

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXV. Jahrgang 1905.

München

Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1906.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über einige Konvergenz-Kriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern.

Von Alfred Pringsheim.

(Eingelaufen 15. November.)

In einer früheren Mitteilung¹⁾ habe ich für die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches

$$\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^\infty,$$

wo die a_r , b_r beliebige komplexe Zahlen (natürlich mit Ein-
schluß der reellen) bedeuten, u. a. die folgenden hinreichen-
den Bedingungen angeben:²⁾

$$(a) \quad \left| \frac{a_2}{b_1 b_2} \right| < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{a_{2r+1}}{b_{2r} b_{2r+1}} \right| + \left| \frac{a_{2r+2}}{b_{2r+1} b_{2r+2}} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{für } r \geq 1;$$

und ich habe darauf hingewiesen, daß eine andere von Herrn
Helge von Koch³⁾ mit Hilfe von unendlichen Kettenbruch-
Determinanten abgeleitete Konvergenz-Bedingung, nämlich die
absolute Konvergenz der Reihe $\sum \frac{a_r}{b_{r-1} b_r}$ mit dem Zusatz:

$$(b) \quad \sum_{r=2}^{\infty} \left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right| < \frac{1}{2},$$

¹⁾ Dieser Berichte Bd. 28 (1898), p. 295 ff.

²⁾ A. a. O. p. 323.

³⁾ Comptes rendus, T. 120 (1895), p. 145.

als ein sehr spezieller Fall der Bedingung (a) erscheint.¹⁾ Nun bin ich neuerdings darauf aufmerksam gemacht worden, daß Herr Helge von Koch die Bedingung (b) späterhin zu der folgenden erweitert hat:²⁾

$$(c) \quad \sum_2^{\infty} \left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right| < 1,$$

die dann allerdings nicht mehr ohne weiteres als eine unmittelbare Folge aus den Bedingungen (a) angesehen werden kann. Denn die Bedingung (c) würde immerhin noch gestatten, daß entweder:

$$\left| \frac{a_2}{b_1 b_2} \right| = a, \text{ wo } \frac{1}{2} \leq a < 1,$$

oder für ein einzelnes bestimmtes n :

$$\left| \frac{a_{2n+1}}{b_{2n} b_{2n+1}} \right| + \left| \frac{a_{2n+2}}{b_{2n+1} b_{2n+2}} \right| = a', \text{ wo } \frac{1}{2} < a' < 1,$$

sofern nur die Summe aller übrigen Terme $\left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right|$ dann unterhalb $1 - a$ bzw. $1 - a'$ bleibt. Mit anderen Worten, sie gestattet einer oder allenfalls zweien der Zahlen $\left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right|$ eine etwas größere Freiheit, wogegen dann die Gesamtheit aller übrigen in ganz unverhältnismäßig stärkerer Weise eingeschränkt wird, als durch die Ungleichungen (a). Obschon hiernach das Kriterium (c) sichtlich einen sehr viel spezielleren Charakter trägt, als das Kriterium (a) und der soeben näher charakterisierte Einzelfall, in welchem das Kriterium (c) über

¹⁾ A. a. O. p. 323, woselbst infolge eines Druckfehlers sich die Angabe $\sum_1^{\infty}$ statt $\sum_2^{\infty}$ findet. — Ich möchte bei dieser Gelegenheit gleich

noch einen weiteren, mehrfach wiederkehrenden und sinnentstellenden Schreib- oder Druckfehler berichtigen. Auf p. 312, Formel (34) und Fußnote 1, Zeile 4, ferner auf p. 317, Formel (54) und (55) muß es statt $|a_r| - |b_r|$ durchweg $|b_r| - |a_r|$ heißen.

²⁾ Bullet. Soc. math. de France, T. 23 (1895), p. 37.

das Kriterium (a) hinausgreift, für die Praxis wohl kaum wesentlich in Betracht kommen dürfte, so schien es mir immerhin wünschenswert zu zeigen, daß das von Herrn Helge von Koch mit Hilfe funktionentheoretischer Betrachtungen hergeleitete Kriterium (c) mit ganz denselben rein-elementaren Hilfsmitteln gewonnen werden kann, welche mir zur Herleitung des Kriteriums (a) gedient hatten. Dabei wird sich sogar an Stelle der Bedingung (c) die noch um ein wenig weitere ergeben (s. unten § 2 am Schlusse):

$$(d) \quad \sum_2^{\infty} \nu \left| \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} \right| \leq 1. ^1)$$

Ferner hat Herr C. B. van Vleck²⁾ für eine spezielle Form von Kettenbrüchen ein Konvergenz-Kriterium angegeben und daran die Bemerkung geknüpft, daß das für $b_\nu = 1$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) aus (a) hervorgehende Kriterium, also die Bedingung:

$$(e) \quad |a_2| < \frac{1}{2}, \quad |a_{2\nu+1}| + |a_{2\nu+2}| \leq \frac{1}{2} \text{ für } \nu \geq 1,$$

welche (abgesehen von dem besonderen Falle durchweg reeller positiver a_ν) bisher wohl als das allgemeinste Kriterium für die Konvergenz von Kettenbrüchen der Form $\left[\frac{a_\nu}{1} \right]_1^\infty$ anzusehen gewesen sei, lediglich einen speziellen Fall des von ihm gefundenen Konvergenz-Kriteriums darstelle. Das ist allerdings richtig, rührt aber doch einzig und allein davon her, daß das Kriterium des Herrn van Vleck — wie diesem entgangen zu sein scheint — ganz unmittelbar aus demselben, in der zitierten Mitteilung von mir abgeleiteten Haupt-Kriterium³⁾

¹⁾ Die Erweiterung $\sum_2^{\infty} \nu \left| \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} \right| = 1$ dürfte zwar schwerlich irgend-

welches praktische, doch immerhin einiges theoretische Interesse beanspruchen, da gerade für diesen Fall die von Kochsche Beweismethode völlig versagt.

