Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXV. Jahrgang 1905.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1906.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser.

Von **A. Föppl.**

(*Eingelaufen 3. Juni.*)

Zur Behandlung des in der Überschrift bezeichneten Problems wurde ich durch die Frage veranlaßt, wie sich der Spannungszustand in der Übergangsstelle gestaltet, wenn eine auf Verdrehen beanspruchte Welle aus zwei zylindrischen und konaxialen Teilen besteht, zwischen denen ein durch eine Abrundung von ziemlich kleinem Halbmesser vermittelter, verhältnismäßig schroffer Übergang stattfindet. Die Spannungen werden nämlich an der Übergangsstelle erheblich größer, als am Umfange der schwächeren Welle in einem größeren Abstande von der Übergangsstelle und in Übereinstimmung mit diesem theoretischen Ergebnisse lehrt auch die Erfahrung, daß Wellenbrüche meistens an der Übergangsstelle eintreten. Eine strenge Lösung des in der eben angegebenen Weise formulierten Problems vermochte ich freilich nicht zu finden; ich mußte mich vielmehr mit einer für die praktischen Zwecke des Maschinenbaues ausreichenden Abschätzung begnügen, zu der die theoretische Betrachtung, die ich hier wiedergeben will, die erforderlichen Unterlagen lieferte.

Dagegen zeigte sich, daß man auch eine strenge Lösung des Torsionsproblems für eine größere Zahl von Fällen angeben kann, in denen der Stab einen Rotationskörper bildet, falls man die Meridiankurve passend wählt. Als eine strenge Lösung bezeichne ich hier eine solche, die dieselben Anforderungen erfüllt wie die Lösung von de St. Vénant für zylindrische oder prismatische Stäbe, d. h. es muß uns wie bei der Lösung von de St. Vénant frei stehen, eine solche Verteilung der äußeren Kräfte an den Endquerschnitten des Stabes vorauszusetzen, wie sie sich aus der Lösung selbst ergibt. Die Mantelfläche des Stabes ist dabei überall als frei von äußeren Kräften vorauszusetzen.

Rein mathematisch betrachtet handelt es sich darum, eine Lösung der Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie für die elastischen Verschiebungen zu finden, die allen Grenzbedingungen genügt. Man weiß auch ferner, daß diese Lösung durch die Grenzbedingungen eindeutig bestimmt ist. Bezeichnet man die Komponenten der elastischen Verschiebungen in den Achsenrichtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit $\xi\,\eta\,\zeta$ und mit $\frac{1}{m}$ die Poissonsche Verhältniszahl, die für Stahl im Mittel zu 0,3 angenommen werden kann, so lauten die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie

$$\nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} = 0$$

$$\nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y} = 0$$

$$\nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z} = 0$$

wobei zur Abkürzung

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{und} \quad e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

gesetzt ist. Übersichtlicher lassen sich die drei Grundgleichungen auch zu einer einzigen Vektorgleichung zusammenfassen, von der ich im weiteren ausgehen will. Wenn man die elastische Verschiebung, deren Komponenten $\xi\,\eta\,\zeta$ waren, als Vektor aufgefaßt, mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet, lautet diese Gleichung

$$\nabla^2 \mathfrak{v} + \frac{m}{m-2}\nabla \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \tag{1}$$

Hierbei hat $\operatorname{div} \mathfrak{v}$ dieselbe Bedeutung wie vorher e.

Es liegt nun sehr nahe, hier eine Lösung der Grundgleichung zu versuchen, bei der

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \tag{2}$$

gesetzt ist, weil auch schon bei der Theorie der Torsion von zylindrischen oder prismatischen Stäben dieser Ansatz zu Grunde liegt. In der Tat zeigt sich auch, daß man auf diese Weise zu der gesuchten Lösung gelangt. Die Grundgleichung (1) zerfällt hiermit in zwei Gleichungen, nämlich in (2) und in die weitere

$$\nabla^2 \mathfrak{v} = 0 \tag{3}$$

die beide von der gesuchten Lösung erfüllt werden müssen. Nach einem bekannten Rechengesetze der Vektor-Analysis läßt sich wegen (2) die Gleichung (3) auch durch

