Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXIII. Jahrgang 1903.

München.
Verlag der K. Akademie.
1904.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes.

II. Abhandlung.

Von **A. Korn.**

(*Eingelaufen 7. November.*)

IV. Abschnitt.

Über die in einem System schwach kompressibler Teilchen infolge der universellen Schwingungen auftretenden scheinbaren Fernkräfte.

§ 1.

Die Kontinuitätsgleichung:

1) $$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

lautet für das Zwischenmedium, in dem:

2) $$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \\[2ex] v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \\[2ex] w = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases}$$

3) $$\Delta \varphi - \mu^2 \varphi = 0$$

ist, folgendermassen:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\varepsilon \cdot \mu^2 \varphi, \tag{4}$$

oder, wenn

$$\varphi = \Phi \sin \frac{t}{T} 2\pi \tag{5}$$

abgesehen von Grössen, die gegen Φ von der Ordnung $\frac{T}{\text{Zeiteinheit}}$ klein sind, und unter der Voraussetzung, dass weder Φ noch $\frac{d\Phi}{dt}$ von der Ordnung $\frac{1}{T}$ gross sind:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{T}{2\pi} \mu^2 \Phi \cos \frac{t}{T} 2\pi\right), \tag{6}$$

wo ε_0 eine Konstante vorstellt.

Die hydrodynamischen Differentialgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \varepsilon \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \varepsilon \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right. \tag{7}$$

erhalten somit die folgende Form:

$$\left\{\begin{aligned} &\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\}\right] \\ &+ \varepsilon_0 \mu^2 \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos^2 \frac{t}{T} 2\pi = -\frac{\partial p}{\partial x}, \ \ldots \end{aligned}\right. \tag{8}$$

unter Vernachlässigung von Grössen, die von der Ordnung $\frac{T}{\text{Zeiteinheit}}$ klein sind, oder:

$$\left\{\begin{aligned} p = &-\varepsilon_0 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\}\right] \\ &- \tfrac{1}{2} \varepsilon_0 \mu^2 \Phi^2 \cos^2 \frac{t}{T} 2\pi. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Es handelt sich darum, mit Hilfe der Formel 9) für p die scheinbaren Kräfte:

$$10)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T}\int_\omega p\cos(n\,x)\,d\omega\,dt, \\ Y = -\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T}\int_\omega p\cos(n\,y)\,d\omega\,dt, \\ Z = -\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T}\int_\omega p\cos(n\,z)\,d\omega\,dt \end{cases}$$

zu berechnen, welche auf ein schwach kompressibles Teilchen mit der Oberfläche ω und den äusseren Normalen n infolge der Drucke p der Flüssigkeit ausgeübt werden.

Schreiben wir 9) in der Form:

$$11)\quad \begin{cases} p = -\varepsilon_0\left[\dfrac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}\right] \\ \qquad - \frac{1}{2}\varepsilon_0\,\mu^2\,\Phi^2\cos^2\dfrac{t}{T}2\pi, \end{cases}$$

so erkennen wir, dass wir die erste Formel 10) so darstellen können:

$$12)\quad \begin{cases} X = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T}\left[\dfrac{d}{dt}\left\{\int_\omega \varepsilon_0\,\varphi\cos(n\,x)\,d\omega\right\}\right. \\ \qquad - \varepsilon_0\displaystyle\int_\omega \Phi\sin\dfrac{t}{T}2\pi\,\dfrac{d}{dt}(d\omega\cos(n\,x)) \\ \qquad - \dfrac{\varepsilon_0}{2}\displaystyle\int_\omega\left\{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right\}\cos(nx)\sin^2\dfrac{t}{T}2\pi\,d\omega \\ \qquad \left. + \frac{1}{2}\varepsilon_0\,\mu^2\displaystyle\int_\omega \Phi^2\cos(nx)\cos^2\dfrac{t}{T}2\pi\,d\omega\right]dt. \end{cases}$$

Die erste Zeile rechts enthält zu vernachlässigende Grössen, für die Bedeutung der zweiten Zeile kommen die bekannten Formeln: [1])

[1]) Man vgl. z. B. A. Korn, Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik, Berlin 1896 bis 1898, 2. Aufl., S. 145.

$$
13)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(d\omega\cos(nx)) &= \Bigg[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cos(nx)\\
&\qquad -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial v}{\partial x}\cos(ny)+\frac{\partial w}{\partial x}\cos(nz)\right)\Bigg]d\omega,\\
\frac{d}{dt}(d\omega\cos(ny)) &= \Bigg[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cos(ny)\\
&\qquad -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos(nx)+\frac{\partial v}{\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial w}{\partial y}\cos(nz)\right)\Bigg]d\omega,\\
\frac{d}{dt}(d\omega\cos(nz)) &= \Bigg[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cos(nz)\\
&\qquad -\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cos(nx)+\frac{\partial v}{\partial z}\cos(ny)+\frac{\partial w}{\partial z}\cos(nz)\right)\Bigg]d\omega
\end{aligned}\right.
$$

in betracht; berücksichtigen wir schliesslich, dass:

$$
14)\qquad \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\sin^2\frac{t}{T}\,2\pi\,dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\cos^2\frac{t}{T}\,2\pi\,dt = \tfrac{1}{2}
$$

ist, so folgt aus 12):

$$
15)\quad\left\{\begin{aligned}
X = &-\frac{\varepsilon_0\,\mu^2}{4}\int_\omega \Phi^2\cos(nx)\,d\omega\\
&+\frac{\varepsilon_0}{2}\int_\omega\Bigg[\Phi\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cos(nx)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial z}\cos(nz)\right)\\
&\qquad -\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right\}\cos(nx)\Bigg]d\omega,
\end{aligned}\right.
$$

analog Y und Z, wobei die zweiten Ableitungen von Φ in der äusseren Flüssigkeit zu nehmen sind.

Nach dem Stokes'schen Theorem ist für jede geschlossene Fläche ω:

$$
\int_\omega\Bigg[\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)\cos(nx)+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)\cos(ny)
+\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\cos(nz)\Bigg]d\omega = 0,
$$

wenn $U\, V\, W$ drei beliebige, mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktionen der Stelle $(x\, y\, z)$ auf ω vorstellen. Setzen wir:

$$U = 0,$$
$$V = -\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$
$$W = \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

so folgt:

$$\int_\omega \left\{ \left[\Phi \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \cos(n x) \right.$$
$$- \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos(n y) - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos(n z)$$
$$\left. - \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos(n y) - \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \cos(n z) \right\} d\omega = 0,$$

oder:

$$16) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_\omega \Phi \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cos(n x) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos(n y) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \cos(n z) \right) d\omega \\ &= \mu^2 \int_\omega \Phi^2 \cos(n x)\, d\omega + \int_\omega \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \cos(n x)\, d\omega \\ &- \int_\omega \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, d\omega, \end{aligned} \right.$$

wenn wir:

$$17) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos(n x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos(n y) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos(n z)$$

setzen. Auf diese Weise folgt aus 15):

$$18) \quad \left\{ \begin{aligned} X = {} & \frac{\varepsilon_0 \mu^2}{4} \int_\omega \Phi^2 \cos(n x)\, d\omega \\ & - \frac{\varepsilon_0}{2} \int_\omega \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \cos(n x) \right] d\omega, \end{aligned} \right.$$

analog Y und Z.

