine Funktion von analogem Verhalten gegenüber $-f(x)$, oder, um zur Beförderung des Verständnisses den Sachverhalt noch in einer andern Weise auszudrücken: Es ist die durch $-\int_a^b F(x)\,dx$ ausgedrückte Fläche im Vergleich mit der durch $-\int_a^b f(x)\,dx$ ausgedrückten etwas einseitiger massirt nach der Seite, nach der schon die Fläche $\int_a^b f(x)\,dx$ selbst stärker massirt ist. Für den Fall negativer Ordinaten und Flächen sind hier die Begriffe grösser — kleiner im algebraischen, nicht im absoluten Sinne zu nehmen, wozu die geometrische Anschauung verleiten könnte.

47. Der Fall $f(x) = \text{const.}$, bei dem die Fläche, die zu $y = f(x)$ gehört, nach keiner der beiden Seiten stärker massirt ist als nach der andern, kann — als in früheren Entwickelungen, des I. Capitels, bereits erledigt — hier ausgeschlossen werden.

48. Wird nur an Stelle des $g(x)$ die negative Funktion $-g(x)$ gesetzt, so dass es in eine niemals steigende Funktion übergeht, so ist das Ungleichheitszeichen umzudrehen, oder, um auch diesen Fall zu umfassen, ist unserer Ungleichung noch der Factor $\operatorname{sgn}[g(b) - g(a)]$ beizufügen; und ähnlich ist, um auch noch die mögliche Umkehr des Charakters von $f(x)$ und $F(x)$ zu berücksichtigen, der Factor $\operatorname{sgn}[f(b) - f(a)]$ hinzuzufügen, unter Berücksichtigung davon, dass

$$\text{XXXVIII)} \quad \operatorname{sgn}[f(b) - f(a)] = \operatorname{sgn}[F(b) - F(a)]$$

ist. Letzteres erhellt daraus, dass nur folgende zwei Möglichkeiten gegeben sind:

$$\text{XXXIX)}\quad \begin{array}{ll} F(b) \geqq f(b) > f(a) \geqq F(a) & \text{oder} \\ F(b) \leqq f(b) < f(a) \leqq F(a). & \end{array}$$

49. Also schliesslich gilt, mittels einer früher (XVI) schon eingeführten Abkürzung geschrieben:

$$\text{XL)}\quad \operatorname{sgn} p \int_a^b F(x)\, g(x)\, dx > \operatorname{sgn} p \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

eine Ungleichung, die sich der Ungleichung XXII), die wir ergänzen wollen, vorne anschliessen lässt, und aus der nun jeder sich selbst die weitere

$$\text{XLI)}\quad \operatorname{sgn} p \int_a^b f(a+b-x)\, g(x)\, dx > \operatorname{sgn} p \int_a^b F(a+b-x)\, g(x)\, dx$$

ableiten mag, die sich an die nemliche Ungleichung hinten anschliessen lässt.

Vollständig angeschrieben hat dann unser Satz die Gestalt:

$$\text{XLII)}\quad \begin{aligned} &\operatorname{sgn} p \int_a^b F(x)\, g(x)\, dx > \operatorname{sgn} p \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \\ &\geqq \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a} \int_a^b f(x) \int_a^b g(x)\, dx \\ &\geqq \operatorname{sgn} p \int_a^b f(a+b-x)\, g(x)\, dx \\ &> \operatorname{sgn} p \int_a^b F(a+b-x)\, g(x)\, dx. \end{aligned}$$

50. Es seien hier, um von dem Charakter der Kurven $y = f(x)$ und $y = F(x)$ keine zu engbegrenzte Vorstellung aufkommen zu lassen, in Fig. 4 — 11 eine Anzahl Beispielsformen in Zeichnung vorgeführt. Die dünnere Linie repräsentirt immer $f(x)$, die dickere $F(x)$. Die Figuren dürften natürlich statt rechts auch anders gegen die Ordinatenaxe liegen.