$$\operatorname{curl}^2 \mathfrak{v} = 0 \tag{4}$$

ersetzen, von der man ein erstes Integral in der Form

$$\operatorname{curl} \mathfrak{v} = \nabla V \tag{5}$$

sofort anzuschreiben vermag. Dabei bedeutet V eine beliebige Potentialfunktion, die von Massen herrührt, die alle außerhalb des Rotationskörpers liegen, so daß V überall innerhalb des Stabs die Laplacesche Gleichung

$$\nabla^2 V = 0 \tag{6}$$

erfüllt. Natürlich wird man, um nacher die Grenzbedingungen am Umfange des Rotationskörpers erfüllen zu können, auch die Massen, zu denen die Potentialfunktion V gehört, in symmetrischer Verteilung um die Rotationsachse oder auch auf der Rotationsachse selbst anzunehmen haben. Dann fällt der Vektor ∇V und hiermit auch $\operatorname{curl} \mathfrak{v}$ überall in die Meridianebene des Rotationskörpers. Wie man aber im übrigen auch die Massen wählen mag, wird man mit diesen Ansätzen zu einer möglichen Lösung der Grundgleichung geführt, die für einen Rotationskörper durch entsprechend gewählte Grenzbedingungen verwirklicht werden könnte. Unsere Aufgabe wird dagegen darin bestehen, die allgemeine Lösung so zu spezialisieren, daß die bereits vorgeschriebenen Grenzbedingungen erfüllt werden können. Dazu gelangen wir, wenn wir von nun ab $\mathfrak{v}$ so wählen, daß es keine Komponente in der Richtung der Rotationsachse hat, sondern in der Querschnittsebene des Rotationskörpers enthalten ist, ferner in jedem Punkte eines Kreises, der in der Querschnittsebene (mit dem Mittelpunkte in der Achse) gezogen ist, gleich groß und tangential gerichtet ist. Die absolute Größe von $\mathfrak{v}$, die mit v bezeichnet werden soll, ist dann eine zunächst unbekannte Funktion der Koordinaten x, ϱ des Punktes in irgend einem Meridianschnitte, wenn die Koordinate x in der Richtung der Rotationsachse gezählt ist und ϱ den Halbmesser des erwähnten Kreises bedeutet.

Gleichung (2) ist mit diesem Ansatze von selbst erfüllt. Die Vektorgleichung (5) läßt sich dagegen durch die beiden skalaren Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}(v\,\varrho) \text{ und } \frac{\partial V}{\partial \varrho} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{7}$$

ersetzen, woraus folgt, daß v der Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial}{\partial \varrho}(v\,\varrho)\right) = 0 \tag{8}$$

genügen muß. Natürlich hätte es des Umweges, der mit der Einführung der Potentialfunktion V verbunden ist, nicht bedurft, wenn es sich nur um die Herleitung der Gl. (8) gehandelt hätte, denn diese Gleichung stimmt bei der Wahl, die wir jetzt für $\mathfrak{v}$ getroffen haben, inhaltlich vollständig mit Gl. (3) überein. Die Einführung der Potentialfunktion V hat nur den Zweck, die Ermittelung von partikulären Lösungen der Gl. (8) zu erleichtern.

Wir wollen jetzt sehen, von welcher Art der Spannungszustand ist, der durch eine elastische Formänderung, wie wir sie hier annehmen, hervorgebracht wird. Zu diesem Zwecke seien durch einen Punkt mit den Koordinaten x, ϱ im Meridianschnitte drei zueinander senkrechte Ebenen gelegt, nämlich die Meridianebene, die Querschnittsebene und eine zu beiden senkrechte Ebene, die demnach parallel zur Achse geht und die Richtung der Verschiebung $\mathfrak{v}$ an dem betrachteten Punkte enthält. In diesen drei Schnittrichtungen können in der Nachbarschaft des Punktes x, ϱ keine Normalspannungen übertragen werden, da die Dehnungen in den Richtungen der Achse, des Radius und der Richtung von $\mathfrak{v}$ bei dem hier betrachteten Formänderungszustande alle drei gleich Null sind. Die Schubspannung im Meridianschnitte sei in zwei Komponenten τ_x in der Richtung der Achse, und τ_ϱ in radialer Richtung zerlegt; dann hat man

