Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVII. Jahrgang 1907.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1908.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über Krümmung und konforme Transformation.

Von **A. Voss.**

(Eingelaufen 16. März.)

§ 1.

Allgemeine Punkttransformation der Ebene.

Es seien $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ zwei reelle, eindeutige und, soweit es in Betracht kommt, differentiierbare Funktionen der beiden unabhängigen Variabeln x, y. Dann wird vermöge der Gleichungen:

$$\text{A)}\qquad \begin{aligned} X &= f(x, y) \\ Y &= \varphi(x, y) \end{aligned}$$

jedem Punkte p eines den angegebenen Voraussetzungen entsprechenden Bereiches der Ebene x, y ein Punkt P mit den Koordinaten X, Y einer zweiten Ebene zugeordnet sein[1]) und umgekehrt, wenn die Funktionaldeterminante von f, φ nicht verschwindet.

Die Gleichung:

$$\text{1)}\qquad Y' = \frac{Y_x + Y_y\, y'}{X_x + X_y\, y'} = \frac{y' + \operatorname{tg} \alpha}{1 - y' \operatorname{tg} \alpha},$$

in der die Indices x, y partielle Differentiationen nach den betreffenden Variabeln, Y', y' aber die Differentialquotienten $\frac{dY}{dX}, \frac{dy}{dx}$ bedeuten, drückt aus, daß der von x, y ausgehenden

[1]) Die rechtwinkeligen Koordinatenachsen beider Ebenen mögen parallel zueinander angenommen werden.

Richtung y' in der ersten Ebene die Richtung Y' in der zweiten Ebene zugeordnet ist, welche mit der ersten den Winkel a bildet. Die Gleichung 1) wird im allgemeinen, falls $\operatorname{tg} a$ einen gegebenen Wert für die Stelle x, y hat, nur für zwei Richtungen bestehen. Sie findet aber daselbst für alle statt, wenn:

$$\begin{gathered} Y_x = X_x \operatorname{tg} a, \\ X_x + X_y \operatorname{tg} a = -Y_x \operatorname{tg} a + Y_y, \\ -Y_y \operatorname{tg} a = X_y \end{gathered}$$

ist. Durch Addition der ersten und letzten dieser Gleichungen und Vergleichung mit der zweiten folgt:

$$(Y_x + X_y)^2 + (X_x - Y_y)^2 = 0.$$

Da nur reelle Werte in Betracht kommen, so ist:

$$\begin{aligned} X_x &= Y_y \\ Y_x &= -X_y \end{aligned} \tag{2}$$

und

$$Y_y \operatorname{tg} a + X_y = 0. \tag{3}$$

Sind also die Gleichungen 2) für den Punkt p erfüllt, so entspricht der Gleichung 3) ein Wert von $\operatorname{tg} a$ derart, daß die Tangentenrichtungen korrespondierender Kurven, die von p, P ausgehen, beständig diesen Winkel a miteinander bilden; diese Tangenten bilden also zwei kongruente Büschel, und man könnte auch umgekehrt aus der Betrachtung solcher Büschel die Gleichungen 2), 3) erhalten.

Die Gleichungen 2) können, anstatt nur für einzelne Stellen, auch für Kurven oder auch für ein zweidimensionales Gebiet erfüllt sein. Versteht man unter X, Y die reellen und imaginären Bestandteile einer analytischen Funktion $f(z)$ der komplexen Variabeln z und setzt:

$$X + Yi = f(z),$$

so sind die Gleichungen 2) für jeden Punkt eines zusammenhängenden Gebietes der Ebene erfüllt. Setzt man dann:

$$\text{B)} \qquad \begin{aligned} X_1 &= X + (Y_x - X_x \psi)^m f(x, y) \\ Y_1 &= Y + (Y_x - X_x \psi)^n \varphi(x, y), \end{aligned}$$

wo $m, n > 2$, so hat man an Stelle von A) ein Entsprechen der beiden Ebenen x, y; X_1, Y_1, bei dem, falls $\operatorname{tg} \alpha$ aus der Gleichung:

$$4) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \psi$$

entnommen wird, die Gleichungen 2) für jeden Punkt der Kurve:

$$Y_x - X_x \psi = 0$$

bestehen. Das heißt, die Gleichungen B) vermitteln ein Entsprechen der beiden Ebenen derart, daß in jedem Punkte der Kurve $Y_x - X_x \psi = 0$ entsprechende Fortschreitungsrichtungen kongruente Büschel bilden.

Noch allgemeiner kann man endlich setzen:

$$\text{C)} \qquad \begin{aligned} X_1 &= X + f(x\, y)\, \Pi_k (Y_x - X_x \psi_k)^{m_k} \\ Y_1 &= Y + \varphi(x\, y)\, \Pi_k (Y_x - X_x \psi_k)^{n_k} \end{aligned}$$

wo m_k, $n_k > 2$; $k = 1, 2 \ldots p$; man hat dann ein System von p Kurven der angegebenen Eigenschaft.

Wählt man insbesondere für die ψ_k ebenso viele verschiedene Konstanten, so ist die Winkeldifferenz zwischen den Fortschreitungsrichtungen längs der Kurven c_k:

$$X_x - X_y c_k = 0$$

und ihrer entsprechenden jeweilig konstant.

Diese Kurven c_k und ihre entsprechenden C_k haben bemerkenswerte Eigenschaften.

Es seien p, p' zwei konsekutive Punkte von c_k, P, P' die entsprechenden Punkte von C_k; ferner q' ein zu p' benachbarter Punkt auf der Tangente $p\,p'$, so daß $p\,p'\,q'$ in gerader Linie liegen. Dann müssen sich auch die Punkte P, P', Q' in gerader Linie befinden. Also:

Jeder Kurve, die im Punkte p die Tangente von c_k zur Wendetangente hat, entspricht eine Kurve, die im Punkte P die Tangente von C_k zur Wendetangente hat.

Möge andererseits eine Kurve c die Kurve c_k im Punkte p berühren, d. h. p und p' mit ihr gemein haben, und sei q' ein benachbarter Punkt von c. Dann entspricht der Kurve c eine Kurve C der zweiten Ebene, welche mit c_k die Punkte P, P' gemein hat, während die Richtung $P'Q'$ mit PP' denselben Winkel bildet wie $p'q'$ mit pp'. Oder:

Jeder Kurve, welche c_k in einem Punkte p berührt, entspricht eine Kurve, die C_k in P so berührt, daß c und C in den Punkten p, P gleiche Kontingenzwinkel haben.[1])

---

[1]) Der Ausdruck „Kurven von gleichem Kontingenzwinkel in entsprechenden Punkten" ist nicht so zu verstehen, als ob damit der einen Kurve in Bezug auf die andere eine charakteristische Eigenschaft an und für sich zugeschrieben werden solle. In der Tat braucht man nur zwei beliebige Kurven, eventuell dadurch, daß man die eine um einen geeigneten Winkel in ihrer Ebene dreht, so aufeinander zu beziehen, daß sie in korrespondierenden Punkten parallele Tangenten haben. Dies ist „im allgemeinen" immer möglich, falls nicht die eine Kurve eine gerade Linie ist. Genauer erkennt man dies durch folgende Betrachtung.

Zur Bestimmung aller Kurven ξ, η, die mit einer gegebenen x, y in Punkten desselben Parameters t gleiche Kontingenzwinkel haben, setze man:

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = d\left(\operatorname{arctg}\frac{\frac{d\eta}{dt}}{\frac{d\xi}{dt}}\right)$$

oder:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx} + c : 1 - c\frac{dy}{dx};$$

d. h.:

$$\eta = \int f'(x)(dy + c\,dx) + \text{const}$$
$$\xi = \int f'(x)(dx - c\,dy) + \text{const},$$

wo c eine willkürliche Konstante, $f'(x)$ die Ableitung einer willkürlichen Funktion von x bedeutet. Für $c = \operatorname{tg}\alpha$ kommt, wenn man $f(x)$ durch $\cos\alpha\, f(x)$ ersetzt und die Integrationskonstanten fortläßt:

$$\eta\sin\alpha + \xi\cos\alpha = f(x)$$
$$\eta\cos\alpha - \xi\sin\alpha = \int f'(x)\,dy.$$

Insbesondere entspricht der Kurve c_k die C_k so, daß beide in korrespondierenden Punkten gleiche Kontingenzwinkel haben. Jedem geradlinigen Bestandteil von c_k entspricht wieder ein geradliniger Bestandteil von C_k.

