Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVII. Jahrgang 1907.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1908.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über die Bewegung der Elektronen.

Von **A. Sommerfeld.**

(Eingelaufen 8. Juni.)

Obwohl die unter gleichem Titel erschienene Arbeit von Herrn Lindemann[1]) sich nicht allein gegen meine Untersuchungen über Elektronentheorie, sondern in gleicher Weise gegen diejenigen von Heaviside, Lorentz, Wiechert, W. Wien, J. J. Thomson, Abraham, Kaufmann etc. wendet, so bin ich wohl in erster Linie verpflichtet, darauf zu antworten, da Herr Lindemann sich vornehmlich der von mir angegebenen[2]) allgemeinen Methoden zur Berechnung des Feldes und der Kraft eines beliebig bewegten Elektrons bedient. Die Gründe, weshalb H. Lindemann trotzdem vielfach zu Ergebnissen gelangt, die von den meinigen und denen aller anderen Forscher abweichen, werde ich im folgenden besprechen.

Da Herr Lindemann in § 16 seiner Arbeit selbst eine Zusammenstellung der zwischen uns obwaltenden Differenzen gibt, werde ich an diese Zusammenstellung anknüpfen und die einzelnen Punkte der Reihe nach durchgehen.

I. Die Berechnung des skalaren Potentiales.

Der Unterschied zwischen unserer beiderseitigen Auffassung beginnt, wie Herr Lindemann p. 322 bemerkt, bei seiner Gl. (25). In (25) handelt es sich darum, die drei Kon-

---

[1]) Abhandlungen der Bayer. Akademie II. Kl., Bd. XXIII, II. Abt.

[2]) Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1904, Heft 2 und 5. Die wesentlich vereinfachte Methode, die ich in den Proceedings der Amsterdamer Akademie, November 1904, entwickelt habe, hat Herr Lindemann nur gestreift.

stanten A, B, t_0 gewissen Anfangsbedingungen anzupassen. Herr Lindemann setzt (p. 242)

$$t_0 = 0, \qquad A = B = 0; \tag{1}$$

ich behaupte (p. 104 der Note I)

$$t_0 = -\infty, \quad A = B = 0. \tag{2}$$

Herr Lindemann begründet (p. 242) seine Wahl der Konstanten wie folgt: „Das Elektron soll vor der Zeit $t = 0$ noch in Ruhe sein, und die Bewegung soll im Momente $t = 0$ beginnen. Wir müssen also annehmen, daß die Gleichungen[1])

$$\varphi' = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

für $t = 0$ erfüllt seien.“ Kurz vorher bemerkt er, daß φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für $t = 0$ verschwinden, sobald die entsprechenden Ausdrücke φ' und $\frac{\partial \varphi'}{\partial t}$ für $t = 0$ verschwinden. Herr Lindemann verlangt also, daß im Ruhezustande nicht nur $\partial \varphi / \partial t$ sondern auch φ verschwinde. Andererseits bemerkt er im Eingange des § 1: „Im ruhenden Zustande geht das skalare Potential in das elektrostatische, das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ in das magnetische Potential[2]) über.“ Aber das elektrostatische Potential einer gleichmäßig geladenen Kugel ist keineswegs Null, sondern hat an allen Stellen des Raumes den aus der Potentialtheorie bekannten Wert. Der von Herrn Lindemann zu Grunde gelegte Anfangszustand $\varphi = 0$ entspricht also nicht den physikalischen Bedingungen des Problems.

---

[1]) φ' bedeutet ein Hilfspotential, aus dem sich das gesuchte Potential durch Integration berechnet.

[2]) Der zweite Teil dieses Satzes ist mir unverständlich; das Vektorpotential geht doch bei einem ruhenden Elektron in Null über, während von einem magnetischen Potential hier überhaupt nicht die Rede sein kann; der erste Teil des Satzes ist natürlich richtig.

In der Tat genügt die definitive Formel (34) von Herrn Lindemann.

