Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXIII. Jahrgang 1903.

München.
Verlag der K. Akademie.
1904.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Zur Theorie der ganzen transcendenten Funktionen von endlichem Range.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 7. Februar.)

In einer früheren Mitteilung[1]) habe ich, anknüpfend an einen grundlegenden Aufsatz des Herrn Poincaré,[2]) die Beziehungen behandelt, welche zwischen dem infinitären Verhalten einer ganzen transcendenten Funktion $g(x) = \sum c_\nu x^\nu$ für $x = \infty$ und demjenigen der Koeffizienten c_ν für $\nu = \infty$ bestehen. Andererseits hängt aber, wie Herr Poincaré in jenem Aufsatze ebenfalls zuerst gezeigt hat, das infinitäre Anwachsen einer ganzen Funktion, welche unendlich viele Nullstellen a_ν mit konvergenter Summe $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$ $(p \geq 0)$ besitzt, wesentlich von p, d. h. schliesslich von der Dichtigkeit der Nullstellen ab. Eine vereinfachte Herleitung bezw. Vervollständigung gewisser in dieser Hinsicht bestehender Beziehungen bildet den Inhalt der folgenden Mitteilung.

Zur näheren Orientierung diene zunächst folgendes. Es sei ein für allemal $0 < |a_\nu| \leq |a_{\nu+1}|$, $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$, und es werde angenommen, dass für irgend ein $\sigma > 0$ die Reihe $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ konvergiere. Ist dann $\sigma = p + 1$ die kleinste ganze Zahl, für welche dies stattfindet, so soll das für jeden endlichen Bereich absolut und gleichmässig konvergente Produkt:

---

1) Dieser Berichte Bd. 32 (1902), p. 163; 295.

2) Bullet. de la soc. math. de France, T. 11 (1883), p. 136.

$$P(x) = \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa}$$

(wobei im Falle $p = 0$ der Exponent $\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa$ durch 0 zu ersetzen ist) als eine ganze Funktion p^{ten} Ranges bezeichnet werden.[1]) Ein von Herrn Poincaré (a. a. O. p. 142) bewiesener Satz kann alsdann folgendermassen formuliert werden: Für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ und alle x, deren absoluter Betrag eine passend gewählte Zahl R_ε übersteigt, hat man:

(A) $$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{p+1}}.$$

Späterhin hat Herr Borel gezeigt,[2]) dass sogar die Beziehung besteht:

(B) $$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma},$$

---

[1]) Ich gebrauche die Bezeichnung Rang in etwas anderem Sinne, wie diejenigen Autoren, welche jenen Ausdruck als völlig gleichwertig mit dem Laguerreschen „genre" (Oeuvres compl. I, p. 167) verwenden. Hierunter versteht man bekanntlich, wenn:

$$G(x) = e^{g(x)} \cdot x^m \cdot \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa}$$

und $g(x)$ vom Grade q, die grössere Zahl h der beiden Zahlen p und q (eventuell hat man $h = p = q$). Ich bezeichne diese Zahl h nach dem Vorgange von K. v. Schaper (Dissertat. Göttingen 1898, p. 24) als Höhe von $G(x)$, dagegen p (was auch q sein mag) als Rang von $G(x)$. Nur wenn $q \leqq p$, insbesondere, wenn $q = 0$ (in welchem Falle ich $G(x)$ eine primitive ganze Funktion nenne) fallen nach der von mir benützten Terminologie Rang und Höhe zusammen.

[2]) Leçons sur les fonctions entières (Paris, 1900) p. 56. Den sehr komplizierten Beweis hat neuerdings Herr E. Lindelöf durch einen überaus einfachen ersetzt: Acta soc. scient. Fennicae, T. 31 (1902), p. 4. Die weniger scharfe Relation (D) des Textes war schon etwas früher von Herrn Borel mit Andeutung eines Beweises ausgesprochen (Acta math. T. 20 [1897], p. 361) und zuerst von Herrn v. Schaper vollständig (wenn auch recht umständlich) bewiesen worden.

auch für $\sigma < p+1$, sofern nur $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ konvergiert. Da nun nach Voraussetzung $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$ konvergiert, dagegen $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p$ schon divergiert, so haben die Exponenten σ, für welche $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ konvergiert eine dem Intervalle $p \leq \varrho \leq p+1$ angehörige untere Grenze ϱ, sodass also für jedes $\varepsilon > 0$ zwar $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho+\varepsilon}$ konvergiert, $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho-\varepsilon}$ divergiert, während das Verhalten von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ hierdurch noch in keiner Weise präjudiziert wird. Ich bezeichne diese Zahl ϱ als den zur Folge $\left(\frac{1}{a_\nu}\right)$ oder auch zur Funktion $P(x)$ gehörigen Grenz-Exponenten[1]) und spezialisiere diesen letzteren im Bedarfsfalle als Convergenz- bezw. Divergenz-Exponenten,[2]) je nachdem $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ konvergiert oder divergiert.[3]) Hiernach lässt sich der Inhalt von Ungl. (B) nunmehr folgendermassen formulieren:

Ist $P(x)$ vom Grenz-Exponenten ϱ, so hat man für jedes $\varepsilon > 0$ und $|x| > R_\varepsilon$:

(C) $$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\varrho},$$

falls ϱ Konvergenz-Exponent. Ist dies nicht der Fall oder zum mindesten nicht erwiesen, so kann man nur behaupten, dass für jedes $\delta > 0$ und $|x| > R_\delta$:

(D) $$|P(x)| < e^{|x|^{\varrho+\delta}}.$$ [4])

---

[1]) Bei Borel: „Ordre réel" de $P(x)$, späterhin nach dem Vorgange von Schaper, welcher ϱ als Konvergenz-Exponent bezeichnet, auch: „Exposant de convergence de la suite (a_ν)."

[2]) Bei Borel unterschieden als „ordre par excès" und „ordre par défaut."

[3]) Man hat also stets $\varrho > p$, wenn ϱ Konvergenz-Exponent, $\varrho < p+1$, wenn ϱ Divergenz-Exponent.

[4]) Da $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho+\delta}$ für jedes $\delta > 0$ konvergiert, so hätte man

Dieses Resultat ist nun aber, wie die Fassung des zweiten Teiles zeigt, ein unvollständiges. Denn die Konvergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ erscheint darnach zwar als eine hinreichende, aber keineswegs als eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit der Beziehung (C). Dass aber tatsächlich auch im Falle der Divergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ die Beziehung (C) bestehen kann, wurde seinerzeit schon von Herrn Poincaré an einem speziellen Beispiele bemerkt (a. a. O. p. 139), nämlich:

$$P_1(x) = \prod_2^\infty{}^\nu \left(1 - \frac{x^2}{(\nu \cdot \lg \nu)^2}\right)$$

$$= \prod_2^\infty{}^\nu \left(1 + \frac{x}{\nu \cdot \lg \nu}\right) \cdot e^{-\frac{x}{\nu \cdot \lg \nu}} \cdot \left(1 - \frac{x}{\nu \cdot \lg \nu}\right) \cdot e^{\frac{x}{\nu \cdot \lg \nu}},$$

also einer Funktion vom Range $p = 1$, welche, wie die direkte Vergleichung mit:

$$\sin i \varepsilon x = i \varepsilon x \cdot \prod_1^\infty{}^\nu \left(1 + \frac{\varepsilon^2 x^2}{\nu^2 \pi^2}\right)$$

zeigt, der Bedingung genügt:

$$|P_1(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|},$$

---

auf Grund von Ungl. (A) an Stelle der Beziehung (D) zunächst eine solche von der Form:

(D') $$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\varrho + \delta}}.$$

Diese letztere Beziehung sagt aber in Wahrheit nicht mehr (und eo ipso nicht weniger) aus, als die etwas einfachere Relation (D). Denn ist diese letztere erfüllt, so hat man für alle hinlänglich grossen x auch:

$$|P(x)| < e^{|x|^{\varrho + \frac{\delta}{2}}} = e^{\left|\frac{1}{x}\right|^{\frac{\delta}{2}} \cdot |x|^{\varrho + \delta}}$$

und kann sodann für jedes $\varepsilon > 0$ nötigenfalls durch weitere Vergrösserung von $|x|$ stets erzielen, dass: $\left|\frac{1}{x}\right|^{\frac{\delta}{2}} < \varepsilon$, also schliesslich:

$$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\varrho + \delta}}.$$

also derjenigen Beziehung, welche nach (A) zunächst einer Funktion vom Range $p = 0$ zukommt. Oder anders ausgesprochen: Obschon hier $\varrho = p = 1$ Divergenz-Exponent ist, so genügt $P_1(x)$ immerhin der lediglich für den Konvergenz-Fall bewiesenen Relation (C).