²⁾ Transact. Americ. math. Soc. Vol. 2 (1901), p. 481.

³⁾ A. a. O. p. 316.

folgt, welches eben auch die Grundlage des Kriteriums (e) bildet. Bei der Herleitung des van Vleckschen Kriteriums aus dem genannten Haupt-Kriterium gewinnt man überdies für dasselbe eine merklich präzisere Fassung als die von Herrn van Vleck angegebene, welche nach meinem Dafürhalten leicht mißverstanden werden kann, zum mindesten aber bezüglich der Tragweite einer darin enthaltenen Aussage der genügenden Klarheit ermangelt (s. unten § 3).

Außer der Erledigung der soeben näher bezeichneten Punkte enthält die vorliegende Note verschiedene Ergänzungen und Verallgemeinerungen der in jener früheren Mitteilung von mir abgeleiteten Konvergenzsätze. Insbesondere wird das oben erwähnte Haupt-Kriterium noch in gewisser Weise vervollkommenet und eine zwar sehr naheliegende, indessen, wie mir scheint, bisher wohl nicht bemerkte und an sich nicht uninteressante Umformung desselben angegeben (§ 1). Sodann aber wird daraus ein anderes Kriterium abgeleitet (§ 2), welches in Bezug auf Allgemeinheit der Form (ich sage nicht der Tragweite) eine merkliche Analogie mit dem Kummer-schen Reihen-Kriterium darbietet und welches im übrigen außer dem Kriterium (a) (und einer beliebig zu vermehrenden Anzahl ähnlicher) auch das Kriterium des Herrn Helge von Koch (in der erweiterten Form (d)) und dasjenige des Herrn van Vleck als spezielle Fälle enthält.

§ 1.

1. Der Inhalt des früher von mir abgeleiteten Haupt-Kriteriums (a. a. O. p. 316, 317) kann folgendermaßen ausgesprochen werden:

Bedeutend a_r, b_r ($r = 1, 2, 3, \dots$) beliebige (reelle oder komplexe) Zahlen, so bildet die Bezeichnung

$$(1) \quad |b_r| - |a_r| \geq 1 \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

eine hinreichende Bedingung für die unbedingte Konvergenz des

Kettenbruches $\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^\infty$. Sein absoluter Wert liegt stets zwischen 0 und 1, außer wenn die folgenden drei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

a) Es ist für $r = 1, 2, 3, \dots$ durchweg $|b_r| - |a_r| = 1$.

b) Es ist für $r = 1, 2, 3, \dots$ durchweg $\frac{a_{r+1}}{b_r \cdot b_{r+1}} < 0$ (also reell und negativ).

c) Die Reihe $\sum_1^\infty |a_1 a_2 \dots a_r|$ divergiert.

In diesem Falle hat man:

$$(2) \quad \left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^\infty = \frac{a_1}{b_1} \cdot \left| \frac{b_1}{a_1} \right|, \text{ also: } \left| \left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^\infty \right| = 1.$$

Der auf den Wert des fraglichen Kettenbruches bezügliche zweite Teil des vorstehenden Satzes gestattet zunächst, die Bedingung (1), soweit sie sich auf den Index $r = 1$ bezieht, merklich zu erweitern. Ist nämlich die Bedingung (1) nur

für $r \geq 2$ erfüllt, so konvergiert jedenfalls der Kettenbruch $\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_2^\infty$

unbedingt und zwar, sofern nicht der oben genau bezeichnete und sogleich auch noch näher zu erörternde Ausnahmefall eintritt, gegen einen Wert, dessen absoluter Betrag kleiner als 1 ist. Unterwirft man daher b_1 nur der Bedingung:

$$(3) \quad |b_1| \geq 1,$$

so ist im allgemeinen Falle $b_1 + \left[\frac{a_r}{b_r} \right]_2^\infty$ von Null ver-

schieden, also schließlich auch der Kettenbruch $\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^\infty$ unbe-

dingt konvergent. Tritt aber jener Ausnahmefall ein, d. h. bestehen die oben mit a) und b) bezeichneten Bedingungen für

$r \geq 2$ gleichzeitig mit der Divergenz der Reihe $\sum_2^\infty |a_2 a_3 \dots a_r|$

(oder, was offenbar auf dasselbe hinausläuft gleichzeitig mit der Divergenz der unter *c*) angegebenen Reihe $\sum_1^{\infty} |a_1 a_2 \dots a_r|$, so ergibt sich mit Berücksichtigung von Gl. (2):

$$(4) \quad \left[\frac{a_r}{b_r} \right]_2^{\infty} = \frac{a_2}{b_2} \cdot \left| \frac{b_2}{a_2} \right|$$

Daraus folgt aber, daß der Kettenbruch $\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^{\infty}$ auch in diesem Falle noch unbedingt konvergiert, sofern nur

$$b_1 + \frac{a_2}{b_2} \cdot \left| \frac{b_2}{a_2} \right|$$

von Null verschieden ist. Man gewinnt somit die folgende Verbesserung des zuerst ausgesprochenen Konvergenzkriteriums:

Für die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^{\infty}$ ist hinreichend, daß:

$$(A) \quad \begin{cases} (1) & |b_1| > 1 \\ (2) & |b_r| - |a_r| \geq 1 \text{ für } r \geq 2. \end{cases}$$

Nur, wenn durchweg:

$$(A', 2) \quad |b_r| - |a_r| = 1 \text{ für } r \geq 2,$$

außerdem:

$$(A', 3) \quad \frac{a_{r+1}}{b_r \cdot b_{r+1}} < 0 \text{ für } r \geq 2,$$

$$(A', 4) \quad \sum_2^{\infty} |a_2 a_3 \dots a_r| \text{ divergent,}$$

so hat man die Bedingung (A, 1) durch die folgende zu ersetzen:

$$(A', 1) \quad b_1 \neq - \frac{a_2}{b_2} \cdot \left| \frac{b_2}{a_2} \right|. ^{1)}$$

1) Für $b_1 = - \frac{a_2}{b_2} \cdot \left| \frac{b_2}{a_2} \right|$ wird der Kettenbruch $\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^{\infty}$ infolge der Beziehung (4) eigentlich divergent.