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c}{2\,\pi^2\,a^3}\int_0^t \frac{S}{R}\,d\tau \tag{4}$$

der unphysikalischen Anfangsbedingung $\varphi = 0$ für $t = 0$. Dagegen lautet die entsprechende Formel bei mir (siehe die Gl. (18), (19) meiner Note I), wenn ich mich in der Definition der Größe S des leichteren Vergleichs wegen an Herrn Lindemann anschließe

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c}{2\,\pi^2\,a^3}\int_0^\infty \frac{S}{R}\,d\tau. \tag{5}$$

Ich habe zu zeigen, daß diese Formel für $t = 0$ die richtige Verteilung des elektrostatischen Potentials ergibt, wenn man mit Herrn Lindemann annimmt, daß das Elektron bis zur Zeit $t = 0$ in Ruhe war.

a bedeutet den Radius des Elektrons, τ die rückwärts gerechnete Zeit, R den Abstand des „Aufpunktes", für den φ berechnet werden soll, von den früheren Lagen des Mittelpunktes des Elektrons. Da aber das Elektron für $t < 0$ ruhen soll, sind die früheren Lagen des Mittelpunktes mit seiner Lage zur Zeit $t = 0$, d. h. mit dem Koordinatenanfangspunkte, identisch und es wird R gleich dem Abstande r des Aufpunktes von diesem letzteren Punkte, also unabhängig von τ. S bedeutet (siehe meine Gl. (19) oder diejenige von Lindemann (40), (41)) einen der folgenden Ausdrücke:

$S_1 = \frac{\pi}{8}(a^2 - (c\,\tau - r)^2)$, wenn Dreieck $a, c\tau, r$ möglich,

$S_2 = \frac{\pi}{2}\,c\,\tau\,r$, wenn Dreieck $a, c\tau, r$ unmöglich, wobei $a > c\tau$ und $a > r$,

$S_3 = 0$, wenn Dreieck $a, c\tau, r$ unmöglich, wobei aber $a < c\tau$ oder $a < r$.

Wir betrachten zunächst einen äußeren Punkt $r > a$. Hier gilt, wenn $c\tau > r + a$ oder $< r - a$ der Wert $S = S_3 = 0$, wenn dagegen $r - a < c\tau < r + a$ der Wert $S = S_1$ also nach (5):

$$\varphi = \frac{3\varepsilon c}{16\pi a^3 r}\int\limits_{(r-a)/c}^{(r+a)/c}(a^2 - (c\tau - r)^2)\,d\tau$$

oder mit der Substitution $\sigma = c\tau - r$

$$\varphi = \frac{3\varepsilon}{16\pi a^3 r}\int\limits_{-a}^{+a}(a^2 - \sigma^2)\,d\sigma = \frac{\varepsilon}{4\pi r}. \tag{6}$$

Für einen inneren Punkt $r < a$ haben wir, wenn $c\tau > a + r$ wieder $S = S_3 = 0$, wenn dagegen $c\tau < a - r$, gilt jetzt $S = S_2$ und, wenn $a - r < c\tau < a + r$, wie vorher $S = S_1$. Mithin liefert (5) jetzt:

$$\varphi = \frac{3\varepsilon c}{16\pi a^3 r}\left\{\int\limits_{(a-r)/c}^{(a+r)/c}(a^2 - (c\tau - r)^2)\,d\tau + 4r\int\limits_{0}^{(a-r)/c}c\tau\,d\tau\right\}.$$

Die Ausrechnung gibt:

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{8\pi a^3}(3a^2 - r^2). \tag{6'}$$

Die Ausdrücke (6) und (6′) sind die wohlbekannten Werte des Potentials einer gleichmäßig mit ε geladenen Kugel vom Radius a in rationellen Einheiten, deren sich auch Herr Lindemann bedient, für einen äußeren und inneren Punkt.

Meine Formel (5) gibt also den elektrostatischen Anfangszustand des Potentiales richtig wieder, den wir vorschreiben müssen, wenn wir uns das Elektron bis zur Zeit $t = 0$ in Ruhe denken,[1]) dagegen entspricht die Lindemannsche Formel (4) dem unphysikalischen Anfangszustande $\varphi = 0$.