Die in der eben angedeuteten Richtung bestehende Lücke ist neuerdings durch die Herren P. Boutroux und E. Lindelöf im wesentlichen ausgefüllt worden, ja sogar hat das in Ungl. (C) enthaltene Resultat insofern noch eine Verschärfung erfahren, als an die Stelle des „beliebig kleinen" Faktors ε eine durch das infinitäre Verhalten der a_ν bedingte, gleichzeitig mit $x = \infty$ gegen Null konvergierende (oder auch ins Unendliche wachsende) Funktion von $|x|$ getreten ist. Herr Lindelöf hat nämlich den folgenden Satz bewiesen:[1])

Ist $p < \varrho < p + 1$ *und von einem bestimmten* n *ab:*

$$|a_n| > (n \cdot \lambda(n))^{\frac{1}{\varrho}}, \quad \textit{wo:}\ \lambda(n) = (\lg n)^{\alpha_1} \cdot (\lg_2 n)^{\alpha_2} \cdots (\lg_\varkappa n)^{\alpha_\varkappa},$$

($\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varkappa$ *beliebig reell), so hat man für alle hinlänglich grossen* x*:*

$$(\mathrm{C}') \qquad |P(x)| < e^{A \cdot \lambda(|x|)^{-1} \cdot |x|^\varrho} \qquad (A > 0).$$

Und Herr Boutroux hat darauf aufmerksam gemacht,[2]) dass dieses Resultat schon in einem von ihm zuvor mitgeteilten,[3]) etwas allgemeineren Satze enthalten sei. Durch die obige Verschärfung der Ungleichung (C) haben indessen die betreffenden Beweise so erhebliche Komplikationen erlitten, dass sie als elementare wohl kaum noch bezeichnet werden können. Zugleich hat sich gezeigt, dass die im Falle eines ganzzahligen ϱ auftretenden Schwierigkeiten,[4]) welche eigentlich den Anlass zur Einführung jener Verschärfung ge-

[1]) A. a. O. p. 24 (eine vorläufige Mitteilung schon: Comptes rendus, T. 133 [1901], p. 1279).

[2]) Comptes rendus, T. 134 (1902), p. 82.

[3]) Ebendas. T. 132 (1901), p. 252.

[4]) Vgl. § 3.

geben hatten, auf diesem Wege wohl einigermassen eingeschränkt, aber keineswegs prinzipiell behoben werden können. Auf der anderen Seite gewinnt man tatsächlich schon eine einigermassen befriedigende Einsicht in das Wesen der hier in Betracht kommenden Fragen, sobald man nur über die Gültigkeitsgrenzen der Ungleichung (C) möglichst genau orientiert ist. Im folgenden soll nun vollkommen elementar gezeigt werden, dass jene Gültigkeitsgrenzen im Falle eines nichtganzzahligen ϱ vollständig, im Falle eines ganzzahligen[1]) ϱ wenigstens teilweise festgestellt werden können, nämlich:

Die notwendige Bedingung für die Existenz der Beziehung (C) *besteht keineswegs in der (allemal hinreichenden) Konvergenz der Reihe* $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$, *vielmehr lediglich in der Beziehung:*

$$\text{(E)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho = 0.$$

Diese letztere ist zugleich auch hinreichend, wenn ϱ *keine ganze Zahl. Ist dagegen* ϱ *eine ganze Zahl,* $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ *divergent, so erscheint in Verbindung mit Gl.* (E) *als hinreichende Bedingung die Beziehung:* $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\varrho = 0.$[2])

Der erste Teil dieses Satzes wird in § 1, der zweite für Funktionen vom Range 0 in § 2, für solche vom Range $p \geq 1$ in § 3 bewiesen. In § 4 werden dann die bekannten

---

[1]) Der Fall des Grenz-Exponenten (und zwar offenbar allemal Divergenz-Exponenten) $\varrho = 0$, welcher z. B. eintritt, wenn $a_\nu = a^\nu$ und $|a| < 1$, ist hier ein für allemal auszuschliessen, da alsdann die Möglichkeit der Bedingung (C) hinfällig wird.

[2]) Dabei wird also die Reihe $\sum \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\varrho$ nur als bedingt konvergent vorausgesetzt.

Sätze über den Zusammenhang zwischen dem Grenz-Exponenten und dem infinitären Verhalten einer primitiven[1]) ganzen Funktion auf Grund des obigen Resultates entsprechend vervollständigt.

---

§ 1.

1. Lehrsatz. *Ist für jedes $\varepsilon > 0$ und alle hinlänglich grossen x:*

$$(1) \qquad |G(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma} \qquad (\sigma > 0),$$

und besitzt $G(x)$ überhaupt unendlich viele Nullstellen a_ν (wo $0 < |a_\nu| \leqq |a_{\nu+1}|$), so hat man:

$$(2) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = 0.$$ [2])

Beweis. Da $G(x)$ die Nullstellen $a_\nu\ (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ besitzen soll, überdies noch eventuell $x = 0$ zur λ-fachen Nullstelle haben kann, so muss sich $G(x)$ in die Form setzen lassen:

$$(3) \qquad G(x) = C \cdot e^{g(x)} \cdot x^\lambda \cdot \prod_1^\infty{}^\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g_\nu(x)},$$

wo $\lambda \geqq 0$, $g(x)$ eine ganze (rationale oder transcendente) Funktion ohne konstantes Glied (eventuell auch $g(x) = 0$) und:

$$g_\nu(x) = \sum_1^{m_\nu}{}^\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa.$$ [3])

Wir bringen $G(x)$ zunächst auf die Form:

---

[1]) S. p. 1, Fussn. 3.

[2]) Modifikation eines bekannten Satzes von E. Schou (Comptes rendus, T. 125 [1897], p. 763) und elementarere Darstellung der a. a. O. benützten Beweis-Methode.

[3]) Die m_ν könnten auch mit ν ins Unendliche wachsen, d. h. es wird keineswegs vorausgesetzt, dass $G(x)$ von endlichem Range, vielmehr ergibt sich dies schliesslich als selbstverständliche Folgerung aus der zu beweisenden Relation (2).

$$G(x) = C \cdot x^{\lambda} \cdot \prod_1^n {}^{\nu} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g(x) + \sum_1^n {}^{\nu} g_\nu(x)} \cdot \prod_{n+1}^{\infty} {}^{\nu} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g_\nu(x)}$$
$$= \frac{C \cdot x^{\lambda}}{a_1 a_2 \ldots a_n} \prod_1^n {}^{\nu} (a_\nu - x) \cdot G_1(x),$$

wo $G_1(x)$ eine transcendente ganze Funktion, also wegen: $G(0) = 1$, von der Form:

$$G_1(x) = 1 + \sum_1^{\infty} {}^{\nu} c_\nu x^\nu,$$

und daher:

$$(4) \qquad \frac{G(x)}{C \cdot x^{\lambda} \cdot \prod_1^n {}^{\nu} (a_\nu - x)} = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} (1 + \sum_1^{\infty} {}^{\nu} c_\nu x^\nu).$$

