Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXIII. Jahrgang 1903.

München.
Verlag der K. Akademie.
1904.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Der Cauchy-Goursat'sche Integralsatz und seine Übertragung auf reelle Kurven-Integrale.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 5. Dezember.*)

Die wichtige Verallgemeinerung, welche der Cauchy'sche Satz über das Verschwinden eines geschlossenen Integrals von der Form $\int f(z) \cdot dz$ durch Herrn Goursat[1]) erfahren hat, ist neuerdings von Herrn Heffter[2]) auf reelle Kurven-Integrale von der Form $\int (P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy)$ übertragen worden. An die Stelle der Goursat'schen Voraussetzung eines lediglich endlichen (aber an keinerlei Stetigkeits-Bedingungen gebundenen) $f'(z)$ tritt hierbei die folgende: P und Q müssen für jede Stelle des in Frage kommenden Bereiches ein vollständiges Differential besitzen[3]) und ausserdem der bekannten Integrabilitäts-Bedingung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ genügen. Ich habe bei früherer Gelegenheit[4]) ausführlich gezeigt, dass jedes über eine abteilungsweise monotone Kurve erstreckte Integral durch ein solches über einen „Treppenweg" (d. h. eine aus Parallelen zu den Koordinaten-Axen zusammengesetzte gebrochene Linie) beliebig approximiert werden kann, und Herr Heffter hat die hierzu erforderlichen Definitionen auch auf den Fall einer lediglich rektifizierbaren Integrations-Kurve ausge-

[1]) Transact. of the Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 14.

[2]) Gött. Nachr. 1902, p. 137; 1903 (Sitzung vom 31. Oktober).

[3]) S. weiter unten Nr. 1.

[4]) Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 56 ff.

dehnt, sofern nur diese letztere im Innern desjenigen Bereiches verläuft, für welchen die zu integrierende Funktion gewissen Bedingungen genügt. Darnach reicht es also in der Hauptsache vollständig hin, Sätze über geschlossene Integrale für den Fall eines zu den Koordinaten-Axen parallel gestellten Rechtecks zu beweisen. Dies gilt sogar auch noch, wenn man die von Herrn Heffter bezüglich der nur rektifizierbaren Integrations-Kurven gemachte Einschränkung fallen lässt und für die über letztere zu erstreckenden Integrale die (jene Einschränkung nicht erfordernde) Definition des Herrn Camille Jordan[1]) zu Grunde legt. Alsdann kommt es nämlich in letzter Linie nur darauf an, Integralsätze der fraglichen Art für den Fall eines beliebigen Dreiecks zu beweisen.[2]) Da man ja aber diesen Fall nach dem oben gesagten durch Approximation vermittelst eines „Treppenweges" erledigen kann, so ist schliesslich auch jener allgemeinste Fall auf den „Rechtecks"-Beweis zurückgeführt. Man kann hiernach sagen, dass dieser letztere dem praktischen Bedürfnisse im weitesten Umfange Genüge leistet; freilich wohl nicht ganz so vollständig dem logischen. Denn, wenn wir auch bei der Analyse krummer Linien gezwungen sind, zu Grenz-Vorstellungen zu greifen und sie durch passend gewählte gebrochene Linien zu approximieren, so muss es doch andererseits wohl als eine logische Anomalie gelten, wenn man nun auch die einfache Vorstellung der geraden Linie wiederum durch die Grenz-Vorstellung eines „Treppenweges" ersetzt. Infolge dessen will es mir aus logischen Gründen wünschenswert erscheinen, die Eigenschaften des geradlinigen Integrals direkt aus der Definition, ohne Benützung eines durch das Wesen der Sache in keiner Weise gebotenen Grenz-Prozesses herzuleiten:[3]) was

---

[1]) Cours d'Analyse, 2me éd. T. I (1893), p. 181.

[2]) A. a. O. p. 188.