Zusatz. Man bemerke, daß in dem besonders häufigen Falle lauter reeller positiver b_r die auf den Ausnahmefall bezüglichen Bedingungen $(A', 3)$, $(A', 1)$ sich auf die folgenden beiden reduzieren:

$$(5) \quad a_{r+1} < 0 \text{ für } r \geq 2, \quad b_1 \neq -\frac{a_2}{|a_2|},$$

und daß die zweite dieser Bedingungen einfach lautet

$$(5^{\text{bis}}) \quad b_1 \neq 1,$$

wenn auch noch $a_2 < 0$ ist.

2. Transformiert man den Kettenbruch $\left[\frac{a_r}{b_r}\right]_1^\infty$ mit Hilfe der beliebig, nur von Null verschieden zu wählenden Konstanten $c_0, c_1, c_2, \dots$ in einen äquivalenten, so wird:

$$(6) \quad \left[\frac{a_r}{b_r}\right]_1^\infty = \frac{1}{c_0} \left[\frac{c_{r-1} c_r a_r}{c_r b_r}\right]_1^\infty,$$

also, wenn man für $r = 0, 1, 2, \dots$

$$c_r = \frac{1}{a_{r+1}}$$

setzt:

$$\left[\frac{a_r}{b_r}\right]_1^\infty = a_1 \cdot \left[\frac{1 : a_{r+1}}{b_r : a_{r+1}}\right]_1^\infty.$$

Wird jetzt auf den so transformierten Kettenbruch der zuletzt bewiesene Satz angewendet, so nehmen die Konvergenz-Bedingungen (A) die Form an:

$$\left|\frac{b_1}{a_2}\right| > 1, \text{ also: } |b_1| \geq |a_2|$$

$$\left|\frac{b_r}{a_{r+1}}\right| - \left|\frac{1}{a_{r+1}}\right| \geq 1, \text{ also: } |b_r| - |a_{r+1}| \geq 1 \quad (r \geq 2).$$

während die Ersatzbedingung $(A', 1)$ nunmehr lautet:

$$\frac{b_1}{a_2} \neq -\frac{|b_2|}{b_2}, \text{ also: } b_1 \neq -\frac{|b_2|}{b_2} \cdot a_2$$

und der sie erfordernde Ausnahmefall eintritt, wenn:

$$|b_r| - |a_{r+1}| = 1, \quad \frac{a_{r+1}}{b_r \cdot b_{r+1}} < 0 \quad (r \geq 2)^1)$$

und $\sum_2^\infty |a_2 a_3 \dots a_r|^{-1}$ divergiert. Es besteht somit neben dem zuvor ausgesprochenen Konvergenz-Satze auch der folgende:

Für die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_r}{b_r}\right]_1^\infty$ ist hinreichend, daß:

$$(B) \begin{cases} (1) & |b_1| \geq a_2 \\ (2) & |b_r| - |a_{r+1}| \geq 1 \text{ für } r \geq 2. \end{cases}$$

Nur, wenn durchweg:

$$(B', 2) \quad |b_r| - |a_{r+1}| = 1 \text{ für } r \geq 2,$$

außerdem:

$$(B', 3) \quad \frac{a_{r+1}}{b_r \cdot b_{r+1}} < 0 \text{ für } r \geq 2,$$

$$(B', 4) \quad \sum_2^\infty |a_2 a_3 \dots a_r|^{-1} \text{ divergent,}$$

so hat man die Bedingung (B, 1) durch die folgende zu ersetzen:

$$(B', 1) \quad b_1 \neq -\frac{|b_2|}{b_2} \cdot a_2.$$

1) Man bemerke, daß bei jeder Transformation eines Kettenbruches $\left[\frac{a_r}{b_r}\right]_1^\infty$ in einen äquivalenten $\left[\frac{a'_r}{b'_r}\right]_1^\infty$ stets:

$$\frac{a'_{r+1}}{b'_r b'_{r+1}} = \frac{a_{r+1}}{b_r b_{r+1}}$$

wegen:

$$a'_{r+1} = c_r c_{r+1} \cdot a_{r+1}$$

$$b'_r = c_r \cdot b_r$$

$$b'_{r+1} = c_{r+1} \cdot b_{r+1}.$$

§ 2.

1. Schreibt man die Transformations-Formel (6) folgendermaßen:

$$(7) \quad \left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^\infty = \left[\frac{c_1 a_1}{c_1 b_1}, \frac{c_{r-1} c_r a_r}{c_r b_r} \right]_2^\infty$$

und setzt sodann für $r = 1, 2, 3, \dots$

$$c_r = \frac{p_r}{b_r},$$

so wird:

$$(8) \quad \left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^\infty = \left[\frac{p_1 a_1 : b_1}{p_1}, \frac{p_{r-1} p_r a_r : b_{r-1} b_r}{p_r} \right]_2^\infty.$$

Versteht man jetzt unter $p_1, p_2, p_3, \dots$ irgend eine Folge positiver Zahlen, so lehren die Bedingungen (A) des vorigen Paragraphen, daß der fragliche Kettenbruch unbedingt konvergiert, wenn

$$(9) \quad p_1 \geq 1$$

und für $r \geq 2$:

$$(10) \quad p_r - p_{r-1} p_r \left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right| \geq 1, \text{ d. h. } \left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right| \leq \frac{p_r - 1}{p_{r-1} p_r}.$$