Auf Grund des Cauchyschen Koeffizienten-Satzes ergibt sich sodann für jedes $r > 0$:

$$\left| \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} \right| < \underset{|x|=r}{\text{Max.}} \left| \frac{G(x)}{C \cdot x^{\lambda} \cdot \prod_1^n {}^{\nu} (a_\nu - x)} \right|$$

und für $r \geqq 1$ a fortiori:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \left| \frac{1}{a_n} \right|^n &\leqq \frac{1}{\prod_1^n {}^{\nu} \left| r - |a_\nu| \right|} \cdot \underset{|x|=r}{\text{Max.}} \left| C^{-1} \cdot G(x) \right| \\ &< \frac{1}{\prod_1^n {}^{\nu} \left| r - |a_\nu| \right|} \cdot e^{\varepsilon \cdot r^{\sigma}}, \end{aligned}$$

da aus der Beziehung (1) offenbar auch die folgende resultiert:

$$\left| C^{-1} \cdot G(x) \right| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\sigma}}, \quad \text{etwa für } |x| > R_\varepsilon.$$

Setzt man jetzt:

$$r = (e + 1) \cdot |a_n|$$

und nimmt n gross genug, dass:

$$|a_n| > \frac{1}{e+1} \cdot R_\varepsilon$$

wird, so geht Ungl. (5) in die folgende über:

$$(6) \qquad \left|\frac{1}{a_n}\right|^n < \frac{1}{\prod_1^n{}^{\nu}\left((e+1)\,|a_n| - |a_\nu|\right)} \cdot e^{\varepsilon\cdot(e+1)^\sigma\cdot|a_n|^\sigma}.$$

Da aber für $\nu = 1, 2, \ldots (n-1)$:

$$(e+1)\cdot|a_n| - |a_\nu| \geq (e+1)\cdot|a_n| - |a_n| = e\cdot|a_n|,$$

so folgt a fortiori:

$$\left|\frac{1}{a_n}\right|^n < \frac{1}{e^n\cdot|a_n|^n}\cdot e^{\varepsilon\cdot(e+1)^\sigma\cdot|a_n|^\sigma},$$

und daher:

$$e^n < e^{\varepsilon\cdot(e+1)^\sigma\cdot|a_n|^\sigma},$$

also:

$$(7) \qquad n\cdot\left|\frac{1}{a_n}\right|^\sigma < \varepsilon\cdot(e+1)^\sigma \qquad \left(\text{falls: } |a_n| > \frac{1}{e+1}\cdot R_\varepsilon\right)$$

und, da ε unbegrenzt verkleinert werden kann, schliesslich:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

2. Als Folgerung aus dem eben bewiesenen Satze ergibt sich unmittelbar:

Ist $P(x)$ eine primitive ganze Funktion mit dem Grenz-Exponenten $\varrho > 0$, so bildet die Relation:

$$(8) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho = 0$$

eine notwendige Bedingung dafür, dass für jedes $\varepsilon > 0$ und $|x| > R_\varepsilon$:

$$(9) \qquad |P(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^\varrho}.$$

Zugleich erkennt man, dass allemal, wenn für irgend ein $\sigma > 0$ die Beziehung besteht:

$$(10) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = 0,$$

$\varrho \leqq \sigma$ sein muss. Denn aus (10) folgt durch Erhebung in die $\left(1+\frac{\delta}{\sigma}\right)$te Potenz:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu^{1+\frac{\delta}{\sigma}} \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\sigma+\delta} = 0$$

und somit die Konvergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\sigma+\delta}$. Man kann daher den Grenz-Exponenten ϱ geradezu auch definieren als die untere Grenze der Zahlen σ, für welche eine Relation von der Form (10) besteht.

Daraus folgt weiter, dass für jedes (beliebig kleine) $\delta > 0$:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho-\delta} > 0$$

sein muss und somit, nach dem eben bewiesenen Satze, die Existenz der Beziehung:

$$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\varrho-\delta}} \qquad (\text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ und } |x| > R_\varepsilon)$$

ausgeschlossen erscheint. Da aber diese letztere Ungleichung wegen der Willkürlichkeit von δ nicht mehr und nicht weniger aussagt, als die folgende:[1])

$$|P(x)| < e^{|x|^{\varrho-\delta}} \qquad (\text{für jedes } \delta > 0 \text{ und } |x| > R'_\delta),$$

so ergibt sich noch das folgende Resultat:

Besitzt $P(x)$ den Grenz-Exponenten $\varrho > 0$, so ist für jedes $\delta > 0$ und unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen:

$$(11) \qquad |P(x)| > e^{|x|^{\varrho-\delta}}.$$

---

[1]) S. p. 2, Fussn. 4.

§ 2.

Lehrsatz. *Ist* $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|$ *konvergent, also:*

(12) $$P(x) = \prod_1^\infty{}^\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)$$

eine ganze Funktion vom Range 0, *und besteht für irgend ein* $\sigma \leqq 1$ *die Relation:*

(13) $$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = 0 \qquad \left(\text{anders geschrieben: } |a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\sigma}}\right),$$

so hat man für jedes $\varepsilon > 0$ *und* $|x| > R_\varepsilon$:

(14) $$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma}.$$

Beweis. Wir trennen die beiden Fälle $\sigma = 1$ und $\sigma < 1$.

I. Sei zunächst $\sigma = 1$, in welchem Falle also wegen der Konvergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|$ und der Voraussetzung $|a_\nu| \leqq |a_{\nu+1}|$ die Bedingung (13) stets eo ipso erfüllt ist. Man hat für jedes $m > 1$:

$$|P(x)| \leqq \prod_1^m{}^\nu \left(1 + \left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right) \cdot \prod_{m+1}^\infty{}^\nu \left(1 + \left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right)$$

(15) $$< e^{m \cdot \lg\left(1 + \left|\frac{x}{a_1}\right|\right)} \cdot e^{\sum_{m+1}^\infty{}^\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|}.$$

Wird jetzt nach Annahme eines beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl m so fixiert, dass:

(15^a) $$\sum_{m+1}^\infty{}^\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und darauf eine positive Zahl R_ε so bestimmt, dass:

(15^b) $$\frac{m \cdot \lg\left(1 + \left|\frac{x}{a_1}\right|\right)}{|x|} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für } |x| > R_\varepsilon,$$

so ergibt sich aus (15), wie behauptet:

$$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|}.\text{[1]}$$

II. Es sei jetzt $\sigma < 1$, und es werde gesetzt:

$$|a_\nu| = a_\nu, \qquad |x| = r.$$

Wird $\delta > 0$ beliebig klein angenommen, so lässt sich auf Grund der Voraussetzung (13) ein m so fixieren, dass für $\nu > m$:

$$(16) \qquad \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma \equiv \frac{\nu}{a_\nu^\sigma} < \delta, \quad \text{also:} \ \frac{1}{a_\nu} < \left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Man hat sodann:

$$|P(x)| < \prod_1^m{}^{\nu} \left(1 + \frac{r}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^{\infty}{}^{\nu} \left(1 + \frac{r}{a_\nu}\right)$$

$$< e^{m \cdot \lg\left(1 + \frac{r}{a_1}\right)} \cdot \prod_{m+1}^{\infty}{}^{\nu} \left(1 + \left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot r\right)$$

und, wenn wiederum r_δ so fixiert wird, dass:

$$(17) \qquad \frac{m \cdot \lg\left(1 + \frac{r}{a_1}\right)}{r^\sigma} < \delta \qquad \text{für } r > r_\delta,$$

auch:

$$(18) \qquad |P(x)| < e^{\delta \cdot r^\sigma} \cdot \prod_{m+1}^{\infty}{}^{\nu} \left(1 + \left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot r\right) \qquad \text{für } |x| > r_\delta.$$

