Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXIII. Jahrgang 1903.

München.

Verlag der K. Akademie.

1904.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Untersuchungen über die Umlaufbewegung hydrometrischer Flügel.

Von Dr. **M. Schmidt.**

(*Eingelaufen 13. Juni.*)

Wassergeschwindigkeitsmessungen mit dem hydrometrischen Flügel werden bekanntlich in der Art ausgeführt, dass man die sekundlichen Umlaufzahlen n des an der Messungsstelle in das Wasser eingesetzten Flügels beobachtet und die Wassergeschwindigkeit v aus einer zwischen den Grössen n und v bestehenden mathematischen Beziehung, der sogenannten „Flügelgleichung“ berechnet.

Wie Verfasser in einem im Jahre 1895 in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure veröffentlichten Aufsatz „die Gleichung des Woltmannschen Flügels und die Ermittelung ihrer Koeffizienten“ gezeigt hat, kann dieser Gleichung die Form gegeben werden

$$v = K \cdot n\,(1 - \beta) + \sqrt{(K \cdot n\,\beta)^2 + v_0^2}. \tag{1}$$

Der Koeffizient β dieser Formel, dessen Wert zwischen 0 und 1 liegt, ist von den inneren Widerständen im Laufwerk des Flügels abhängig; v_0 ist die sogenannte „Anlaufgeschwindigkeit“ des Flügels und K jene Wegstrecke, welche bei einer vollen Umdrehung des Flügelrades von den über die Schaufelflächen des Flügels hingleitenden Wasserteilchen zurückgelegt wird. Die Grösse derselben entspricht bei Flügelrädern mit nach Schraubenflächen gekrümmten Schaufeln der Ganghöhe dieser Schraubenfläche.

Die Ermittelung der Zahlenwerte von K, v_0 und β erfolgt zumeist auf Grund von Versuchen, bei welchen der auf einem Fahrzeug befestigte Flügel mit verschiedenen, durch gleichzeitige Messungen festgestellten Geschwindigkeiten durch stillstehendes Wasser fortbewegt wird.

Die sorgfältige Ausführung dieser, für jeden Flügel in grosser Zahl nötigen Versuche, erfordert mancherlei Einrichtungen und Hilfsmittel, die nur in ständigen, für diesen Zweck besonders eingerichteten Flügelprüfungsstationen verfügbar zu sein pflegen und verlangt einen ziemlichen Aufwand von Beobachtungs- und Rechnungsarbeit.

Da die Ergebnisse solcher Versuche von der Eigenart der Versuchsanordnung beeinflusst zu sein pflegen, so erscheint es wünschenswert, die aus den Versuchsmessungen abgeleiteten Zahlenkoeffizienten auch noch in anderer Weise auf ihre Richtigkeit zu prüfen und zu untersuchen, ob das angewendete Verfahren der Koeffizientenbestimmung auch der Theorie genügend entsprechende Koeffizientenwerte liefert. Zu diesem Zweck soll hier zunächst ein theoretisches Verfahren der Koeffizientenbestimmung angegeben und für einige Flügel von verschiedener Art und Grösse ein Vergleich der auf theoretischem und hydrometrischem Wege bestimmten Koeffizientenwerte vorgenommen werden.

I. Theoretische Bestimmung des Hauptkoeffizienten K.

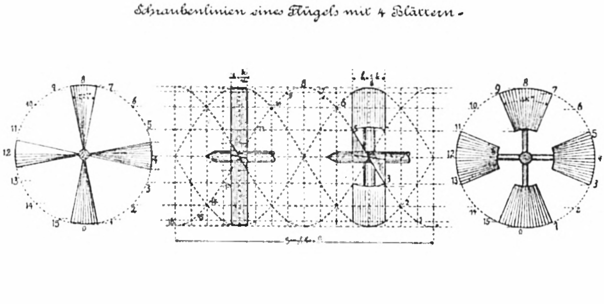
Was in erster Linie den Hauptkoeffizienten K der Flügelgleichung anlangt, so lässt sich der theoretische Wert desselben für Flügelräder mit schraubenförmig gekrümmten Schaufelflächen, welche geradlinige, die Achse senkrecht schneidende Erzeugende besitzen und nach einem Kreiszylinder begrenzt sind, leicht ermitteln.

Es genügt hiefür eine scharfe Projektionszeichnung des Schaufelrades in natürlicher Grösse auf einer zur Rotationsachse des Flügels senkrecht stehenden Bildebene anzufertigen, die Sektorwinkel, welche die Kantenlinien der Flügelschaufeln bilden, unter Verwendung eines guten Transporteurs oder Sehnenmassstabes abzugreifen und die Höhe des das Schaufelrad umhüllenden Kreiszylinders mittelst einer Nonienschublehre zu messen.

Bezeichnet α den mittleren Sektorwinkel der Schaufelblätter in Sexagesimalgraden und h die mittlere Höhe des Begrenzungszylinders in Metermass, so findet sich, wie ein Blick auf Fig. 1 lehrt, die Ganghöhe der Schraubenfläche und damit der theoretische Wert des Koeffizienten K der Flügelgleichung aus der Beziehung

$$K = \frac{360}{\alpha} h. \tag{2}$$

Fig. 1.