[1]) Ich brauche kaum zu erwähnen, daß meine Formel ganz allgemein gilt, nicht nur bei dem hier durchgerechneten Anfangszustande. Letzteren habe ich hier nur im Anschluß an Lindemann als Beispiel gewählt.

2. Die ergänzende Betrachtung über den Anfangszustand in § 15 der Lindemannschen Arbeit.

Im Eingange des § 15 deutet Herr Lindemann selbst das Bedenkliche der Anfangsbedingung $\varphi = 0$ mit den Worten an: Wir haben angenommen, daß das elektrische Teilchen „zur Zeit $t = 0$ seine Bewegung beginnt und gleichzeitig seine elektrische Ladung empfängt“. Eine solche plötzliche Erschaffung des Elektrons, wie sie von Herrn Lindemann hiernach vorgestellt wird, ist aber gewiß auszuschließen, da nach keiner elektrodynamischen Theorie im Äther gebettete Ladungen jemals entstehen oder verschwinden können.

Die folgenden ergänzenden Betrachtungen, durch welche die Wirkung des ursprünglich vorhandenen Feldes des Elektrons berücksichtigt werden sollen, verfehlen nun aber ihr Ziel, wie ich der Kürze halber sogleich an dem Schlußergebnis zeigen will.

Herr Lindemann modifiziert hier seine ursprüngliche Formel (4) in folgender Weise: (s. Gl. (197) und (203)):

$$\varphi = \frac{3 \varepsilon c}{2 \pi^2 a^3} \int_0^{t+t_0} \frac{S}{R} \, d\tau \tag{4'}$$

mit der Maßgabe,[1]) daß der Zeitpunkt t_0 bei nachfolgender stationärer Bewegung gleich $2a/(c-v)$ gewählt werden solle. Nach den Bemerkungen unter 1, 2, 3 pag. 311 von Herrn Lindemann soll (4') für $t = 0$ in das elektrostatische Potential der ruhenden Ladung[2]) übergehen. Dem ist aber nicht so, wie man im Anschluß an meine vorstehende, unter 1 mitgeteilte Rechnung leicht prüft.

Ich zeige dieses z. B. für das Äußere des Elektrons $r > a$.

---

[1]) Daß die Größe t_0 und damit die Potentialverteilung zur Zeit $t = 0$ von dem Charakter der nachfolgenden Bewegung abhängen soll, ist an sich kaum verständlich.

[2]) Daß sich Herr Lindemann vor $t = 0$ das Elektron dauernd in Ruhe denkt, geht aus pag. 315, Z. 16 v. o. hervor.

Von den drei Werten S_1, S_2, S_3 kommen hier nur S_1 und S_3 in Betracht. Man hat dabei die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

1. $c t_0 < r - a \ldots \varphi = 0$,

2. $r - a < c t_0 < r + a \ldots \varphi = \dfrac{3 \varepsilon c}{16 \pi a^3 r} \displaystyle\int\limits_{(r-a)/c}^{t_0} (a^2 - (c\tau - r)^2)\, d\tau$,

3. $r + a < c t_0 \ldots \varphi = \dfrac{3 \varepsilon c}{16 \pi a^3 r} \displaystyle\int\limits_{(r-a)/c}^{(r+a)/c} (a^2 - (c\tau - r)^2)\, d\tau = \dfrac{\varepsilon}{4 \pi r}$.

Nur im dritten Falle, d. h. nur im Innern einer Kugel vom Radius

$$r = \frac{c + v}{c - v}\, a$$

ergibt sich also der richtige Wert des elektrostatischen Potentials. Im ersten Falle, d. h. außerhalb einer Kugel vom Radius

$$r = \left(\frac{c + v}{c - v} + 2\right) a$$

dagegen wird $\varphi = 0$. Ebensowenig stimmt das Feld im zweiten Falle, d. h. in der übrig bleibenden Kugelschale von der Dicke $2a$ mit dem elektrostatischen überein.

Andererseits sahen wir oben unter **1**, daß sich die richtige elektrostatische Potentialverteilung ergibt, wenn wir in der Formel (4′) $t_0 = \infty$ wählen. Dann aber wird diese Gleichung mit meiner Gl. (5) identisch.