Es bedeute nun n diejenige ganze Zahl, welche durch die Bedingungen bestimmt ist:

$$(19) \qquad n - 1 < \delta \cdot r^\sigma \leq n,$$

und es werde gesetzt:

---

[1]) Dieser Teil des Satzes enthält lediglich das in der Einleitung erwähnte Poincarésche Resultat (A) (für den Fall $p = 0$) und wird hier nur der Vollständigkeit halber bewiesen.

$$(20)\quad \prod_{m+1}^{\infty}{}^{\nu} \left(1 + \left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot r\right) = \prod_{m+1}^{n}{}^{\nu} \left(1 + \left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot r\right) \cdot \prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} \left(1 + \left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot r\right).^{1)}$$

Für das e r s t e der rechts auftretenden Teil-Produkte ergibt sich alsdann mit Berücksichtigung von Ungl. (19):

$$\begin{aligned}
\prod_{m+1}^{n}{}^{\nu} \left(1 + \left(\frac{\delta\, r^{\sigma}}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right) &\leqq \prod_{m+1}^{n}{}^{\nu} \left(1 + \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right) \\
&< \prod_{1}^{n}{}^{\nu} \frac{n^{\frac{1}{\sigma}} + \nu^{\frac{1}{\sigma}}}{\nu^{\frac{1}{\sigma}}} \\
&< \left(\prod_{1}^{n}{}^{\nu} \frac{2^{\sigma} \cdot n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \left(\frac{(2^{\sigma} \cdot n)^{n}}{n!}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \\
(21)\qquad &< e^{\frac{1}{\sigma} \cdot 2^{\sigma} \cdot n}.
\end{aligned}$$

Da aber nach (19): $n < \delta \cdot r^{\sigma} + 1$, so folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\prod_{m+1}^{n}{}^{\nu} \left(1 + \left(\frac{\delta\, r^{\sigma}}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right) &< e^{\frac{1}{\sigma} \cdot 2^{\sigma} (\delta \cdot r^{\sigma} + 1)} \\
&= e^{\delta \cdot r^{\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^{\sigma} + \frac{2^{\sigma}}{\sigma\, \delta \cdot r^{\sigma}}\right)} \\
(22)\qquad &< e^{\delta \cdot r^{\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^{\sigma} + 1\right)},
\end{aligned}$$

sofern nur:

$$(22^{a})\qquad \frac{2^{\sigma}}{\sigma\, \delta \cdot r^{\sigma}} \leqq 1, \quad \text{d. h. } r \geqq 2 \cdot \left(\frac{1}{\sigma\, \delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

---

1) Sollten unter den r, welche der Bedingung $r > r_{\delta}$ genügen, solche vorkommen, für welche $n \leqq m$ ausfällt, so würde für diese das e r s t e der beiden Teil-Produkte einfach wegfallen, während das z w e i t e zunächst in $\prod_{m+1}^{\infty}{}^{\nu}$ übergehen würde und in der Folge *a fortiori* durch $\prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}$ ersetzt werden könnte.

Für das zweite Teil-Produkt in Gl. (20) findet man zunächst:

(23) $$\prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\cdot r\right) < e^{\delta^{\frac{1}{\sigma}}\cdot r\cdot\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}}.$$

Nun ist aber:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} < \frac{\sigma}{1-\sigma}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1} \quad [1]$$

$$= \frac{\sigma}{1-\sigma}\cdot\left(\frac{r^{\sigma}}{n}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1}\cdot r^{\sigma-1}$$

$$\leqq \frac{\sigma}{1-\sigma}\cdot\delta^{1-\frac{1}{\sigma}}\cdot r^{\sigma-1} \quad \left(\text{da: } \frac{r^{\sigma}}{n}\leqq\delta^{-1} \text{ nach (19)}\right),$$

[1]) Man hat bekanntlich für $\lambda > 0$:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\lambda} < \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\lambda},$$

wie am kürzesten mit Hilfe der Beziehung:

$$\sum_{n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\lambda} < \int_{n}^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\lambda}}$$

resultiert, aber auch leicht rein elementar mit Hilfe der Ungleichungen:

$$b^{\lambda}-a^{\lambda}\begin{cases} > \lambda\cdot a^{\lambda-1}\cdot(b-a) & (\lambda > 1)\\ > \lambda\cdot b^{\lambda-1}\,(b-a) & (0<\lambda<1)\end{cases}$$

(s. Sitz.-Ber. Bd. 32 [1902], p. 177) gefunden wird. Darnach ergibt sich nämlich zunächst:

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\lambda}-\left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{\lambda}\begin{cases} > \dfrac{\lambda}{\nu\cdot(\nu+1)^{\lambda}} & (\lambda>1)\\[2ex] > \dfrac{\lambda}{\nu^{\lambda}\cdot(\nu+1)} & (0<\lambda<1),\end{cases}$$

also schliesslich für j e d e s $\lambda > 0$:

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\lambda}-\left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{\lambda} > \lambda\cdot\left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{1+\lambda},$$

und hieraus durch Summation:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\lambda} = \sum_{n}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{1+\lambda} < \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\lambda}.$$

so dass Ungleichung (23) in die folgende übergeht:

$$(24)\qquad \prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\cdot r\right) < e^{\delta\cdot r^{\sigma}\cdot\frac{\sigma}{1-\sigma}}.$$

Durch Einsetzen von (22), (24) in Ungl. (18) ergibt sich also:

$$(25)\qquad |P(x)| < e^{\delta\cdot r^{\sigma}\left(2+\frac{1}{\sigma}\cdot 2^{\sigma}+\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)} \quad \text{für: } r > r'_{\delta},$$

wenn r'_{δ} die grössere der beiden Zahlen r_{δ} und $2\cdot\left(\frac{1}{\sigma\,\delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ bedeutet. Wird also δ zu beliebig klein vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ so angenommen, dass:

$$\delta\cdot\left(2+\frac{1}{\sigma}\cdot 2^{\sigma}+\frac{\sigma}{1-\sigma}\right) \leqq \varepsilon$$

und sodann das entsprechende r'_{δ} mit R_{ε} bezeichnet, so findet man, wie behauptet:

$$(26)\qquad |P(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^{\sigma}} \quad \text{für: } |x| > R_{\varepsilon}.$$

---

§ 3.

1. Hilfssatz. *Ist:*

$$(27)\qquad E_p(u) = (1-u)\cdot e^{\sum_1^p{}^{\varkappa}\frac{1}{\varkappa}\cdot u^{\varkappa}} \qquad (p \geqq 1),$$

so hat man für jedes von Null verschiedene u und für $0 \leqq a \leqq 1$:

$$(28)\qquad |E_p(u)| < e^{c_{p,a}\cdot|u|^{p+a}},$$

wo $c_{p,a}$ eine lediglich von p und a abhängige positive Zahl bedeutet.[1])

---

[1]) Ein im wesentlichen dasselbe aussagender Satz bei E. Lindelöf, a. a. O., p. 2.