§ 2.

Konforme Transformation der Ebene.

In allgemeinerer Weise ergeben sich die vorigen Betrachtungen durch die folgende analytische Untersuchung. Sind wieder X, Y reelle eindeutige Funktionen von x, y, deren Funktionaldeterminante Δ nicht verschwindet, so ist:

1)
$$\begin{aligned} d S^2 &= d X^2 + d Y^2 \\ &= (X_x^2 + Y_x^2) dx^2 + 2 (X_x X_y + Y_x Y_y) dx\, dy + (X_y^2 + Y_y^2) dy^2, \end{aligned}$$

während:

Führt man in der ξ, η Ebene ein um den Winkel α gedrehtes Koordinatensystem ξ', η' ein, so ist:

1)
$$\begin{aligned} \xi' &= f(x), \\ \eta' &= \int f'(x)\, d\, y; \end{aligned}$$

also:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,\eta'}{d\,\xi'},$$

und auf diesen Fall des Parallelismus läßt sich daher die Betrachtung zurückführen. Ist nun $y = \varphi(x)$ und $\eta' = F(\xi')$, so handelt es sich um die Bestimmung von $f(x)$ aus den Gleichungen 1). Dies gibt:

$$\int f'(x)\, \varphi'(x)\, d\, x = F(f(x))$$

oder:

$$\varphi'(x) = F'(f(x)).$$

Ist nun Φ die reziproke Funktion von F', also $\Phi(F'(u)) = u$, so wird:

$$\Phi(\varphi'(x)) = f(x),$$

womit $f(x)$ so bestimmt ist, daß $\eta' = F(\xi')$ wird, und zugleich wird:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = F'(f(x)) = \varphi' x$$

oder:

$$y = \varphi(x) + \text{const.}$$

$$d x^2 + d y^2 = d s^2$$

ist. Auf dieselbe Weise folgt:

$$2)\qquad \begin{vmatrix} d X\, d Y \\ d^2 X\, d^2 Y \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} d x\, d y \\ d^2 x\, d^2 y \end{vmatrix} + U,$$

wo U eine Differentialform dritten Grades:

$$U = a\,(d\,x)^3 + b\,(d\,x)^2\,d\,y + c\,d\,x\,(d\,y)^2 + d\,(d\,y)^3$$

und:

$$\begin{aligned} a &= X_x Y_{xx} - Y_x X_{xx} \\ b &= 2\,(X_x Y_{xy} - Y_x X_{yx}) + X_y Y_{xx} - Y_y X_{xx} \\ c &= 2\,(X_y Y_{xy} - Y_y X_{yx}) + X_x Y_{yy} - Y_x X_{yy} \\ d &= X_y Y_{yy} - Y_y X_{yy} \end{aligned}$$

gesetzt ist. Führt man nun in 2) die Krümmungshalbmesser der entsprechenden Kurven:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\,x\,d^2 y - d\,y\,d^2 x}{d\,s^3}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d\,X\,d^2 Y - d\,Y\,d^2 X}{d\,S^3}$$

ein, so folgt:

$$3)\qquad \frac{d\,S^3}{R} = \Delta\,\frac{d\,s^3}{r} + U.$$

Bei jeder Abbildung ist also die durch $d x^3$ dividierte Differenz der beiden die Krümmungsradien enthaltenden Glieder nur von der Richtung y' abhängig, daher für alle entsprechenden Kurven mit derselben Tangente dieselbe.[1]) Und es gibt stets mindestens eine reelle Tangentenrichtung, für die $U = 0$ ist, so daß sich die Gleichung 3) auf:

$$\frac{d\,S^3}{R} = \Delta\,\frac{d\,s^3}{r}$$

[1]) Vgl. die Anmerkung zu § 4 pag. 92.

reduziert. Es ist von Interesse, die Kurven zu bestimmen, für die bei gegebener Abbildung $U = 0$ wird. Dabei werden sich sehr mannigfaltige Verhältnisse ergeben; ich beschränke mich daher auf den Fall, wo die Gleichungen 2) des § 1 oder:

$$4)\qquad \begin{aligned} X_x &= Y_y \\ X_y &= -Y_x, \end{aligned}$$

zunächst für die Stelle x, y, erfüllt sind. Dann wird:

$$dS^2 = T\,ds^2,$$

falls:

$$T = X_x^2 + X_y^2$$

gesetzt wird. Der Differentialausdruck U nimmt die Form:

$$U = ds^2(A\,dx + B\,dy)$$

an, wenn die beiden Gleichungen:

$$X_x Y_{xx} - Y_x X_{xx} - 2(X_y Y_{yx} - Y_y X_{xy}) - (X_x Y_{yy} - Y_x X_{yy}) = 0$$
$$X_y Y_{yy} - Y_y X_{yy} - 2(X_x Y_{xy} - Y_x X_{xy}) - (X_y Y_{xx} - Y_y X_{xx}) = 0$$

bestehen. Führt man in dieselben die Gleichungen 4) ein, so erhält man:

$$X_x P - X_y Q = 0$$
$$X_y P + X_x Q = 0,$$

wo:

$$P = Y_{xx} + 2X_{yx} - Y_{yy}$$
$$Q = X_{yy} + 2Y_{xx} - X_{xx}$$

gesetzt ist. Da nun $\varDelta$ nicht Null ist, müssen also P und Q beide Null sein, d. h. es müssen die beiden Gleichungen:

$$5)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(Y_x + X_y) &= \frac{\partial}{\partial y}(Y_x - X_x) \\ \frac{\partial}{\partial y}(Y_x + X_y) &= \frac{\partial}{\partial x}(X_x - Y_y) \end{aligned}$$

an der betreffenden Stelle erfüllt sein. Damit aber verwandelt sich die Gleichung 3) in:

$$\frac{dS}{R} = \frac{ds}{r} + \frac{A\,dx + B\,dy}{T}, \tag{6}$$

wo:

$$A = X_x Y_{xx} - Y_x X_{xx}$$
$$B = X_y Y_{yy} - Y_y X_{yy}$$

ist. Unter den Voraussetzungen 4), 5) gibt es also für eine solche Stelle nur eine einzige reelle durch:

$$A\,dx + B\,dy = 0$$

bestimmte Fortschreitungsrichtung derart, daß zwischen den Kontingenzwinkeln korrespondierender Kurven, deren Tangente in diese Richtung fällt:

$$d\varepsilon = \frac{ds}{r}, \quad dE = \frac{dS}{R}$$

die Beziehung stattfindet:

$$dE = d\varepsilon.$$

Bei der konformen Abbildung sind die Gleichungen 4) und mit ihnen die 5) identisch für alle Punkte des Gebietes erfüllt. Zugleich wird aber jetzt:

$$A = -X_x^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X_y}{X_x}\right)$$
$$B = -X_x^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{X_y}{X_x}\right),$$

wie sich unmittelbar aus 6) ergibt. Die Gleichung 6) geht damit über in:

$$\frac{dS}{R} = \frac{ds}{r} - d\,\mathrm{arctg}\left(\frac{X_y}{X_x}\right) \tag{7a}$$

oder:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r\sqrt{T}} - \frac{1}{\sqrt{T}}\frac{d}{ds}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{X_y}{X_x}\right). \tag{7b}$$

Diese Gleichungen bestätigen den Satz, daß die Kontingenzwinkel der Kurven c:

$$X_y - c X_x = 0$$

und ihrer entsprechenden C für entsprechende Stellen gleich sind, allgemeiner, daß für jede diese Kurven berührende Kurve und ihre entsprechende im Berührungspunkte:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r\sqrt{T}}$$

ist. Die Kurven c gehen ersichtlich durch alle Punkte, wo:

$$f'(z) = 0$$

ist, falls die konforme Transformation durch:

$$Z = f(z)$$

ausgedrückt ist, d. h. durch diejenigen Punkte der ersten Ebene, denen die Windungspunkte der zweiten bei der Abbildung entsprechen.