Wie leicht erklärlich, stimmen die nach der vorstehenden Gleichung aus den Ausmassen der Flügelräder berechneten Koeffizienten wegen der unvermeidlichen, in Mängeln der mechanischen Ausführung begründeten Form- und Stellungsfehler der Schaufelflächen und wegen der durch das Flügelgehäuse und die Befestigungsvorrichtung des Flügels veranlassten Umlaufstörungen des Flügelrades mit den aus hydrometrischen Versuchen hervorgehenden Koeffizientenwerten nicht völlig überein. Beide Werte unterscheiden sich jedoch bei richtig konstruierten Flügelrädern von guter Form und Ausführung verhältnismässig nur wenig.

Da alle hier in Frage kommenden Störungsursachen die Umlaufbewegung des Flügelrades verzögern, so wird der Koeffizient K bei der hydrometrischen Prüfung zumeist grösser als die aus den Schaufelabmessungen berechnete Schraubenganghöhe gefunden.

Eine Ausnahme von dieser Regel bilden indessen die mit engen Schutzringen umgebenen Schaufelräder, die infolge der Kontraktion des den Schutzring durchlaufenden Wasserstromes bei der hydrometrischen Prüfung etwas zu kleine Koeffizientenwerte liefern.

Nach zahlreichen durch die Flügelprüfungsanstalt der Technischen Hochschule in München ausgeführten Versuchen, deren Ergebnisse in den vom Verein deutscher Ingenieure herausgegebenen „Mitteilungen über Forschungsarbeiten“ Heft 11 ausführlich mitgeteilt sind, beträgt der Unterschied der in beiderlei Weise bestimmten Hauptkoeffizienten bei gutem Zustand der benützten Flügel $+ 2\%$ für die Flügelbefestigung am Seil oder an der Schwimmstange, und $+ 4\%$ bei der Verwendung einer lotrecht stehenden Flügelstange.

Man hat demnach die nach Gleichung (2) bestimmte Schraubenganghöhe um 2% bezw. 4% zu vergrössern, um mit den hydrometrischen Versuchen gut übereinstimmende Werte der Hauptkoeffizienten K der Flügelgleichung zu erhalten.

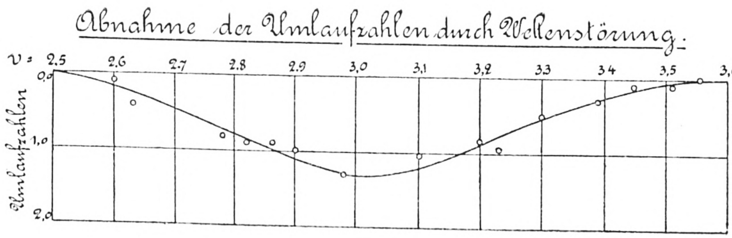
Zeigen sich grössere Abweichungen, so ist Anlass gegeben die Störungsursachen zu ermitteln und zu versuchen, ob nicht durch Verbesserungen in der Versuchsanordnung oder auch in der mechanischen Einrichtung der Flügel theoretisch richtigere Koeffizientenwerte zu erlangen sind.

Vergleichende Koeffizientenbestimmungen dieser Art haben dazu geführt, Störungserscheinungen verschiedener Art in der Umlaufbewegung hydrometrischer Flügel zu erkennen und als Ursachen derselben insbesondere eine fehlerhafte Stellung und Befestigung der Flügelschaufeln an der Flügelwelle, sowie auch einen schädlichen Einfluss der Befestigungsvorrichtung des Flügels nachzuweisen.

Eine der auffälligsten Störungen in der Flügelbewegung zeigt sich bei der Vornahme von Flügelprüfungen in Versuchskanälen mit geringer Wassertiefe besonders bei der Durchfahrung längerer Versuchsstrecken, wenn lotrecht stehende, über 3 cm starke Flügelstangen verwendet wurden. Es macht sich hiebei eine regelmässige Abnahme der sonst konstanten Umlaufzahlen des Flügelrades innerhalb einer bestimmten Wegstrecke bemerkbar, die ihren Maximalwert erreicht, wenn die Fortbewegungsgeschwindigkeit des Flügels der der Wassertiefe h im Kanal entsprechenden Wellengeschwindigkeit $v = \sqrt{g\,h}$ gleich kommt.

Wie die in Fig. 2 dargestellte Abnahme der Umlaufzahlen eines bei den Versuchen an einer lotrechten Stange von 4,5 cm Stärke befestigten Flügels erkennen lässt, beginnt dieselbe für 1 m Wassertiefe bei etwa 2,5 m Fortbewegungsgeschwindigkeit, erreicht bei etwas über 3 m ihr Maximum und verliert sich wieder bei 3,5 m Geschwindigkeit.

Fig. 2.



Bei Messungen in Wasserbecken von grösserer Tiefe, bei welchen die Fortbewegungsgeschwindigkeit des Flügels die Wellengeschwindigkeit $\sqrt{g\,h}$ nicht erreicht, kommt eine derartige Störung der Umlaufbewegung des Flügels nicht zum Vorschein, wie einige im Starnberger See bei 5 bis 7 m Wassertiefe mit dem gleichen Flügel und derselben Befestigungsvorrichtung ausgeführte Versuchsreihen bewiesen haben.