Der „Ausnahmefall“, welcher hier eintritt, wenn durchweg

$$(11) \quad \left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right| = \frac{p_r - 1}{p_{r-1} p_r} \text{ für } r \geq 2,$$

$$(12) \quad \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} < 0 \text{ für } r \geq 3,$$

und die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$p_1 p_2 \left| \frac{a_2}{b_1 b_2} \right| \cdot p_2 p_3 \left| \frac{a_3}{b_2 b_3} \right| \cdots p_{r-1} p_r \left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right|,$$

also die Reihe

$$(13) \quad \sum_2^\infty (p_2 - 1)(p_3 - 1) \cdots (p_r - 1)$$

divergiert, würde zur Konvergenz des fraglichen Kettenbruches an Stelle der Bedingung (9) zunächst die folgende erfordern (s. die zweite der Ungleichungen (5)):

$$p_1 \neq - \frac{a_2}{b_1 b_2} \cdot \left| \frac{b_1 b_2}{a_2} \right|.$$

Da aber die rechte Seite dieser Ungleichung eine Zahl mit dem absoluten Betrage 1 ist und andererseits p_1 von vornherein eine positive Zahl bedeutet, so kommt die vorstehende Bedingung überhaupt nur dann in Betracht, wenn sie die Form hat:

$$(14) \quad p_1 \neq 1$$

und dies ist dann und nur dann der Fall, wenn:

$$(15) \quad \frac{a_2}{b_1 b_2} < 0,$$

mit anderen Worten, wenn die Bedingung (12) auch schon für $\nu = 2$ erfüllt ist. In der Tat konvergiert alsdann, wie aus dem zu Anfang von § 1 zitierten Hauptsatze hervorgeht (s. Gl. (2)), der Kettenbruch

$$\left[\frac{p_{\nu-1} p_{\nu} a_{\nu} : b_{\nu-1} b_{\nu}}{p_{\nu}} \right]_2^{\infty}$$

gegen den Wert -1 (und zwar, auf Grund einer bekannten Eigenschaft der Näherungsbrüche von Kettenbrüchen mit lauter negativen Teilzählern und positiven Teilennern,¹⁾ numerisch wachsend), so daß also im Falle $p_1 = 1$ der vorgelegte Kettenbruch eigentlich divergiert (noch genauer gesagt nach $+\infty$, wenn $\frac{a_1}{b_1} > 0$ ist).

Durch Zusammenfassung der vorstehenden Ergebnisse gewinnt man somit den folgenden Satz:

¹⁾ Stern, Journ. f. Math. 10 (1833), p. 367. Vgl. z. B. Stolz-Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie (1905), p. 496, 523. — Enzyklopädie der Math. Wissensch. I, p. 125.

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^\infty$ ist unbedingt konvergent, wenn irgend eine Folge positiver Zahlen p_r ($r = 1, 2, 3, \dots$ und zwar $p_1 \geq 1$) existiert, derart daß:

$$(C) \quad \left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right| \leq \frac{p_r - 1}{p_{r-1} p_r} \quad \text{für } r \geq 2.^1)$$

In dem einzigen Falle, daß folgende vier Bedingungen gleichzeitig bestehen:

$$(C') \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad p_1 = 1, \\ (2) \quad \left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right| = \frac{p_r - 1}{p_{r-1} p_r} \\ (3) \quad \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} < 0 \\ (4) \quad \sum_{r=2}^{\infty} (p_2 - 1)(p_3 - 1) \cdots (p_r - 1) = +\infty, \end{array} \right\} \quad \text{für } r \geq 2,$$

divergiert der Kettenbruch und zwar eigentlich.

2. Durch passende Spezialisierung der Zahlen p_r lassen sich aus dem obigen allgemeinen Kriterium mannigfache Spezial-Kriterien herleiten.

I. Setzt man:

$$p_1 = 1, \quad p_{2r} = 2 \quad \text{für } r = 1, 2, 3, \dots,$$

so nimmt die für $r = 2$ aus (C) hervorgehende Anfangs-Bedingung die Form an:

¹⁾ Die Form der Bedingung (C) lehrt, daß die im übrigen völlig willkürlichen positiven Zahlen p_r für $r > 2$ eo ipso der Bedingung $p_r > 1$ genügen müssen. Übrigens kann man diese einzige Beschränkung auch formal beseitigen, wenn man $1 + p'_r$ statt p_r schreibt, also:

$$\left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right| \leq \frac{p'_r}{(1 + p'_{r-1})(1 + p'_r)}.$$

Die in der Einleitung hervorgetretene formale Ähnlichkeit mit dem Kummerschen Reihen-Kriterium liegt in der Willkürlichkeit der p_r bzw. p'_r .

$$(I^a) \quad \left| \frac{a_2}{b_1 b_2} \right| \leq \frac{1}{2},$$

während im übrigen durch Trennung der für ungerade und für gerade Indices geltenden Bedingungen resultiert:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{a_{2v-1}}{b_{2v-2} b_{2v-1}} \right| \leq \frac{p_{2v-1} - 1}{2 p_{2v-1}} \\ \left| \frac{a_{2v}}{b_{2v-1} b_{2v}} \right| \leq \frac{1}{2 p_{2v-1}} \end{array} \right\} (v \geq 2).$$

Die noch völlig willkürlich (nur größer als 1) anzunehmenden Zahlen p_{2v-1} lassen sich durch Addition dieser beiden Ungleichungen ohne weiteres eliminieren. Auf diese Weise ergibt sich:

$$(I^b) \quad \left| \frac{a_{2v-1}}{b_{2v-2} b_{2v-1}} \right| + \left| \frac{a_{2v}}{b_{2v-1} b_{2v}} \right| \leq \frac{1}{2} \quad (v \geq 2),$$

also in Verbindung mit der Anfangs-Bedingung (I^a) wiederum das in der Einleitung mit (a) bezeichnete Kriterium (mit dem einzigen Unterschiede, daß in der Anfangs-Bedingung nunmehr auch noch das Gleichheitszeichen zugelassen wird).