IV. Die infolge einer Eigenschwingung eines Systems schwach kompressibler Teilchen auf jedes derselben wirkenden scheinbaren Kraftkomponenten sind durch die Formeln gegeben:

$$
19)\quad \begin{cases}
X = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_{\omega}[U\,U_n - \frac{1}{2}\{U^2+V^2+W^2+\mu^2\Phi\}\cos(nx)]\,d\omega, \\
Y = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_{\omega}[V\,U_n - \frac{1}{2}\{U^2+V^2+W^2+\mu^2\Phi\}\cos(ny)]\,d\omega, \\
Z = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int\limits_{\omega}[W\,U_n - \frac{1}{2}\{U^2+V^2+W^2+\mu^2\Phi\}\cos(nz)]\,d\omega;
\end{cases}
$$

dabei ist

$$
20)\quad \begin{cases}
U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\
V = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\
W = \frac{\partial \Phi}{\partial z};
\end{cases}
$$

$$
21)\quad U_n = U\cos(nx) + V\cos(ny) + W\cos(nz)
$$

gesetzt.

§ 2.

Wir können aus dem Satz IV einige Schlüsse ziehen, welche den sich für den Fall $\mu = 0$ ergebenden Resultaten[1]) einigermassen analog sind:

Setzt sich das System aus einer Zahl n schwach kompressibler Teilchen zusammen, und bezeichnen wir die scheinbaren auf die einzelnen Teilchen wirkenden Kraftkomponenten mit $X_j\ Y_j\ Z_j$ ($j = 1, 2 \,..\, n$), so ergibt sich für die Summen

$$
\sum_1^n{}^j X_j, \quad \sum_1^n{}^j Y_j, \quad \sum_1^n{}^j Z_j
$$

[1]) A. Korn, eine mechanische Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massensystemen. Berlin, Ferd. Dümmlers Verlag 1901, S. 136 ff.

ein einfaches Resultat; es ist, wenn man die Integrale über die Oberflächen ω_j der Teilchen in ein Integral über den Aussenraum a (den von der Flüssigkeit eingenommenen Raum) umformt:

$$\sum_1^n {}^j X_j = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_a \left[U \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right.$$
$$+ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z}$$
$$- U \frac{\partial U}{\partial x} - V \frac{\partial V}{\partial x} - W \frac{\partial W}{\partial x}$$
$$\left. - \mu^2 \Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] d\tau,$$

oder:

analog:

22)
$$\begin{cases} \sum_1^n {}^j X_j = 0, \\ \sum_1^n {}^j Y_j = 0, \\ \sum_1^n {}^j Z_j = 0. \end{cases}$$

Zusatz 1 zu IV. Der Schwerpunkt eines Systems schwach kompressibler Teilchen bewegt sich gleichförmig in grader Linie.

Für den Fall $n = 2$ folgt aus 22):

23)
$$\begin{cases} X_1 = - X_2 \\ Y_1 = - Y_2 \\ Z_1 = - Z_2. \end{cases}$$

Zusatz 2 zu IV. Für die scheinbare Wechselwirkung zweier schwach kompressibler Teilchen gilt der Satz der Gleichheit von actio und reactio.

§ 3.

Für die Rechnung in speziellen Fällen ist eine andere Form der Gleichungen 19) für die Kraftkomponenten vorzuziehen.

Wir verwandeln die Integrale über die Oberfläche ω in Integrale über den Innenraum i des betreffenden Teilchens, dann folgt:

$$\begin{aligned} X = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_i \Big[& U\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right) \\ & + U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}+W\frac{\partial U}{\partial z} \\ & - U\frac{\partial U}{\partial x}-V\frac{\partial V}{\partial x}-W\frac{\partial W}{\partial x} \\ & - \mu^2\,\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big]\,d\tau, \\ = \frac{\varepsilon_0}{2}(k^2+\mu^2)\int_i & \Phi\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,d\tau, \end{aligned}$$

oder:

$$X = \tfrac{1}{4}\,\varepsilon_0\,(k^2+\mu^2)\int_\omega \Phi^2\cos(n\,x)\,d\,\omega, \tag{24}$$

analog Y und Z.

Zusatz 3 zu IV. Die infolge einer Eigenschwingung eines Systems schwach kompressibler Teilchen mit dem Potential Φ auf jedes der Teilchen wirkenden scheinbaren Kraftkomponenten sind durch die folgenden Formeln darstellbar:

$$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{\varepsilon_0}{4}(k^2+\mu^2)\int_\omega \Phi^2\cos(n\,x)\,d\,\omega, \\ Y &= \frac{\varepsilon_0}{4}(k^2+\mu^2)\int_\omega \Phi^2\cos(n\,y)\,d\,\omega, \\ Z &= \frac{\varepsilon_0}{4}(k^2+\mu^2)\int_\omega \Phi^2\cos(n\,z)\,d\,\omega; \end{aligned}\right. \tag{25}$$

dabei bezeichnet k^2 die der universellen Funktion Φ zugehörige Zahl, unter n sind nach vor die in das Innere der Flüssigkeit gerichteten Normalen der Oberfläche ω des betreffenden Teilchens zu verstehen.

Für $\mu = 0$ gehen alle diese Sätze in die früher[1]) abgeleiteten einfachen Resultate der Theorie der universellen Schwingungen über.

V. Abschnitt.

Über die Wechselwirkung kugelförmiger, schwach kompressibler Teilchen infolge ihrer Grundschwingung.

§ 1.

Wir nehmen zwei Kugeln vom Radius R[2]) an und suchen bei beliebig vorausgesetztem μ die universelle Grundschwingung derselben zu finden, d. h. eine mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige Funktion des Innen- und Aussenraumes Φ, welche im Unendlichen verschwindet, im Innern der beiden Kugeln der Differentialgleichung:

1) $$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0,$$

im Aussenraume der Differentialgleichung:

2) $$\Delta \Phi - \mu^2 \Phi = 0$$

genügt.

Von den Lösungen, deren nach unseren Existenzbeweisen unendlich viele existieren müssen, haben wir die mit kleinsten k^2 auszuwählen, um zur Grundschwingung zu gelangen.

Unsere Aufgabe wird wesentlich erleichtert werden, wenn wir voraussetzen, dass der Radius R der Kugeln sehr klein gegen ihre Zentraldistanz ϱ ist. Wir können dann nämlich eine Methode der successiven Näherungen zur Anwendung

---

1) Vgl. S. 568, Anm. 1.

2) Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass beide Kugeln denselben Radius haben.

bringen, welche der Methode von Murphy für das Zweikugelproblem in der Elektrostatik analog ist:[1])

Es wird in erster Annäherung in der Kugel 1 und in der Nähe derselben:[2])

$$3^{a}) \qquad \begin{cases} \Phi = c \cdot \dfrac{e^{-\mu r_1}}{r_1} & \text{ausserhalb } \omega_1, \\[2ex] = c \cdot \dfrac{e^{-\mu R}}{\sin k_0 R} \cdot \dfrac{\sin k_0 r_1}{r_1} & \text{in der Kugel 1} \end{cases}$$

sein (r_1 Entfernung des variablen Punktes vom Zentrum der Kugel 1, k_0 die kleinste Wurzel der Gleichung:

$$4) \qquad k_0 \cos k_0 R + \mu \sin k_0 R = 0),$$

gerade so, als ob die zweite Kugel nicht existierte, und in der Kugel 2 resp. in der Nähe derselben:

$$3^{b}) \qquad \begin{cases} \Phi = c \cdot \dfrac{e^{-\mu r_2}}{r_2} & \text{ausserhalb } \omega_2, \\[2ex] = c \cdot \dfrac{e^{-\mu R}}{\sin k_0 R} \cdot \dfrac{\sin k_0 r_2}{r_2} & \text{in der Kugel 2} \end{cases}$$

(r_2 Entfernung des variabeln Punktes vom Zentrum der Kugel 2), gerade so, als ob die erste Kugel nicht existierte; c ist dabei eine Konstante, die willkürlich bleibt, so lange wir die gesamte lebendige Kraft der Schwingung nicht kennen, und wir haben — was schon aus Symmetriegründen folgt — das c für beide Kugeln gleich angesetzt. Wir müssen nun die Funktion Φ genauer berechnen und setzen:

---

[1]) Für den Fall $\mu = 0$ habe ich die Berechtigung der Anwendung dieser Methode ausführlich bewiesen (Communications de la Soc. Math. de Kharkow 1903); der Beweis lässt sich ohne Schwierigkeiten auch auf den allgemeinen Fall eines beliebigen μ Schritt für Schritt ausdehnen.

[2]) Man vgl. III. Abschnitt, S. 434.

$$4^{a})\qquad \Phi = \frac{c\,e^{-\mu R}}{R} + \Psi_1, \quad \text{an der Kugelfläche } \omega_1,$$

$$4^{b})\qquad \Phi = \frac{c\,e^{-\mu R}}{R} + \Psi_2, \quad \text{an der Kugelfläche } \omega_2,$$

$$5)\qquad k = k_0 + E,$$

wobei wir aussagen können, dass $\Psi_1\ \Psi_2\ E$ gegen die ersten Glieder rechts um so kleiner sein müssen, je kleiner $\frac{R}{\varrho}$ ist; wir wissen übrigens nach den allgemeinen Existenzbeweisen, dass die Zahl k^2 und die Funktion Φ existieren, und dass Φ mit seinen ersten Ableitungen im ganzen Raume eindeutig und stetig ist.

Wir können Ψ_1 auf ω_1 nach Kugelfunktionen entwickelt denken:

$$6^{a})\qquad \Psi_1 = c_1 + c_{11}\cos(r_1\,x) + c_{12}\cos(r_1\,y) + c_{13}\cos(r_1\,z) + \cdots, \quad \text{an } \omega_1,$$

ebenso Ψ_2 auf ω_2:

$$6^{b})\qquad \Psi_2 = c_2 + c_{21}\cos(r_2\,x) + c_{22}\cos(r_2\,y) + c_{23}\cos(r_2\,z) + \cdots, \quad \text{an } \omega_2.$$

Tatsächlich wissen wir über die hier vorkommenden Konstanten $c_1\ c_2\ c_{11} \ldots c_{21} \ldots\ldots$ noch gar nichts, abgesehen davon, dass sie gegen $\frac{c\,e^{-\mu R}}{R}$ um so kleiner sein müssen, je kleiner $\frac{R}{\varrho}$ ist; wir werden aber zunächst so verfahren, als ob wir diese Konstanten kennen, mit Hilfe der Randwerte 4^{a}), 4^{b}) die Funktion Φ im Aussen- und im Innenraume bestimmen und nachträglich die Konstanten $c_1\ c_2\ c_{11} \ldots c_{21} \ldots\ldots E$ durch die Forderung berechnen, dass auch die ersten Ableitungen von Φ bei dem Durchgange durch ω_1 und ω_2 stetig bleiben müssen.

§ 2.

Unsere erste Aufgabe ist, die Funktion Φ des Aussenraumes zu berechnen, die mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist, im Unendlichen verschwindet und der Gleichung:

$$\Delta \Phi - \mu^2 \Phi = 0 \tag{7}$$

genügt, bei den Randwerten:

$$\Phi = \frac{c e^{-\mu R}}{R} + c_1 + [c_{11}\cos(r_1 x) + c_{12}\cos(r_1 y) + c_{13}\cos(r_1 z)] + \cdots, \quad \text{an } \omega_1, \tag{8a}$$

$$\Phi = \frac{c e^{-\mu R}}{R} + c_2 + [c_{21}\cos(r_2 x) + c_{22}\cos(r_2 y) + c_{23}\cos(r_2 z)] + \cdots, \quad \text{an } \omega_2. \tag{8b}$$

Die Lösung dieser ersten Aufgabe lässt sich mit Hilfe der Methode von Murphy[1]) erlangen:

Wir bestimmen die Lösung Φ_{11} für den Aussenraum von ω_1 mit den Randwerten 8ᵃ):

$$\Phi_{11} = \frac{R}{e^{-\mu R}} \cdot \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} \left\{ c \frac{e^{-\mu R}}{R} + c_1 \right\} + \frac{R^2}{e^{-\mu R}} \cdot \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1^2} \cdot \frac{1 + \mu r_1}{1 + \mu R} \{c_{11}\cos(r_1 x) + c_{12}\cos(r_1 y) + c_{13}\cos(r_1 z)\} + \cdots, \tag{9a}$$

die Lösung Φ_{21} für den Aussenraum von ω_2 mit den Randwerten 8ᵇ):

$$\Phi_{21} = \frac{R}{e^{-\mu R}} \cdot \frac{e^{-\mu r_2}}{r_2} \left\{ c \frac{e^{-\mu R}}{R} + c_2 \right\} + \frac{R^2}{e^{-\mu R}} \cdot \frac{e^{-\mu r_2}}{r_2^2} \cdot \frac{1 + \mu r_2}{1 + \mu R} \{c_{21}\cos(r_2 x) + c_{22}\cos(r_2 y) + c_{23}\cos(r_2 z)\} + \cdots; \tag{9b}$$

[1]) Man vgl. z. B. A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie, I. Bd., S. 354 ff. Berlin 1899.