Die Ursache dieser Störungserscheinung kann nicht wohl in einer einfachen, von ungenügender Profilbreite des Prüfungskanales herrührenden Stauwirkung des Flügels gefunden werden, da diese nicht an eine bestimmte Geschwindigkeit gebunden ist, dieselbe liegt vielmehr in der Wirkung einer Grundwelle, welche durch die Befestigungsvorrichtung des Flügels hervorgebracht wird und diesen bei einer der Wellengeschwindigkeit im Kanal gleichkommenden Fortbewegung ständig begleitet.

Die bezüglich der Entstehungsbedingungen dieser Erscheinung angestellten Versuche lehren, dass bei der Verwendung lotrechter Flügelstangen von 3 cm Durchmesser und darunter, oder solcher mit ovalem Querschnitt, sowie bei der Flügelbefestigung am Seil und an der Schwimmstange die Umlaufzahlen des Flügels von dieser Störung nur in wenig merklicher Weise beeinflusst werden. Ebenso bleibt eine Störung dieser Art ohne schädlichen Einfluss, wenn bei den Flügelprüfungen in Versuchskanälen nur kurze Wegstrecken von etwa 20 m Länge durchfahren werden; während anderseits die Verwendung stärkerer Flügelstangen, von 4,5 cm an, bei der Durchfahrung von Versuchsstrecken von 60 und 80 m Länge eine bis auf 10% des normalen Wertes anwachsende Abnahme der Umlaufzahlen ergeben hat.

II. Berechnung der Anlaufgeschwindigkeit v_0 und des Widerstandskoeffizienten β.

Unter „Anlaufgeschwindigkeit“ des Flügels soll diejenige Wassergeschwindigkeit verstanden werden, bei welcher die Stosskraft der die Flügelschaufeln treffenden Wasserfäden gerade hinreicht, um die Widerstände im Flügelmechanismus zu überwinden und eine stetige Umlaufbewegung des Flügelrades hervorzurufen.

Da sich die Grösse des Widerstandsmoments des Flügelrades durch einen einfachen Versuch feststellen lässt, so hat man nur das Angriffsmoment der auf Drehung des Flügelrades wirkenden Komponente des Wasserstosses, die sogenannte „Triebkraft“, als Funktion der Wassergeschwindigkeit auszudrücken und beide Momente einander gleich zu setzen, um eine Gleichung zur Berechnung der gesuchten Anlaufgeschwindigkeit zu erhalten.

Zur Berechnung der „Triebkraft“ für die nach Schraubenflächen gekrümmten Flügelschaufeln gelangt man auf folgende Weise:

Der Wert des Widerstandes einer ebenen Fläche F bei senkrechtem Stoss ist von Euler[1]) klar und überzeugend entwickelt zu

$$W = \frac{F \cdot \gamma \cdot v^2}{2\,g}, \tag{3}$$

wenn mit γ das Gewicht der Volumeinheit Wasser, mit g die Schwerebeschleunigung und mit v die Wassergeschwindigkeit bezeichnet wird. Wählt man Centimeter und Gramm als Einheiten, so ist in unseren Formeln $\gamma = 1$ zu setzen.

Die einzelnen schraubenförmig gekrümmten Elementarstreifen der Flügelschaufeln werden jedoch nicht senkrecht,

---

[1]) Euler, Théorie complette de la construction et de la maneuvre des voisseaux, Cap. 1, § 1—4.

sondern je nach ihrem Abstand von der Flügelachse von den parallel zu derselben laufenden Wasserfäden unter verschiedenen Stosswinkeln δ getroffen, deren Grösse sich aus den Abwickelungsdreiecken der den Elementarstreifen entsprechenden Schraubenlinien berechnen lässt.

Ist r der Abstand einer dieser Schraubenlinien von der Achse und K die Ganghöhe der Schraube, so hat man

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\, r\, \pi}{K}. \tag{4}$$

Die Tangenten der Stosswinkel nehmen also im gleichen Verhältnis wie die Halbmesser r der Elementarstreifen ab.

Statt mit diesen verschieden grossen Stosswinkeln zu rechnen, führen wir einen mittleren Winkelwert ein und wählen als solchen den Stosswinkel im Druckmittelpunkt der senkrechten Projektionen der Schaufelflächen auf die Rotationsebene.

Da diese Projektionen Ausschnitte aus Kreisringen darstellen mit dem Sektorwinkel α und den beiden Halbmessern r_0 und r_1, so ist der Schwerpunktshalbmesser der erwähnten Schaufelprojektion

$$r = \tfrac{2}{3}\,\frac{r_1^3 - r_0^3}{r_1^2 - r_0^2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha^0}{2}} \cdot \frac{180}{\pi}. \tag{5}$$

Die in dieser Gleichung eingehenden Zahlenwerte können aus der zur Ermittelung der Ganghöhe K der Schraubenfläche des Flügelrades bereits angefertigten Projektionszeichnung entnommen werden.

Die Mehrzahl der Theoretiker findet für das Verhältnis des senkrechten zum schiefen Wasserstoss auf die Vorderseite einer ebenen Platte von gleichbleibender Grösse den Wert $1 : \sin^2 \delta$.