[3]) Damit steht nicht im Widerspruch, dass auch die Erkenntnis der Möglichkeit, ein geradliniges Integral durch ein Treppen-Integral beliebig zu approximieren, an sich wertvoll erscheint, weil sie deutlich zeigt, dass für den Wert solcher Integrale die Länge des Integrations-

dann offenbar schliesslich darauf hinausläuft, dass man den für geschlossene Integrale erforderlichen Hauptbeweis nicht auf den Fall eines speziell gelagerten Rechtecks beschränkt, sondern von vornherein für ein beliebiges Dreieck zu führen sucht.[1]) Dies für den oben erwähnten, von Herrn Heffter für den Rechtecks-Fall bewiesenen Satz über reelle Linien-Integrale zu leisten und daran einige weitere Bemerkungen zu knüpfen, ist der Zweck der folgenden Mitteilung.

---

1. Es sei $f(x, y)$ eine in einem gewissen Bereiche T eindeutige und stetige Funktion der beiden reellen Veränderlichen (x, y). Wir setzen zur Abkürzung, wie üblich:

$$(1) \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_1(x, y), \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_2(x, y),$$

und ausserdem:

$$(2) \quad \begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_1(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) - f_2(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) \\ = f(x, y \mid x_0, y_0). \end{aligned}$$

Man sagt alsdann, $f(x, y)$ habe im Punkte (x_0, y_0) ein vollständiges Differential[2]) oder, wie ich etwas kürzer es bezeichnen will, $f(x, y)$ sei bei (x_0, y_0) differenzierbar,[3]) wenn $f_1(x_0, y_0)$, $f_2(x_0, y_0)$ bestimmte Werte besitzen und zugleich:

$$(3) \qquad |f(x, y \mid x_0, y_0)| < \varepsilon(|x - x_0| + |y - y_0|) \text{ für } \begin{Bmatrix} |x - x_0| \\ |y - y_0| \end{Bmatrix} < \delta$$

($\varepsilon > 0$ von beliebig vorgeschriebener, $\delta > 0$ von entsprechend zu bestimmender Kleinheit).

---

weges nicht als ausschlaggebend erscheint. (Vgl. die p. 1, Fussn. 3 zitierte Mitteilung p. 55, 60).

[1]) Vgl. im übrigen meine Bemerkungen: Transact. of the Amer. Math. Soc. 2 (1901), p. 418.

[2]) S. z. B. Stolz, Grundzüge der Diff.- und Integral-Rechnung, I (1893), p. 133.

[3]) Also „differenzierbar" (schlechthin) im Sinne von „total differenzierbar".

Ist $f(x, y)$ für jede einzelne Stelle (x_0, y_0) des Bereiches T differenzierbar, so braucht deshalb $f(x, y)$ noch nicht in T gleichmässig differenzierbar zu sein. Hierzu müssen nämlich noch die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sein, deren Bestehen durch die blosse Differenzierbarkeit für jedes einzelne (x_0, y_0) noch keineswegs gewährleistet wird:

1) $|f_1(x_0, y_0)|$, $|f_2(x_0, y_0)|$ bleiben für alle (x_0, y_0) des Bereiches T unter einer festen Schranke.

2) Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein bestimmtes $\delta > 0$, welches für alle (x_0, y_0) die Existenz der Ungleichungen (3) nach sich zieht.

2. Bezeichnet man mit Δ irgend ein dem Bereiche T angehöriges Dreieck und mit $\int\limits_{(\Delta)} f(x, y) \cdot dx$, $\int\limits_{(\Delta)} f(x, y) \cdot dy$ Integrale, welche (etwa in positiver Richtung) über die Begrenzung dieses Dreiecks zu erstrecken sind, versteht man ferner unter (x_0, y_0) einen ganz beliebigen Punkt des Bereiches T, so ergibt sich mit Benützung der Identität (2) unmittelbar die folgende identische Umformung:

$$\begin{aligned}\int\limits_{(\Delta)} f(x, y) \cdot dx = &\int\limits_{(\Delta)} f(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dx \\ &+ (f(x_0, y_0) - f_1(x_0, y_0) \cdot x_0 - f_2(x_0, y_0) \cdot y_0) \cdot \int\limits_{(\Delta)} dx \\ &+ f_1(x_0, y_0) \cdot \int\limits_{(\Delta)} x \cdot dx + f_2(x_0, y_0) \cdot \int\limits_{(\Delta)} y \cdot dx.\end{aligned}$$

