Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXII. Jahrgang 1902.

München.
Verlag der k. Akademie.
1903.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber das Pascal'sche Sechseck.

Von **F. Lindemann.**

(Eingelaufen 7. Juni.)

Es gibt eine ausserordentlich grosse Zahl von Lagenbeziehungen zwischen den Punkten und Linien der vollständigen Figur des Pascal'schen Sechsecks. Sie beziehen sich meistens auf die Steiner'schen und Kirkman'schen Punkte, in denen sich die Pascal'schen Linien zu dreien schneiden, und auf die Gruppirung dieser Punkte auf gewissen anderen Geraden. Im Folgenden soll eine Lagenbeziehung abgeleitet werden, die sich auf einfache Schnittpunkte der Pascal'schen Linien mit solchen Verbindungslinien Pascal'scher Punkte bezieht, die nicht selbst Pascal'sche Linien sind.

Wir bezeichnen die sechs Punkte des Kegelschnittes in üblicher Weise mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, ferner die Verbindungslinie der Punkte 1 und 2 z. B. durch das Symbol $1 - 2$ und den Schnittpunkt der Linien $1 - 2$ und $3 - 4$ durch das Symbol

$$(12 - 34).$$

Auf einer Pascal'schen Linie befinden sich dann z. B. die drei Pascal'schen Punkte

$$(12 - 34), \quad (35 - 26), \quad (46 - 15).$$

Nach dem Vorgange von Salmon bezeichnen wir diese Linie durch das Symbol

$$\left\{ \begin{matrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \end{matrix} \right\},$$

das mit den Symbolen

$$\left\{\begin{matrix} 35 \cdot 46 \cdot 12 \\ 26 \cdot 15 \cdot 34 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 46 \cdot 35 \,.\, 12 \\ 15 \cdot 26 \cdot 34 \end{matrix}\right\}$$

gleichbedeutend ist; in jeder der beiden Horizontalreihen dieses Symbols muss jeder der sechs Punkte gerade einmal vorkommen. Diese 60 Pascal'schen Linien schneiden sich zu dreien in den 45 Steiner'schen Punkten; z. B. die drei Linien

$$\left\{\begin{matrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 34 \cdot 26 \cdot 15 \\ 56 \cdot 14 \cdot 23 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 56 \cdot 14 \cdot 23 \\ 12 \cdot 35 \cdot 46 \end{matrix}\right\}$$

gehen durch einen Steiner'schen Punkt, den wir mit Salmon durch das Symbol

$$\left\{\begin{matrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \\ 56 \,.\, 14 \cdot 23 \end{matrix}\right\}$$

bezeichnen. Jede der Ziffern 1, ... 6 steht hier in jeder Horizontal- und Vertical-Reihe je einmal; vertauscht man die Horizontalreihen unter einander oder die Verticalreihen unter einander, so bleibt der so bezeichnete Punkt ungeändert.

Ausserdem schneiden sich die 60 Pascal'schen Linien zu je dreien in den 45 Kirkman'schen Punkten, z. B. die drei Linien

$$\left\{\begin{matrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 34 \cdot 26 \cdot 15 \\ 56 \cdot 13 \cdot 24 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 56 \cdot 13 \cdot 24 \\ 12 \cdot 46 \cdot 35 \end{matrix}\right\}$$

in einem Punkte, den wir (wieder mit Salmon) durch das Symbol

$$\left\{\begin{matrix} \overline{12} \cdot 35 \cdot 46 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \\ 56 \cdot 13 \cdot 24 \end{matrix}\right\}$$

bezeichnen, wobei wieder die Anordnung der Verticalreihen und der Horizontalreihen je unter sich gleichgültig ist. Derselbe Punkt würde überdies durch die Symbole

$$\left\{\begin{matrix} \overline{12} \cdot 46 \cdot 35 \\ 56 \cdot 13 \cdot 24 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \end{matrix}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{matrix} \overline{34} \cdot 26 \cdot 15 \\ 56 \cdot 13 \cdot 24 \\ 12 \cdot 46 \cdot 35 \end{matrix}\right\}$$

bezeichnet werden; denn die Linien

$$\left\{\begin{matrix} 12\cdot 46\cdot 35 \\ 56\cdot 13\cdot 24 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 56\cdot 13\cdot 24 \\ 34\cdot 26\cdot 15 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 34\cdot 26\cdot 15 \\ 12\cdot 35\cdot 46 \end{matrix}\right\}$$

oder

$$\left\{\begin{matrix} 34\cdot 26\cdot 15 \\ 56\cdot 13\cdot 24 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 56\cdot 13\cdot 24 \\ 12\cdot 46\cdot 35 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 12\cdot 46\cdot 35 \\ 34\cdot 15\cdot 26 \end{matrix}\right\}$$

sind vor den zuerst gegebenen drei Linien nicht verschieden. In dem Symbole des Kirkman'schen Punktes ist eine Verticalreihe vor den beiden anderen ausgezeichnet, indem nur diese alle sechs Punkte ohne Auslassung und ohne Wiederholung enthält; diese Verticalreihe ist durch einen darüber gesetzten horizontalen Strich markirt.