Dieser Wert ist richtig, wie die Versuche von Fink[1]) für

[1]) Zivilingenieur, 1892, S. 539 und S. 653 etc. etc.

die Grösse des Parallelstosses von im Wasser bewegten ebenen Platten mit sich gleichbleibender Grösse ergeben haben, wenn die Wirkung des Wassers auf die Rückseite der Flächen nicht in Betracht kommt; letztere kann aber im vorliegenden Fall, in welchem es sich nur um verhältnismässig kleine Geschwindigkeiten handelt, jedenfalls unberücksichtigt bleiben.

Übrigens haben die von Fink in fliessendem Wasser ausgeführten Versuche auch bewiesen, dass die Stosskraft von fliessendem Wasser gegen einen in demselben ruhenden Körper identisch ist mit dem Widerstand, welchen ein in stillstehendem Wasser fortbewegter Körper erfährt. Darin liegt offenbar ein Beweis für die Zulässigkeit des üblichen Verfahrens der Flügeltarierung in stillstehendem Wasser mit bewegtem Flügel.

Führt man das erwähnte Verhältnis ein, so erhält man für die gesamte Stosskraft des Wassers parallel zur Flügelachse auf die unter dem mittleren Winkel δ getroffenen Flächenelemente der Flügelschaufeln

$$D = W \sin^2 \delta = \frac{F \cdot v^2}{2\,g} \sin^2 \delta \tag{6}$$

und wenn man unter $Q = F \cdot \sin \delta$ die Projektion der Schaufelfläche senkrecht zur Flügelachse versteht, deren Grösse sich aus dem Ausdruck findet

$$Q = \frac{a}{2} (r_1^2 - r_0^2) \frac{\pi}{180}, \tag{7}$$

so hat man zunächst

$$D = \frac{Q\, v^2 \sin \delta}{2\,g} \tag{8}$$

und hieraus den Normaldruck N senkrecht zur Schaufelfläche

$$N = \frac{D}{\sin \delta} = \frac{Q\, v^2}{2\,g}. \tag{9}$$

Wird dieser Normaldruck in seine beiden Komponenten parallel zur Rotationsachse und senkrecht zu derselben zerlegt, so erhält man für die in der Rotationsebene des Flügelrades liegende Komponente, welche wir die „Triebkraft" nennen,

$$P = \frac{Q\, v^2 \cos\delta}{2\, g}. \tag{10}$$

Wie Weisbach (Theoretische Mechanik I, S. 451) angibt, ist nach den Versuchen von du Buat und Thibault dieser Wert noch mit einem Widerstandskoeffizienten η zu multiplizieren, der gleich 1,86 $F^{0,1}$ für Quadratfuss gesetzt werden kann; für F in Quadratcentimeter erhält man $\eta = 0{,}932 \cdot F^{0,1}_{\text{qcm}}$ und somit

$$P = \eta \cdot \frac{Q\, v^2 \cos\delta}{2\, g}. \tag{11}$$

Den zur Berechnung von η erforderlichen Flächeninhalt F einer Schaufel findet man als Produkt der Kantenlänge $s = r_1 - r_0$ der Schaufel und der Länge l_m des durch die beiden Schaufelkanten begrenzten Abschnitts der durch die Schaufelmitte laufenden Schraubenlinie $F = s \cdot l$, wobei

$$l = \sqrt{\left(\frac{r\,\pi\,\alpha}{180}\right)^2 + h^2}$$

zu setzen ist, $r = \dfrac{r_0 + r_1}{2}$ und h die Höhe des das Schaufelrad begrenzenden Zylinders bezeichnet.

Der Angriffspunkt der Kraft P ist im Druckmittelpunkte, bezw. im Schwerpunkte der Projektion der Schaufelfläche, anzunehmen, welcher in dem in Gl. (5) angegebenen Abstand r von der Flügelachse gelegen ist. Das Angriffsmoment des Wasserstosses auf eine Schaufel ist somit

$$M = P \cdot r \tag{12}$$

und wenn z die Zahl der Schaufeln bezeichnet, so hat man das gesamte Drehmoment

$$M_a = z \cdot P \cdot r. \tag{13}$$

Die diesem Angriffsmoment entgegenwirkenden Widerstände bestehen aus der Zapfenlagerreibung der Flügelwelle; aus den Widerständen der Räder und Kontaktfedern des mit der Flügelwelle in Berührung stehenden Zählwerkes, sowie aus der an den Schaufelflächen wirksamen sogenannten „Wasserreibung“.

Die Grösse dieser verschiedenartigen Widerstände kann zwar nicht im Einzelnen, wohl aber in ihrer Gesamtwirkung durch einen sehr einfachen Versuch festgestellt werden.

Schlingt man nämlich um eine freiliegende Stelle der Flügelwelle, oder, wenn sich eine solche nicht vorfindet, um eine zu diesem Zweck vorübergehend angebrachte Verlängerung der Welle einen ungezwirnten Seidenfaden in einer grösseren Anzahl von Windungen, legt diesen über eine in Spitzen laufende, sehr leicht bewegliche Rolle — etwa eine Planimeterrolle — und befestigt man am freien Ende des Fadens eine kleine Schale, so kann man, nachdem der Flügel in ein Gefäss mit Wasser eingesetzt ist, die Schale durch Einlegen kleiner Gewichte soweit belasten, bis der Flügel im Wasser eine ganz langsame, gleichförmige Umlaufbewegung annimmt.