*Fig. 4*

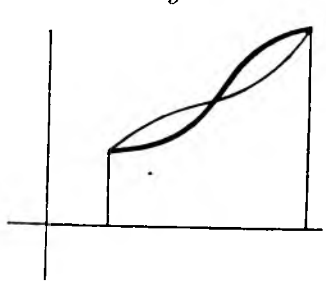


*Fig. 5*

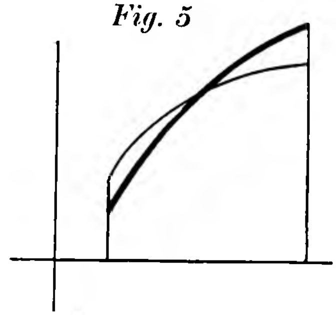


*Fig. 6*

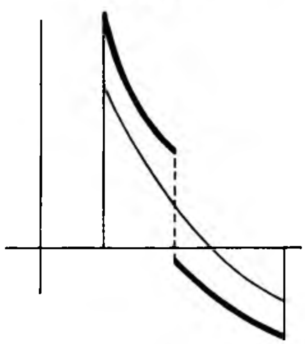


*Fig. 7*

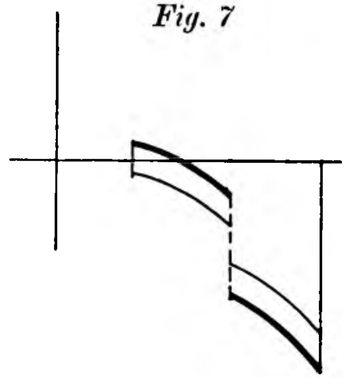


*Fig. 8*

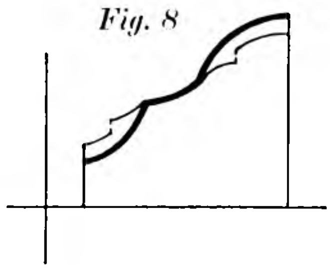


*Fig. 9*

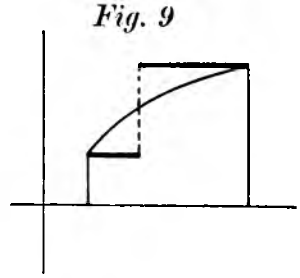


*Fig. 10*

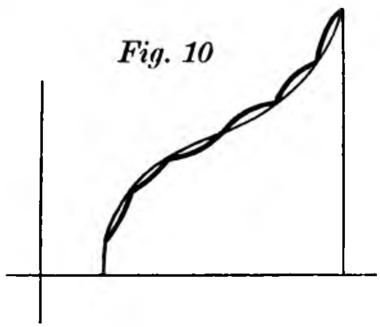


*Fig. 11*

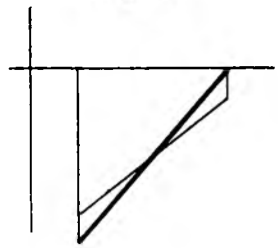
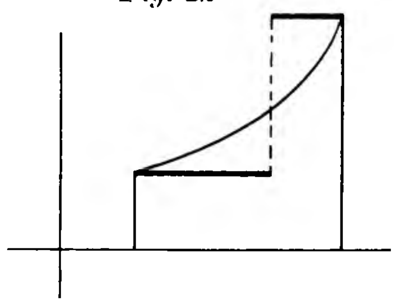


*Fig. 12*



51. Man kann nun versuchen, an Stelle von $F(x)$ besonders primitive Funktionen zu setzen. Z. B. man kann $F(x)$ auf der einen Seite von $\xi$ constant gleich $F(a)$, auf der andern constant gleich $F(b)$ sein lassen[1]) (s. Fig. 12). Die Forderung XXXII) lautet dann geometrisch eingekleidet: Das Rechteck mit Grundlinie $\xi - a$ und Höhe $a$ und das Rechteck mit Grundlinie $b - \xi$ und Höhe $b$ müssen zusammen genommen den nemlichen Inhalt haben, wie das von der Kurve $y = f(x)$ und durch seitliche Ordinaten begrenzte Flächenstück mit der Grundlinie $b - a$.