Beweis: Man hat zunächst für $|u| < 1$:

$$E_p(u) = e^{-\sum_1^\infty \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot u^\varkappa + \sum_1^p \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot u^\varkappa} = e^{-\sum_{p+1}^\infty \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot u^\varkappa},$$

also für $0 < |u| < 1$:

$$|E_p(u)| < e^{\sum_{p+1}^\infty \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot |u|^\varkappa}$$

$$< e^{\frac{1}{p+1} \cdot \sum_{p+1}^\infty \varkappa |u|^\varkappa} = e^{\frac{1}{p+1} \cdot \frac{|u|^{p+1}}{1-|u|}}.$$

Ist jetzt $|u| \leqq \frac{p}{p+1}$, also $1 - |u| \geqq \frac{1}{p+1}$, so wird:

$$|E_p(u)| < e^{|u|^{p+1}}$$

und, wegen $|u| < 1$, a fortiori:

(29) $$|E_p(u)| < e^{|u|^{p+\alpha}} \qquad \text{für: } 0 \leqq \alpha \leqq 1.$$

Andererseits hat man:

$$|E_p(u)| < (1 + |u|) \cdot e^{\sum_1^p \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot |u|^\varkappa}$$

$$< e^{|u| + \sum_1^p \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot |u|^\varkappa}$$

$$= e^{\left\{ \left|\frac{1}{u}\right|^{p+\alpha-1} + \sum_1^p \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left|\frac{1}{u}\right|^{p+\alpha-\varkappa} \right\} \cdot |u|^{p+\alpha}}.$$

Ist jetzt $|u| > \frac{p}{p+1}$, also $\left|\frac{1}{u}\right| < \frac{p+1}{p}$, so wird:

(30) $$|E_p(u)| < e^{c_{p,\alpha} \cdot |u|^{p+\alpha}},$$

wo:

(30ª) $$c_{p,\alpha} = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+\alpha-1} + \sum_1^p \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+\alpha-\varkappa}.$$

Da im übrigen offenbar $c_{p,\alpha} > 1$, so ergibt sich mit Rücksicht auf Ungl. (29) die Gültigkeit von (30) für jedes von Null verschiedene u.

2. Hauptsatz. *Es sei p eine positive ganze Zahl, $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p$ divergent, $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$ konvergent, also:*

$$(31)\quad P(x) = \prod_1^\infty{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right), \text{ wo: } E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^p{}^\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa},$$

eine ganze Funktion vom Range p. Ist sodann für irgend ein dem Intervalle $p < \sigma \leqq p + 1$ angehöriges σ:

$$(32)\quad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = 0 \quad \left(\text{anders geschrieben: } |a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\sigma}}\right),$$

so hat man für jedes $\varepsilon > 0$ und $|x| > R_\varepsilon$:

$$(33)\qquad |P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma}.$$

Dieses Resultat gilt auch noch im Falle $\sigma = p$, wenn $\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{a_\nu}$ bedingt konvergiert und die Summe 0 besitzt.[1]

Beweis. Wir unterscheiden hier die 3 Fälle $\sigma = p + 1$, $p < \sigma < p + 1$, $\sigma = p$.

I. Sei zunächst $\sigma = p + 1$, in welchem Falle wiederum die Voraussetzung (32) eo ipso erfüllt ist. Man hat, wenn m eine beliebige natürliche Zahl bedeutet, mit Benützung des zuvor bewiesenen Hilfssatzes:

$$|P(x)| = \left|\prod_1^m{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right| \cdot \left|\prod_{m+1}^\infty{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right|$$

$$< e^{c_{p,0} \cdot \sum_1^m{}^\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^p + c_{p,1} \cdot \sum_{m+1}^\infty{}^\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p+1}}$$

$$(34)\qquad = e^{\left(\frac{c_{p,0}}{|x|} \cdot \sum_1^m{}^\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p + c_{p,1} \sum_{m+1}^\infty{}^\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}\right) \cdot |x|^{p+1}}.$$

[1] Das letzte Resultat findet sich auch bei P. Boutroux: Comptes rendus, T. 134 (1902), p. 83.

Wird jetzt über m so verfügt, dass:

$$(34^a) \qquad c_{p,1} \cdot \sum_{m+1}^{\infty}{}^{\nu} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^{p+1} < \frac{\varepsilon}{2},$$

darauf R_ε so fixiert, dass für $|x| > R_\varepsilon$:

$$(34^b) \qquad \frac{c_{p,0}}{|x|} \cdot \sum_{1}^{m}{}^{\nu} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^{p} < \frac{\varepsilon}{2},$$

so ergibt sich, wie behauptet:

$$(35) \qquad |P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{p+1}} \qquad \text{für: } |x| > R_\varepsilon. [1]$$

II. In dem nunmehr zu betrachtenden Falle: $p < \sigma < p+1$ möge gesetzt werden:

$$(36) \qquad \begin{cases} P(x) = \prod_{1}^{m}{}^{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^{n}{}^{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right), \\ \quad = P_1^{(m)}(x) \cdot P_{m+1}^{(n)}(x) \cdot P_{n+1}^{(\infty)}(x) \end{cases}$$

wo die ganzen Zahlen m, n genau dieselbe Bedeutung haben, wie in § 2 (s. Formel (16), (19) nebst Fussnote 1 p. 113), also:

$$(37) \qquad \nu \cdot \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^{\sigma} \equiv \frac{\nu}{\alpha_\nu^\sigma} < \delta \qquad \text{für } \nu > m,$$

$$(38) \qquad n - 1 < \delta \cdot r^\sigma \leqq n \qquad (r = |x|).$$

Man hat nun wiederum mit Benützung des Hilfssatzes (28):

$$|P_1^{(m)}(x)| < e^{c_{p,0} \cdot \sum_{1}^{m}{}^{\nu} \left(\frac{r}{\alpha_\nu}\right)^p} = e^{\left(\frac{c_{p,0}}{r^{\sigma-p}} \cdot \sum_{1}^{m}{}^{\nu} \left(\frac{1}{\alpha_\nu}\right)^p\right) \cdot r^\sigma},$$

also, wenn r_δ so fixiert wird, dass:

$$(39) \qquad \frac{c_{p,0}}{r^{\sigma-p}} \sum_{1}^{m}{}^{\nu} \left(\frac{1}{\alpha_\nu}\right)^p < \delta \qquad \text{für: } r > r_\delta,$$

zunächst:

$$(40) \qquad |P_1^{(m)}(x)| < e^{\delta \cdot r^\sigma}.$$

---

[1]) Dieser Teil des Satzes enthält wiederum nur das Poincarésche Resultat (A).

Für das zweite in Gl. (36) auftretende Teil-Produkt ergibt sich:

$$|P_{m+1}^{(n)}(x)| \leqq \prod_{m+1}^{n}{}_{\nu}\left(1+\frac{r}{a_\nu}\right)\cdot e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{r}{a_\nu}\right)^\varkappa}$$

$$(41) \qquad < \prod_{m+1}^{n}{}_{\nu}\left(1+\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)\cdot\prod_{m+1}^{n}{}_{\nu}\, e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}}} \quad \text{(nach Ungl. (37), (38)).}$$

Für das erste dieser Produkte wurde bereits in § 2, Ungl. (21) die Beziehung gefunden:[1])

$$(42) \qquad \prod_{m+1}^{n}{}_{\nu}\left(1+\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right) < e^{\frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma\cdot n}.$$

Andererseits hat man:

$$\prod_{m+1}^{n}{}_{\nu}\, e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}}} < e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot n^{\frac{\varkappa}{\sigma}}\sum_1^n{}_\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}}}.$$

Nun ist für $\varkappa \leqq p < \sigma$:

$$\sum_1^n{}_\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}} < \frac{1}{1-\frac{\varkappa}{\sigma}}\cdot n^{1-\frac{\varkappa}{\sigma}} \quad {}^{2}),$$

und daher:

---

[1]) Die betreffende Herleitung ist gänzlich unabhängig davon, ob $\sigma < 1$ oder $\sigma \geqq 1$.