Da aber offenbar:

$$\int\limits_{(\Delta)} dx = 0, \quad \int\limits_{(\Delta)} x \cdot dx = 0,$$

so reduziert sich diese Gleichung auf die folgende:

$$(4^{\mathrm{a}}) \quad \int\limits_{(\Delta)} f(x, y) \cdot dx = \int\limits_{(\Delta)} f(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dx + f_2(x_0, y_0) \int\limits_{(\Delta)} y \cdot dx.$$

Analog ergibt sich:

$$(4^{\mathrm{b}}) \quad \int\limits_{(\Delta)} f(x, y) \cdot dy = \int\limits_{(\Delta)} f(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dy + f_1(x_0, y_0) \cdot \int\limits_{(\Delta)} x \cdot dy.$$

3. Dies vorausgeschickt beweisen wir jetzt den folgenden Satz (Übertragung der Goursat'schen Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integral-Satzes auf reelle Kurven-Integrale):

Sind $P(x,y)$, $Q(x,y)$ eindeutig definiert und differenzierbar[1]) *im Innern und auf der Begrenzung*[2]) *eines Dreiecks Δ und besteht daselbst die Beziehung:*

$$P_2(x,y) = Q_1(x,y), \tag{5}$$

so hat man:

$$\int_{(\Delta)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = 0. \tag{6}$$

Beweis. Halbiert man die drei Seiten von Δ und zerlegt Δ durch geradlinige Verbindung der Halbierungspunkte in 4 kongruente, dem ursprünglichen ähnliche Dreiecke $\Delta_1^{(\varkappa)}$ ($\varkappa = 1, 2, 3, 4$), so hat man:

$$\int_{(\Delta)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = \sum_1^4{}^{\varkappa} \int_{(\Delta_1^{(\varkappa)})} (P \cdot dx + Q \cdot dy),$$

und daher:

$$\left| \int_{(\Delta)} (P \cdot dx + Q \cdot dy \right| \leq \sum_1^4{}^{\varkappa} \left| \int_{(\Delta_1^{(\varkappa)})} (P \cdot dx + Q \cdot dy) \right|.$$

Unter den 4 Dreiecken $\Delta_1^{(\varkappa)}$ muss dann offenbar mindestens eins vorhanden sein, für welches:

$$\left| \int_{(\Delta_1^{(\varkappa)})} (P \cdot dx + Q \cdot dy) \right| > \tfrac{1}{4} \left| \int_{(\Delta)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) \right|$$

ausfällt. Es werde dieses Dreieck oder, wenn mehrere dieser Art vorhanden sein sollten, ein beliebig aus diesen herausge-

---

[1]) Die Differenzierbarkeit einer Funktion $f(x,y)$ in dem oben definierten Sinne schliesst offenbar allemal schon die Stetigkeit von $f(x,y)$ mit ein.

[2]) Das Verhalten bezw. die Existenz von $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ausserhalb Δ kommt überhaupt nicht in Betracht. Insbesondere brauchen also $P(x,y)$, $Q(x,y)$ für die Punkte der Begrenzung nach aussen hin weder differenzierbar, noch stetig zu sein.

griffenes, aber nunmehr bestimmtes mit Δ_1 bezeichnet. Alsdann wird also:

$$\left|\int_{(\Delta)}(P\cdot dx+Q\cdot dy)\right|<4\cdot\left|\int_{(\Delta_1)}(P\cdot dx+Q\cdot dy)\right|.$$

Wendet man jetzt die analoge Vierteilung auf das Dreieck Δ_1 an, so ergibt sich mit Benützung der nämlichen Schlussweise:

$$\left|\int_{(\Delta_1)}(P\cdot dx+Q\cdot dy)\right|<4\cdot\left|\int_{(\Delta_2)}(P\cdot dx+Q\cdot dy)\right|,$$

und daher:

$$\left|\int_{(\Delta)}(P\cdot dx+Q\cdot dy)\right|<4^2\cdot\left|\int_{(\Delta_2)}(P\cdot dx+Q\cdot dy)\right|,$$

wo jetzt Δ_2 ein bestimmtes Viertel-Dreieck von Δ_1 bedeutet.