Integriert man die Gleichung 7[a]), so folgt:

8) $$E - E_0 = \varepsilon - \varepsilon_0 - \Big|\operatorname{arctg}\left(\frac{X_y}{X_x}\right)\Big|_{x_0, y_0}^{x, y}.$$

Bezeichnet man also den Winkel zwischen den Tangenten im Anfangs- und Endpunkte eines stetig gekrümmten Bogenstückes $p p'$ mit $[p p']$ und analog mit $[P P']$ für den vermöge der konformen Abbildung entsprechenden Bogen $P P'$, so ist:

$$[P P'] - [p p'] = - \Big|\operatorname{arctg}\left(\frac{X_y}{X_x}\right)\Big|_{x_0, y_0}^{x, y}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß das Bogenstück durch keinen Punkt geführt ist, für den $f'(z) = 0$ ist. Die Werte der Arcustangenten sind dabei der stetigen Fortsetzung dieser Funktionen gemäß zu wählen.

Betrachtet man nun die Funktion:

$$\begin{aligned} \log(f'z) &= \log(X_x - i X_y) \\ &= \tfrac{1}{2} \log T - i \operatorname{arctg}\left(\frac{X_y}{X_x}\right) \end{aligned}$$

so sind die Kurven $T = \text{const} = c_1^2$ die orthogonalen Trajektorien der Kurven:

$$X_y - c\,X_x = 0.$$

Bringt man die Differentialform:

$$A\,dx + B\,dy$$

in die Gestalt:

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\,dx - \frac{\partial T}{\partial y}\,dx\right),$$

so folgt aus 6):

$$9)\qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{c_1 r} - \frac{1}{2\,c_1^3}\left\{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

wo:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 = 4\,(X_{xx}^2 + X_{xy}^2)\,(X_x^2 + X_y^2)$$

ist, und dies ist die Beziehung, welche zwischen den Krümmungshalbmessern der Kurven $T = c_1^2$ und ihren entsprechenden (allgemeiner für jede diese Kurven berührende Kurve und ihre entsprechende im Berührungspunkte) stattfindet.

Zu einer anderen Eigenschaft des Orthogonalsystems der Kurven c und T führt die folgende Betrachtung.

Es sei irgend ein Polygon gegeben, dessen Seiten sich nicht untereinander durchschneiden und von stetig gekrümmten Kurven gebildet sind, welches also einen einfach zusammenhängenden Teil der Ebene begrenzt. Befindet sich im Innern desselben kein Punkt, wo $f'(z) = 0$ ist (Stellen, wo $f'(z) = \infty$, sind schon durch die früheren Voraussetzungen ausgeschlossen), so wird diesem Polygon vermöge der konformen Abbildung ein zweites von demselben Charakter entsprechen. Zugleich ist aber das über die Begrenzung des ersten erstreckte Integral:

$$\int d \log f'(z) = 0$$

oder:

$$\int \tfrac{1}{2}\, d \log\, T - i \int d \operatorname{arctg}\left(\frac{X_y}{X_x}\right) = 0.$$

Da nun der erste Teil gleich Null ist, so liefert der zweite, falls die Ecken des ersten Polygons mit $p_1, p_2 \ldots, p_n$, die des zweiten mit $P_1, P_2, \ldots, P_n$ bezeichnet werden:

$$\begin{aligned}&[P_1 P_2] + [P_2 P_3] + \cdots [P_n P_1]\\ &= [p_1 p_2] + [p_2 p_3] + \cdots [p_n p_1],\end{aligned}$$

falls die einzelnen Winkelgrößen mit ihren Vorzeichen berücksichtigt werden. Dieser Satz kann übrigens auch aus dem allgemeinen Gauß-Bonnetschen Satze über die Curvatura integra geschlossen werden (vgl. § 4), wie denn beide Sätze, der eben genannte und das Cauchysche Theorem zur gemeinsamen Quelle die Greensche Betrachtung haben. — Eine besonders einfache Form erhält derselbe durch Anwendung auf ein Viereck, von dem zwei gegenüberliegende Seiten $p_1 p_2$, $p_3 p_4$ durch Kurven c gebildet werden, es folgt dann $[P_2 P_3] - [P_1 P_4] = [p_2 p_3] - [p_1 p_4]$.

§ 3.

Die Kurvensysteme $c = \text{const}$ bei konformer Transformation der Ebene.

Nach § 2 hat bei der konformen Abbildung der Ebene das Kurvensystem $X_y - c X_x = 0$ [1]) die Eigenschaft, daß zwischen dem Krümmungsradius r einer Kurve der ersten Ebene, welche eine Kurve des Systems berührt, und der entsprechenden Kurve vom Krümmungsradius R die Beziehung:

$$\frac{\sqrt{T}}{R} = \frac{1}{r}$$

für den Berührungspunkt besteht. Die linke Seite der Gleichung:

$$X_y - c X_x = 0$$

genügt selbst der partiellen Differentialgleichung $\Delta_2 = 0$. Man kann nun umgekehrt nach denjenigen konformen Abbildungen fragen, bei denen das System dieser Kurven ein gegebenes ist.

[1]) Sie sind auch weiterhin als Kurven c bezeichnet.

Es sei also $\psi(xy) = \text{const}$ ein System von Kurven dieser Art, dann müssen die Gleichungen:

$$1)\qquad \begin{aligned} X_x &= \lambda\,\varphi(\psi) \\ X_y &= \lambda \end{aligned}$$

bestehen, wo φ eine Funktion von ψ allein ist, und λ eine unbekannte Funktion von x, y sein wird. Man erhält aus 1) vermöge der Integrabilitätsbedingung für X und der Bedingung $\Delta_2 X = 0$ die Gleichungen:

$$2)\qquad \begin{aligned} \lambda_y \varphi + \lambda\,\varphi'\,\psi_y - \lambda_x &= 0 \\ \lambda_x \varphi + \lambda\,\varphi'\,\psi_x + \lambda_y &= 0, \end{aligned}$$

wo $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{d\psi}$ gesetzt ist. Setzt man:

$$\mu = \log \lambda,^{1)}$$

so ist:

$$3)\qquad \begin{aligned} -\mu_y &= \varphi'\,\frac{\psi_x + \varphi\,\psi_y}{1+\varphi^2} \\ -\mu_x &= \varphi'\,\frac{\psi_x\,\varphi - \psi_y}{1+\varphi^2}, \end{aligned}$$

und die Integrabilitätsbedingung für 3) wird nun:

$$4)\qquad \left(\varphi'' - \frac{2\,\varphi\,\varphi'^2}{1+\varphi^2}\right)(\psi_x^2 + \psi_y^2) + \varphi'\,(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = 0.$$

Da φ nur von ψ abhängig ist, muß die Gleichung:

$$5)\qquad \frac{\psi_{xx} + \psi_{yy}}{\psi_x^2 + \psi_x^2} = f'(\psi) = \frac{\Delta_2\,\psi}{\Delta\,\psi}$$

bestehen, wobei $f'(\psi)$ die Ableitung einer willkürlichen Funktion f von ψ bedeutet. Gleichung 5) ist zunächst erfüllt, wenn $\Delta_2\,\psi = 0$ ist. Alsdann ergibt sich aus 4):

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{2\,\varphi\,\varphi'}{1+\varphi^2},$$

[1]) Unter log wird der natürliche Logarithmus verstanden, da die Schreibart l leicht zu Mißverständnissen führt.

oder:

$$\frac{\varphi'}{1+\varphi^2}=c_1;\quad \varphi=\operatorname{tg}(c_1\psi+c_2),$$

wo c_1 und c_2 reelle willkürliche Konstanten sind, und weiter:

$$\mu=-c_1\int(\psi_x\,dy-\psi_y\,dx)+\log\cos(c_1\psi+c_2)$$
$$\lambda=e^{-w}\cos(c_1\psi+c_2),$$

wenn $w=c_1\int(\psi_x\,dy-\psi_y\,dx)$ gesetzt ist. Hieraus ergibt sich nach 1) X und schließlich:

$$Z=(X+Yi)=-ie^{ic_2}\int e^{ic_1\psi-w}\,dz$$

als die verlangte Abbildungsfunktion. Da nun ψ der reelle Teil einer willkürlichen Funktion der komplexen Variabeln z:

$$f(z)=\psi+i\varphi$$

ist, so erhält man $w=c_1\varphi$, oder:

6) $$Z=-ie^{ic_2}\int e^{ic_1f(z)}\,dz,$$

wo die Konstante vor dem Integral auch weggelassen werden kann, weil sie nur eine Drehung des Koordinatensystems bedeutet.