[2]) Aus der oben (p. 114, Fussn. 1) benützten Ungleichung:

$$b^\lambda - a^\lambda > \lambda\cdot b^{\lambda-1}(b-a) \qquad (0<\lambda<1)$$

folgt:

$$\nu^\lambda - (\nu-1)^\lambda > \lambda\cdot\nu^{\lambda-1} = \lambda\cdot\left(\frac{1}{\nu}\right)^{1-\lambda}$$

und hieraus durch Summation:

$$\sum_1^n{}_\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^{1-\lambda} < \frac{1}{\lambda}\cdot n^\lambda.$$

$$\sum_1^p {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot n^{\frac{\varkappa}{\sigma}} \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}} < \sum_1^p {}_\varkappa \frac{\sigma}{\varkappa \cdot (\sigma - \varkappa)} \cdot n$$

$$< \frac{\sigma}{\sigma - p} \cdot n$$

$$\left(\text{wegen: } \sum_1^p {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa \cdot (\sigma - \varkappa)} < p \cdot \frac{1}{p \cdot (\sigma - p)} = \frac{1}{\sigma - p}\right)$$

also:

$$(43) \qquad \prod_{m+1}^n {}_\nu \, e^{\sum_1^p {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}}} < e^{\frac{\sigma}{\sigma - p} \cdot n}.$$

Durch Einsetzen von (42), (43) in Ungl. (41) ergibt sich somit:

$$(44) \qquad \left| P_{m+1}^{(n)}(x) \right| < e^{n\left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma - p}\right)}.$$

Wegen $n < \delta \cdot r^\sigma + 1$ (s. Ungl. (38)) hat man sodann:

$$n\left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma - p}\right) < (\delta \cdot r^\sigma + 1)\left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma - p}\right)$$

$$= \delta \cdot r^\sigma \left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma - p} + \frac{2^\sigma \cdot (\sigma - p) + \sigma^2}{\sigma \cdot (\sigma - p) \cdot \delta \cdot r^\sigma}\right)$$

$$< \delta \cdot r^\sigma \left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma - p} + 1\right),$$

wenn:

$$(45) \qquad \frac{2^\sigma \cdot (\sigma - p) + \sigma^2}{\sigma\,(\sigma - p) \cdot \delta \cdot r^\sigma} \leq 1, \quad \text{d. h.} \quad r \geq \left(\frac{2^\sigma \cdot (\sigma - p) + \sigma^2}{\sigma \cdot (\sigma - p) \cdot \delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

und daher:

$$(46) \qquad \left| P_{m+1}^{(n)}(x) \right| < e^{\delta \cdot r^\sigma \left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma - p} + 1\right)},$$

wenn r der Bedingung (45) genügt.

Schliesslich findet man für das dritte in Gl. (36) auftretende Teil-Produkt:

(47)
$$\left| P_{n+1}^{(x)}(x) \right| < e^{c_{p,1} \cdot \sum_{n+1}^{\infty} \nu \left(\frac{r}{a_\nu}\right)^{p+1}} \quad \text{(s. Ungl. (28))}$$
$$< e^{c_{p,1} \cdot r^{p+1} \cdot \sum_{n+1}^{\infty} \nu \left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}}} \quad \text{(s. Ungl. (37)).}$$

Nun ist wiederum:

$$\sum_{n+1}^{\infty} \nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} < \frac{\sigma}{p+1-\sigma} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}-1} \quad \text{(s. p. 114, Fussn. 1))}$$
$$= \frac{\sigma}{p+1-\sigma} \cdot \left(\frac{r^\sigma}{n}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}-1} \cdot r^{\sigma-(p+1)}$$
$$\leqq \frac{\sigma}{p+1-\sigma} \cdot \delta^{1-\frac{p+1}{\sigma}} \cdot r^{\sigma-(p+1)} \quad \left(\text{wegen: } \frac{r^\sigma}{n} \leqq \delta^{-1} \text{ nach (38)}\right),$$

so dass sich ergibt:

(48)
$$\left| P_{n+1}^{(\infty)}(x) \right| < e^{\delta \, r^\sigma \cdot \frac{c_{p,1} \cdot \sigma}{p+1-\sigma}}.$$

Durch Zusammenfassung der Resultate (40), (46), (48) liefert also Gl. (36) die Beziehung:

(49)
$$|P(x)| < e^{\delta \cdot r^\sigma \left(2 + \frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma - p} + \frac{c_{p,1} \cdot \sigma}{p+1-\sigma}\right)} \quad \text{für: } r > r'_\delta,$$

wenn r'_δ die grössere der beiden Zahlen r_δ und $\left(\frac{2^\sigma \cdot (\sigma - p) + \sigma^2}{\sigma(\sigma - p) \cdot \delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ bedeutet.

Wird also $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben und δ so angenommen, dass:

$$\delta \left(2 + \frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma - p} + \frac{c_{p,1} \cdot \sigma}{p+1-\sigma}\right) \leqq \varepsilon,$$

so folgt, wenn man noch R_ε statt r'_δ schreibt:

(50)
$$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma} \quad \text{für: } |x| > R_\varepsilon.$$

III. Sei jetzt $\sigma = p$, also:

(51)
$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p = \lim_{\nu=\infty} \frac{\nu}{a_\nu^p} = 0$$

und ausserdem: $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$. Es mag dann m und n wiederum die frühere Bedeutung haben, so dass also:

$$(52) \qquad \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p = \frac{\nu}{a_\nu^p} < \delta \text{ für: } \nu > m,$$

$$(53) \qquad n - 1 < \delta \cdot r^p \leqq n.$$

Ferner möge n' eine Zahl von der Beschaffenheit bedeuten, dass für $n \geqq n'$:

$$(54) \qquad \left|\sum_1^n{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p\right| < \delta,$$

was offenbar, auf Grund der Voraussetzung: $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$, durch passende Wahl von n' stets erzielt werden kann. Zugleich soll dann die in Ungl. (53) auftretende Zahl $n \geqq n'$ $\left(\text{d. h. } r \geqq \left(\frac{n'-1}{\delta}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$ angenommen werden.

Man hat nun wiederum:

$$P(x) = \prod_1^m{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^n{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{n+1}^\infty{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$$

$$(55) \qquad = e^{\sum_1^n{}^\nu \frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p} \cdot \prod_1^m{}^\nu E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^n{}^\nu E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{n+1}^\infty{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right),$$

wo:

$$E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^{p-1}{}^\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa},$$

und im Falle $p = 1$ der Exponential-Faktor durch die Einheit zu ersetzen ist.

Aus (54) folgt dann zunächst, dass:

$$(56) \qquad \left| e^{\sum_1^n{}^\nu \frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p} \right| < e^{\frac{1}{p} \cdot \delta \cdot r^p}.$$

Für das erste Teil-Produkt in Gl. (55) ergibt sich analog wie früher (s. Ungl. (34), (34^b) bezw., im Falle $p-1=0$, Ungl. (15), (15^b)):

$$(57) \qquad \left| \prod_1^m{}^{\nu}\, E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < e^{\delta \cdot r^p} \quad \text{etwa für: } r > r_\delta.$$

Für das zweite Teil-Produkt hat man mit Benützung von Ungl. (52), (53) (vgl. die analoge Beziehung (41)):

$$(58) \qquad \left| \prod_{m+1}^n{}^{\nu}\, E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < \prod_1^n{}^{\nu} \left(1 + \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot e^{\sum_1^{p-1}{}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}}}.$$

Dabei ergibt sich genau wie früher (cf. Ungl. (21), (42)):

$$(59) \qquad \prod_1^n{}^{\nu} \left(1 + \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{p}}\right) < e^{\frac{1}{p} \cdot 2^p \cdot n},$$

und andererseits im Falle $p > 1$:

$$(60) \qquad \prod_1^n{}^{\nu}\, e^{\sum_1^{p-1}{}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}}} = e^{\sum_1^{p-1}{}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot n^{\frac{\varkappa}{p}} \cdot \sum_1^n{}^{\nu} \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}}}$$

$$< e^{\sum_1^{p-1}{}^{\varkappa} \frac{p}{\varkappa \cdot (p-\varkappa)} \cdot n}$$

(wegen: $\sum_1^n{}^{\nu} \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}} < \frac{p}{p-\varkappa} \cdot n^{1-\frac{\varkappa}{p}}$ für $\varkappa < p$, s. p. 119, Fussnote 2)). Nun ist:

$$(61) \qquad \sum_1^{p-1}{}^{\varkappa} \frac{p}{\varkappa\,(p-\varkappa)} = \sum_1^{p-1}{}^{\varkappa} \left(\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{p-\varkappa}\right) = 2 \sum_1^{p-1}{}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} < 2 \lg p,$$

so dass die Beziehung (58) mit Benützung von Ungl. (59)—(61) in die folgende übergeht:

$$(62) \qquad \left| \prod_{m+1}^n{}^{\nu}\, E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < e^{n\left(\frac{1}{p} \cdot 2^p + \lg p\right)}.$$

Diese zunächst unter der Voraussetzung $p > 1$ abgeleitete Ungleichung gilt dann, wie leicht zu sehen, auch noch für

$p = 1$, da in diesem Falle die Exponential-Faktoren auf der rechten Seite von Ungl. (58) wegfallen und andererseits, wegen $\lg 1 = 0$, die rechte Seite von Ungl. (62) dann mit derjenigen von (59) identisch wird.