Um das allgemeine Glied der für den „Ausnahmefall“ in Betracht kommenden Reihe ($C', 4$) zu bestimmen, findet man, wenn in den beiden Relationen (16) das Gleichheitszeichen gilt, durch Division der betreffenden Gleichungen:

$$p_{2v-1} - 1 = \left| \frac{a_{2v-1} b_{2v}}{a_{2v} b_{2v-2}} \right| \quad (v \geq 2),$$

so daß also die fragliche Reihe (nach Weglassung des einflußlosen Faktors $\left| \frac{1}{b_1} \right|$) die Form annimmt:

$$(17) \quad \sum_{v=2}^{\infty} \left| \frac{a_3 \cdot a_5 \cdots a_{2v-1}}{a_4 \cdot a_6 \cdots a_{2v}} \cdot b_{2v} \right|.$$

Es verdient vielleicht bemerkt zu werden, daß die Divergenz dieser Reihe, welche ja, falls die übrigen Spezial-

Bedingungen erfüllt sind, die Divergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_r}{b_r}\right]_1^\infty$ nach sich zieht, auf Grund eines bekannten Satzes¹⁾ gerade eine notwendige Bedingung für die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_r}{b_r}\right]_2^\infty$ bildet. In der Tat kommt ja die (eigentliche) Divergenz des Gesamt-Kettenbruches nur dadurch zustande, daß der mit $\frac{a_2}{b_2}$ beginnende Kettenbruch gegen den Wert $-b_1$ konvergiert, so daß also die Reihe (17) in dem vorliegenden Falle wirklich stets divergent ist.

II. Setzt man wiederum

$p_1=1$, im übrigen aber $p_r=1+p$, d. h. konstant für $r=2, 3, \dots$, so nehmen die Bedingungen (C) die Form an:

$$\left| \frac{a_2}{b_1 b_2} \right| \leq \frac{p}{1+p}$$

$$\left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right| \leq \frac{p}{(1+p)^2} \text{ für } r \geq 3.$$

Da der letzte Ausdruck für $p=1$ ein Maximum wird, so erweist sich offenbar die Wahl $p=1$ als die vorteilhafteste. Es ergeben sich alsdann die Konvergenz-Bedingungen:

$$(II) \quad \left| \frac{a_2}{b_1 b_2} \right| \leq \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right| \leq \frac{1}{4} \text{ für } r \geq 3,$$

welche im übrigen lediglich einen speziellen Fall der Bedingungen (I^a), (I^b) darstellen und somit nichts Neues bieten.

Da die Reihe (C', 4) wegen $p_r - 1 = 1$ (für $r \geq 2$), divergent ist, so muß im Falle $\frac{a_r}{b_{r-1} b_r} < 0$ (für $r \geq 2$) in mindestens einer der unter (II) angegebenen Bedingungen das Un-

¹⁾ Stolz, Vorlesungen über Allg. Arithmetik, Bd. 2 (1886), p. 279. — Stolz-Gmeiner, a. a. O. p. 511. — Enzyklopädie der Math. Wissenschaft I, p. 128.

gleichheitszeichen gelten, wenn der Kettenbruch noch konvergieren soll.

III. Eine etwas höhere obere Schranke für die $\left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right|$ ($r \geq 3$), als die soeben gefundene (d. h. $\frac{1}{4}$), ergibt sich, wenn man setzt:

$$p_r = \frac{2r+1}{r+1} \quad (r = 1, 2, 3, \dots).$$

Die Konvergenz-Bedingungen (C) lauten alsdann:

$$(III) \quad \left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right| < \frac{r^2}{4r^2-1} \quad (r \geq 2).$$

Da $p_1 = \frac{3}{2}$, also > 1 , so ist Divergenz hier ausgeschlossen, selbst wenn alle übrigen Bedingungen des „Ausnahmefalles“ erfüllt sein sollten. Daraus ergibt sich insbesondere, daß der Kettenbruch $\left[\frac{\varepsilon_r r^2}{2r+1} \right]_1^\infty$, wo die ε_r reelle oder komplexe Zahlen mit dem absoluten Betrage 1 bedeuten, stets (also selbst in dem ungünstigsten Falle: $a_r = -1$ für jedes $r \geq 2$) konvergiert (was aus den bisher bekannten Kriterien nicht ohne weiteres hervorgehen würde).

IV. Der in (C) auftretende Ausdruck $\frac{p_r - 1}{p_{r-1} p_r}$ liefert für die $\left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right|$ ($r \geq 2$), wie auch die p_r gewählt werden mögen, eine obere Schranke, die kleiner als 1 ausfällt: in den bisher betrachteten Fällen betrug sie sogar nur $\frac{1}{4}$ (s. II) oder wenig darüber (s. III), bezw., was im wesentlichen auf dasselbe hinausläuft, $\frac{1}{2}$ für die Summe je zweier konsekutiver $\left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right|$ (s. I). Andererseits ist aber klar, daß $\frac{p_r - 1}{p_{r-1} p_r}$ beliebig der Ein-

heit genähert werden kann, wenn man nur p_v hinlänglich groß, dagegen p_{v-1} nur wenig größer als 1 annimmt. Auf Grund dieser Überlegung ergibt sich ein von den bisherigen Kriterien wesentlich verschiedener Kriterien-Typus, bei welchem einer Kategorie von Termen $\left| \frac{a_v}{b_{v-1} b_v} \right|$ (z. B. denjenigen mit geradem Index v) eine obere Schranke zugewiesen wird, die mit unbegrenzt wachsendem Index gegen die Einheit konvergiert, wogegen dann die obere Schranke der anderen Kategorie schließlich der Null zustrebt. Man setze z. B.

$$p_{2v-1} = 1 + \frac{1}{q_v}, \quad p_{2v} = q_v \quad (v = 1, 2, 3, \dots),$$

wo q_v ($v = 1, 2, 3, \dots$) eine Folge oberhalb der Einheit liegender, mit v irgendwie ins Unendliche wachsender Zahlen bedeutet. Alsdann ergeben sich aus (C) durch Trennung der für gerade und ungerade Indices v geltenden Ungleichungen die folgenden Konvergenz-Bedingungen:

$$(IV) \quad \left| \frac{a_{2v}}{b_{2v-1} b_{2v}} \right| \leq \frac{q_v - 1}{q_v + 1}, \quad \left| \frac{a_{2v+1}}{b_{2v} b_{2v+1}} \right| < \frac{1}{q_v (q_{v+1} + 1)} \quad (v \geq 1).$$

Wegen $p_1 = 1 + \frac{1}{q_1} > 1$ ist auch hier das Eintreten des „Ausnahmefalles“ von vornherein ausgeschlossen.