Durch n malige Anwendung dieser Schlussweise gelangt man zu einer Beziehung von der Form:

$$(7)\qquad \left|\int_{(\Delta)}(P\cdot dx+Q\cdot dy)\right|<4^n\cdot\left|\int_{(\Delta_n)}(P\cdot dx+Q\cdot dy)\right|.$$

Dabei bilden

$$\Delta,\quad \Delta_1,\quad \Delta_2,\quad \ldots\ldots \Delta_n$$

eine (offenbar unbegrenzt fortsetzbare) Dreiecksfolge von folgender Beschaffenheit: jedes Dreieck Δ_ν $(\nu=1,2,\ldots n)$ bildet einen Bestandteil (nämlich ein Viertel) des unmittelbar vorangehenden und besitzt halb so grosse Seiten, wie jenes. Bezeichnet man also mit

$$s,\quad s_1,\quad s_2,\quad \ldots\ldots s_n$$

die Umfänge der betreffenden Dreiecke, so hat man: $s_1=\frac{s}{2}$, $s_2=\frac{s}{2^2}$ und allgemein:

$$(8)\qquad s_n=\frac{s}{2^n}.$$

Bei unbegrenzter Fortsetzung des angedeuteten Prozesses konvergieren die Dreiecke Δ_n gegen einen bestimmten, dem Innern oder der Begrenzung von Δ angehörigen Punkt (x_0, y_0). Wird dann $\varepsilon>0$ beliebig klein vorgeschrieben, so muss sich

auf Grund der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von $P(x, y)$, $Q(x, y)$ ein $\delta > 0$ so fixieren lassen, dass:

$$(9) \qquad \left.\begin{array}{l} |P(x, y \mid x_0, y_0)| \\ |Q(x, y \mid x_0, y_0)| \end{array}\right\} < \varepsilon \cdot (|x - x_0| + |y - y_0|)$$

für alle dem Bereiche Δ angehörigen (x, y), welche den Ungleichungen genügen:

$$(9^a) \qquad \left.\begin{array}{l} |x - x_0| \\ |y - y_0| \end{array}\right\} < \delta.$$

Andererseits ergibt sich mit Benützung der Transformation (4^a), (4^b) zunächst:

$$\int\limits_{(\Delta_n)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = \int\limits_{(\Delta_n)} (P(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dx + Q(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dy)$$
$$+ P_2(x_0, y_0) \int\limits_{(\Delta_n)} y \cdot dx + Q_1(x_0, y_0) \int\limits_{(\Delta_n)} x \cdot dy.$$

Da aber nach Voraussetzung (Gl. (5)):

$$P_2(x_0, y_0) = Q_1(x_0, y_0)$$

und sodann:

$$\int\limits_{(\Delta_n)} y \cdot dx + \int\limits_{(\Delta_n)} x \cdot dy = \int\limits_{(\Delta_n)} d(xy) = 0,$$

so reduziert sich die obige Gleichung auf die folgende:

$$(10) \quad \int\limits_{(\Delta_n)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = \int\limits_{(\Delta_n)} (P(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dx + Q(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dy).$$

Wird jetzt n gross genug angenommen, dass Δ_n vollständig in die durch Ungl. (9^a) charakterisierte Umgebung des Punktes (x_0, y_0) hineinfällt, so folgt aus Gl. (10) mit Benützung der Ungleichungen (9):

$$\left|\int\limits_{(\Delta_n)} (P \cdot dx + Q \cdot dy)\right| < \varepsilon \cdot \int\limits_{(\Delta_n)} (|x - x_0| + |y - y_0|) \cdot (|dx| + |dy|).$$