$$\tau_x = G\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \tau_\varrho = G\left(\frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho}\right) \tag{9}$$

wenn mit G der Schubelastizitätsmodul bezeichnet wird. Diesen Spannungskomponenten entsprechen in den beiden anderen Schnittrichtungen die ihnen zugeordneten, also insbesondere eine Schubspannung in der Querschnittsebene von der Größe τ_x, die in der Richtung von $\mathfrak{v}$ oder kurz gesagt in tangentialer Richtung geht. Dagegen fehlt in der Querschnittsebene eine in radialer Richtung gehende Schubspannungskomponente, weil der rechte Winkel zwischen einer in radialer und einer in axialer Richtung gezogenen kleinen Strecke bei der Formänderung ungeändert bleibt. Durch die Angabe der Schubspannungskomponenten τ_x und τ_ϱ in der Meridianebene ist daher der hier vorliegende Spannungszustand vollständig beschrieben.

Jetzt läßt sich auch die für die Mantelfläche des Rotationskörpers vorgeschriebene und durch die bisherigen Festsetzungen noch nicht erfüllte Grenzbedingung in einer Gleichung ausdrücken. Damit die Mantelfläche frei von äußeren Kräften sei, muß die Resultierende aus τ_x und τ_ϱ in der Meridianebene am Umfange tangential zur Meridiankurve gerichtet sein. Denkt man sich die Gleichung der Umrißlinie in der Form

$$z = f(x) \tag{10}$$

gegeben, so lautet diese Grenzbedingung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\tau_\varrho}{\tau_x} = \left(\frac{\frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{v}{\varrho}}{\frac{\partial v}{\partial x}} \right)_{\varrho = z} \tag{11}$$

Der weitere Weg ist jetzt klar vorgezeichnet; man hat eine Lösung von Gl. (8) zu suchen, die mit der Bedingung (11) verträglich ist. Der Spannungszustand folgt dann aus den Gleichungen (9).

Nun würde es zu schwierig sein, diese Aufgabe für den Fall einer ganz beliebig gegebenen Umrißlinie zu lösen. Man kann aber, wie es auch bei der ganz ähnlich liegenden Aufgabe der Torsion von prismatischen Stäben geschieht, umgekehrt irgend eine Lösung von Gl. (8) zu Grunde legen und dann nachträglich die Gestalt der Umrißlinie nach Gl. (11) ermitteln, für die diese Lösung zutrifft. Dazu braucht man nur noch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zu integrieren, was zum mindesten näherungsweise immer ausführbar ist.

Was schließlich die Grenzbedingungen an den beiden Endquerschnitten des Stabes betrifft, so folgt schon aus den vorhergehenden Betrachtungen über den Spannungszustand, daß dort, wie es verlangt war, weder Normalkräfte noch Kräfte in radialer Richtung, sondern nur solche in tangentialer Richtung als äußere Kräfte angebracht sein dürfen. Über die Verteilung der tangential gerichteten Kräfte über die Querschnittsfläche am Stabende können wir bei dem Verfahren, wie es soeben beschrieben wurde, freilich nicht mehr verfügen; wir müssen uns vielmehr jene Verteilung gefallen lassen, die aus der Lösung selbst hervorgeht. Wenn man darin einen Nachteil erblicken wollte, würde ihn aber die hier besprochene Lösung mit der Theorie der Torsion von prismatischen Stäben teilen, bei der, wie schon eingangs bemerkt, der Sachverhalt derselbe ist.

Meine Absicht geht hier nicht darauf hinaus, eine größere Zahl von Beispielen für das angegebene Verfahren beizubringen, da ich mir für den praktischen Zweck, den ich im Auge habe, davon nicht sehr viel verspreche. Wie diesem meiner Ansicht nach besser gedient werden kann, werde ich nachher noch auseinandersetzen. Es wird daher genügen, wenn ich wenigstens an einem Beispiele zeige, wie man auf dem bisher besprochenen Wege zu Ziele gelangen kann.