Das Gewicht G der Schale mit ihrer Belastung in Gramm mal dem halben Durchmesser d der Welle an der Umschlingungsstelle des Fadens in Centimetern, gibt das Widerstandsmoment des Flügels

$$M_w = G \cdot \frac{d}{2}. \tag{14}$$

Setzt man dieses dem Angriffsmomente M_a des Wasserstosses gleich, so erhält man eine Gleichung zur Berechnung der Anlaufgeschwindigkeit v_0 des Flügels, in welcher alle übrigen Grössen bekannt sind.

Da bei der Ableitung der vorstehenden Formeln mit Rücksicht auf eine möglichst einfache Berechnung des Endergebnisses auf mathematische Strenge teilweise verzichtet werden musste, sowie auch gewisse Erfahrungskoeffizienten eingeführt wurden, die unter äusseren Verhältnissen festgestellt sind, welche von den hier vorliegenden verschieden sind, so erschien es wünschenswert den Grad der Zuverlässigkeit der aus den aufgestellten Formeln zu gewinnenden Rechnungsergebnisse noch zu prüfen.

Zu diesem Zwecke sind für acht in der nachstehenden Zahlentafel näher bezeichnete Flügel von sehr verschiedener Art und Grösse die Anlaufgeschwindigkeiten nach den vorstehend entwickelten Formeln berechnet und mit den entsprechenden aus der hydrometrischen Prüfung gewonnenen Werten verglichen worden. Es fand sich für die in der Tafel für $n = 0$ angegebenen beiden Werte v_0 ein mittlerer Unterschied von rund 1 cm; ein Ergebnis, das umsomehr befriedigen dürfte, als auch die hydrometrische Bestimmung auf einen höheren Genauigkeitsgrad als diesen keinen Anspruch machen kann.

Um endlich auf kurzem Wege zu einer Wertermittelung für den Widerstandskoeffizienten β zu gelangen, kann zwischen der vorstehend berechneten Anlaufgeschwindigkeit v_0 und dem in der Flügelgleichung (1) auftretenden Koeffizienten β, dessen Grösse von den inneren Widerständen im Flügelmechanismus abhängt und sich zwischen den Grenzwerten 0 und 1 bewegt, die einfache, durch die Gleichung einer Geraden darstellbare Beziehung angenommen werden

$$\beta = a + b \cdot v_0, \tag{15}$$

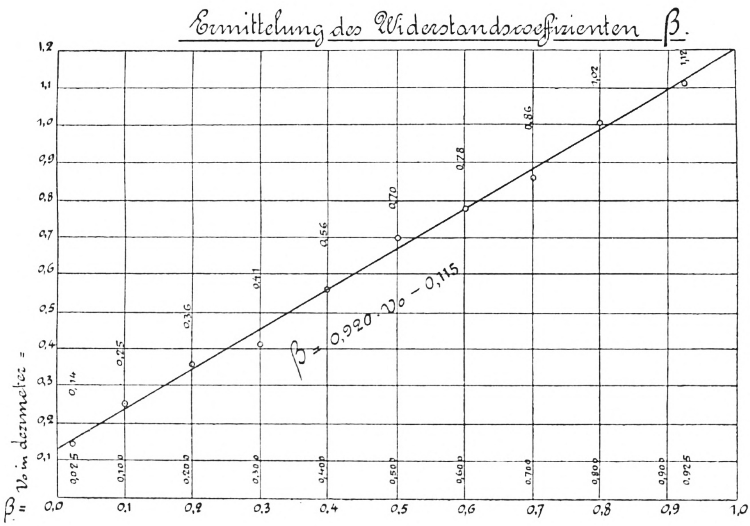
in welcher a und b Zahlenkoeffizienten bezeichnen, die sich aus Versuchsergebnissen berechnen lassen.

Eine in graphischer Form ausgeführte Zusammenstellung einer grösseren Anzahl einander entsprechender Werte von β und v_0, Fig. 3, lässt die Richtigkeit dieser Beziehung klar hervortreten.

Um zu einer zuverlässigen, rechnerischen Feststellung der Koeffizientenwerte a und b zu gelangen, sind aus 100 durch die Münchener Flügelprüfungsanstalt in den letzten Jahren ermittelten Flügelgleichungen eine gleiche Anzahl zusammengehöriger Einzelwerte von v_0 und β entnommen, ihrer Grösse nach geordnet und dann in zehn Gruppenwerte zusammengefasst worden. Die aus diesen zehn Gruppen berechneten Mittelwerte finden sich in Fig. 3 eingeschrieben.

Um einfache Zahlen zu erhalten, ist für v_0 das Dezimeter als Einheit gewählt. Da ferner grössere Werte von v_0, als solche von 1,2 dm nur selten vorkommen, so ist die vorliegende Untersuchung auf Werte von v_0 unter 1,2 dm beschränkt worden. Für Werte von v_0, welche diese Grenze überschreiten, kann $\beta = 1$ gesetzt werden.