Aber auch die Gleichung 5) läßt sich vollständig lösen. Setzt man:

$$\xi=x+yi,\quad \eta=x-yi,$$

so geht 5) über in:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta}=\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}f'(\psi).$$

Ein erstes Integral ist:

$$\log\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=f(\psi)+\log V',$$

wo V eine willkürliche Funktion von η, V' ihre Ableitung bedeutet. Setzt man noch $f(\psi)=\log F(\psi)$, so erhält man:

$$\frac{\partial \psi}{F(\psi)} = d\eta \cdot V'$$

oder:

$$\psi = \Theta\,(U(x + iy) + V(x - iy)),$$

wo Θ eine willkürliche Funktion ihres Argumentes bedeutet: damit ein reeller Wert für $\int \frac{\partial \psi}{F(\psi)}$ entsteht, müssen U und V komplex konjugierte Funktionen der Argumente $x + yi$, $x - yi$ bedeuten. In der Tat wird dann auch:

$$\frac{\Delta_2 \psi}{\psi_x'^2 + \psi_y'^2} = \frac{\Theta''}{\Theta'^2},$$

so daß die rechte Seite eine Funktion von ψ allein wird. Hieraus ergibt sich, was übrigens zu erwarten war, daß für die Kurven $\psi = \text{const}$ jede reelle Funktion des reellen Teils einer Funktion der komplexen Variabeln z gleich einer Konstanten zu setzen ist.

Einige einfache Beispiele mögen dies veranschaulichen.

Sollen die Kurven c ein System von Parallelen bilden, so ist $\psi = \alpha x + \beta y$ zu setzen. Dies ist der reelle Teil der Funktion:

$$f(z) = (x + yi)(\alpha - \beta i),$$

demnach ist:

$$Z = \int e^{c_1 z(\alpha + \beta i)}\, dz$$

die gesuchte Abbildungsfunktion.

Das System gleichseitiger Hyperbeln:

$$\psi = x^2 - y^2 + 2cxy + 2\alpha x + 2\beta y = \text{const}$$

ist das einzige System von eigentlichen Kegelschnitten, welches der Gleichung $\Delta_2 \psi = 0$ genügt; dem entspricht die Funktion:

$$f(z) = z^2(1 - ic) + 2z(\alpha - i\beta)$$

und hieraus folgt:

$$Z = \int e^{[2z(\alpha i + \beta) + z^2(c + i)]c_1}\, dz.$$

Um auch ein Beispiel für den Fall der Gleichung 5) anzuführen, setze man:

$$f(z) = X + Yi,$$

und wähle:

$$\psi = \frac{X_y}{X_x}.$$

Dann wird:

$$\frac{\Delta_2 \psi}{\Delta \psi} = \frac{2\psi}{1+\psi^2}$$

oder:

$$\frac{\varphi'}{1+\varphi^2} = \frac{c_1}{1+\psi^2}; \quad \varphi = \operatorname{tg}(c_1 \operatorname{arctg} \psi + c_2).$$

Bestimmt man jetzt aus 3) den Wert von λ, so erhält man als Abbildungsfunktion:

$$Z = \int (f'(z))^{-c_1} dz.$$

Ist insbesondere $f(z) = \frac{1}{n} z^n$, so wird für $z = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$\psi = -\operatorname{tg}(n-1)\varphi;$$

die Kurven $\psi = \text{const}$ bilden hier ein Büschel von durch den Nullpunkt der Koordinaten gehenden Geraden, denen nach § 1 ein solches Büschel in der zweiten Ebene entspricht.

Setzt man dagegen:

$$\psi = X_y^2 + X_x^2,$$

wobei X wieder in der eben angegebenen Weise zu $f(z)$ gehört, so ist:

$$\frac{\Delta_2 \psi}{\Delta \psi} = \frac{1}{\psi}$$

und man erhält:

$$Z = -i\, e^{ic_2} \int (f'z)^{2ic_1} dz.$$

Setzt man z. B. $f(z) = \frac{1}{n} z^n$, so werden die Kurven $\psi = \text{const}$ konzentrische Kreise, denen dann in der zweiten Ebene logarithmische Spiralen entsprechen.

§ 4.

Konforme Transformation einer Fläche in eine andere.

Sind zwei Flächen irgendwie durch gleiche Werte der unabhängigen Parameter u, v aufeinander abgebildet, und die Quadrate ihrer Längenelemente:

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$
$$ds_1^2 = e_1\,du^2 + 2f_1\,du\,dv + g_1\,dv^2;$$

setzt man ferner:

$$\sqrt{eg - f^2} = H, \quad \sqrt{e_1 g_1 - f_1^2} = H_1,$$

so ist bekanntlich:

$$\gamma = \frac{H(du\,dv^2 - dv\,du^2)}{ds^3} + \frac{P}{ds^3},\text{[1]}$$

wo P eine Differentialform dritten Grades in du, dv, die geodätische Krümmung irgend einer auf der ersten Fläche gezogenen Kurve. Hieraus folgt:

$$\text{1)} \qquad \gamma\,\frac{ds^3}{H} - \gamma_1\,\frac{ds_1^3}{H_1} = \frac{P}{H} - \frac{P_1}{H_1};$$

d. h. die Differenz linker Hand ist nur von den ersten Differentialen abhängig.[2]) Nimmt man nun an, daß die Flächen konform aufeinander abgebildet sind, und ist etwa:

---

[1]) P hat den Wert:

$$\frac{1}{2H}\begin{vmatrix} e\,du + f\,dv & 2a\,du^2 + 4a'\,du\,dv + 2a''\,dv^2 \\ f\,du + g\,dv & 2b\,du^2 + 4b'\,du\,dv + 2b''\,dv^2 \end{vmatrix},$$

wo:

$$2a = e_u, \qquad 4a' = 2e_v, \qquad 2a'' = 2f_v - g_u$$
$$2b = 2f_u - e_v, \qquad 4b' = 2g_u, \qquad 2b'' = g_v$$

zu setzen ist.

[2]) Diese Bemerkung, die für alle in dieser Arbeit enthaltenen Betrachtungen wesentlich ist, benutzt, wie ich sehe, auch schon Herr Mehmke, allerdings in ganz anderer Richtung, in seiner Note „Über die geodätische Krümmung der auf einer Fläche gezogenen Kurven und

$$
2) \qquad \begin{aligned} ds^2 &= e(du^2 + dv^2) \\ ds_1^2 &= \lambda e(du^2 + dv^2), \end{aligned}
$$

so ergibt sich aus 2):

$$
\gamma_1 = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2}\frac{e}{\lambda\sqrt{\lambda}\, ds^3} \begin{vmatrix} du, & \lambda_u(du^2 - dv^2) + 2\lambda_v\, du\, dv \\ dv, & \lambda_v(dv^2 - du^2) + 2\lambda_u\, du\, dv \end{vmatrix}
$$

oder:

$$
3) \qquad \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2\lambda\sqrt{\lambda}}\frac{(\lambda_u\, dv - \lambda_v\, du)}{ds} \\ \gamma_1\, ds_1 - \gamma\, ds &= \frac{1}{2\lambda}(\lambda_u\, dv - \lambda_v\, du). \end{aligned}
$$

Für die Kurvenschar c, welche der Differentialgleichung:

$$
\lambda_u\, dv - \lambda_v\, du = 0
$$

genügt, und die ihr entsprechende c_1 gelten ganz ähnliche Eigenschaften wie in § 1. Diese Kurven haben in entsprechenden Punkten gleiche geodätische Kontingenzwinkel, und jede Kurve der ersten Fläche, welche eine c berührt, geht in eine die Kurve c_1 der zweiten Fläche dergestalt berührende über, daß für den Berührungspunkt die geodätischen Kontingenzwinkel erhalten bleiben, u. s. w.

Die Kurven c lassen sich im allgemeinen nicht durch Quadratur bestimmen;[1]) dagegen sind ihre orthogonalen Tra-

---

ihre Änderung bei beliebiger Transformation" (auch Berührungstransformation). Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 37, p. 188, 1892. Man vergleiche auch die anderweitigen Arbeiten dieses Autors:

„Über zwei die Krümmung von Kurven und das Gaußsche Krümmungsmaß von Flächen betreffende charakteristische Eigenschaften der linearen Punkttransformation", ebenda, Bd. 36, p. 206, 1891;

„Untersuchungen über die auf die Krümmung von Kurven und Flächen bezüglichen Eigenschaften der Berührungstransformationen", ebenda, Bd. 38, p. 7, 1893, sowie meine Arbeit „Zur Theorie der Krümmung der Flächen". Math. Annalen, Bd. 39, p. 179, 1891.