Auf jeder Pascal'schen Linie gibt es drei solche Kirkman'sche Punkte, z. B. auf der Linie

$$\left\{\begin{matrix} 12\cdot 34\cdot 56 \\ 45\cdot 16\cdot 23 \end{matrix}\right\}$$

die Punkte

$$\left\{\begin{matrix} \overline{12}\cdot 34\cdot 56 \\ 45\cdot 16\cdot 23 \\ 36\cdot 24\cdot 15 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 12\cdot \overline{34}\cdot 56 \\ 45\cdot 16\cdot 23 \\ 13\cdot 25\cdot 46 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 12\cdot 34\cdot \overline{56} \\ 45\cdot 16\cdot 23 \\ 26\cdot 35\cdot 14 \end{matrix}\right\}.$$

Ferner liegen zwanzigmal drei Kirkman'sche Punkte mit einem Steiner'schen Punkte auf einer Cayley-Salmon'schen Geraden, und zwar z. B. die drei Punkte

$$\left\{\begin{matrix} \overline{12}\cdot 35\cdot 46 \\ 45\cdot 26\cdot 13 \\ 36\cdot 15\cdot 24 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 15\cdot \overline{34}\cdot 26 \\ 24\cdot 16\cdot 35 \\ 13\cdot 25\cdot 46 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} 13\cdot 24\cdot \overline{56} \\ 46\cdot 15\cdot 23 \\ 35\cdot 26\cdot 14 \end{matrix}\right\}$$

mit dem Steiner'schen Punkte

$$\left\{\begin{matrix} 12\cdot 34\cdot 56 \\ 45\cdot 16\cdot 23 \\ 36\cdot 25\cdot 14 \end{matrix}\right\}.$$

Die Beweise für diese und viele andere Sätze werden bekanntlich am leichtesten mittelst des Desargues'schen Satzes über perspectivisch liegende Dreiecke geführt,[1]) der auch die Grundlage der folgenden Betrachtung bildet.

Es seien zwei Dreiecke Δ_1 und Δ_2, bezw. durch die folgenden Linien gebildet:

$$\Delta_1 : l_1 \text{ oder } 1-2, \qquad l_2 \text{ oder } 3-4, \qquad l_3 \text{ oder } 5-6;$$

$$\Delta_2 : \lambda_1 = \begin{Bmatrix} 12\cdot35\cdot46 \\ 45\cdot16\cdot23 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{Bmatrix} 16\cdot35\cdot42 \\ 34\cdot26\cdot15 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{Bmatrix} 13\cdot56\cdot24 \\ 46\cdot23\cdot15 \end{Bmatrix};$$

Die Seiten der Dreiecke mögen einander so zugeordnet werden, wie sie hier unter einander stehen.

Entsprechende Seiten der Dreiecke Δ_1 und Δ_2 schneiden sich dann in den Pascal'schen Punkten

$$(12-45), \quad (34-16), \quad (23-56),$$

welche sich auf der Pascal'schen Linie

$$L = \begin{Bmatrix} 12\cdot34\cdot56 \\ 45\cdot16\cdot23 \end{Bmatrix}$$

befinden. Diese beiden Dreiecke liegen also perspectivisch, und es müssen auch die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt gehen. Als Ecken von Δ_1 haben wir die Pascal'schen Punkte

$$(34-56), \quad (56-12), \quad (12-34),$$

und als zugeordnete Ecken von Δ_2 zwei mit P und Q bezeichnete Punkte und einen Pascal'schen Punkt, nemlich

$$(15-24), \qquad P, \qquad Q,$$

wobei also P den Schnittpunkt der Linien

$$\begin{Bmatrix} 13\cdot56\cdot24 \\ 46\cdot23\cdot15 \end{Bmatrix} \text{ und } \begin{Bmatrix} 12\cdot35\cdot46 \\ 45\cdot16\cdot23 \end{Bmatrix}$$