Wegen $n < \delta \cdot r^p + 1$ (s. Ungl. (53)) hat man sodann:

$$\begin{aligned} n\left(\frac{1}{p} \cdot 2^p + \lg p\right) &< (\delta \cdot r^p + 1)\left(\frac{1}{p} \cdot 2^p + \lg p\right) \\ &= \delta \cdot r^p \left(\frac{1}{p} \cdot 2^p + \lg p + \frac{2^p + p \cdot \lg p}{p \cdot \delta \cdot r^p}\right) \\ &< \delta \cdot r^p \left(\frac{1}{p} \cdot 2^p + \lg p + 1\right), \end{aligned}$$

wenn:

$$(63) \qquad \frac{2^p + p \cdot \lg p}{p \cdot \delta \cdot r^p} \leq 1, \quad \text{d. h. } r \geq \left(\frac{2^p + p \cdot \lg p}{p \cdot \delta}\right)^{\frac{1}{p}},$$

und daher:

$$(64) \qquad \left| \prod_{m+1}^{n}{}^{\nu} E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < e^{\delta \cdot r^p \left(\frac{1}{p} \cdot {}^{p} + \lg p + 1\right)},$$

wenn r der Bedingung (63) genügt.

Auf das letzte der in Gl. (55) auftretenden Teil-Produkte lässt sich ohne weiteres die Ungleichung (48) anwenden, da, wie unmittelbar einleuchtet, die betreffenden Schlüsse auch noch für $\sigma = p$ giltig bleiben. Darnach wird also:

$$(65) \qquad \left| \prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < e^{\delta \cdot r^p \cdot p \cdot c_{p,1}}.$$

Durch Zusammenfassung der in Ungl. (56), (57), (64), (65) enthaltenen Resultate liefert also Gl. (55) die Beziehung:

$$(66) \qquad |P(x)| < e^{\delta \cdot r^p \left(2 + \frac{1}{p}(1 + 2^p) + \lg p + p \cdot c_{p,1}\right)} \quad \text{für: } r > r'_\delta,$$

wenn r'_δ die grössere der beiden Zahlen r_δ und $\left(\frac{2^p + p \cdot \lg p}{p \cdot \delta}\right)^{\frac{1}{p}}$ bezeichnet.

Man findet also schliesslich wiederum:

(67) $$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p} \quad \text{für: } |x| > R_\varepsilon,$$

wenn δ zu beliebig vorgeschriebenem ε entsprechend gewählt und $r'_\delta = R_\varepsilon$ gesetzt wird. —

3. Die in dem zuletzt behandelten Falle auftretende Bedingung $\sum_1^\infty {}^{\nu} \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$ $\left(\text{bei gleichzeitiger Divergenz von } \sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p\right)$ ist offenbar allemal erfüllt, wenn:

(68) $$a_{2\nu} = e^{\frac{\pi i}{p}} \cdot a_{2\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

desgl. für ungerade p, wenn:

(69) $$a_{2\nu} = -a_{2\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei im letzteren Falle ausser $\sum_1^\infty {}^{\nu} \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p$ auch allgemein $\sum_1^\infty {}^{\nu} \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^{2\lambda+1}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ verschwindet. Bezeichnet man ferner mit α eine primitive $(p+1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel, etwa:

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{p+1}},$$

und setzt sodann:

(70) $$\begin{cases} a_{(p+1)\nu+\lambda+1} = \alpha^{-\lambda} \cdot a_{(p+1)\nu+1} \\ \qquad\qquad\quad\;\; = \alpha^{-\lambda} \cdot b_{\nu+1} \end{cases} \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.} \\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots p \end{pmatrix},$$

so hat man (wegen: $\sum_0^p {}^{\lambda} \alpha^{\pm\varkappa\lambda} = 0$ für $1 \leqq \varkappa \leqq p$) offenbar: $\sum_1^\infty {}^{\nu} \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\varkappa = 0$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots p$.

Es wird daher

(71) $$\begin{cases} P(x) = \prod_1^\infty {}^{\nu} \prod_0^p {}^{\lambda} \left(1 - \frac{\alpha^\lambda x}{b_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^p {}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{\alpha^\lambda x}{b_\nu}\right)^\varkappa} \\ \quad\;\; = \prod_1^\infty {}^{\nu} \left(1 - \frac{x^{p+1}}{b_\nu^{p+1}}\right), \end{cases}$$

falls $\sum \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^p$ divergiert, jedoch immerhin:

$$|b_\nu| > \nu^{\frac{1}{p}} \quad \left(\text{z. B. } b_\nu = [(\nu+1)\lg(\nu+1)]^{\frac{1}{p}}\right),$$

eine ganze Funktion $(p+1)^{\text{ten}}$ Ranges darstellen, welche für hinlänglich grosse x der Beziehung genügt:

$$(72) \qquad |P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p}.$$

Das in der Einleitung erwähnte Poincarésche Beispiel $\Pi\left(1 - \frac{x^2}{(\nu \lg \nu)^2}\right)$ fällt offenbar gleichzeitig unter den eben bezeichneten, wie auch unter den durch Gl. (69) charakterisierten Typus.

Im übrigen sei über den vorliegenden, in dem vorausgehenden Beweise unter III behandelten Fall $\sigma = p$ noch folgendes bemerkt. Bie Bedingung $\sum_1^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$ in Verbindung mit der als notwendig erkannten: $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{p}}$ erscheint zunächst zwar hinreichend, aber keineswegs notwendig für das Zustandekommen der Beziehung (72). Immerhin wird man sagen dürfen, dass sie nahezu den Charakter einer notwendigen Bedingung besitzt; oder etwas genauer ausgedrückt, dass zum mindesten eine Bedingung ganz ähnlicher Art zu der allemal notwendigen: $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{p}}$ hinzukommen muss, wenn Ungl. (72) erfüllt sein soll.

Während nämlich im Falle $\sigma > p$ jeder einzelne Primfaktor $E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$, also auch jedes endliche Produkt solcher Faktoren nur wesentlich schwächer ins Unendliche wachsen kann, wie $e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma}$ (nämlich nur so, wie $e^{c \cdot |x|^p}$, wo c endlich) und naturgemäss die Erhaltung dieser Eigenschaft für das betreffende unendliche Produkt lediglich von dem infinitären Verhalten der $|a_\nu|$ abhängt, so wächst im Falle $\sigma = p$ schon jeder einzelne Primfaktor wesentlich stärker ins Unendliche, wie $e^{\varepsilon \cdot |x|^p}$ (nämlich wiederum, wie $e^{c \cdot |x|^p}$) und die Beziehung $|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p}$ wird dann überhaupt nur dadurch ermöglicht, dass die von den einzelnen Prim-Faktoren herrührenden Beträge von der Form: $e^{\frac{1}{p} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p}$ sich in ihrer Wirkung gegenseitig zerstören: das letztere geschieht in der Tat, wenn: $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$ wird. Ob die Relation $|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p}$ noch unter anderen Bedingungen zu Stande kommen kann, erscheint fraglich, wenn auch nicht besonders wahrscheinlich. Jedenfalls aber müssten derartige Bedingungen, geradeso wie die Bedingung $\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{a_\nu} = 0$, allemal so geartet sein, dass sie erstens nicht nur von den absoluten Beträgen, sondern auch von den Argumenten der a_ν abhängen, und dass sie zweitens nicht nur auf das infinitäre Verhalten der a_ν, sondern auf die Gesamtheit aller a_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ sich erstrecken. Denn offenbar wird hier (im Gegensatze zu dem allgemeinen Falle $\sigma > p$) allemal jeder einzelne Primfaktor für das Zustandekommen der Beziehung $|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p}$ in dem Grade massgebend sein, dass schon durch Weglassung oder Abänderung irgendwelcher einzelnen Primfaktoren jene Beziehung hinfällig werden kann.