[1]) Einfache auf Quadraturen führende Fälle sind z. B.:

$$
\lambda = UV, \quad \lambda = U + V, \quad \lambda = \frac{U - V}{U + V} \text{ u. s. w.},
$$

wo U, V Funktionen von u, v allein sind.

jektorien unmittelbar gegeben durch $\lambda = \text{const}$, und in entsprechenden Punkten dieser Trajektorien auf den beiden Flächen findet für sie berührende entsprechende Kurven zwischen den geodätischen Krümmungen die Beziehung:

$$\gamma_1 \sqrt{\lambda} - \gamma = \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2}$$

statt.

Der Ausdruck:

$$\frac{\lambda_u\, dv - \lambda_v\, du}{\lambda}$$

wird ein vollständiges Differential, wenn:

4) $$\Delta_2 \log \lambda = 0$$

ist, wo Δ_2 der zweite Differentialparameter:

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

ist. Tritt an Stelle des speziellen Längenelementes 2):

$$ds^2 = e\, du^2 + 2 f\, du\, dv + g\, dv^2,$$

so ergiebt sich für die Differenz der geodätischen Kontingenzwinkel:

5)
$$d\varepsilon = \gamma\, ds, \qquad d\varepsilon_1 = \gamma_1\, ds_1,$$
$$d\varepsilon_1 - d\varepsilon = \frac{1}{2H}\left\{\left(g \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} - f \frac{\partial \log \lambda}{\partial v}\right) dv - \left(e \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} - f \frac{\partial \log \lambda}{\partial u}\right) du\right\}$$

und hier ist, wie übrigens aus 4) schon zu ersehen, die rechte Seite ein vollständiges Differential, wenn:

6) $$\Delta_2 \log \lambda = 0$$

ist, wobei jetzt Δ_2 den zweiten Beltramischen Differentialparameter in Bezug auf das allgemeine Längenelement bedeutet. Aus der bekannten Formel für das Krümmungsmaß k:

$$2 H k = \frac{\partial}{\partial v}(e(2 f_u - e_v) - f e_u) - \frac{\partial}{\partial u}(e g_u - f e_v)$$

erhält man, wenn man e, f, g, durch $\lambda e, \lambda f, \lambda g$ ersetzt, die Beziehung zwischen den Krümmungsmaßen k und k_1:

7) $$\lambda k_1 - k = -\tfrac{1}{2}\Delta_2 \log \lambda.$$

Der Ausdruck $d\varepsilon_1 - d\varepsilon$ ist daher nur dann ein vollständiges Differential, wenn zwischen den Krümmungsmaßen in korrespondierenden Punkten die Gleichung:

8) $$\lambda k_1 - k = 0\,^{1)}$$

besteht.

Genügt also der Modul λ der Bedingung 6), so ist für je zwei entsprechende Kurvenstücke mit den Bogenelementen ds, ds_1:

9) $$\begin{gathered} d\varepsilon_1 - d\varepsilon = d\Omega \\ \sqrt{k_1}\, ds_1 = \sqrt{k}\, ds \\ \int k_1\, d\omega_1 = \int k\, d\omega, \end{gathered}$$

wo $d\omega$, $d\omega_1$ korrespondierende Flächenelemente sind; d. h. entsprechende Flächenstücke haben gleiche Curvatura integra. Diese letzteren Sätze bilden eine wesentliche Erweiterung der entsprechenden für die Ebene, welch letztere aus denselben für $k = k_1 = 0$, d. h. wo beide Flächen developpabel sind, hervorgehen. Niemals lassen sich dagegen z. B. zwei Flächen konstanter Krümmung derart aufeinander beziehen, daß $d\varepsilon_1 - d\varepsilon$ ein totales Differential wird, den einzigen

---

1) k und k_1 müssen daher stets von gleichen Zeichen sein.

Bringt man Formel 5) für eine geschlossene Kurve der ersten Fläche zur Anwendung, die ein „Elementarflächenstück" begrenzt und entspricht ihr wieder eine solche Kurve der zweiten Fläche, so ergibt sich durch Anwendung des Greenschen Satzes für die Summe aller Kontingenzwinkel:

$$E_1 - E = \tfrac{1}{2}\int d\omega\, \Delta_2 \log \lambda;$$

dieser Satz aber geht aus dem Gauß-Bonnetschen Satze hervor, sowie man die Formel 7) benutzt.

Fall ausgenommen, wo λ selbst eine Konstante ist, womit die Beziehung auf die Ähnlichkeit resp. Kongruenz hinauskommt.

Um ein Beispiel für den unter 8), 9) betrachteten Fall zu geben, setze man:

$$\begin{aligned} \varphi(u+iv) &= U+iV \\ \underline{\varphi}(u-iv) &= U-iV, \end{aligned} \tag{10}$$

wo $\underline{\varphi}$ die komplex konjugierte Funktion zu φ ist, und nehme an, daß diese Formeln sich eindeutig so umkehren lassen, daß:

$$\begin{aligned} u &= \mu(U,V) = \mu \\ v &= \nu(U,V) = \nu \end{aligned}$$

wird. Das Quadrat des Längenelementes:

$$d s_1^2 = e(\mu,\nu)(d U^2 + d V^2)$$

geht jetzt durch die Transformation 10) über in:

$$d s_1^2 = e(u,v)(d u^2 + d v^2)\,\varphi'\,\underline{\varphi}'$$

und die beiden Flächen mit den Quadraten der Längenelemente:

$$\begin{aligned} d s^2 &= e(d u^2 + d v^2) \\ d s_1^2 &= \varphi'\,\underline{\varphi}'\,e(d u^2 + d v^2) \end{aligned}$$

stehen jetzt in konformer Beziehung, so daß $\lambda = \varphi'\,\underline{\varphi}'$ ist. Dabei ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\log \varphi'\,\underline{\varphi}') &= \frac{\partial}{\partial v}\operatorname{arctg}\left(\frac{U_u}{U_v}\right) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}(\log \varphi'\,\underline{\varphi}') &= -\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{arctg}\left(\frac{U_u}{U_v}\right), \end{aligned}$$

also:

$$d\varepsilon_1 - d\varepsilon = d\operatorname{arctg}\left(\frac{U_u}{U_v}\right),$$

wie nach § (2) zu erwarten war.

Zur Auffindung der Kurven c im allgemeinen Falle, zu dem wir zurückkehren, genügt es übrigens, einen integrierenden Faktor μ des Differentialausdruckes auf der rechten Seite von 5) zu bestimmen. Dieser muß den Gleichungen:

$$11)\qquad \begin{aligned} \mu\left(g\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} - f\frac{\partial \log\lambda}{\partial v}\right) &= H\frac{\partial \log\lambda_1}{\partial v} \\ \mu\left(e\frac{\partial \log\lambda}{\partial v} - f\frac{\partial \log\lambda}{\partial u}\right) &= -H\frac{\partial \log\lambda_1}{\partial u} \end{aligned}$$

genügen. Dies gibt die Gleichung:

$$12)\qquad H\,\Delta(\log\lambda,\ \log\mu) + \Delta_2\log\lambda = 0,$$

wo Δ der Beltramische Zwischenparameter ist. Aus den Gleichungen 11) folgt aber auch:

$$H\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} = \frac{e\dfrac{\partial \log\lambda_1}{\partial v} - f\dfrac{\partial \log\lambda_1}{\partial u}}{\mu}$$

$$-H\frac{\partial \log\lambda}{\partial v} = \frac{g\dfrac{\partial \log\lambda_1}{\partial u} - f\dfrac{\partial \log\lambda_1}{\partial v}}{\mu}$$

oder, wenn man $\dfrac{1}{\mu} = \mu_1$ setzt:

$$H(\Delta\log\mu_1,\ \log\lambda_1) + \Delta_2\log\lambda_1 = 0.$$

Dies ist die Bedingung für den integrierenden Faktor μ_1, der für die konforme Beziehung der beiden Flächen mit den Quadraten des Längenelementes:

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$
$$ds_1^2 = \lambda_1\,ds^2$$

zu suchen ist, und dieser Faktor ist ohne weiteres bekannt, sobald man μ aus der Gleichung 12) gefunden hat.

§ 5.

Konforme Raumtransformation einer Kurve.