Man setze:

$$V = -C \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = C \frac{a + x}{R^3} \tag{12}$$

wobei

$$R^2 = (a + x)^2 + \varrho^2,$$

R selbst also den Abstand des Punktes x, ϱ von einem auf der Achse in der beliebigen Entfernung a vom Anfangsquerschnitte des Stabs gelegenen Punkte bedeutet. Der angegebene Wert von V ist die Potentialfunktion eines an dieser Stelle gelegenen „Doppelpunktes", befriedigt also jedenfalls überall innerhalb des Stabs die Laplacesche Gleichung (6). Aus den Gleichungen (7) findet man hierauf leicht

$$v = \frac{k}{\varrho} + C \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{k}{\varrho} - C \frac{\varrho}{R^3} \tag{13}$$

wenn mit k eine Integrationskonstante bezeichnet wird. Nachträglich kann man sich auch noch leicht unmittelbar davon überzeugen, daß Gl. (13) eine partikuläre Lösung von Gl. (8) liefert. Die Integrationskonstante k in Gl. (13) muß übrigens gleich Null gesetzt werden, damit die Verschiebung v für die auf der Achse gelegenen Punkte verschwindet. Es bleibt also

$$v = -C \frac{\varrho}{R^3} \tag{14}$$

Setzt man diesen Wert in Gl. (11) ein, so geht sie über in

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{3C\dfrac{\varrho^2}{R^5}}{3C\dfrac{\varrho(x+a)}{R^5}}\right)_{\varrho = z} = \frac{z}{x+a}$$

und deren Lösung ist, wenn mit K eine neue Integrationskonstante bezeichnet wird,

$$z = K(x + a) \tag{15}$$

d. h. die vorher gefundene Lösung bezieht sich auf einen Stab, der einen abgestumpften Kegel bildet, dessen Spitze um die beliebig zu wählende Strecke a vom Anfangsquerschnitte entfernt ist. Es mag nur noch bemerkt werden, daß sich die Schubspannung in einem Querschnitte, wie aus den Gleichungen (9) sofort zu entnehmen ist, nach dem Gesetze

$$\tau_x = 3\,G\,C\,\frac{(a + x)\,\varrho}{R^5} \tag{16}$$

über den Querschnitt verteilt, also nach einem Gesetze, das namentlich an dem kleineren Endquerschnitte sehr merklich von jenem abweichen kann, das für eine zylindrische Welle gelten würde. Die Abweichung ist um so größer, je stumpfer der Kegel ist.

Da die Differentialgleichung (8) linear ist, kann man aus der einen partikulären Lösung in Gl. (14) eine Reihe anderer und auch eine allgemeinere ableiten, die eine willkürliche Funktion enthält, indem man etwa

$$v = \varrho \int \frac{F(a)}{(\varrho^2 + (x + a)^2)^{\frac{3}{2}}}\,da \tag{17}$$

setzt, worin $F(a)$ eine beliebige Funktion von a ist, in der natürlich x und ϱ nicht vorkommen dürfen.

Man könnte auch von anderen Massenverteilungen ausgehen, zu denen das Potential V gehören soll und hiermit zu weiteren Lösungen gelangen. — Am nächsten würde es natürlich liegen, den Fall zu untersuchen, daß sich v aus zwei Gliedern von der in Gl. (14) gegebenen Form zusammensetzt.[1]

---

[1] Einfache Lösungen von Gl. (8) sind auch

$$v = a_1\,\varrho + a_3\,\varrho^3 \quad \text{oder} \quad v = b_1\,\varrho + b_3\,\varrho^3 + b_5\,\varrho^5$$

u. s. f., wenn unter den a und b leicht zu bestimmende einfache Funktionen von x verstanden werden.

Ich sehe aber auch davon aus dem schon angeführten Grunde ab und wende mich jetzt zu einer anderen Behandlung der Aufgabe, die mir für die Erreichung des praktischen Zweckes einer Festigkeitsberechnung aussichtsreicher zu sein scheint.