V. Es möge jetzt unter p_v ($v = 1, 2, 3, \dots$) eine Folge mit v monoton ins Unendliche wachsender Zahlen verstanden und speziell $p_1 = 1$ gesetzt werden. Unterwirft man hierauf die

$\left| \frac{a_v}{b_{v-1} b_v} \right|$ der Bedingung:

$$(V) \quad \left| \frac{a_v}{b_{v-1} b_v} \right| \leq \frac{p_v - p_{v-1}}{p_{v-1} p_v} \quad (v \geq 2),$$

so genügen sie a fortiori der Konvergenz-Bedingung (C) und zwar hat man sogar, da $p_{v-1} > 1$ für $v \geq 3$:

$$\left| \frac{a_v}{b_{v-1} b_v} \right| < \frac{p_v - 1}{p_{v-1} p_v} \quad (v \geq 3)$$

(mit Ausschluß der Gleichheit). Somit zieht die Existenz der Bedingung (V) ohne jede Einschränkung die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^\infty$ nach sich. Nun ist aber $\frac{p_r - p_{r-1}}{p_{r-1} p_r}$ das allgemeine Glied einer aus positiven Termen bestehenden konvergenten Reihe von der Beschaffenheit, daß:

$$\sum_2^\infty \frac{p_r - 1}{p_{r-1} p_r} = \sum_2^\infty \left(\frac{1}{p_{r-1}} - \frac{1}{p_r} \right) = \frac{1}{p_1}, \text{ d. h. } = 1.$$

Und umgekehrt läßt sich das allgemeine Glied c_r jeder positivgliedrigen konvergenten Reihe mit der Summe $\sum_2^\infty c_r = 1$ in die obige Form setzen.¹⁾ Die Bedingung (V) besagt also lediglich, daß $\left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right|$ höchstens gleich sein soll dem Gliede c_r einer konvergenten Reihe, für welche $\sum_2^\infty c_r = 1$ ist, d. h. schließlich, daß die Reihe $\sum \left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right|$ selbst konvergiert und $\sum_2^\infty \left| \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} \right| \leq 1$ ist. Somit ergibt sich:

¹⁾ Vgl. Math. Ann. 35 (1890) p. 327. — Will man auf diesen allgemeinen Satz nicht rekurriren, so hat man nur zu setzen:

$$\sum_n^\infty c_r = \frac{1}{p_{n-1}},$$

also:

$$\sum_2^\infty c_r = \frac{1}{p_1} = 1, \quad p_n > p_{n-1} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty.$$

Da sodann:

$$\sum_{n+1}^\infty c_r = \frac{1}{p_n},$$

so folgt, wie behauptet:

$$c_n = \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n} = \frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1} p_n}.$$

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_v}{b_v} \right]_1^\infty$ ist unbedingt konvergent, wenn die

Reihe $\sum \frac{a_v}{b_{v-1} b_v}$ absolut konvergiert und

$$\sum_{v=2}^{\infty} \left| \frac{a_v}{b_{v-1} b_v} \right| \leq 1$$

ausfällt.

Das ist aber das Helge von Kochsche Kriterium mit der in der Einleitung angekündigten Erweiterung.¹⁾

§ 3.

1. Der in der Einleitung erwähnte Konvergenz-Satz des Herrn C. B. van Vleck lautet (in wörtlicher Übersetzung) folgendermaßen:

„Bedeutet r_v eine positive Zahl, so bildet die Konvergenz der Reihe

$$(18) \quad 1 + \frac{r_2}{1-r_2} + \frac{r_2 r_3}{(1-r_2)(1-r_3)} + \frac{r_2 r_3 r_4}{(1-r_2)(1-r_3)(1-r_4)} + \dots$$

eine notwendige Bedingung dafür, daß der Kettenbruch

$$(19) \quad \frac{1}{1} + \frac{r_2 e^{\vartheta_2 i}}{1} + \frac{r_3 (1-r_2) e^{\vartheta_3 i}}{1} + \frac{r_4 (1-r_3) \cdot e^{\vartheta_4 i}}{1} + \dots$$

für alle Werte der Argumente ϑ_v konvergiert. Diese Bedingung ist auch hinreichend, falls $r_v < 1$ für alle Werte von v .“

Wie schon früher bemerkt wurde, scheint mir die Fassung des obigen Kriteriums nicht recht glücklich und zwar aus folgendem Grunde. Es werde angenommen, daß durchweg $r_v < 1$. Alsdann ist nach dem Wortlaute des Kriteriums die Konvergenz der Reihe (19) hinreichend, aber auch notwendig, wenn der Kettenbruch (18) für alle Werte der

¹⁾ Bezüglich der Herleitung des van Vleckschen Kriteriums aus dem Kriterium von Nr. 1 s. Nr. 2 des folgenden Paragraphen.