Fig. 3.



Die Berechnung der wahrscheinlichsten Koeffizientenwerte a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt

$$a = -0,115 \pm 0,043 \quad \text{und} \quad b = +0,920 \pm 0,023.$$

Die Bestimmungsgleichung für β ist somit

$$\beta = -0,115 + 0,920 \cdot v_0. \tag{16}$$

Die Ausgleichung ergab ferner als mittleren Fehler der in die Rechnung eingeführten Gruppenmittel von β 22 Einheiten der dritten Dezimale. Da diesen Gruppenmitteln das Gewicht 10 zukommt, so ergibt sich der mittlere Fehler m_0 der Gewichtseinheit der zur Berechnung der Koeffizienten a und b benützten Einzelwerte von β zu

$$m_0 = \pm 0{,}07.$$

Berechnet man endlich aus den angegebenen durch die Ausgleichung gefundenen mittleren Fehlern der Koeffizientenwerte a und b die mittlere Unsicherheit des als Funktion von a und b sich darstellenden Wertes β und berücksichtigt, dass v_0 nach unseren Voraussetzungen im ungünstigsten Falle 1,2 werden kann, so findet sich die Unsicherheit des aus der angegebenen Gleichung ermittelten Wertes β im ungünstigsten Falle bei $v_0 = 1{,}2$, zu

$$m_\beta = \pm 0{,}12$$

und für einen mittleren Wert $v_0 = 0{,}6$ zu

$$m_\beta = \pm 0{,}10.$$

Dieser Genauigkeitsgrad dürfte den für die Berechnung von β zu stellenden Anforderungen um so mehr genügen, als kleine Änderungen von β, wie eine Differenzierung der Flügelgleichung erkennen lässt, lediglich bei der Berechnung sehr kleiner Wassergeschwindigkeiten in Betracht kommen und für diese nur im ungünstigsten Falle, das ist, wenn sich die sekundlichen Umlaufzahlen des Flügels dem Wert Null nähern, einen dem Werte m_β relativ gleichen Fehler bedingen.

Die Zuverlässigkeit des im Vorstehenden entwickelten Verfahrens der theoretischen Koeffizientenbestimmung soll schliesslich an einigen Rechnungsbeispielen gezeigt werden, die sich auf die in der nachstehenden Zahlentafel (S. 254/255) aufgeführten Flügel beziehen, welche, wie oben bereits erwähnt, auch zur Berechnung der Anlaufgeschwindigkeit gedient haben.

Als Hauptkoeffizienten der Gleichungen dieser Flügel sind zunächst die aus den Abmessungen der Schaufeln berechneten und um $4\,^0/_0$ erhöhten Werte der Ganghöhe der Schraubenflächen der Schaufelräder dieser Flügel angenommen worden. Ferner wurden die aus 13 und 14 berechneten Anlaufgeschwindigkeiten v_0 in Gleichung 16 eingesetzt und die Werte der Widerstandskoeffizienten β berechnet. Diese Koeffizienten, in die allgemeine Flügelgleichung (1) eingesetzt, ergeben die am Kopf der Zahlentafel bei den Flügeln 1), 2) und 3) in zweiter Linie aufgeführten Ausdrücke zur Berechnung der Wassergeschwindigkeit v_2, während die in erster Linie stehenden Gleichungen für v_1 durch Einsetzen der aus der hydrometrischen Flügelprüfung gewonnenen Koeffizientenwerte erhalten worden sind.

Führt man nach beiden Gleichungen für dieselben sekundlichen Umlaufzahlen n die Geschwindigkeitsberechnung durch, so findet man, dass bei den grösseren Flügelrädern von mehr als 0,5 m Schraubenganghöhe, wie sie die Flügel 1) bis 3) der Tabelle besitzen, die Unterschiede der Geschwindigkeitswerte v_1 und v_2 wenige Centimeter nicht überschreiten.

Weniger befriedigend ist diese Übereinstimmung bei den kleineren Flügelrädern unter 0,5 m Schraubenganghöhe, bei welchen die vorerwähnten Unterschiede mit wachsenden Werten von n bis zu 5 und 6 cm zunehmen.

Die Ursache dieser Abweichungen lässt sich in der zu geringen Genauigkeit der Bestimmung der Hauptkoeffizientenwerte K erkennen, deren Grösse für kleine Schaufelräder von wenigen Centimetern Durchmesser aus einer Projektionszeichnung offenbar nicht mit gleicher relativer Schärfe ermittelt werden kann, wie bei grossen Schaufelrädern.

Diesem Missstande ist jedoch dadurch in einfacher Weise abzuhelfen, dass für kleine Schaufelräder, oder auch für solche, deren mechanische Ausführung den theoretischen Voraussetzungen bezüglich der geometrisch richtigen Form der Schaufelflächen nicht genügend entspricht, der Wert von K mittelst einiger einander entsprechender Werte von v und n abgeleitet wird, die durch Beobachtungen in fliessendem Wasser, etwa unter Zuhilfenahme von Oberflächenschwimmern, oder durch vergleichende Messungen mit einem anderen hydrometrisch geprüften Flügel, ermittelt worden sind.