Man kann nämlich die Aufgabe auf ein hydrodynamisches Problem zurückführen, indem man die Verteilung der Schubspannungen in einem Meridianschnitte durch eine ebene Flüssigkeitsbewegung abbildet. Zunächst denke man sich eine Schar von Spannungslinien in den Meridianschnitt eingetragen, nämlich von Linien, die überall in der Richtung der Schubspannung τ fortschreiten, wobei unter τ die Resultierende aus den vorher berechneten Komponenten τ_x und τ_ϱ zu verstehen ist. Die äußerste Spannungslinie fällt, wie wir schon sahen, mit der Meridiankurve, also mit der Umrißlinie der Welle zusammen.

Diese Spannungslinien lassen sich nun auch als die Stromlinien einer ebenen Flüssigkeitsbewegung ansehen, die sich durch den Längsschnitt des Stabes erstreckt. Die Geschwindigkeit der Strömung darf aber nicht unmittelbar proportional mit τ gewählt werden, sondern proportional mit $\varrho^2\tau$, damit die Flüssigkeitsbewegung quellenfrei bleibt, was natürlich unbedingt notwendig ist, weil man im anderen Falle mit der Abbildung überhaupt nichts anfangen könnte. Die Divergenz einer mit $\varrho^2\tau$ proportionalen Strömung berechnet sich nach den Gleichungen (9) zu

$$\frac{\partial\,(\varrho^2\tau_x)}{\partial x} + \frac{\partial\,(\varrho^2\tau_\varrho)}{\partial \varrho} = G\left(\varrho^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varrho^2\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \varrho\frac{\partial v}{\partial \varrho} - v\right) = 0 \qquad (18)$$

denn der Wert in der Klammer stimmt mit der linken Seite der Differentialgleichung (8), wenn in dieser die Differentiationen ausgeführt werden und mit ϱ^2 multipliziert wird, vollständig überein.

Die Geschwindigkeit der ebenen Flüssigkeitsströmung sei als Vektor aufgefaßt mit $\mathfrak{s}$ bezeichnet und ihre Komponenten in axialer und radialer Richtung mit s_x und s_ϱ, so daß also

$$s_x = \varrho^2\,\tau_x \quad \text{und} \quad s_\varrho = \varrho^2\,\tau_\varrho$$

gesetzt wird. Dann kann zunächst Gl. (18) in der Form

$$\operatorname{div} \mathfrak{s} = 0 \tag{19}$$

angeschrieben werden und für den Wirbel w, der überall senkrecht zur Strömungsebene steht, so daß es nur noch auf die Ermittelung des absoluten Wertes ankommt, erhält man

$$w = \frac{\partial s_x}{\partial \varrho} - \frac{\partial s_\varrho}{\partial x}$$

oder wenn man für die s und die τ ihre Werte einsetzt (die von τ nach den Gleichungen (9))

$$w = 3\, G\, \varrho \frac{\partial v}{\partial x}$$

wofür auch noch

$$w = 3\, \varrho\, \tau_x = 3 \frac{s_x}{\varrho} \tag{20}$$

geschrieben werden kann. Durch die Gleichungen (19) und (20) ist die Flüssigkeitsbewegung im Zusammenhange mit den Grenzbedingungen völlig bestimmt. Eine strenge Lösung des Torsionsproblems, das uns hier beschäftigt, wäre demnach auf die Integration der beiden simultanen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_\varrho}{\partial \varrho} &= 0 \\ \frac{\partial s_x}{\partial \varrho} - \frac{\partial s_\varrho}{\partial x} &= 3 \frac{s_x}{\varrho} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

zurückgeführt. Nun sind freilich die analytischen Schwierigkeiten durch die veränderte Formulierung kaum vermindert; eine näherungsweise Lösung der Aufgabe ist aber dadurch erheblich erleichtert.

Man betrachte ein Stromfadenelement von der in der Richtung der Normalen zu den Stromlinien gemessenen Dicke dn und der Länge $r d\psi$, wenn unter r der Krümmungshalbmesser der Stromlinien an dieser Stelle verstanden wird und wende darauf den Satz von Stockes an. Dann erhält man für den Wirbel w den Ausdruck

$$w = \frac{1}{r} \frac{d}{d\,n} (r\,s) \tag{22}$$

woraus in Verbindung mit Gl. (20)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{d\,n} (r\,s) = 3 \frac{s_x}{\varrho} \tag{23}$$

folgt. Hierbei ist unter s der Absolutwert der Strömungsgeschwindigkeit $\mathfrak{s}$ zu verstehen. Nun ist aber