[1]) Vgl. die zahlreichen Anwendungen dieser Beweismethode bei P. Veronese, Nuovi teoremi sull' Hexagrammum mysticum, Atti della R. Accademia dei Lincei; Ser III, classe di sc. fis., mat. e naturw. 1877 und Wedekind, Lagenbeziehungen bei ebenen, perspectivischen Dreiecken, Math. Annalen, Bd. 16, 1879.

oder kurz den Punkt

$$P = \left[\begin{Bmatrix} 13 \cdot 56 \cdot 24 \\ 46 \cdot 23 \cdot 15 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 45 \cdot 16 \cdot 23 \end{Bmatrix} \right]$$

bezeichnet, und ebenso Q den Punkt

$$Q = \left[\begin{Bmatrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 45 \cdot 16 \cdot 23 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 16 \cdot 35 \cdot 42 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \end{Bmatrix} \right].$$

Die Verbindungslinie der Ecke $(34 - 56)$ von Δ_1 mit der zugeordneten Ecke $(15 - 24)$ von Δ_2 ist die Pascal'sche Linie

$$\Lambda = \begin{Bmatrix} 34 \cdot 15 \cdot 26 \\ 56 \cdot 24 \cdot 13 \end{Bmatrix},$$

diese geht also durch den Schnittpunkt der Linien

$$[P - (56 - 12)] \text{ und } [Q - (12 - 34)],$$

den wir zur Abkürzung als Punkt E bezeichnen.

Um zu einem solchen Punkt E zu gelangen, theilt man die sechs gegebenen Punkte in drei Paare, etwa: $1 - 2$, $3 - 4$, $5 - 6$ (was auf 15 Arten geschehen kann); dadurch ist die zu benutzende und oben definierte Pascal'sche Linie L nicht eindeutig bestimmt, kann vielmehr durch eine der folgenden ersetzt werden:

$$L' = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 56 \cdot 34 \\ 46 \cdot 23 \cdot 15 \end{Bmatrix}, \quad L'' = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 56 \cdot 34 \\ 35 \cdot 24 \cdot 16 \end{Bmatrix}, \quad L''' = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 56 \cdot 34 \\ 45 \cdot 13 \cdot 26 \end{Bmatrix},$$

$$L^{(4)} = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 56 \cdot 34 \\ 36 \cdot 24 \cdot 15 \end{Bmatrix}, \quad L^{(5)} = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 56 \cdot 34 \\ 46 \cdot 13 \cdot 25 \end{Bmatrix},$$

$$L^{(6)} = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 56 \cdot 34 \\ 35 \cdot 14 \cdot 26 \end{Bmatrix}, \quad L^{(7)} = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 56 \cdot 34 \\ 36 \cdot 14 \cdot 25 \end{Bmatrix}.$$

Hat man L unter diesen acht Linien ausgewählt, so gibt es zu jeder noch drei Linien Λ; bei der oben gewählten war das Paar $1 - 2$ ausgezeichnet; mit ihr gleichberechtigt sind die beiden:

$$\Lambda_1 = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 56 \cdot 42 \cdot 31 \end{Bmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 53 \cdot 64 \\ 34 \cdot 62 \cdot 51 \end{Bmatrix}.$$

Durch L und Λ ist dann λ_1 eindeutig bestimmt, ebenso λ_2 und λ_3, denn die zu λ_1 in Δ_2 gegenüber liegende Ecke ist durch die Schnittpunkte der Linien l_2 und l_3 mit L, d. h. durch die Punkte (23 — 56) und (34 — 16) vollkommen bestimmt. Im Ganzen gibt es hiernach

$$15 \cdot 8 \cdot 3 = 360$$

Punkte E; auf jeder Pascal'schen Linie befinden sich also sechs solche Punkte.

Gehen wir z. B. von der Pascal'schen Linie Λ aus, wo wieder

$$\Lambda = \begin{Bmatrix} 34 \cdot 15 \cdot 26 \\ 56 \cdot 24 \cdot 13 \end{Bmatrix}$$

gewählt wurde, so wird auf ihr ein Punkt E bestimmt sein, sobald noch eine zugehörige Linie L passend gewählt ist; das kann aber in der That auf sechs verschiedene Arten geschehen; und zwar findet man je zwei Linien L für jede der drei noch möglichen Theilungen der sechs Punkte in drei Paare:

$$\begin{array}{rl} \mathrm{I} & 34,\ 56,\ 12, \\ \mathrm{II} & 15,\ 24,\ 36, \\ \mathrm{III} & 26,\ 13,\ 45. \end{array}$$