hierauf die Lösung Φ_{12} für den Aussenraum von ω_1 mit den Randwerten $(-\Phi_{21})$ an ω_1, also mit den Randwerten:

$$10^{a})\qquad \overline{\Phi}_{12} = -c\frac{e^{-\mu r_2}}{r_2} - \frac{R}{e^{-\mu R}}\cdot\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}\cdot c_2 \quad \text{an } \omega_1$$

und die Lösung Φ_{22} für den Aussenraum von ω_2 mit den Randwerten $(-\Phi_{11})$ an ω_2, also mit den Randwerten:

$$10^{b})\qquad \overline{\Phi}_{22} = -c\frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} - \frac{R}{e^{-\mu R}}\cdot\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}\, c_1 \quad \text{an } \omega_2$$

bei Vernachlässigung von Grössen, die gegen $c\,\frac{R^2}{\varrho^2}$ klein sind, und so fort, dann wird:

$$\Phi = \Phi_{11} + \Phi_{21} + \Phi_{12} + \Phi_{22} + \cdots$$

die gesuchte Lösung darstellen, und es ist leicht zu übersehen, dass wir bei unseren Vernachlässigungen die Reihe nach den vier ersten Gliedern abbrechen können:

$$11)\qquad \Phi = \Phi_{11} + \Phi_{21} + \Phi_{12} + \Phi_{22}.$$

Es ist nur noch notwendig, die Funktionen Φ_{12} und Φ_{22} aus ihren Randwerten $10^{a})$, $10^{b})$ zu berechnen.

Versteht man unter ϱ die Entfernung und Richtung:

Zentrum der Kugel 1 $\rightarrow$ Zentrum der Kugel 2, so hat man an ω_2:

$$r_1 = \sqrt{\varrho^2 + R^2 + 2R\varrho\cos(r_2\varrho)},$$

$$\frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} = \frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}\left\{1 - \frac{R}{\varrho}(1+\mu\varrho)\cos(r_2\varrho)\right\},$$

unter Vernachlässigung kleiner Glieder höherer Ordnung, und analog an ω_1:

$$r_2 = \sqrt{\varrho^2 + R^2 - 2R\varrho\cos(r_2\varrho)},$$

$$\frac{e^{-\mu r_2}}{r_2} = \frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}\left\{1 + \frac{R}{\varrho}(1+\mu\varrho)\cos(r_1\varrho)\right\},$$

so dass wir die Randwerte $10^{a})$ und $10^{b})$ auch so schreiben können:

$$12^{\mathrm{a}})\quad \overline{\Phi}_{12} = -\left(c + \frac{R}{e^{-\mu R}}\, c_2\right)\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho} - \frac{R\,c}{\varrho^2}(1+\mu\,\varrho)\cos(r_1\,\varrho), \quad (\text{an } \omega_1),$$

$$12^{\mathrm{b}})\quad \overline{\Phi}_{22} = -\left(c + \frac{R}{e^{-\mu R}}\, c_1\right)\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho} + \frac{R\,c}{\varrho^2}(1+\mu\,\varrho)\cos(r_2\,\varrho), \quad (\text{an } \omega_2),$$

somit:

$$13^{\mathrm{a}})\quad \begin{cases} \Phi_{12} = -\dfrac{R}{r_1}\cdot\dfrac{e^{-\mu r_1}}{e^{-\mu R}}\left(c + \dfrac{R}{e^{-\mu R}}\, c_2\right)\dfrac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho} \\ \qquad -\dfrac{R^3 c}{\varrho^2 r_1^2}\cdot\dfrac{1+\mu\,r_1}{1+\mu\,R}\cdot\dfrac{e^{-\mu r_1}}{e^{-\mu R}}(1+\mu\,\varrho)\cos(r_1\,\varrho), \end{cases}$$

$$13^{\mathrm{b}})\quad \begin{cases} \Phi_{22} = -\dfrac{R}{r_2}\cdot\dfrac{e^{-\mu r_2}}{e^{-\mu R}}\left(c + \dfrac{R}{e^{-\mu R}}\, c_1\right)\dfrac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho} \\ \qquad +\dfrac{R^3 c}{\varrho^2 r_2^2}\cdot\dfrac{1+\mu\,r_2}{1+\mu\,R}\cdot\dfrac{e^{-\mu r_2}}{e^{-\mu R}}(1+\mu\,\varrho)\cos(r_2\,\varrho). \end{cases}$$

Wir bilden nun nach 11), 9) und 13) die Funktion Φ; wir werden dieselbe in der Nähe der Kugel 2 in der folgenden Gestalt darstellen können:

$$\begin{aligned}
\Phi = {} & \frac{R}{e^{-\mu R}}\cdot\frac{e^{-\mu r_1}}{r_1}\left\{c\,\frac{e^{-\mu R}}{R} + c_1\right\} \\
& + \frac{R}{e^{-\mu R}}\cdot\frac{e^{-\mu r_2}}{r_2}\left\{c\,\frac{e^{-\mu R}}{R} + c_2\right\} \\
& + \frac{R^2}{e^{-\mu R}}\cdot\frac{e^{-\mu r_2}}{r_2^2}\cdot\frac{1+\mu r_2}{1+\mu R}\{c_{21}\cos(r_2 x) + c_{22}\cos(r_2 y) + c_{23}\cos(r_2 z)\} \\
& - \frac{R\,c}{r_1\,\varrho}\cdot\frac{e^{-\mu r_1}\cdot e^{-\mu\varrho}}{e^{-\mu R}} \\
& - \frac{R\,e^{-\mu r_2}}{r_2\,e^{-\mu R}}\cdot\left(c + \frac{R}{e^{-\mu R}}\,c_1\right)\cdot\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho} \\
& + \frac{R^3 c}{\varrho^2 r_2^2}\cdot\frac{1+\mu\,r_2}{1+\mu\,R}\cdot\frac{e^{-\mu r_2}}{e^{-\mu R}}(1+\mu\,\varrho)\cos(r_2\,\varrho),
\end{aligned}$$

oder, da wir wieder:

$$\frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} = \frac{e^{-\mu \varrho}}{\varrho}\left(1 - \frac{r_2}{\varrho}(1 + \mu \varrho)\cos(r_2 \varrho)\right)$$

setzen können, in der Nähe der Kugel 2:

$$14^{\mathrm{a}})\left\{\begin{aligned} \Phi = {} & \frac{R}{e^{-\mu R}}\cdot\frac{e^{-\mu r_2}}{r_2}\left\{c\,\frac{e^{-\mu R}}{R} + c_2\right\} \\ & + \frac{R^2}{e^{-\mu R}}\cdot\frac{e^{-\mu r_2}}{r_2^2}\cdot\frac{1+\mu r_2}{1+\mu R}\{c_{21}\cos(r_2 x) + c_{22}\cos(r_2 y) \\ & \qquad + c_{23}\cos(r_2 z)\} \\ & + \left(1 - \frac{R\,e^{-\mu r_2}}{r_2\,e^{-\mu R}}\right)\left(c + \frac{R}{e^{-\mu R}}\,c_1\right)\frac{e^{-\mu \varrho}}{\varrho} \\ & - \frac{c\cos(r_2 \varrho)\,e^{-\mu \varrho}}{\varrho^2}(1+\mu \varrho)\left\{r_2 - \frac{R^3(1+\mu r_2)\,e^{-\mu r_2}}{r_2^2(1+\mu R)\,e^{-\mu R}}\right\}. \end{aligned}\right.$$ [1])