[1]) Für den Fall, dass $f(x)$ im Intervall das Vorzeichen nicht wechselt, lässt sich auch die zu besonders einfachen Formeln führende Annahme machen, dass $F(x)$ auf der einen Seite von $\xi$ constant gleich Null, auf der andern etwa gleich dem äussersten Werthe von $f(x)$ sei.

52. Dass stets ein $\xi$ zwischen $a$ und $b$ vorhanden ist, welches unseren Anforderungen genügt, ergibt sich leicht. Denn für eine monotone Funktion $f(x)$, $a < b$, $f(a) < f(b)$ gilt offenbar:

$$\text{XLIII)} \qquad f(a)(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < f(b)(b-a)$$

allgemeiner, wenn man

$$\text{XLIV)} \qquad \operatorname{sgn}\{[f(b)-f(a)][b-a]\} = \operatorname{sgn} q' \text{ setzt:}$$

$$\operatorname{sgn} q' \cdot f(a)(b-a) < \operatorname{sgn} q' \cdot \int_a^b f(x)\,dx < \operatorname{sgn} q' f(b)(b-a)$$

d. h. $\int_a^b f(x)\,dx$ liegt unter allen Umständen zwischen $f(a)(b-a)$ und $f(b)(b-a)$, sofern nicht in Folge von $f(a) = f(b)$ oder $a = b$ alle drei Glieder gleiche Werthe bekommen.

53. Das Integral lässt sich daher — auch im Fall des erwähnten Gleichwerdens — stets mittels positiver echter Brüche $\varkappa$ und $\lambda$, deren Summe gleich 1 ist, auf die Form bringen

$$\text{XLV)} \quad J = \int_a^b f(x)\,dx = f(a)(b-a)\cdot\lambda + f(b)(b-a)\cdot\varkappa,$$
$$(\lambda + \varkappa = 1)$$

oder mit Zuhilfenahme eines zwischen $a$ und $b$ liegenden Werthes $\xi$, der

$$\xi - a = (b-a)\lambda, \qquad b - \xi = (b-a)\varkappa$$

macht, auf die Form:

$$\text{XLVI)} \quad J = \int_a^b f(x)\,dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b-\xi)$$

Aus XLVI) folgt

$$\text{XLVII)} \qquad \xi = \frac{[f(b)\,b - f(a)\,a] - J}{f(b) - f(a)}$$

als vollständig bekannter Werth, wenn $J = \int_a^b f(x)\,dx$ bekannt ist.

54. Offenbar befriedigt das System der beiden geraden Strecken

$$\text{XLVIII)}\qquad \begin{aligned} F(x) &= f(a) = y, \quad (a \leqq x < \xi) \\ F(x) &= f(b) = y, \quad (\xi \leqq x \leqq b) \end{aligned}$$

vollkommen die an eine Funktion $F(x)$ zu stellenden Anforderungen.

Es gilt daher:

$$\text{IL)}\qquad \begin{aligned} &\operatorname{sgn} p \int_a^\xi f(a)\, g(x)\, dx + \operatorname{sgn} p \int_\xi^b f(b)\, g(x)\, dx \\ &\qquad > \operatorname{sgn} p \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \end{aligned}$$

oder schliesslich, wenn alle nun erwiesenen Ungleichungen und eine letzte leicht zu erweisende, hinten sich anschliessende in eine Reihe gestellt werden:

$$\text{L)}\qquad \begin{aligned} &\operatorname{sgn} p \left[ f(a) \int_a^\xi g(x)\, dx + f(b) \int_\xi^b g(x)\, dx \right] > \operatorname{sgn} p \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \\ &\geqq \frac{\operatorname{sgn} p}{b-a} \int_a^b f(x) \int_a^b g(x)\, dx \geqq \operatorname{sgn} p \int_a^b f(a+b-x)\, g(x)\, dx \\ &> \operatorname{sgn} p \left[ f(b) \int_a^{a+b-\xi} g(x)\, dx + f(a) \int_{a+b-\xi}^b g(x)\, dx \right], \end{aligned}$$

wobei also $f(x)$, $g(x)$ eindeutig, endlich und monoton im Intervall $a$ bis $b$ sind, und

$$p = [f(b) - f(a)]\, [g(b) - g(a)]\, [b - a]$$

$$\xi = -\frac{\int_a^b f(x)\, dx - [f(b)\, b - f(a)\, a]}{f(b) - f(a)} = a + \frac{f(b)(b-a) - \int_a^b f(x)\, dx}{f(b) - f(a)}$$

zu setzen ist.

55. Schlussbemerkungen. Wenn $F$, $f$ und $g$ „Stufenfunktionen" werden (in der Art, wie $F$ in 51. eine „zweistufige" Funktion wurde), so verwandeln sich unsere Ungleich-

ungen XLII) in die integralfreie Form: $\operatorname{sgn} p \cdot \sum_0^{n-1} F_i \cdot g_i \Delta x_i \geqq \operatorname{sgn} p \cdot \sum_0^{n-1} f_i g_i \Delta x_i$ etc.,[1]) für den Fall constanter $\Delta x_i$ in: $\operatorname{sgn} q \Sigma F_i g_i \geqq \operatorname{sgn} q \Sigma f_i g_i$ etc.[2]) ($\Sigma F_i = \Sigma f_i$; die $F_i$ und $f_i$ monotone Grössenreihen, die Reihe $F_i - f_i$ nur einen Zeichenwechsel enthaltend etc.). Diese Summenformel entsteht hier sozusagen als die Tochter der Integralformel; sie lässt sich aber auch ohne den Umweg übers Integral beweisen und tritt dann als Schwester ihr zur Seite; ja man könnte sie sogar als die Mutter der Integralformel betrachten. (Vgl. A. Pringsheim in diesen Berichten Bd. 30, S. 212.) Unser Beweis in 52. bleibt — was eine Art Güteprobe für ihn darstellt, — auch für die Summenformel anwendbar, wenn in ihm ebenfalls alles integralische ins summarische verwandelt wird.

56. Da die am häufigsten vorkommenden Funktionen sich in Intervalle monotonen Charakters zerlegen lassen, so werden mannichfaltige Anwendungen unsrer Sätze sich ergeben. Eine Menge auch von integralfreien Ungleichheiten zwischen bekannteren Funktionen werden sich mit Leichtigkeit ableiten lassen, welche auf anderem Wege kaum immer so rasch und bequem gefunden werden. Man kann die Factoren $f(x)$, $g(x)$ einander gleich oder gleich Potenzen der nemlichen Function setzen, es lassen sich gewisse Resultate auf Produkte von mehr als zwei Faktoren verallgemeinern, und durch wiederholte Anwendung der Sätze Näherungsformeln für $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ geben mit Hilfe von Integralen über die einzelnen Faktoren etc. Die Bedingung der Endlichkeit der Funktionen wird bis zu einem gewissen Grade fallen gelassen werden können.

---

[1]) Unter $x_0, x_1, \ldots x_n$ sind verstanden die der Grösse nach in eine Reihe geordneten drei Reihen von Stufenendenabscissen $\Phi_0, \Phi_1 \ldots \Phi_\lambda$; $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_\mu$; $\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_\nu$ von $F, f, g$ resp. und zwar in steigender oder fallender Anordnung, je nachdem $x_0 = a$ kleiner oder grösser als $x_n = b$ ist.

[2]) Ueber $q$ vergl. 23.