Es seien:

$$X_i = \varphi_i(x_1\, x_2\, x_3); \qquad i = 1, 2, 3$$

drei eindeutige reelle etc. . . . Funktionen, welche in einem gewissen Gebiete x eine eindeutige Umkehrung zulassen; ihre daselbst nicht verschwindende Funktionaldeterminante sei Δ. Jede Kurve des Gebietes x wird dann in eine Kurve des Gebietes X transformiert werden. Nun ist:

$$d\,X_i = \sum \varphi_{i,k}\, d\,x_k$$
$$d^2\,X_i = \sum \varphi_{i,kl}\, d\,x_k\, d\,x_l,$$

wo die Differentiale nach irgend einer unabhängigen Variabeln genommen sind. Dabei ist $\varphi_{i,k} = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}, \ldots$ so daß die hinter dem Komma stehenden Indices Differentiationen nach den betreffenden Variabeln bedeuten; die Summation bezieht sich auf diese letzteren Indices. Setzt man noch:

$$\sigma_i = \sum \varphi_{i,kl}\, d\,x_k\, d\,x_l,$$

führt man zugleich für die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

allgemein die abkürzende Beziehung:

$$(A\,B\,C)$$

ein, so wird:

1) $$\Delta\,(d\,x\,d^2\,x\,a) = (d\,X\,d^2\,X\,A) - (d\,X\,\sigma\,A).$$

Dabei sind die $a_1\, a_2\, a_3$ oder a_i beliebige Größen (Funktionen der x_i) und:

$$A_i = \sum a_k\, \varphi_{i,k}.$$

Setzt man noch:

$$a_i = k \cos a_i$$
$$A_i = K \cos A_i$$
$$\delta = \{(d x_2 d^2 x_3 - d x_3 d^2 x_2)^2 + (d x_3 d^2 x_1 - d x_1 d^2 x_3)^2 + (d x_1 d^2 x_2 - d x_2 d^2 x_1)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

und bezeichnet man das Bogenelement einer Kurve im x Gebiete mit ds, ihren Krümmungshalbmesser mit r, so ist:

$$d s^3 = r\,\delta;$$

führt man ferner die analogen Bezeichnungen mit großen Buchstaben für das Gebiet der X ein; bezeichnet man endlich mit ϑ den Winkel zwischen der Binormale der ersten Kurve und der Richtung $\cos a_1$, $\cos a_2$, $\cos a_3$ und gibt dem Winkel Θ die analoge Bedeutung für die entsprechende Kurve, so hat man nach 1):

2) $$k \Delta \frac{d s^3}{r} \cos \vartheta = K \frac{d S^3}{R} \cos \Theta - U,$$

wo U der Differentialausdruck dritten Grades:

$$U = (d X \sigma A)$$

ist. Für je zwei korrespondierende Kurven ist daher die Differenz der beiden r und R enthaltenden Glieder nur abhängig von den ersten Differentialen, d. h. der Tangentenrichtung der gewählten Kurve. Die elementaren Komplexkegel $U = 0$ sind Kegel dritten Grades, und jede Komplexkurve im Sinne von Lie, welche zu diesen Kegeln gehört, hat die Eigenschaft, daß für sie und ihre entsprechende die Relation besteht:

$$k \Delta \frac{d s^3}{r} \cos \vartheta = K \frac{d S^3}{R} \cos \Theta.$$

Besondere Vereinfachungen treten auch hier ein, wenn man eine konforme Transformation des Raumes betrachtet, d. h.:

$$X_i = \frac{x_i}{\varrho^2}; \quad \sum x_i^2 = \varrho^2$$

setzt. In diesem Falle erhält man die Gleichung 2) am einfachsten durch Differentiation der Identität:

$$X_i \sigma = x_i; \quad \sigma = \varrho^2;$$

nämlich aus:

$$\sigma \, d X_i + d \sigma \, X_i = d x_i$$
$$\sigma \, d^2 X_i + 2 \, d \sigma \, d X_i + d^2 \sigma \, X_i = d^2 x_i.$$

Es ergibt sich so leicht:

3) $$(- d x \, d^2 x \, a) = \sigma^2 (d X \, d^2 X \, A) + 2 \frac{d s^2}{\sigma} (d x \, x \, a).$$

Setzt man:

4) $$a_i = k \cos \alpha_i$$
$$A_i = a_i - 2 \frac{x_i}{\sigma} \sum a_i x_i = K \cos A_i,$$

so wird:

$$k^2 = K^2; \quad k = K,$$

und aus 3) folgt nunmehr:

5) $$- \frac{d s}{r} \cos \vartheta = \frac{d S}{R} \cos \Theta + \frac{2 \, T}{\varrho^2 k},$$

wo mit T die Determinante:

$$T = \begin{vmatrix} d x_1 & d x_2 & d x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (d x \, x \, a)$$

bezeichnet ist. Je nach Wahl der willkürlichen Größen a_i erhält man so verschiedene Folgerungen aus der allgemeinen Gleichung 5).

Da nach 4):

$$\frac{\cos \alpha_i - \cos A_i}{2} = \frac{x_i}{\sigma} \sum x_i \cos \alpha_i,$$

so liegen die beiden Richtungen $\cos a_i$, $\cos A_i$ $(i = 1, 2, 3)$, gegen welche die Winkel der Binormalen entsprechender Kurven zu nehmen sind, in einer Ebene mit dem Radius vector ϱ, und letzterer halbiert den Winkel zwischen $\cos a_i$ und $-\cos A_i$.

Wählt man nun insbesondere $a_i = x_i$, so wird $\cos a_i = -\cos A_i (i = 1, 2, 3)$, und es folgt, da jetzt $T = 0$,

$$-\frac{ds}{r}\cos\vartheta = dS\frac{\cos\Theta}{R}.$$

Bezeichnet man daher die Richtung der Binormalen entsprechender Kurven mit b resp. B, so ist für zwei solche Kurven immer:

$$\frac{\varrho^2}{r}\cos(\varrho, b) = \frac{\cos(\varrho, B)}{R}.$$

Setzt man dagegen:

$$\begin{aligned} a_1 &= \varphi_2\psi_3 - \varphi_3\psi_2 \\ a_2 &= \varphi_3\psi_1 - \varphi_1\psi_3 \\ a_3 &= \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1, \end{aligned} \tag{6}$$

wo φ_i, ψ_i irgendwelche Funktionen von x sind, so ist:

$$T = \begin{vmatrix} \sum dx_i\varphi_i & \sum dx_i\psi_i \\ \sum x_i\varphi_i & \sum x_i\psi_i \end{vmatrix},$$

wie man leicht durch Multiplikation von T mit der Determinante $(\varphi\,\psi\,\beta)$ erhält. Nimmt man nun $\varphi_i = x_i$ $(i = 1, 2, 3)$, so wird wegen $\sum a_i x_i = 0$ jetzt $\cos a_i = \cos A_i$. Ist endlich ψ eine homogene Funktion von der Ordnung Null, deren partielle Differentialquotienten die ψ_1, ψ_2, ψ_3 sind, so wird:

$$T = -d\psi\sum x_i\varphi_i$$

zugleich steht die Richtung $\cos a_i$ senkrecht auf dem Radius vector ϱ und der Normalen der Kegelfläche $\psi = \text{const.}$ Einer jeden Kurve entspricht vermöge der konformen Abbildung eine zweite derart, daß zwischen den Kosinus, welche die Binormalen mit der zum Radius vector senkrecht stehenden Tangente t derjenigen Kegelfläche, auf der die Kurve liegt, die Beziehung:

$$-\frac{ds}{r}\cos(t, b) = \frac{dS}{R}\cos(t, B)$$

besteht; dabei ist natürlich:

$$\varrho^2 \, dS = ds.$$

Ähnliche Sätze kann man auf dieselbe Weise erhalten. Dabei handelt es sich um die Frage, wann T bis auf einen Faktor ein vollständiges Differential wird.

Setzt man:

$$T = \sum Q_i \, dx_i = (dx\,x\,\varphi),$$

wobei die φ_i beliebige Funktionen von x_1, x_2, x_3 sind, so muß bekanntlich:

$$Q_1\left(\frac{\partial Q_2}{\partial x_3} - \frac{\partial Q_3}{\partial x_2}\right) + Q_2\left(\frac{\partial Q_3}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_3}\right) + Q_3\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_1}\right)$$

identisch verschwinden. Eine einfache Umformung liefert dafür die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \sum x_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} & \sum x_i \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} & \sum x_i \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_i} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

welche identisch bestehen muß. Diese Bedingung ist ersichtlich erfüllt, wenn die drei Funktionen φ homogenen Funktionen gleicher Ordnung von $x_1\, x_2\, x_3$ proportional sind.