Für I ergibt sich:

$$L_I = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 34 \cdot 56 \\ 45 \cdot 16 \cdot 23 \end{Bmatrix}, \quad L'_I = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 34 \cdot 56 \\ 36 \cdot 25 \cdot 14 \end{Bmatrix};$$

ebenso:

$$L_{II} = \begin{Bmatrix} 36 \cdot 15 \cdot 24 \\ 45 \cdot 32 \cdot 61 \end{Bmatrix}, \quad L'_{II} = \begin{Bmatrix} 36 \cdot 15 \cdot 24 \\ 12 \cdot 46 \cdot 35 \end{Bmatrix};$$

$$L_{III} = \begin{Bmatrix} 45 \cdot 26 \cdot 13 \\ 12 \cdot 35 \cdot 46 \end{Bmatrix}, \quad L'_{III} = \begin{Bmatrix} 45 \cdot 26 \cdot 13 \\ 36 \cdot 14 \cdot 25 \end{Bmatrix}.$$

Je zwei zusammengehörige Linien schneiden sich in einem Steiner'schen Punkte; diese Punkte nennen wir S_I, S_{II}, S_{III}, nemlich:

$$S_I = \begin{Bmatrix} 12 \cdot 34 \cdot 56 \\ 45 \cdot 16 \cdot 23 \\ 36 \cdot 25 \cdot 14 \end{Bmatrix}, \quad S_{II} = \begin{Bmatrix} 36 \cdot 15 \cdot 24 \\ 45 \cdot 32 \cdot 61 \\ 12 \cdot 46 \cdot 35 \end{Bmatrix}, \quad S_{III} = \begin{Bmatrix} 45 \cdot 26 \cdot 13 \\ 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 36 \cdot 14 \cdot 25 \end{Bmatrix}.$$

Den drei Symbolen ist die erste Verticalreihe gemeinsam; ihnen beigeordnet ist ein vierter Punkt

$$S_{IV} = \begin{Bmatrix} 34 \cdot 56 \cdot 12 \\ 15 \cdot 24 \cdot 36 \\ 26 \cdot 13 \cdot 45 \end{Bmatrix},$$

dessen Symbol dieselbe Verticalreihe enthält.

Vertauschen wir entweder 4 mit 5 oder 3 mit 6 oder 1 mit 2 und ersetzen dem entsprechend $\varLambda$ bes. durch

$$\varLambda''' = \begin{Bmatrix} 35 \cdot 14 \cdot 26 \\ 46 \cdot 25 \cdot 13 \end{Bmatrix}, \quad \varLambda'' = \begin{Bmatrix} 46 \cdot 15 \cdot 23 \\ 35 \cdot 24 \cdot 16 \end{Bmatrix}, \quad \varLambda' = \begin{Bmatrix} 34 \cdot 25 \cdot 16 \\ 56 \cdot 14 \cdot 23 \end{Bmatrix},$$

so werden statt der Punkte S_I, S_{II}, S_{III} bes. die Punkte

$$\begin{array}{llll} S_{II}, & S_I, & S_{IV} & \text{für } \varLambda''' \\ S_{III}, & S_{IV}, & S_I & \quad\text{„}\ \varLambda'' \\ S_{IV}, & S_{III}, & S_{II} & \quad\text{„}\ \varLambda' \end{array}$$

benutzt. Je vier Linien $\varLambda$ führen also hierbei auf dieselbe Gruppe von vier Steiner'schen Punkten, wie es sein muss, da es 60 Pascal'sche Linien und nur 15 solche Gruppen von Steiner'schen Punkten gibt.

Zu jedem Steiner'schen Punkte gehört bekanntlich ein conjugirter; er ist conjugirter Pol desselben sowohl in Bezug auf den Kegelschnitt, der die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 enthält, als in Bezug auf einen der zehn zugehörigen Bauer'schen Kegelschnitte;[1]) man erhält ihn, indem man Horizontal- und Verticalreihen im Symbole des gegebenen Steiner'schen Punktes vertauscht. Zu S_{IV} ist so der Steiner'sche Punkt

$$S'_{IV} = \begin{Bmatrix} 34 \cdot 15 \cdot 26 \\ 56 \cdot 24 \cdot 13 \\ 12 \cdot 36 \cdot 45 \end{Bmatrix}$$

conjugirt; er befindet sich auf der Linie $\varLambda$, von der wir ausgingen; ebenso liegen die zu S_{III}, S_{II}, S_I conjugirten Punkte

---

[1]) Vgl. G. Bauer, Ueber das Pascal'sche Theorem, Abhandlungen d. k. bayer. Akademie, II. Classe, Bd. 9, 1874.

bez. auf den Linien Λ''', Λ'', Λ'. Diese vier conjugirten Punkte befinden sich überdies auf einer sogenannten Steiner'schen Geraden.