Analog in der Nähe der Kugel 1:

$$14^{\mathrm{b}})\left\{\begin{aligned} \Phi = {} & \frac{R}{e^{-\mu R}}\cdot\frac{e^{-\mu r_1}}{r_1}\left\{c\,\frac{e^{-\mu R}}{R} + c_1\right\} \\ & + \frac{R^2}{e^{-\mu R}}\cdot\frac{e^{-\mu r_1}}{r_1^2}\cdot\frac{1+\mu r_1}{1+\mu R}\{c_{11}\cos(r_1 x) + c_{12}\cos(r_1 y) \\ & \qquad + c_{13}\cos(r_1 z)\} \\ & + \left(1 - \frac{R\,e^{-\mu r_1}}{r_1\,e^{-\mu R}}\right)\left(c + \frac{R}{e^{-\mu R}}\,c_2\right)\frac{e^{-\mu \varrho}}{\varrho} \\ & + \frac{c\cos(r_2 \varrho)\,e^{-\mu \varrho}}{\varrho^2}(1+\mu \varrho)\left\{r_1 - \frac{R^3(1+\mu r_1)\,e^{-\mu r_1}}{r_1^2(1+\mu R)\,e^{-\mu R}}\right\}. \end{aligned}\right.$$

§ 3.

Unsere nächste Aufgabe ist, Φ für die Innenräume von ω_1 und ω_2 bei den Randwerten 8[a]), 8[b]) zu berechnen. Wir führen zu diesem Zwecke statt der Konstanten

[1]) Wir lassen die Konstante

$$-\frac{R\,c}{\varrho^2}\cdot\frac{e^{-2\mu\varrho}}{e^{-\mu R}}$$

fort; dieselbe würde sich bei Berücksichtigung von Φ_{13} und Φ_{23} übrigens von selbst fortheben.

$$\begin{matrix} c_1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_2 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{matrix}$$

die neuen Konstanten

$$\begin{matrix} C_1 & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_2 & C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{matrix}$$

durch die folgenden Relationen ein:

$$15^{a})\quad \begin{cases} \dfrac{c\,e^{-\mu R}}{R} + c_1 = C_1 \ \sin k R, \\ c_{11} = C_{11} (\sin k R - k R \cos k R), \\ c_{12} = C_{12} (\sin k R - k R \cos k R), \\ c_{13} = C_{13} (\sin k R - k R \cos k R); \end{cases}$$

$$15^{b})\quad \begin{cases} \dfrac{c\,e^{-\mu R}}{R} + c_2 = C_2 \ \sin k R, \\ c_{21} = C_{21} (\sin k R - k R \cos k R), \\ c_{22} = C_{22} (\sin k R - k R \cos k R), \\ c_{23} = C_{23} (\sin k R - k R \cos k R); \end{cases}$$

dann ist im Innern von ω_1:

$$16^{a})\quad \begin{aligned} \Phi &= C_1 \frac{R}{r_1} \sin k r_1 \\ &+ \frac{R^2}{r_1^2} (\sin k r_1 - k r_1 \cos k r_1)(C_{11} \cos(r_1 x) + C_{12} \cos(r_1 y) + C_{13} \cos(r_1 z)), \end{aligned}$$

im Innern von ω_2:

$$16^{b})\quad \begin{aligned} \Phi &= C_2 \frac{R}{r_2} \sin k r_2 \\ &+ \frac{R^2}{r_2^2} (\sin k r_2 - k r_2 \cos k r_2)(C_{21} \cos(r_2 x) + C_{22} \cos(r_2 y) + C_{23} \cos(r_2 z)). \end{aligned}$$

Die Gleichsetzung der normalen Ableitungen von Φ innen und aussen an ω_1 und ω_2 wird uns nun Relationen liefern, durch welche die Verhältnisse der

$$C_1 \ C_2 \ C_{11} \ C_{12} \ C_{13} \ C_{21} \ C_{22} \ C_{23}$$

und die Konstante k bestimmt werden, wobei wir uns der Tatsache bedienen können, dass k von k_0 nur um Grössen verschieden ist, die um so kleiner werden, je kleiner $\frac{R}{\varrho}$ ist.

§ 4.

Bezeichnen wir mit n die äussere Normale von ω_1 bezw. ω_2, so ist an ω_2 nach 16[b]):

$$
17^{a}) \left\{ \begin{aligned}
\left|\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_i = & - \frac{C_2}{R} \sin k R + k C_2 \cos k R \\
& - \frac{2}{R} (\sin kR - kR \cos kR)(C_{21} \cos(r_2 x) + C_{22} \cos(r_2 y) \\
& + C_{23} \cos(r_2 z)) + k^2 R \sin k R \,(C_{21} \cos(r_2 x) \\
& + C_{22} \cos(r_2 y) + C_{23} \cos(r_2 z)) .
\end{aligned} \right.
$$

und nach 14[a])

$$
17^{b}) \left\{ \begin{aligned}
\left|\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_a = & - \frac{C_2}{R} (1 + \mu R) \sin k R \\
& - \frac{2}{R} (\sin k R - k R \cos k R) (C_{21} \cos (r_2 x) \\
& + C_{22} \cos (r_2 y) + C_{23} \cos (r_2 z)) \\
& + \frac{C_1}{e^{-2\mu R}} \cdot \frac{e^{-\mu \varrho}}{\varrho} (1 + \mu R) \sin k R \\
& - \frac{3 C_1 R e^{-\mu \varrho} (1 + \mu \varrho)}{\varrho^2 e^{-\mu R}} \sin k R \cdot \cos (r_2 \varrho);
\end{aligned} \right.
$$

in der letzten Zeile rechts konnten wir für c bei unseren Vernachlässigungen

$$\frac{C_1 R}{e^{-\mu R}} \sin k R$$

setzen.

Aus der Gleichung:

$$18^{a}) \qquad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_i = \left|\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_a \quad \text{an } \omega_2$$

ergeben sich die folgenden 4 Relationen:

$$19^{a})\quad C_2\,(k\cos k\,R + \mu \sin k\,R) = C_1 \frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}\cdot\frac{1+\mu\,R}{e^{-2\mu R}} \sin k\,R,$$

$$20^{a})\quad \begin{cases} k^2\,C_{21} = -\,3\,C_1 \dfrac{\cos(\varrho\,x)}{\varrho^2}\cdot\dfrac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\,\varrho)}{e^{-\mu R}}, \\[2ex] k^2\,C_{22} = -\,3\,C_1 \dfrac{\cos(\varrho\,y)}{\varrho^2}\cdot\dfrac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\,\varrho)}{e^{-\mu R}}, \\[2ex] k^2\,C_{23} = -\,3\,C_1 \dfrac{\cos(\varrho\,z)}{\varrho^2}\cdot\dfrac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\,\varrho)}{e^{-\mu R}}; \end{cases}$$

analog folgt aus der Gleichung:

$$18^{b})\quad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_i = \left|\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_a \quad \text{an } w_1,$$

dass:

$$19^{b})\quad C_1\,(k\cos k\,R + \mu \sin k\,R) = C_2 \frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho}\,\frac{1+\mu\,R}{e^{-2\mu R}} \sin k\,R,$$

$$20^{b})\quad \begin{cases} k^2\,C_{11} = +\,3\,C_2 \dfrac{\cos(\varrho\,x)}{\varrho^2}\cdot\dfrac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\,\varrho)}{e^{-\mu R}}, \\[2ex] k^2\,C_{12} = +\,3\,C_2 \dfrac{\cos(\varrho\,y)}{\varrho^2}\cdot\dfrac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\,\varrho)}{e^{-\mu R}}, \\[2ex] k^2\,C_{13} = +\,3\,C_2 \dfrac{\cos(\varrho\,z)}{\varrho^2}\cdot\dfrac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\,\varrho)}{e^{-\mu R}}. \end{cases}$$