In diesem Falle erhält man genügend zuverlässige Hauptkoeffizientenwerte aus der Beziehung:

$$K = \frac{\Sigma\, v}{\Sigma\, n}.$$

Der in dieser Weise bestimmte Koeffizient K wird sodann mit den nach dem oben angegebenen theoretischen Verfahren abgeleiteten Werten v_0 und β in die Flügelgleichung eingeführt, deren Koeffizienten somit bestimmt sind.

Dieses Verfahren kann in zutreffender Weise als „halbtheoretische Koeffizientenbestimmung“ bezeichnet werden und liefert, wie die unter Nr. 4 bis 8 in der Zahlentafel mitgeteilten Berechnungsbeispiele zeigen, Geschwindigkeitswerte (v_2), welche sich nur sehr wenig von jenen Werten (v_1) unterscheiden, die sich mit Hilfe der auf hydrometrischem Wege bestimmten Koeffizienten ergeben.

Dieses letztere Verfahren der Koeffizientenbestimmung lässt sich mit demselben guten Erfolg, wie bei kleinen Flügeln, auch für grosse Schaufelräder und insbesondere auch für solche mit ebenen Schaufelflächen in Anwendung bringen, wenn für die Berechnung der Anlaufgeschwindigkeit v_0 die durch die ebene Schaufelform bedingten Abänderungen in den Berechnungsformeln getroffen werden. Dieselben betreffen namentlich die Ausdrücke für den Abstand r des Druckmittelpunktes der Schaufelfläche von der Flügelachse und für die Ermittelung des Winkels δ, unter welchem die ebenen Schaufelflächen von den parallel zur Flügelachse laufenden Stromfäden getroffen werden.

Für diesen Winkel hat man bei ebenen Schaufeln:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b}{h},$$

oder wenn statt h die mittlere Breite l der Schaufeln, gemessen im Druckmittelpunkt, eingeführt wird:

$$\sin \delta = \frac{b}{l}.$$

Im übrigen wird in den Berechnungsformeln für v_0 und β keine weitere Abänderung erforderlich; indessen kann man die Projektionsfläche Q der Schaufeln auch aus der Beziehung $Q = F \sin \delta$ berechnen, nachdem der mittlere Flächeninhalt F der Schaufeln aus den Abmessungen bestimmt worden ist.

Dass sich mit diesem Verfahren auch bei ganz kleinen Flügeln mit ebenen Schaufeln eben so gute Ergebnisse, wie bei schraubenförmigen Schaufelflächen erzielen lassen, zeigt das in der Zahlentafel unter Nr. 8 mitgeteilte Beispiel eines von Kern in Aarau gefertigten Flügels mit vier ebenen Schaufelflächen.

Zahlen-

1) Flügel von Ott Nr. 237/IV				2) Flügel von Ott Nr. 237/I			
$v_1 = 0{,}9064 \cdot n + \sqrt{0{,}18195 \cdot n^2 + 0{,}00142}$ $v_2 = 0{,}8215 \cdot n + \sqrt{0{,}25351 \cdot n^2 + 0{,}00286}$				$v_1 = 0{,}7593 \cdot n + \sqrt{0{,}1161 \cdot n^2 + 0{,}0010}$ $v_2 = 0{,}8983 \cdot n + \sqrt{0{,}04413 \cdot n^2 + 0{,}00112}$			
n	v_1 m	v_2 m	Δ mm	n	v_1 m	v_2 m	Δ mm
.	$K_1 = 1{,}333$	$K_2 = 1{,}325$	8	.	$K_1 = 1{,}100$	$K_2 = 1{,}109$	9
.	$\beta_1 = 0{,}32$	$\beta_2 = 0{,}38$		.	$\beta_1 = 0{,}31$	$\beta_2 = 0{,}19$	
0,0	0,038	0,053	− 15	0,0	0,032	0,033	− 1
0,1	0,147	0,156	− 9	0,1	0,122	0,129	− 7
0,2	0,275	0,278	− 3	0,25	0,281	0,287	− 6
0,3	0,405	0,407	− 2	0,50	0,553	0,559	− 6
0,4	0,537	0,537	0	0,75	0,827	0,835	− 8
0,5	0,670	0,668	+ 2	1,0	1,101	1,113	− 12
1,0	1,335	1,328	+ 7	1,5	1,651	1,664	− 13
1,5	2,001	1,989	+ 12	2,0	2,201	2,218	− 17
2,0	2,667	2,651	+ 16	2,5	2,751	2,772	− 21
2,5	3,333	3,314	+ 19	3,0	3,301	3,326	− 25
Planimetr. Mittel: $\Delta m =$			11			$\Delta m =$	13