Argumente ϑ_r konvergieren soll. Danach muß doch jeder Unbefangene vermuten, daß eine irgendwie nennenswerte Anzahl von Wertkombinationen der ϑ_r ($r = 2, 3, \dots$) existiert, für welche die Konvergenz der Reihe (19) zur Konvergenz des Kettenbruches (18) wirklich notwendig ist. Nun gibt es aber in Wahrheit einen einzigen Fall, in welchem die Konvergenz jener Reihe für diejenige des Kettenbruches in Frage kommt: nämlich, wenn durchweg $e^{\vartheta_r i} = -1$, also $\vartheta_r = \pi$ ($r = 2, 3, \dots$) ist. In allen übrigen erdenklichen Fällen konvergiert der Kettenbruch, sofern nur $r_r < 1$ ($r = 2, 3, \dots$), mag im übrigen die Reihe (18) konvergieren oder divergieren.¹⁾ Die in dem obigen Kriterium betonte Notwendigkeit jener Bedingung kommt also lediglich dadurch zustande, daß ein ganz markanter Ausnahmefall, der einzig und allein die Erfüllung jener Bedingung erheischt, mit allen überhaupt vorhandenen übrigen Fällen zu einer Gesamtheit vereinigt und sodann über diese Gesamtheit ohne jede weitere Erklärung eine Aussage gemacht wird, deren Richtigkeit ausschließlich auf der Existenz jenes Ausnahmefalles beruht und die sofort hinfällig wird, wenn man den letzteren aus der Gesamtmenge der Fälle entfernt.

¹⁾ Genügen die r_r nicht der Bedingung, daß durchweg (oder zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab) $r_r < 1$, so lassen sich allgemeine Aussagen über eine etwaige Konvergenz des Kettenbruches überhaupt nicht machen. Die in Frage stehende Notwendigkeit jener Konvergenz-Bedingung hat dann wiederum nur den Sinn, daß in dem speziellen Falle $e^{\vartheta_r i} = -1$ ($r = 2, 3, \dots$) der Kettenbruch (19) sicher divergiert, wenn die Reihe (18) divergiert.

Das letztere findet z. B. immer statt, wenn durchweg (oder zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab) $r_r > 1$. Ist dann $e^{\vartheta_r i} = -1$ ($r = 2, 3, \dots$), so werden offenbar alle Teilbrüche von einer bestimmten Stelle ab wesentlich positiv. Der mit dem unmittelbar vorangehenden Gliede beginnende Rest-Kettenbruch kann dann mit Hilfe der für Kettenbrüche mit positiven Gliedern geltenden Kriterien beurteilt und eventuell als konvergent erkannt werden, obschon der Gesamt-Kettenbruch nach ∞ divergiert. (Genauer ausgedrückt: sein absoluter Wert divergiert nach $+\infty$, während er selbst zwischen $+\infty$ und $-\infty$ oszilliert).

Eine derartige Darstellungsweise scheint mir aber ein Mißverständnis in Bezug auf die Tragweite der betreffenden Aussage nicht nur nicht auszuschließen, sondern geradezu herauszufordern.

2. Es soll nun zunächst gezeigt werden, wie der obige Konvergenz-Satz in merklich präziserer Fassung sich ohne weiteres aus dem Hauptsatze des § 1 ergibt.

Setzt man zur Abkürzung

$$e^{\vartheta_r i} = \varepsilon_r \quad (r = 2, 3, \dots),$$

so nimmt der fragliche Kettenbruch (19) mit Benützung der sonst von mir gebrauchten Schreibweise¹⁾ die Form an:

$$\left[\frac{1}{1}, \frac{\varepsilon_2 r_2}{1}, \frac{\varepsilon_r r_r (1 - r_{r-1})}{1} \right]_3^\infty.$$

Bedeutet dann wiederum $c_2, c_3, \dots$ irgendwelche Konstanten, so wird zunächst:

$$\left[\frac{1}{1}, \frac{\varepsilon_2 r_2}{1}, \frac{\varepsilon_r r_r (1 - r_{r-1})}{1} \right]_3^\infty = \left[\frac{1}{1}, \frac{\varepsilon_2 c_2 r_2}{c_2}, \frac{\varepsilon_r c_{r-1} c_r r_r (1 - r_{r-1})}{c_r} \right]_3^\infty$$

und wenn jetzt

$$c_r = \frac{1}{1 - r_r} \quad (r = 2, 3, \dots)$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{1}, \frac{\varepsilon_2 r_2}{1}, \frac{\varepsilon_r r_r (1 - r_{r-1})}{1} \right]_3^\infty &= \left[\frac{1}{1}, \frac{\varepsilon_2 r_2 : (1 - r_2)}{1 : (1 - r_2)}, \frac{\varepsilon_r r_r : (1 - r_r)}{1 : (1 - r_r)} \right]_3^\infty \\ &= \left[\frac{1}{1}, \frac{\varepsilon_r r_r : (1 - r_r)}{1 : (1 - r_r)} \right]_2^\infty. \end{aligned}$$

Bezeichnet man den letzten Kettenbruch zur Abkürzung mit $\left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1^\infty$, so hat man

$$b_1 = 1$$

¹⁾ Sitz.-Ber. Bd. 28 (1898), p. 296, Formel (6).

und für $\nu \geq 2$:

$$|b_\nu| - |a_\nu| = \frac{1 - r_\nu}{|1 - r_\nu|},$$

d. h.

$$|b_\nu| - |a_\nu| \begin{cases} = +1, & \text{wenn } r_\nu < 1, \\ = -1, & \text{wenn } r_\nu > 1. \end{cases}$$

Ist also durchweg $r_\nu < 1$, so genügt der mit $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ bezeichnete Kettenbruch den Bedingungen (A, 1), (A', 2) des § 1 und ist somit konvergent mit Ausnahme eines einzigen Falles (s. die Bedingungen (A', 3), (A', 4) bzw. den Zusatz zu § 1, Nr. 1), in welchem $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty = -1$ wird und daher der fragliche Kettenbruch eigentlich divergiert: wenn nämlich

$$\varepsilon_\nu = -1 \quad (\text{für } \nu = 2, 3, \dots)$$

und die Reihe

$$\sum_2^\infty |a_2 a_3 \dots a_\nu| \text{ d. h. } \sum_2^\infty \frac{r_2}{1 - r_2} \cdot \frac{r_3}{1 - r_3} \dots \frac{r_\nu}{1 - r_\nu}$$

divergiert.