Wegen:

$$\left.\begin{array}{l} |x - x_0| \\ |y - y_0| \end{array}\right\} \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \frac{s_n}{2}$$

wird sodann:

$$\left|\int\limits_{(J_n)}(P\,dx + Q\cdot dy)\right| < \varepsilon\cdot s_n\cdot\int\limits_{(J_n)}(|\,dx\,| + |\,dy\,|)$$

$$< \varepsilon\cdot s_n\cdot 2\,s_n = \varepsilon\cdot 2\,s_n^2 = \varepsilon\cdot 2\cdot\frac{s^2}{4^n}\ \text{(s. Gl. (8))},$$

sodass also die Ungleichung (7) in die folgende übergeht:

$$\left|\int\limits_{(J)}(P\,dx + Q\cdot dy)\right| < \varepsilon\cdot 2\,s, \tag{11}$$

d. h., da ε unbegrenzt verkleinert werden kann, schliesslich, wie behauptet:

$$\int\limits_{(J)}(P\cdot dx + Q\cdot dy) = 0.$$

4. Man bemerke, dass die bei dem obigen Beweise als grundlegend vorausgesetzte Bedingung der Differenzierbarkeit von $P(x, y)$, $Q(x, y)$ (immer in dem oben näher definierten Sinne) einen wesentlich anderen Charakter besitzt, wie diejenigen Bedingungen, welche zum Beweise des betreffenden Integralsatzes mit Hilfe des Green'schen Satzes:

$$\int\int(Q_1 - P_2)\,dx\cdot dy = \int(P\cdot dx + Q\cdot dy)$$

erforderlich sind. Diese letzteren sind Stetigkeits-Bedingungen für $Q_1(x, y)$, $P_2(x, y)$, welche die Existenz der Doppel-Integrale $\int\int Q_1\cdot dx\,dy$, $\int\int P_2\cdot dx\,dy$ nach sich ziehen sollen, welche also, allgemein zu reden, in gewissem Umfange die Existenz von Stetigkeitspunkten für $Q_1(x, y)$, $P_2(x, y)$ als Funktionen der beiden Veränderlichen (x, y) verlangen.[1]) Dagegen hat die Differenzierbarkeit von $Q(x, y)$, $P(x, y)$ zunächst mit der Stetigkeit von $Q_1(x, y)$, $P_2(x, y)$ überhaupt nichts zu tun (wenn auch umgekehrt nach einem bekannten Satze[2]) die Stetigkeit von $Q_1(x, y)$, $P_2(x, y)$ als Funktionen von (x, y) für die Differenzierbarkeit von $Q(x, y)$, $P(x, y)$ sich als hinreichend erweist). Hierin liegt aber eine neue Bestätigung der von mir bei früherer Gelegenheit[3]) gemachten Bemerkung,

---

[1]) Genaueres s. dieser Berichte Bd. 29 [1899], p. 59.

[2]) Stolz, a. a. O. p. 134.

[3]) A. a. O. p. 60.

dass der Green'sche Satz keineswegs als allgemeinste Grundlage der Relation $\int (P \cdot dx + Q \cdot dy) = 0$ angesehen werden kann.

5. Aus dem in Nr. 3 bewiesenen Satze für reelle Integrale gewinnt man unmittelbar den Cauchy-Goursat'schen Satz für komplexe Integrale: $\int\limits_{(\Delta)} f(z) \cdot dz = 0$, wenn man $\int f(z) \cdot dz$ in seinen reellen und imaginären Teil zerlegt. Dagegen lässt sich nicht umgekehrt der Satz von Nr. 3 aus dem entsprechenden Satze für $\int f(z) \cdot dz$ herleiten. Man würde auf diesem Wege immer nur das Resultat gewinnen, dass:

$$\int\limits_{(\Delta)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = 0,$$

wenn $P(x, y)$, $Q(x, y)$ ausser den früher angegebenen Bedingungen auch noch der Beziehung:

$$P_1(x, y) = - Q_2(x, y)$$

genügen. Der Satz von Nr. 3 ist also der allgemeinere und schon aus diesem Grunde dürfte es zweckmässig erscheinen, ihn als den eigentlichen Fundamentalsatz zum Ausgangspunkt zu nehmen, zumal ja überhaupt die prinzipielle Zurückführung der komplexen Integrale auf reelle Kurven-Integrale in logischer und praktischer Hinsicht erhebliche Vorzüge besitzt.