Bringt man die Linien L in anderer Anordnung zum Schnitte, so ergeben sich drei Kirkman'sche Punkte, deren Symbole eine gemeinsame Verticalreihe haben, nemlich

$$(L_I - L_{II}) = \left\{\begin{matrix} \overline{45} \cdot 66 \cdot 23 \\ 12 \cdot 34 \cdot 56 \\ 36 \cdot 15 \cdot 24 \end{matrix}\right\}, \qquad (L'_{II} - L_{III}) = \left\{\begin{matrix} \overline{12} \cdot 46 \cdot 35 \\ 36 \cdot 15 \cdot 24 \\ 45 \cdot 13 \cdot 26 \end{matrix}\right\},$$

$$(L'_I - L'_{III}) = \left\{\begin{matrix} \overline{45} \cdot 26 \cdot 13 \\ 36 \cdot 14 \cdot 25 \\ 12 \cdot 56 \cdot 34 \end{matrix}\right\}.$$

Diese einzelnen Bemerkungen sind Folgen der Thatsache, von der wir ausgingen, und die wir dahin aussprechen können, dass zu jedem Dreiecke, dessen Seiten die Ecken des Sechsecks enthält, acht Gruppen von je drei Dreiecken gehören, deren Seiten Pascal'sche Linien sind, und deren jedes zum ersten Dreiecke perspectivisch liegt.

Geht man andererseits von der Linie

$$\lambda_1 = \left\{\begin{matrix} 12 \cdot 35 \cdot 46 \\ 45 \cdot 16 \cdot 23 \end{matrix}\right\}$$

aus, so können die zugehörigen Paare λ_2 und λ_3 auf drei verschiedene Weisen nach leicht erkennbarem Gesetze gewählt werden, nemlich

$$\lambda_2 = \left\{\begin{matrix} 46 \cdot 23 \cdot 15 \\ 13 \cdot 56 \cdot 24 \end{matrix}\right\}, \quad \lambda_3 = \left\{\begin{matrix} 35 \cdot 16 \cdot 24 \\ 26 \cdot 34 \cdot 15 \end{matrix}\right\},$$

$$\lambda'_2 = \left\{\begin{matrix} 35 \cdot 16 \cdot 24 \\ 14 \cdot 25 \cdot 36 \end{matrix}\right\}, \quad \lambda'_3 = \left\{\begin{matrix} 12 \cdot 45 \cdot 36 \\ 56 \cdot 13 \cdot 24 \end{matrix}\right\},$$

$$\lambda''_2 = \left\{\begin{matrix} 12 \cdot 45 \cdot 36 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \end{matrix}\right\}, \quad \lambda''_3 = \left\{\begin{matrix} 46 \cdot 23 \cdot 15 \\ 25 \cdot 14 \cdot 36 \end{matrix}\right\}.$$

Diese Linien schneiden sich paarweise in Steiner'schen Punkten, nemlich es ist

$$(\lambda_3' \lambda_2'') = \left\{ \begin{array}{c} 12 \cdot 45 \cdot 36 \\ 34 \cdot 26 \cdot 15 \\ 56 \cdot 13 \cdot 24 \end{array} \right\} = \Sigma_1,$$

$$(\lambda_2 \lambda_3'') = \left\{ \begin{array}{c} 46 \cdot 23 \cdot 15 \\ 13 \cdot 56 \cdot 24 \\ 25 \cdot 14 \cdot 36 \end{array} \right\} = \Sigma_2,$$

$$(\lambda_3 \lambda_2') = \left\{ \begin{array}{c} 35 \cdot 16 \cdot 24 \\ 26 \cdot 34 \cdot 15 \\ 14 \cdot 25 \cdot 36 \end{array} \right\} = \Sigma_3.$$

Den drei Symbolen ist die letzte Verticalreihe gemeinsam; den dazu gehörigen vierten Punkt mit gleicher Verticalreihe erkennt man als identisch mit dem obigen Punkte S_{IV}, welcher auf A liegt. Die Punkte Σ_2 und Σ_3 haben mit den Punkten S_I und S_{III} die Horizontalreihe 36 — 14 — 25 gemeinsam; diese vier Punkte befinden sich daher auf einer Steiner'schen Geraden.

Geht man von einer Pascal'schen Linie (λ_1) aus, so gibt es auf derselben hiernach drei Paare von Punkten (P, Q), in denen sie von anderen Pascal'schen Linien (λ_2 und λ_3) so geschnitten wird, dass die Verbindungslinien dieser Schnittpunkte mit gewissen Pascal'schen Punkten (Schnitten von l_1 mit l_2 und l_3) sich auf einer Pascal'schen Linie treffen.