Somit ergibt sich für den zu Anfang dieses Paragraphen zitierten Satz nunmehr die folgende Fassung:

Der Kettenbruch

$$\frac{1}{1} + \frac{\varepsilon_2 r_2}{1} + \frac{\varepsilon_3 r_3 (1 - r_2)}{1} + \frac{\varepsilon_4 r_4 (1 - r_3)}{1} + \dots,$$

wo $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \dots$ beliebige komplexe Zahlen mit dem absoluten Betrage 1, dagegen $r_2, r_3, r_4, \dots$ positive Zahlen < 1 bedeuten, ist unbedingt konvergiert, außer wenn

$$\varepsilon_\nu = -1 \quad (\text{für } \nu = 2, 3, \dots)$$

und die Reihe

$$\frac{r_2}{1 - r_2} + \frac{r_2}{1 - r_2} \cdot \frac{r_3}{1 - r_2} + \frac{r_2}{1 - r_2} \cdot \frac{r_3}{1 - r_3} \cdot \frac{r_4}{1 - r_4} + \dots$$

divergent ist. In diesem Falle konvergiert der mit dem zweiten Gliede beginnende Kettenbruch nach -1 , so daß also der Gesamt-Kettenbruch eigentlich divergiert.

Im übrigen ist dieser Satz lediglich ein spezieller Fall des im vorigen Paragraphen am Schlusse von Nr. 1 ausgesprochenen allgemeineren Konvergenz-Theorems. Faßt man dort die Bedingungen (C') ins Auge und setzt durchweg $b_v = 1$ ($v \geq 1$), so folgt, daß der Kettenbruch $\left[\frac{a_v}{1} \right]_1^\infty$ unbedingt konvergiert, sofern die a_v den folgenden Beziehungen genügen:

$$a_2 = \varepsilon_2 \frac{p_2 - 1}{p_2} \quad \text{und für } v \geq 3: \quad a_v = \varepsilon_v \cdot \frac{p_v - 1}{p_{v-1} p_v},$$

außer wenn durchweg

$$\varepsilon_v = -1 \quad \text{für } v \geq 2$$

und die Reihe

$$\sum_2^\infty (p_2 - 1)(p_3 - 1) \dots (p_v - 1)$$

divergent ist, in welchem Falle der betreffende Kettenbruch eigentlich divergiert. Macht man jetzt die Substitution:

$$p_v = \frac{1}{1 - r_v} \quad (v \geq 2),$$

so daß also $0 < r_v < 1$ wegen $p_v > 1$ und:

$$p_v - 1 = \frac{r_v}{1 - r_v}, \quad \frac{p_v - 1}{p_{v-1} p_v} = r_v (1 - r_{v-1})$$

$$(\text{speziell: } \frac{p_2 - 1}{p_2} = r_2),$$

so nimmt dieses Resultat, wenn man noch dem willkürlich gebliebenen Anfangszähler a_1 den Wert 1 beilegt, genau die Form des oben ausgesprochenen Satzes an.

3. Ich möchte bei dieser Gelegenheit noch bemerken, daß auch zwei andere Theoreme, die Herr van Vleck in der er-

wähnten Abhandlung mitgeteilt hat,¹⁾ soweit es sich dabei um die Konvergenz des in Frage kommenden Kettenbruches handelt, als ganz unmittelbare Folgerungen eines schon in meiner früheren Mitteilung angegebenen,²⁾ in der vorliegenden in § 2, p. 371 unter (II) aufgeführten Kriteriums sich ergeben. Der wesentliche Inhalt jener beiden Theoreme läßt sich in folgender Weise zusammenfassen:

Sind $a_2, a_3, \dots$ beliebige komplexe Zahlen und besitzen die absoluten Beträge $|a_r|$ ($r = 2, 3, \dots$) die obere Grenze a und den oberen Limes a' , so konvergiert der Kettenbruch $\left[\frac{1}{1}, \frac{a_r x}{1} \right]_2^\infty$ und zwar gleichmäßig für $|x| \leq \varrho$, wo $\varrho = \frac{1}{4a}$; er konvergiert, wenn $a' < a$ ist,³⁾ auch noch für $\varrho \leq |x| < \varrho'$, wo $\varrho' = \frac{1}{4a'}$ und zwar gleichmäßig für $|x| \leq \varrho' - \delta$ (wo $\delta > 0$ beliebig klein) mit eventuellem Ausschlusse einer endlichen, jedoch bei unbegrenzter Verkleinerung von δ (also in der Nähe des Kreises $|x| = \varrho'$) möglicherweise unbegrenzt zunehmenden Anzahl von Punkten, welche Pole der durch den betreffenden Kettenbruch dargestellten analytischen Funktion sind.

Dabei ergeben sich die auf die Gleichmäßigkeit der Konvergenz bezüglichen Behauptungen ohne weiteres aus dem Umstande, daß der Kettenbruch konvergent bleibt, wenn man sämtliche Teilzähler $a_r x$ durch $-\frac{1}{4}$ ersetzt.

¹⁾ A. a. O. p. 475, Theorem I; p. 477, Theorem II.

²⁾ A. a. O. p. 322, Formel (74).

³⁾ Es existieren offenbar nur die beiden Möglichkeiten:

$$a' = a \quad \text{und} \quad a' < a.$$

Im übrigen hat man auf Grund der Bedeutung von a und a' :

$$|a_r| \leq a \quad \text{für} \quad r = 2, 3, \dots$$

$$|a_r| < a + \varepsilon \quad \text{für} \quad r > n$$

(bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ und passend bestimmten n).

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1905

Band/Volume: [1905](#)

Autor(en)/Author(s): Pringsheim Alfred

Artikel/Article: [Über einige Konvergenz-Kriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern 359-380](#)