5) Flügel von Ott und Coradi[1]				6) Flügel von Ott Nr. 206/I[1]			
$v_1 = \sqrt{0{,}02958 \cdot n^2 + 0{,}02434}$ $v_2 = \sqrt{0{,}02982 \cdot n^2 + 0{,}02993}$				$v_1 = 0{,}0583 \cdot n + \sqrt{0{,}01074 \cdot n^2 + 0{,}00416}$ $v_2 = 0{,}0808 \cdot n + \sqrt{0{,}00654 \cdot n^2 + 0{,}0045}$			
n	v_1 m	v_2 m	Δ mm	n	v_1 m	v_2 m	Δ mm
.	$K_1 = 0{,}1720$	$K_2 = 0{,}1727$	0,7	.	$K_1 = 0{,}1619$	$K_2 = 0{,}1617$	0,2
.	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 1$		.	$\beta_1 = 0{,}64$	$\beta_2 = 0{,}50$	
0,0	0,156	0,173	− 17	0,0	0,065	0,067	− 2
0,2	0,160	0,176	− 16	0,25	0,084	0,090	− 6
0,6	0,187	0,202	− 15	0,50	0,112	0,119	− 7
1,0	0,232	0,244	− 12	1,0	0,180	0,186	− 6
2,0	0,378	0,386	− 8	2,0	0,334	0,337	− 3
4,0	0,705	0,712	− 7	5,0	0,814	0,814	0
6,0	1,044	1,051	− 7	7,0	1,136	1,136	0
10,0	1,727	1,736	− 9	10,0	1,621	1,620	+ 1
13,0	2,244	2,252	− 8	15,0	2,430	2,428	+ 2
17,0	2,925	2,941	− 16	20,0	3,239	3,236	+ 3
Planimetr. Mittel: $\Delta m =$			10			$\Delta m =$	3

[1]) Die Gleichungskoeffizienten der Flügel unter Nr. 4 bis 7 sind

tafel.

3) Flügel von Ott Nr. 237/II

$v_1 = \sqrt{0,29214 \cdot n^2}$

$v_2 = 0,4072 \cdot n^2 + \sqrt{0,01843 \cdot n^2 + 0,00155}$

n	v_1 m	v_2 m	Δ mm
.	$K_1 = 0,540$	$K_2 = 0,543$	3
.	$\beta_1 = 1,00$	$\beta_2 = 0,25$	
0,0	0,040	0,039	+ 1
0,1	0,067	0,082	− 15
0,2	0,115	0,129	− 14
0,5	0,273	0,282	− 9
1,0	0,542	0,549	− 7
1,5	0,812	0,818	− 6
2,0	1,082	1,089	− 7
3,0	1,622	1,631	− 9
4,0	2,162	2,172	− 10
5,0	2,703	2,716	− 13
		$\Delta\, m =$	9

4) Flügel von Ott Nr. 5/II [1])

$v_1 = 0,1111 \cdot n + \sqrt{0,04256 \cdot n^2 + 0,0100}$

$v_2 = 0,0889 \cdot n + \sqrt{0,05221 \cdot n^2 + 0,00815}$

n	v_1 m	v_2 m	Δ mm
.	$K_1 = 0,3174$	$K_2 = 0,3170$	0,4
.	$\beta_1 = 0,65$	$\beta_2 = 0,72$	
0,0	0,100	0,090	+ 10
0,2	0,130	0,119	+ 11
0,6	0,226	0,217	+ 9
1,0	0,340	0,335	+ 5
1,5	0,492	0,488	+ 4
2,0	0,647	0,644	+ 3
4,0	1,276	1,274	+ 2
6,0	1,909	1,907	+ 2
8,0	2,542	2,541	+ 1
10,0	3,176	3,176	0
		$\Delta\, m =$	5

7) Flügel von Ott Nr. 199/I [1])

$v_1 = 0,0240 \cdot n + \sqrt{0,00182 \cdot n^2 + 0,0081}$

$v_2 = 0,0206 \cdot n + \sqrt{0,00210 \cdot n^2 + 0,00766}$

n	v_1 m	v_2 m	Δ mm
.	$K_1 = 0,0667$	$K_2 = 0,0664$	0,3
.	$\beta_1 = 0,64$	$\beta_2 = 0,69$	
0,0	0,090	0,087	+ 3
0,5	0,104	0,101	+ 3
1,0	0,123	0,119	+ 4
2,0	0,172	0,168	+ 4
4,0	0,289	0,285	+ 4
7,0	0,480	0,476	+ 4
10,0	0,676	0,672	+ 4
20,0	1,338	1,332	+ 6
30,0	2,004	1,995	+ 9
40,0	2,672	2,655	+ 15
		$\Delta\, m =$	7

8) Flügel von Kern Nr. 2

$v_1 = \sqrt{0,03516 \cdot n^2 + 0,01234}$

$v_2 = \sqrt{0,03508 \cdot n^2 + 0,01392}$

n	v_1 m	v_2 m	Δ mm
.	$K_1 = 0,1875$	$K_2 = 0,1873$	2
.	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 1$	
0,0	0,111	0,118	− 7
0,2	0,117	0,124	− 7
0,4	0,134	0,140	− 6
0,7	0,172	0,176	− 4
1,0	0,218	0,221	− 3
2,0	0,391	0,393	− 2
3,0	0,573	0,574	− 1
5,0	0,944	0,944	0
10,0	1,878	1,877	+ 1
15,0	2,815	2,812	+ 3
		$\Delta\, m =$	3
	Hauptmittel $\Delta\, v = 7,6$ mm		

[1]) auf halbtheoretischem Wege bestimmt.