Die 8 Gleichungen 19), 20) bestimmen k und die 7 Verhältnisse:

$$C_1 : C_2 : C_{11} : C_{12} : C_{13} : C_{21} : C_{22} : C_{23}.$$

§ 5.

Aus 19a), 19b) folgt für k die Gleichung:

$$(k\cos k\,R + \mu\sin k\,R)^2 = \left[\frac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\,R)}{\varrho\cdot e^{-\mu R}} \sin k\,R\right]^2$$

oder:

$$21)\quad k\cos k\,R + \mu \sin k\,R = \frac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\,R)}{\varrho\, e^{-\mu R}} \sin k\,R.\ ^{1})$$

---

[1]) Wir wählen das Vorzeichen so, dass C_1 und C_2, die ja nahe gleich sein sollen, gleiches Zeichen haben.

Wir setzen hier:

22) $$k = k_0 + E$$

ein, bedenken, dass E gegen k_0 klein ist und dass:

23) $$k_0 \cos k_0 R + \mu \sin k_0 R = 0,$$

und erhalten in zweiter[1]) Annäherung:

$$E\{\cos k_0 R - k_0 R \sin k_0 R + \mu R \cos k_0 R\} = \frac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu R)}{\varrho \cdot e^{-\mu R}} \cdot \sin k_0 R,$$

oder:

24) $$E = -\frac{e^{-\mu\varrho}}{\varrho} \cdot \frac{k_0}{\mu + (k^2+\mu^2) R} \cdot \frac{1+\mu R}{e^{-\mu R}}.$$

Es wird ferner nach 19^a), 19^b)

25) $$C_1 = C_2 = C,$$

und hierauf nach 20^a) und 20^b):

26^a) $$\begin{cases} C_{11} = 3\,C\,\dfrac{\cos(\varrho x)}{\varrho^2} \cdot \dfrac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)}{k_0^2\, e^{-\mu R}}, \\[2ex] C_{12} = 3\,C\,\dfrac{\cos(\varrho y)}{\varrho^2} \cdot \dfrac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)}{k_0^2\, e^{-\mu R}}, \\[2ex] C_{13} = 3\,C\,\dfrac{\cos(\varrho z)}{\varrho^2} \cdot \dfrac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)}{k_0^2 \cdot e^{-\mu R}}; \end{cases}$$

26^b) $$\begin{cases} C_{21} = -3\,C\,\dfrac{\cos(\varrho x)}{\varrho^2} \cdot \dfrac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)}{k_0^2\, e^{-\mu R}}, \\[2ex] C_{22} = -3\,C\,\dfrac{\cos(\varrho y)}{\varrho^2} \cdot \dfrac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)}{k_0^2\, e^{-\mu R}}, \\[2ex] C_{23} = -3\,C\,\dfrac{\cos(\varrho z)}{\varrho^2} \cdot \dfrac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)}{k_0^2\, e^{-\mu R}}. \end{cases}$$

Wir können jetzt sogleich die Werte von Φ an ω_1 und ω_2 bilden:

27^a) $$\begin{cases} \Phi = C_1 \sin k R + (\sin k R - k R \cos k R)(C_{11} \cos(r_1 x) \\ \qquad + C_{12} \cos(r_1 y) + C_{13} \cos(r_1 z)), \quad \text{an } \omega_1; \end{cases}$$

---

[1]) In erster Annäherung ist $E = 0$.

27[b]) $$\begin{cases} \Phi = C_2 \sin k\,R + (\sin k\,R - k\,R \cos k\,R)\,(C_{21} \cos(r_2\,x) \\ \qquad + C_{22} \cos(r_2\,y) + C_{23} \cos(r_2\,z)), \quad \text{an } \omega_2. \end{cases}$$

Es wird

28[a]) $$\begin{cases} \Phi = C \sin k\,R + 3\,C \cdot \dfrac{\cos(\varrho\,n)}{\varrho^2} \, \dfrac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)(1+\mu R)}{k_0^2\, e^{-\mu R}} \sin k_0 R, \\ \qquad \text{an } \omega_1, \end{cases}$$

28[b]) $$\begin{cases} \Phi = C \sin k\,R - 3\,C \dfrac{\cos(\varrho\,n)}{\varrho^2} \cdot \dfrac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)(1+\mu R)}{k_0^2\, e^{-\mu R}} \sin k_0 R, \\ \qquad \text{an } \omega_2. \end{cases}$$

§ 6.

Wir können jetzt leicht mit Hilfe der Formeln des Zusatzes 3 zu IV (S. 570 und 571) die scheinbaren Kraftkomponenten berechnen, welche auf jedes der beiden Teilchen infolge der Grundschwingung wirken.

Es sind nach diesen Formeln die auf das Teilchen 2 wirkenden scheinbaren Kraftkomponenten:

29) $$\begin{cases} X_2 = \dfrac{\varepsilon_0}{4}(k^2 + \mu^2) \displaystyle\int_{\omega_2} \Phi^2 \cos(n\,x)\, d\,\omega, \\ Y_2 = \dfrac{\varepsilon_0}{4}(k^2 + \mu^2) \displaystyle\int_{\omega_2} \Phi^2 \cos(n\,y)\, d\,\omega, \\ Z_2 = \dfrac{\varepsilon_0}{4}(k^2 + \mu^2) \displaystyle\int_{\omega_2} \Phi^2 \cos(n\,z)\, d\,\omega. \end{cases}$$

Setzen wir hier für Φ den Wert 28[b]) ein und bedenken, dass:

30[a]) $$\begin{cases} \displaystyle\int_{\omega_2} \cos(n\,x)\, d\,\omega = 0, \\ \displaystyle\int_{\omega_2} \cos(n\,y)\, d\,\omega = 0, \\ \displaystyle\int_{\omega_2} \cos(n\,z)\, d\,\omega = 0; \end{cases}$$

$$30^{b}) \quad \begin{cases} \int\limits_{\omega_2} \cos^2(nx)\,d\omega = \int\limits_{\omega_2} \cos^2(ny)\,d\omega = \int\limits_{\omega_2} \cos^2(nz)\,d\omega = \frac{4\pi}{3} R^2, \\ \int\limits_{\omega_2} \cos(n\,y)\cos(n\,z)\,d\,\omega = 0, \\ \int\limits_{\omega_2} \cos(n\,z)\cos(n\,x)\,d\,\omega = 0, \\ \int\limits_{\omega_2} \cos(n\,x)\cos(n\,y)\,d\,\omega = 0, \end{cases}$$

so folgt:

$$31^{a}) \quad \begin{cases} X_2 = -\,a^2 \frac{\cos(\varrho\,x)}{\varrho^2} e^{-\mu\varrho}(1+\mu\,\varrho), \\ Y_2 = -\,a^2 \frac{\cos(\varrho\,y)}{\varrho^2} e^{-\mu\varrho}(1+\mu\,\varrho), \\ Z_2 = -\,a^2 \frac{\cos(\varrho\,z)}{\varrho^2} e^{-\mu\varrho}(1+\mu\,\varrho), \end{cases}$$

wo a^2 einen positiven Faktor vorstellt, der von der gegenseitigen Lage der beiden Teilchen ganz unabhängig ist; analog sind die auf das erste Teilchen wirkenden scheinbaren Kraftkomponenten:

$$31^{b}) \quad \begin{cases} X_1 = a^2 \frac{\cos(\varrho\,x)}{\varrho^2} e^{-\mu\varrho}(1+\mu\,\varrho), \\ Y_1 = a^2 \frac{\cos(\varrho\,y)}{\varrho^2} e^{-\mu\varrho}(1+\mu\,\varrho), \\ Z_1 = a^2 \frac{\cos(\varrho\,z)}{\varrho^2} e^{-\mu\varrho}(1+\mu\,\varrho); \end{cases}$$

ϱ bedeutet stets die Entfernung und Richtung:

Zentrum der Kugel 1 $\longrightarrow$ Zentrum der Kugel 2.

V. Zwei schwach kompressible Teilchen mit der Zentraldistanz ϱ üben infolge ihrer universellen Grundschwingung aufeinander eine anziehende Kraft:

$$32) \quad P = a^2 \frac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\,\varrho)}{\varrho^2}$$

aus, wenn das Zwischenmedium derart mit Absorption begabt ist, dass das Geschwindigkeitspotential φ desselben nicht der Laplaceschen Gleichung, sondern der Differentialgleichung:

$$33) \qquad \Delta\varphi - \mu^2\varphi = 0$$

genügt. Dabei ist α^2 eine positive, von der gegenseitigen Lage der beiden Teilchen unabhängige Konstante, und es werden rechts in 32) Glieder vernachlässigt, welche gegen das erste Glied von der Ordnung $\frac{\text{Radius der Teilchen}}{\varrho}$ klein sind.

Denken wir uns 2 Gruppen von Teilchen vom Radius R, von denen die eine n_1, die andere n_2 Teilchen enthält, so dass:

$$n_1 : n_2 = m_1 : m_2,$$

wenn m_1 und m_2 die Massen der beiden Gruppen bezeichnen, so ist [entsprechend der Formel 32), die man ohne Schwierigkeit für die Wechselwirkung zwischen je zwei Teilchen eines aus beliebig vielen Teilchen zusammengesetzten Systems erhält, wenn nur der Radius R gegen die Zentraldistanzen klein ist] die Anziehungskraft zwischen den beiden Gruppen

$$34) \qquad P_{12} = \beta^2 n_1 n_2 \frac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)}{\varrho^2},$$

wo β^2 eine von der gegenseitigen Lage der Teilchen unabhängige positive Konstante ist und ϱ den Abstand der beiden Gruppen bezeichnet, unter der Voraussetzung, dass die Distanzen innerhalb der einzelnen Gruppen gegen ϱ klein sind.

Da nun schliesslich:

$$35) \qquad m_1 : m_2 = n_1 : n_2,$$

so folgt aus 34):

$$36) \qquad P_{12} = G\, m_1 m_2 \frac{e^{-\mu\varrho}(1+\mu\varrho)}{\varrho^2},$$

wo G eine positive, von der gegenseitigen Lage der Teilchen unabhängige positive Konstante vorstellt.

Die Formel 36) stellt das erweiterte Gravitationsgesetz dar, welches ich durch diese Untersuchungen auf eine mechanische Grundlage zurückzuführen versucht habe.

Schlussbemerkung.

Die Theorie der Gravitation, welche sich auf die Theorie der universellen Schwingungen stützt, wurde von mir ursprünglich unter der einfachst möglichen Annahme ausgearbeitet, dass sich das Zwischenmedium, welches die Wirkungen von einer Masse auf die andere vermittelt, wenigstens in bezug auf rasche Schwingungsbewegungen genau so verhält, wie eine ideale, inkompressible Flüssigkeit, d. h. dass das Geschwindigkeitspotential einer universellen Schwingung in dem Zwischenmedium der Gleichung:

37) $$\Delta \varphi = 0$$

genügt. Diese Annahme führt zu dem Gravitationsgesetz in der Newton'schen Form, zu einer Anziehungskraft zwischen zwei Massen m_1 m_2 in der Entfernung r:

38) $$K = -f\, m_1\, m_2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right),$$

wo f eine positive Konstante vorstellt.

In dieser Abhandlung haben wir zwar auch noch angenommen, dass das Zwischenmedium den hydrodynamischen Gleichungen folgt, dass aber eine gewisse Absorptionsfähigkeit des Zwischenmediums vorhanden ist, infolge deren das Geschwindigkeitspotential der universellen Schwingung nicht der Laplace'schen, sondern der folgenden Differentialgleichung zu genügen hat:

39) $$\Delta \varphi - \mu^2 \varphi = 0,$$

wo μ^2 eine positive Konstante vorstellt. Diese allgemeinere Annahme führte zu einem verallgemeinerten Gravitationsgesetz, zu einer Anziehungskraft zwischen zwei Massen m_1 m_2 in der Entfernung r:

40) $$K = -f\, m_1\, m_2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-\mu r}}{r}\right),$$

wo

41) $$\mu = \sqrt{\mu^2}$$

zu setzen ist.

Es bedarf kaum des Hinweises, dass auch bei dieser zweiten allgemeineren Annahme nur von einer mathematischen Abstraktion die Rede sein kann, welche in der Gleichung

$$\Delta\varphi - \mu^2\varphi = 0$$

ihren analytischen Ausdruck findet.

Es erhebt sich die Frage: Wenn sich das Zwischenmedium etwa auch, wie ein schwach kompressibles Medium, verhalten würde, ähnlich wie die eingebetteten Teilchen, nur viel schwächer kompressibel, wie wird sich das Gravitationsgesetz in diesem Falle abändern? Wir wollen hier zunächst bemerken, dass in diesem Falle die Ausschliessung jeglicher Absorption des Zwischenmediums für die universellen Schwingungen zu absurden Folgerungen führen würde.