$$s_x\,d\,n = s \cos \alpha \, d\,n = s\,d\,\varrho$$

wobei α den Neigungswinkel der Stromlinie gegen die Achse bezeichnet. Die Gl. (23) läßt sich daher auch ersetzen durch

$$\frac{1}{r} \frac{d}{d\,\varrho} (r\,s) = 3 \frac{s}{\varrho} \tag{24}$$

wofür auch

$$\frac{d}{d\,\varrho} (r\,s) = \frac{3\,r\,s}{\varrho} \tag{25}$$

geschrieben werden kann. Man sieht, daß sich die Gleichung sofort integrieren läßt. Sie liefert

$$r\,s = A\,\varrho^3 \quad \text{oder} \quad s = A\,\frac{\varrho^3}{r} \tag{26}$$

Dabei ist A eine Integrationskonstante, die aber für jede die Stromlinien überall rechtwinklig schneidende Trajektorie einen anderen Wert hat. Wenn der Verlauf der Stromlinien bereits bekannt wäre, ließe sich der irgend einer solchen Trajektorie zugehörige Wert von A aus der Bedingung berechnen, daß das längs dieser Trajektorie von der Achse bis zur Umrißlinie des Meridianschnitts erstreckte Integral

$$\int s\,d\,n$$

einen für alle Trajektorien konstanten Wert hat, da es die durch die Trajektorie hindurchfließende Flüssigkeitsmenge angibt.

Man sieht nun schon, daß für eine strenge Lösung der

Aufgabe durch die zuletzt abgeleiteten Formeln nichts gewonnen wird. Dagegen wird für eine näherungsweise Lösung durch Gl. (26) sofort eine sehr brauchbare Handhabe geboten, da man das Verhältnis des Geschwindigkeitsgefälls $\frac{ds}{dn}$ zur Geschwindigkeit s selbst unmittelbar an der Umrißlinie hiermit ohne weiteres kennt, indem der Wert von r an dieser Stelle gegeben ist.

Geht man von der hydrodynamischen Abbildung jetzt wieder zur ursprünglichen Aufgabe zurück, so hat man für die Schubspannung τ an irgend einer Stelle des Meridianschnitts

$$\tau = A\frac{\varrho}{r} \tag{27}$$

wobei A dieselbe Bedeutung hat, wie zuvor.

In größerer Entfernung von der Übergangsstelle einer Welle von kleinerem Durchmesser in eine Welle von größerem Durchmesser gehen die Spannungslinien überall parallel zur Zylinderachse; die senkrechten Trajektorien der Spannungslinien sind daher gradlinig und senkrecht zur Achse und der Krümmungshalbmesser r ist unendlich groß und längs einer Trajektorie konstant. Daher muß auch die Konstante A unendlich groß sein, so daß das Verhältnis A/r einen endlichen konstanten Wert liefert. Die Schubspannung τ wächst daher in diesem Teile der Welle proportional mit dem Abstande ϱ von der Achse, genau so wie dies von der Torsion zylindrischer Stäbe von vornherin bekannt war.

So wie wir uns aber der Übergangsstelle nähern, beginnen sich die Spannungslinien zu krümmen, indem sich die äußerste der durch die Abrundung gegebenen Umrißlinie anschließt und sofort wird damit die Spannungsverteilung, wie aus Gl. (27) hervorgeht, vollständig geändert und zwar so, daß die Spannung in der Nähe des Umrisses jetzt viel schneller nach außen hin anwächst als zuvor. Das hat natürlich zur Folge, daß die inneren Teile entlastet werden und das Torsionsmoment überwiegend nur in den äußersten Schichten des Querschnitts übertragen wird, nämlich in einem konzentrischen Ringe, dessen Dicke von derselben Größenordnung ist, wie der Halbmesser der Abrundung, der mit q bezeichnet werden mag und als klein gegen den Wellenhalbmesser betrachtet werden kann.