Allgemein aber gilt folgender Satz:

Der Ausdruck T kann dann und nur dann auf die Form $\mu\, dV$ gebracht werden, wenn:

$$\varphi_i = x_i A + B \Omega_i$$

ist, wo A, B willkürliche Funktionen der x sind, und die Ω_i willkürliche Funktionen von der Ordnung Null bedeuten. Dies läßt sich auf folgendem Wege zeigen.

Jene Identität verlangt, daß die 3 Funktionen φ der Bedingung:

7) $$\sum x_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = \lambda x_k + \mu \varphi_k, \quad k = 1, 2, 3$$

genügen, wo λ, μ irgendwelche Funktionen der x sind. Diese partielle Differentialgleichung oder vielmehr die folgende:

$$\sum x_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + (\lambda x_k + \mu \varphi_k) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_k} = 0,$$

wobei $\Theta(x_1, x_2, x_3, \varphi_k) = 0$ gesetzt ist, liefert das simultane System:

$$d x_1 : d x_2 : d x_3 : d \varphi_k = x_1 : x_2 : x_3 : \lambda x_k + \mu \varphi_k,$$

von dem zwei Integrale:

8) $$\frac{x_1}{x_3} = c_1, \quad \frac{x_2}{x_3} = c_2$$

bekannt sind. Man findet für $k = 1$:

$$\frac{d \varphi_1}{d x_3} = \frac{\lambda x_1 + \mu \varphi_1}{x_3} = \underline{\lambda} c_1 + \underline{\mu} \frac{\varphi_1}{x_3},$$

wo $\underline{\lambda}$, $\underline{\mu}$ aus λ, μ dadurch hervorgehen, daß man vermöge 8) x_1 und x_2 durch die Konstanten c_1, c_2 und x_3 ersetzt. Integriert man die letzte Gleichung durch eine Quadratur, so folgt:

$$\underline{B} \varphi_1 = c_1 \underline{A} + c_3,$$

mithin ist das Integral von 7) für $k = 1$:

$$B \varphi_1 = \frac{x_1}{x_3} A + \Omega_1 \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right),$$

wo Ω_1 eine willkürliche Funktion ihrer Argumente, und die Konstanten c_1 und c_2 in B und A wieder vermöge 8) zu entfernen sind. Ebenso wird:

$$B\varphi_2 = \frac{x_2}{x_3}A + \Omega_2$$
$$B\varphi_3 = A + \Omega_3,$$

so daß allgemein:

9) $$\varphi_i = x_i\, A_1 + B_1\, \Omega_i$$

gesetzt werden kann. Der Differentialausdruck T kann daher nur dann durch Multiplikation mit einem integrierenden Faktor die Gestalt eines totalen Differentials annehmen, wenn er, abgesehen von einem willkürlichen Faktor, in die Form:

10) $$(d x\, x\, \Omega)$$

gebracht werden kann. Daß dies auch hinreichend ist, geht aus der obigen Betrachtung hervor,[1]) läßt sich aber auch direkt zeigen. Setzt man nämlich:

$$x_1 = x_3\,\xi$$
$$x_2 = x_3\,\eta,$$

so entsteht aus 10), abgesehen von einem Faktor:

$$\begin{vmatrix} d\xi & d\eta & 0 \\ \xi & \eta & 1 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \end{vmatrix}$$

und diese Differentialform läßt sich, da sie nur von zwei Variabeln abhängt, immer mittels eines integrierenden Faktors als vollständiges Differential ansehen.

---

[1]) Man erkennt unmittelbar, daß durch 9) die Integrabilitätsbedingung für T erfüllt ist.

Aus den Gleichungen:

$$\mu(x_2\varphi_3 - x_3\varphi_2) = \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}$$

$$\mu(x_3\varphi_1 - x_1\varphi_3) = \frac{\partial\Omega}{\partial x_2}$$

$$\mu(x_1\varphi_2 - x_2\varphi_1) = \frac{\partial\Omega}{\partial x_3},$$

welche jetzt bestehen müssen, folgt übrigens durch Summation:

$$\sum x_i \frac{\partial\Omega}{\partial x_i} = 0,$$

so daß das Integral von $T = 0$ die Form $\Omega = \text{const}$ erhält, wo Ω eine homogene Funktion der Ordnung Null ist, welche eine Kegelfläche bedeutet. Auch der spezielle Ansatz 6) ist hierin enthalten. Setzt man nämlich in 9):

$$\Omega_1 = \Theta_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_3} - \Theta_3 \frac{\partial\psi}{\partial x_2}$$

$$\Omega_2 = \Theta_3 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \Theta_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_3}$$

$$\Omega_3 = \Theta_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_2} - \Theta_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_1},$$

wobei ψ, Θ_1, Θ_2, Θ_3 homogene Funktionen der Ordnung Null sind, so ist nach 9):

$$\sum \varphi_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i} = 0;$$

und zugleich kann man wieder drei Funktionen f_1, f_2, f_3 willkürlich so annehmen, daß:

$$\sum \varphi_i f_i = 0$$

ist; man hat nur die willkürliche Funktion A_1 der Gleichung:

$$A_1 \sum x_i f_i + B_1 \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0$$

gemäß zu wählen.

Zieht man noch dritte Differentiale bei der Transformation in Betracht, so ergeben sich im allgemeinen keine einfachen Beziehungen mehr. Bei der allgemeinen linearen Transformation ist natürlich:

$$(d\,x\,d^2 x\,d^3 x)$$

eine Invariante, und dies gilt für jede beliebige Zahl von Variabeln. Dies läßt sich z. B. für 3 Variabeln auf folgendem Wege zeigen.

Setzt man:

$$X_i = \sum \frac{a_{ik} x_k + d_i}{t}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$t = \sum a_{4k} x_k + d_4,$$

so wird:

$$d\,X_i = \sum \frac{(a_{ik} - X_i a_{4k})}{t}\, d\,x_k$$

$$d^2 X_i = \sum \frac{(a_{ik} - X_i a_{4k})}{t}\, d^2 x_k - 2\,d\,X_i \frac{d\,t}{t}$$

$$d^3 X_i = \sum \frac{(a_{ik} - X_i a_{4k})}{t}\, d^3 x_k - 3\,d\,X_i \frac{d^2 t}{t}$$

$$- 2\,d^2 X_i \frac{d\,t}{t} + 2\,d\,X_i \frac{d\,t^2}{t^2}$$

und hieraus folgt unmittelbar, indem man die rechts stehenden Differentiale der X_i auf die linke Seite setzt:

$$(d\,X\,d^2 X\,d^3 X) = (d\,x\,d^2 x\,d^3 x)\frac{\Delta}{t^4},$$

wo Δ die Determinante der Koeffizienten der vier linearen Formen:

$$\sum a_{sk}\,x_k + d_s, \quad s = 1, 2, 3, 4$$

ist. Hieraus folgt, daß bei jeder projektiven Transformation einer Kurve die invariante Beziehung:

$$\frac{dS^6}{R^2T} = \frac{ds^6}{r^2\tau}\frac{\Delta}{t^4}$$

besteht, wo dS, ds die Bogenelemente, R, r die Krümmungshalbmesser, T, τ die Torsionsradien bedeuten.

§ 6.

Konforme Raumtransformation einer Fläche.

Ich füge endlich die Formeln für die Transformation einer Fläche vermöge der konformen Raumtransformation:[1])

$$X_i = \frac{x_i}{\varrho^2}, \quad \varrho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

hinzu. Sind die x_i von zwei Parametern u, v abhängig, so erhält man:

$$\frac{\partial X_i}{\partial u} = \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{1}{\varrho^2} - \frac{2x_i}{\varrho^3}\frac{\partial \varrho}{\partial u}$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial v} = \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{1}{\varrho^2} - \frac{2x_i}{\varrho^3}\frac{\partial \varrho}{\partial v}$$

1)
$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{2x_1^2}{\varrho^4}\right) - 2\frac{\partial^2 x_2}{\partial u\,\partial v}\frac{x_1x_2}{\varrho^4} - 2\frac{\partial^2 x_3}{\partial u\,\partial v}\frac{x_1x_3}{\varrho^4}$$

$$- 2\frac{x_1 f}{\varrho^4} - \frac{2}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial v} - \frac{2}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial v}\frac{\partial X_1}{\partial u}$$

nebst ähnlichen Ausdrücken für die anderen zweiten partiellen Differentialquotienten. Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$(X_{uu}\,X_u\,X_v) = \Delta\,(x_{uu}\,x_u\,x_v) - \frac{2e}{\varrho^8}(x\,x_u\,x_v)$$

2)
$$(X_{uv}\,X_u\,X_v) = \Delta\,(x_{uv}\,x_u\,x_v) - \frac{2f}{\varrho^8}(x\,x_u\,x_v)$$

$$(X_{vv}\,X_u\,X_v) = \Delta\,(x_{vv}\,x_u\,x_v) - \frac{2g}{\varrho^8}(x\,x_u\,x_v).$$

---

[1]) Einige der in diesem Paragraphen enthaltenen Betrachtungen sind vermutlich längst bekannt; ohne dieselben würde aber diese Arbeit keinen Abschluß erhalten haben.