Will man freilich nur die Beziehung $\int\limits_{(\Delta)} f(z) \cdot dz = 0$ (unter der Voraussetzung eines eindeutigen, differenzierbaren $f(z)$) auf dem denkbar kürzesten Wege herleiten, so braucht man nur das in Nr. 3 angewendete Beweisverfahren mutatis mutandis direkt auf $\int f(z) \cdot dz$ zu übertragen. Man findet zunächst, analog wie dort:

$$\left| \int\limits_{(\Delta)} f(z) \cdot dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int\limits_{(\Delta_n)} f(z) \cdot dz \right|. \tag{12}$$

Bezeichnet man sodann mit z_0 den Grenzpunkt der Δ_n, so besteht auf Grund der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von $f(z)$ eine Beziehung von der Form:

$$|f(z|z_0)| \equiv |f(z) - f(z_0) - f'(z_0) \cdot (z - z_0)| < \varepsilon \cdot |z - z_0| \quad \text{für } |z - z_0| < \delta. \tag{13}$$

Durch identische Umformung ergibt sich aber:

$$(14)\quad \begin{aligned} \int\limits_{(\Delta_n)} f(z)\cdot dz &= \int\limits_{(\Delta_n)} f(z\,|\,z_0)\cdot dz + (f(z_0)-f'(z_0)\cdot z_0)\int\limits_{(\Delta_n)} dz + f'(z_0)\int\limits_{(\Delta_n)} z\cdot dz \\ &= \int\limits_{(\Delta_n)} f(z\,|\,z_0)\cdot dz \end{aligned}$$

(wegen: $\int\limits_{(\Delta_n)} dz = 0$, $\int\limits_{(\Delta_n)} z\cdot dz = 0$, wie unmittelbar aus der Definition des komplexen Integrals als Summen-Grenzwert hergeleitet werden kann.[1]))

Wird also wiederum n so gross angenommen, dass Δ_n in die Umgebung $|z - z_0| < \delta$ hineinfällt, so ergibt sich mit Benützung von Ungl. (13):

$$\begin{aligned} \left|\int\limits_{(\Delta_n)} f(z)\cdot dz\right| &< \varepsilon\cdot\int\limits_{(\Delta_n)} |z - z_0|\cdot|dz| \\ &< \varepsilon\cdot\frac{s_n}{2}\cdot\int\limits_{(\Delta_n)} |dz| \\ &= \varepsilon\cdot\frac{s_n}{2}\cdot s_n = \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{s^2}{4^n}, \end{aligned}$$

und daher schliesslich:

$$\left|\int\limits_{(\Delta)} f(z)\cdot dz\right| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot s^2 \quad \text{d. h.} \quad \int\limits_{(\Delta)} f(z)\cdot dz = 0.^{2)}$$

---

1) Vgl. Transact. of the Amer. Math. Soc. 2 (1901), p. 417.

2) Dieser Beweis unterscheidet sich von dem indirekt gefassten, welchen Herr Moore in den Transact. of the Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 505 bezw. 502 mitgeteilt hat, ausser durch die direkte Fassung (vgl. a. a. O. p. 503, Fussn. 1) nur noch durch die im vorliegenden Falle offenbar zweckmässigere Einführung von Teil-Dreiecken an Stelle der dort benützten quadratischen Teilung. Er ist noch merklich kürzer als der a. a. O. Bd. 2, p. 420 von mir angegebene Beweis, da er nicht erst die Herleitung des Goursat'schen Lemmas erfordert.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1903

Band/Volume: 1903

Autor(en)/Author(s): Pringsheim Alfred

Artikel/Article: Der Cauchy-Goursat'sche Integralsatz und seine Übertragung auf reelle Kurven-Integrale 673-682