Um diese Bemerkung durch ein möglichst einfaches Beispiel zu illustrieren, werde etwa in dem Ausdrucke (71) $p = 2$ gesetzt und die b_ν reell, positiv angenommen (z. B. $b_\nu = [(\nu+1)\lg(\nu+1)]^{\frac{1}{2}}$), so dass also:

$$(73)\quad \begin{cases} P(x) = \prod_1^\infty{}^\nu \prod_0^2{}^\lambda \left(1 - \frac{a^\lambda x}{b_\nu}\right) \cdot e^{\frac{a^\lambda x}{b_\nu} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a^\lambda x}{b_\nu}\right)^2} \qquad (\text{wo: } a^3 = 1) \\ \qquad = \prod_1^\infty{}^\nu \left(1 - \frac{x^3}{b_\nu^3}\right). \end{cases}$$

Entfernt man jetzt aus $P(x)$ lediglich die zwei von den Wurzeln $a b_1$, $a^2 b_1$ herrührenden Faktoren, so entsteht:

(74) $$P_1(x) = \left(1 - \frac{x}{b_1}\right) \cdot e^{\frac{x}{b_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{b_1}\right)^2} \cdot \prod_2^\infty{}^\nu \left(1 - \frac{x^3}{b^3}\right),$$

und man findet unmittelbar für $x = -r$ (wo r reell, positiv):

(75) $$P_1(-r) = \left(1 + \frac{r}{b_1}\right) \cdot e^{-\frac{r}{b_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{b_1}\right)^2} \cdot \prod_2^\infty{}^\nu \left(1 + \frac{r^3}{b_\nu^3}\right) > e^{c \cdot r^2}.$$

§ 4.

1. Es sei jetzt $\varrho \geqq 0$ der Grenz-Exponent von $P(x)$, also zum mindesten für jedes $\delta > 0$:

(76) $$\lim_{\nu = \infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho + \delta} = 0 \quad \text{(vgl. § 1, Nr. 2).}$$

Alsdann ergibt sich aus den Sätzen von § 2, § 3, dass für alle hinlänglich grossen x:

(77) $$\begin{aligned} |P(x)| &< e^{\varepsilon \cdot |x|^{\varrho + \delta}} \\ &< e^{|x|^{\varrho + \delta}}. \end{aligned}$$

Diese Beziehung kann dann durch die engere ersetzt werden:

(77ᵃ) $$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\varrho},$$

wenn $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\varrho}}$ und ϱ weder Null, noch eine ganze Zahl; desgleichen im Falle eines ganzzahligen ϱ, wenn $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ konvergiert, oder wenn $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ zwar divergiert, aber $a_\nu > \nu^{\frac{1}{\varrho}}$ und $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\varrho = 0$. Umgekehrt ist stets $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\varrho}}$, wenn $P(x)$ der Beziehung (77ᵃ) genügt.

Andererseits hat man nach § 1, Ungl. (11) stets:

(78) $$|P(x)| > e^{|x|^{\varrho - \delta}},$$

für jedes $\delta > 0$ und unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen.

2. Um diese Resultate kürzer formulieren zu können, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein. Genügt eine ganze Funktion $G(x)$ für jedes $\delta > 0$ den beiden Bedingungen:

(79) $|G(x)| < e^{|x|^{\mu+\delta}}$ für alle $|x| > R_\delta$

(80) $|G(x)| > e^{|x|^{\mu-\delta}}$ für unendlich viele beliebig grosse x,

so soll gesagt werden, $G(x)$ sei von der Ordnung μ.[1])

Man bemerke zunächst, dass die durch Ungl. (79) statuierte obere Schranke von $|G(x)|$ merklich erniedrigt werden kann, ohne dass deshalb Ungl. (80) hinfällig zu werden braucht. Insbesondere kann, wenn $\mu > 0$, für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ und $|x| > R_\varepsilon$:

(79a) $$|G(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\mu}$$

werden und $|G(x)|$ dennoch der Ungl. (80) genügen. Denn, wie klein auch $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ vorgeschrieben sein mögen, so hat man stets:

$$\varepsilon \cdot |x|^\delta > 1 \quad \text{für: } |x| > R = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}},$$

und sodann:

$$\varepsilon \cdot |x|^\mu > |x|^{\mu-\delta},$$

so dass also die Existenz der Ungleichungen (79a) und (80) sich keineswegs gegenseitig ausschliesst. Ist nun $G(x)$ durch die beiden Ungleichungen (79a) und (80) charakterisiert, so wollen wir sagen: $G(x)$ gehöre dem Minimal-Typus der Ordnung μ, kürzer dem Minimal-Typus (μ), an.

3. Der Inhalt der Ungleichungen (77) (78) lässt sich daher zunächst folgendermassen aussprechen:

Die Ordnung einer primitiven ganzen Funktion $P(x)$ ist identisch mit dem Grenz-Exponenten.

[1]) Bei Borel (Leçons p. 74) „ordre apparent"; v. Schaper sagt, $G(x)$ sei vom Typus e^{x^μ} und gebraucht das Wort Ordnung in anderem Sinne (a. a. O., p. 12, 22). Nach seiner Terminologie wäre $G(x)$ von der Ordnung $\frac{1}{\mu}$.

Sodann ergibt sich mit Rücksicht auf (77[a]): Ist ϱ weder Null, noch eine ganze Zahl, so besteht die Beziehung $|a_\nu| < \nu^{\frac{1}{\varrho}}$ oder auch nicht, je nachdem $P(x)$ dem Minimal-Typus (ϱ) angehört oder nicht.

Bedeutet ferner $[\varrho] < \varrho$ die grösste in ϱ enthaltene ganze Zahl (eventuell die Null, wenn $\varrho < 1$), so ist $P(x)$ vom Range $[\varrho]$.

Ist ϱ eine ganze Zahl und gehört $P(x)$ nicht dem Minimal-Typus (ϱ) an, so kann $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ nicht konvergieren, folglich ist in diesem Falle $P(x)$ vom Range ϱ. Gehört dagegen $P(x)$ dem Minimal-Typus (ϱ) an, so dass also $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\varrho}}$ ausfällt, so wird in der Regel $P(x)$ vom Range $\varrho - 1$ (also ϱ Konvergenz-Exponent) sein; nur in besonderen Fällen, nämlich bei ganz spezieller Verteilung der a_ν, ist $P(x)$ vom Range ϱ.

Führt man statt des Grenz-Exponenten ϱ den Rang p ein, so kann der wesentliche Inhalt des letzten Absatzes auch folgendermassen formuliert werden: Eine primitive ganze Funktion $P(x)$ vom Range p ist höchstens vom Minimal-Typus $(p+1)$, mindestens vom Minimal-Typus p. Dabei gehören dem Minimal-Typus $(p+1)$ tatsächlich alle diejenigen $P(x)$ an, für welche $(p+1)$ Konvergenz-Exponent ist; dagegen dem Minimal-Typus (p) überhaupt nur solche $P(x)$, für welche p Divergenz-Exponent, ausserdem noch $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{p}}$ ist und die a_ν ganz speziellen, auf jeden einzelnen Index ν sich erstreckenden Beschränkungen unterliegen.