Sind p_1, p_2, p_3 die Richtungskosinus der Normalen der ersten Fläche $e, f, g,$ E, F, G die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung derselben,[1] $P_1, P_2, P_3,$ $e_1, f_1, g_1,$ E_1, F_1, G_1 die entsprechenden Größen für die transformierte Fläche, so ist:

$$\varrho^4 e_1 = e, \quad \varrho^4 f_1 = f \quad \varrho^4 g_1 = g$$
$$(p x_u x_v) = \sqrt{eg - f^2}; \quad (P X_u X_v) = \sqrt{e' g' - f'^2} = \frac{1}{\varrho^4}\sqrt{eg - f^2};$$
$$(x x_u x_v) = \sum p_i x_i \sqrt{eg - f^2}.$$

Zur Abkürzung mag:

$$\sigma = \sum p_i x_i$$

gesetzt werden. Nun erhält man:

$$(x x_u x_v)^2 = \varrho^2 (eg - f^2 - t),$$

wo:

$$t = e\varrho_v^2 - f\,2\,\varrho_u \varrho_v + g\varrho_u^2; \tag{3}$$

daher wird:

$$\sigma = \varrho\sqrt{1 - \Delta(\varrho)},$$

wo Δ der erste Differentialparameter ist; σ ist jedoch mit dem Vorzeichen von $\sum p_i x_i$ zu nehmen. Man hat nun aus 2):

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{E}{\varrho^2} - \frac{2e\sigma}{\varrho^4} \\ F_1 &= -\frac{F}{\varrho^2} - \frac{2f\sigma}{\varrho^4} \\ G_1 &= -\frac{G}{\varrho^2} - \frac{2g\sigma}{\varrho^4}. \end{aligned} \tag{4}$$

Ich bestimme ferner die Richtungskosinus der Normale der transformierten Fläche. Für Größen Q_1, Q_2, Q_3, die nur

[1]) Dabei ist:
$$p_1\sqrt{eg - f^2} = \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial u}; \quad E = \Sigma p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} \text{ etc.} \ldots$$

um einen positiven Faktor von den P_1, P_2, P_3 verschieden sind, erhält man leicht aus 1) die Gleichungen:

$$\sum Q_i x_i = \sigma \sqrt{eg - f^2}$$

$$\sum Q_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 2\frac{\varrho_u}{\varrho} \sigma \sqrt{eg - f^2}$$

$$\sum Q_i \frac{\partial x_i}{\partial v} = 2\frac{\varrho_v}{\varrho} \sigma \sqrt{eg - f^2},$$

und durch deren Auflösung:

$$Q_i \sqrt{eg - f^2} = -\frac{2\sigma}{\varrho}\left\{\varrho_u\left(f\frac{\partial x_i}{\partial v} - g\frac{\partial x_i}{\partial u}\right) - \varrho_v\left(e\frac{\partial x_i}{\partial v} - f\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)\right\} + p_i(eg - f^2 - 2t);$$

hieraus folgt:

$$Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = (eg - f^2),$$

mithin:

$$5)\quad (eg - f^2) P_i = -\frac{2\sigma}{\varrho}\left\{\varrho_u\left(f\frac{\partial x_i}{\partial v} - g\frac{\partial x_i}{\partial u}\right) - \varrho_v\left(e\frac{\partial x_i}{\partial v} - f\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)\right\} + p_i(eg - f^2 - 2t).$$

Hiermit sind die Kosinus der Normale der transformierten Fläche in der Form:

$$P_i = \varkappa p_i + \lambda\frac{\partial x_i}{\partial u} + \mu\frac{\partial x_i}{\partial v}$$

dargestellt, welche eine unmittelbare Beziehung der Lage derselben gegen die Normale der ursprünglichen Fläche liefert. Für den Winkel ω zwischen den beiden Normalen folgt nach 5):

$$\cos\omega = 1 - 2\Delta(\varrho);$$

die Kurven $\Delta(\varrho) = \text{const}$ sind daher auf der gegebenen Fläche dadurch ausgezeichnet, daß der Winkel entsprechender Normalen konstant bleibt.

Auch folgt aus 5):

$$\sum P_i x_i = \sum p_i x_i,$$

oder:

$$\sum P_i X_i = \sum \frac{p_i x_i}{\varrho^2},$$

wie man übrigens auch unmittelbar aus 4) finden kann, wenn man die transformierte Fläche zur ursprünglichen macht; diese Formel zeigt, daß der Kosinus des Winkels der Flächennormalen mit dem Radius vector bei der Transformation ungeändert bleibt, wie übrigens zu erwarten war.

Es ergibt sich ferner aus 4):

$$\frac{E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2}{e_1 du^2 + 2f_1 du dv + g_1 dv^2} = -\varrho^2 \frac{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)}{e du^2 + 2f du dv + g dv^2} - 2\sigma.$$

Bezeichnet man nun den Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes für irgend eine auf der ursprünglichen Fläche gemessene Richtung durch r, die entsprechende durch R, so folgt:

$$\frac{1}{R} = -\frac{\varrho^2}{r} - 2\sigma.$$

Insbesondere wird aber für irgend zwei von demselben Punkte ausgehende Richtungen:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} = -\varrho^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Man kann also sagen: Die Differenz der Krümmungen zweier zu einem Punkt der Fläche gehörigen Normalschnitte bleibt bis auf den Faktor $-\varrho^2$ durch die Transformation ungeändert.

Ist $\sigma = 0$, so erhält man:

$$\frac{1}{R} = -\frac{\varrho^2}{r}$$

d. h. die **Krümmungen der Normalschnitte bleiben bis auf den Vektor** $-\varrho^2$ **ungeändert in allen Punkten, in denen die Fläche von ihrem zum Zentrum der Inversion gehörigen Tangentenkegel berührt wird.**

Ist dagegen $r = \infty$, also die Richtung auf der gegebenen Fläche die einer **Haupttangente**, so wird:

$$\frac{1}{R} = -2\sigma$$

oder: **Bei der konformen Transformation gehören zu den beiden Haupttangentenrichtungen eines Flächenpunktes Normalschnitte mit gleicher Krümmung** -2σ.[1])

Auch die Formeln:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = -\varrho^2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - 4\sigma$$

$$\frac{1}{R R_1} = \frac{\varrho^4}{r r_1} + 2\sigma\varrho^2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) + 4\sigma^2$$

welche sich auf die mittlere Krümmung und das Krümmungsmaß beziehen, mögen erwähnt werden, deren Verwendung für Minimalflächen ersichtlich ist.

Endlich gilt für beliebige Größen $a_1\, a_2\, a_3$ die **invariante** Beziehung:

$$\begin{vmatrix} E' & F' & G' \\ e' & f' & g' \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\varrho}\,\sigma \begin{vmatrix} E & F & G \\ e & f & g \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Bedeuten daher a_1, a_2, a_3 homogene Differentialformen gleicher Ordnung in du, dv, so hat man den Satz:

Das System der Kurven:

$$\begin{vmatrix} E & F & G \\ e & f & g \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

[1]) Man vgl. die konforme Transformation der Regelflächen, insbesondere die der Flächen zweiten Grades, u. s. w.

ist invariant bei der konformen Transformation. Ein ganz spezieller Fall davon ist die Invarianz der Krümmungslinien, und zwischen den Radien T, T_1 der geodätischen Torsion einer Kurve und ihrer Transformierten besteht also allgemein die Beziehung:

$$\frac{1}{T_1} = -\varrho^2 \frac{1}{T}.$$