In einem geringen Abstande p von der Umrißlinie, der senkrecht zu den Spannungslinien gemessen wird, kann genau genug für die gefährlichste Stelle

$$r = q + p$$

gesetzt werden. Wenn daher $p = q$ genommen wird, hat man (ungefähr wenigstens) an dieser Stelle $r = 2q$ und da p klein gegen ϱ ist, hat sich die Spannung τ nach Gl. (27) schon in diesem kleinen Abstande von der Umrißlinie auf die Hälfte des Wertes vermindert, der am Umfange selbst auftritt. Wenn q unendlich klein wäre, müßte die Spannung am Umfange unendlich groß ausfallen, d. h. es würde dann schon ein sehr kleines Torsionsmoment genügen, um ein Überschreiten der Elastizitätsgrenze und hiermit ein geringes plastisches Nachgeben des Materials an dieser Stelle herbeizuführen. — Zugleich erkennt man, daß die Bruchgefahr an der Übergangsstelle durch einen möglichst allmählichen Übergang, der zuerst mit geringer Krümmung einsetzt und in dem Maße, wie ϱ dabei wächst, stärker gekrümmt sein kann, auf einfache Weise herabgesetzt werden kann.

Was nun die praktische Verwendung der hier angestellten Betrachtungen betrifft, so kann ich mich darüber kurz fassen, da eine ausführlichere Darlegung hierüber besser an anderer Stelle gegeben wird. Man wird damit beginnen, den Verlauf der Spannungslinien schätzungsweise in den Längsschnitt der Welle einzutragen, wobei es natürlich nur auf den Verlauf in der Nähe der Übergangsstelle selbst ankommt. Diese erste Schätzung läßt sich dann noch verbessern, indem man Rücksicht darauf nimmt, daß die den Spannungslinien entsprechenden Stromlinien um so dichter aneinander rücken müssen, je größer die Geschwindigkeit längs eines Stromfadens wird. Da es auf große Genauigkeit überhaupt nicht ankommt, wird man leicht zu einer annehmbaren Zeichnung des Stromverlaufs gelangen. Dann folgt die Spannungsverteilung längs einer senkrecht zu den Spannungslinien gezogenen Trajektorie nach Gl. (27), die man graphisch darstellen wird, worauf man die größte Spannung am Umfange auf Grund des gefundenen Spannungsverteilungsgesetzes aus der Momentengleichung berechnet, nach der das Moment der Schubspannungen in dem der Trajektorie entsprechenden Schnitte gleich dem gegebenen Torsionsmoment sein muß.

So weit, als es die praktische Technik verlangt, kann damit die in den ersten Sätzen dieser Abhandlung gestellte Aufgabe als gelöst angesehen werden. Wünschenswert wäre es freilich, noch eine bessere Lösung zu finden, die schneller und genauer zum Ziele führte. Es mag wohl sein, daß eine solche auch noch gefunden werden könnte. Gegenüber dem bisher bestehenden Zustande, der nicht einmal eine Abschätzung der größten auftretenden Spannung selbst ihrer Größenordnung nach gestattete, darf aber in dem angegebenen Verfahren immerhin schon ein recht wesentlicher Fortschritt erblickt werden.

Berichtigung

zu meiner Abhandlung über die Torsion von runden Stäben.
(S. 249—262 dieses Bandes.)

Bei der Ableitung von Gl. (22) S. 259 auf Grund des Satzes von Stockes ist ein Rechenfehler vorgekommen, auf den mich Herr Prof. Prandtl in Göttingen freundlichst aufmerksam gemacht hat. Nach Berichtigung des Fehlers muß diese Gleichung, falls man jetzt dn nach außen hin positiv zählt, lauten:

$$w = \frac{ds}{dn} - \frac{s}{r} \tag{22}$$

Auch die unmittelbar folgenden Gleichungen sind dementsprechend zu ändern und die Schlußgleichung (27), S. 260 geht über in

$$\tau = A\varrho \cdot e^{\int \frac{dn}{r}} \tag{27}$$

wenn die Integration nach n längs einer Trajektorie von der Achse aus bis zur betreffenden Stelle $x\varrho$ erstreckt wird.

Alles, was der Gl. (22) vorausging, wird von dieser Berichtigung nicht betroffen und auch die weiteren Schlüsse, die sich an Gl. (27) anknüpften, werden davon nur wenig berührt.

München, im Dezember 1905.

A. Föppl.