Das Geschwindigkeitspotential einer universellen Schwingung müsste in diesem Falle im Zwischenmedium der Gleichung:

42) $$\Delta\varphi + K^2\varphi = 0,$$

in den eingebetteten Teilchen der Gleichung:

43) $$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$$

genügen, wo K^2 eine gegen k^2 kleine Konstante vorstellt und die kleine Zahl $\frac{K^2}{k^2}$ als bekannt vorausgesetzt wird.

In dem einfachsten Falle der Grundschwingung eines kugelförmigen Teilchens muss dann φ von der Form sein:

44) $$\left\{\begin{array}{ll} \varphi = a \sin\frac{t}{T}2\pi\cdot\frac{\sin kr}{r} & \text{in dem Teilchen,} \\ \varphi = \sin\frac{t}{T}2\pi\left[\beta\frac{\cos Kr}{r} + \gamma\frac{\sin Kr}{r}\right] & \text{ausserhalb,} \end{array}\right.$$

und wie immer β und γ sich bestimmen mögen, in jedem Falle wird für

$$K \mp 0$$

die lebendige Kraft im Aussenraume:

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_a \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau$$

unendlich; genau dasselbe gilt für jede beliebige Oberschwingung.

Universelle Schwingungen sind nur möglich, wenn das Zwischenmedium entweder ideal inkompressibel, oder kompressibel und absorbierend angenommen wird.

Der allgemeinste Fall der gleichzeitigen Kompressibilität und Absorptionsfähigkeit findet darin seinen analytischen Ausdruck, dass das Geschwindigkeitspotential φ einer Differentialgleichung von der Form genügt:

$$\text{45)} \qquad \Delta \varphi = a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Wenn φ das Geschwindigkeitspotential einer universellen Schwingung sein soll, muss:

$$\text{46)} \qquad \varphi = \Phi_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi + \Phi_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi$$

sein, wo T eine ausserordentlich kleine Zeitdauer vorstellt, und Φ_1 Φ_2 Funktionen von x, y, z, t, deren Ableitungen nach t nicht von der Ordnung $\frac{1}{T}$ gross sind. In dem einfachsten Falle der Grundschwingung eines einzigen kugelförmigen Teilchens ergibt sich dann durch bekannte Rechnungen,[1]) dass φ im Aussenraume von der Form sein muss:

$$\text{47)} \qquad \varphi = c \cdot \frac{e^{-\mu r}}{r} \cos \left(\frac{t}{T} 2\pi - K r + \delta \right),$$

---

[1]) Man vgl. z. B. Riemann-Weber, Die part. Dffgl. d. math. Phys. Braunschweig 1901, 2. Bd., p. 312 und 322 ff.

wo c und δ beliebige Konstanten vorstellen nnd μ, K den Gleichungen genügen:[1])

48) $$\begin{cases} \mu^2 - K^2 = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \alpha, \\ 2\mu K = \frac{2\pi}{T}\beta, \end{cases}$$

so dass:

49) $$\begin{cases} \mu^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \alpha \left\{\sqrt{1+\left(\frac{T}{2\pi}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} - 1\right\}, \\ K^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \alpha \left\{\sqrt{1+\left(\frac{T}{2\pi}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} + 1\right\}. \end{cases}$$

Damit die äussere lebendige Kraft endlich sei, muss μ positiv, also:

50) $$\mu = \sqrt{\mu^2}$$

sein, und — da β stets positiv ist — auch:

51) $$K = \sqrt{K^2}$$

wegen der zweiten Gleichung 48).

μ und K müssen ausserordentlich klein sein, so, dass, wenn z. B. ϱ eine Entfernung innerhalb des Sonnensystems vorstellt, auch

$$\mu\,\varrho \quad \text{und} \quad K\,\varrho$$

noch ausserordentlich kleine Grössen darstellen.

Wie nun dem Geschwindigkeitspotentiale

---

1) Denn es ist:

$$\Delta\varphi = c\,\frac{e^{-\mu r}}{r}\left\{(\mu^2 - K^2)\cos\left(\frac{t}{T}\,2\pi - k\,r + \delta\right) - 2\mu K \sin\left(\frac{t}{T}\,2\pi - k\,r + \delta\right)\right\},$$

$$\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \alpha\cdot c\,\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\left(\frac{t}{T}\,2\pi - k\,r + \delta\right),$$

$$\beta\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{2\pi}{T}\cdot\beta\cdot c\,\frac{e^{-\mu r}}{r}\sin\left(\frac{t}{T}\,2\pi - k\,r + \delta\right).$$

$$\frac{c}{r} \cos \left(\frac{t}{T} + \delta \right) 2\pi$$

eines kugelförmigen Teilchens die Anziehungskraft:

$$-f m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{1}{\varrho} \right),$$

dem Geschwindigkeitspotentiale

$$c \frac{e^{-\mu r}}{r} \cos \left(\frac{t}{T} + \delta \right) 2\pi$$

eines kugelförmigen Teilchens die Anziehungskraft:

$$-f m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\frac{e^{-\mu \varrho}}{\varrho} \right)$$

zwischen 2 Teilchen m_1 m_2 in der Entfernung ϱ entspricht, so ergibt eine völlig analoge Betrachtung, dass dem Geschwindigkeitspotentiale

$$c \frac{e^{-\mu r}}{r} \cos \left(\frac{t}{T} 2\pi - K r + \delta \right)$$

eines kugelförmigen Teilchens die Anziehungskraft entspricht:

$$52) \quad G_0 = - m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial \varrho} \left\{ f_1 \frac{e^{-\mu \varrho}}{\varrho} \cos K \varrho + f_2 \frac{e^{-\mu \varrho}}{\varrho} \sin K \varrho \right\},$$

wo f_1 und f_2 gewisse universelle Konstanten (im besonderen $f_1 > 0$) vorstellen.

Die Formel 52) stellt das allgemeinste Gravitationsgesetz dar, wenn wir die Theorie der universellen Schwingungen zu grunde legen und das Zwischenmedium zugleich sehr schwach kompressibel und absorbierend voraussetzen.

Freilich ist noch zu bedenken, dass wir dabei Glieder vernachlässigen, welche gegen G_0 von der Ordnung $\frac{R}{\varrho}$

$$\left(\frac{\text{Radien der Teilchen}}{\text{Entfernungen der Teilchen}} \right)$$

klein sind.

Die wirkliche Anziehungskraft ist:

$$G = G_0 + G_1 + G_2 + \cdots, \tag{53}$$

wo $G_1\, G_2 \ldots$ gegen G_0 von der Ordnung $\frac{R}{\varrho}, \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 \ldots$ klein sind. Wenn wir eine weitere Annäherung, etwa durch Hinzunahme von G_1, zu erreichen wünschen, können wir, solange $\mu\varrho$ und $K\varrho$ noch kleine Grössen sind, für die Berechnung von G_1 grade so verfahren, als ob das Zwischenmedium eine ideale Flüssigkeit wäre. Ich gedenke, auf die Berechnung von G_1 auf Grundlage der Theorie der universellen Schwingungen bei einer späteren Gelegenheit zurückzukommen.