Die in Rede stehenden ergänzenden Betrachtungen hätten also bei richtiger Durchführung auf meine Formeln führen müssen; in der vorliegenden Fassung sind sie in sich widersprechend.

3. Zahlenbeispiel.

Es handelt sich jetzt um die Ausdrücke, zu denen Herr Lindemann für die auf eine bewegte Ladung wirkende Kraft $\mathfrak{F}$ gelangt. Ich beschränke mich dabei auf den einfachsten Fall der stationären Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit v. Nach pag. 312 unten gilt von Beginn der Bewegung ab die Gl. (169) oder die daraus folgende Näherungsformel[1]) (169a)

$$\mathfrak{F} = \frac{3\,\varepsilon^2}{4\,\pi\,a^2}\left(-\frac{29}{16}\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} - \cdots\right). \tag{7}$$

Aus ihr würde folgen:

1. Die stationäre Bewegung ist nicht kräftefrei, sondern stets gehemmt.

2. Die Hemmung ist um so größer, je kleiner die Geschwindigkeit ist, weil β im Nenner vorkommt.

3. Sie ist bereits bei Unterlichtgeschwindigkeit von derjenigen Größenordnung, wie ich sie bei Überlichtgeschwindigkeit gefunden habe, nämlich von der Größe derjenigen elektrostatischen Kraft, die zwei unmittelbar aneinander anliegende Elektronen aufeinander ausüben würden.

4. Die Kraft überschreitet jede angebbare Größe, wenn man der Geschwindigkeit einen konstanten, der Null hinreichend benachbarten Wert gibt.

Zur numerischen Verdeutlichung wird es gut sein, die für Elektronen geltenden Daten ε, a durch experimentell realisierbare Größen zu ersetzen. Nehmen wir z. B. $a = 1$ cm und diejenige Ladung ε, welche einer Spannung von 1 cm Schlagweite entspricht. Diese Spannung beträgt rund 100 elektrostatische Einheiten; ebenso groß ist, da die Kapazität gleich 1, die Ladung in gewöhnlichen elektrostatischen Einheiten; unser ε (in rationellen Einheiten gemessen) wird daher gleich $\sqrt{4\,\pi}\cdot 100$. Die Geschwindigkeit v sei etwa 30 m/sec. (Schnellzugsgeschwindigkeit). Dann haben wir $\beta = 10^{-7}$ und nach (7)

$$\mathfrak{F} = -3\cdot 10^4 \cdot \frac{29}{16}\cdot 10^{14} = 5{,}5\cdot 10^{18} \text{ Dynen}$$
$$= 5{,}6\cdot 10^{12} \text{ kg-Gewicht.}$$

---

[1]) Ich schreibe wie üblich β statt des Lindemannschen $\omega = \frac{v}{c}$.

Die Arbeitsleistung wäre

$$\mathfrak{F} v = 168 \cdot 10^{12} \frac{\text{kg m}}{\text{sec}} = 2{,}25 \cdot 10^{12}\,\text{PS},$$

also so groß, daß kein Motor der Technik sie zu liefern imstande wäre. Wünscht man die Kugel langsamer zu bewegen, so würde die erforderliche Leistung noch größer; z. B. betrüge sie bei 3 cm/sec.

$$2{,}25 \cdot 10^{16}\,\text{PS}.$$

Der Grund für diese befremdenden Resultate[1]) liegt teils darin, daß nach 1 und 2 der Anfangszustand in der Lindemann'schen Theorie nicht richtig zum Ausdruck kommt, teils in dem was folgt:

4. Die Ausrechnung von φ in § 6 der Lindemannschen Arbeit.

Wir wollen uns vorübergehend auf den Boden der (von uns beanstandeten) Formel für φ (s. o. Gl. (4)) stellen und die Ausrechnung derselben in einem speziellen Falle kontrollieren. Der denkbar einfachste Spezialfall ist der, wo das Elektron auch nach der Zeit $t = 0$ dauernd in Ruhe bleibt. Übrigens aber wollen wir, da die physikalische Bedeutung durch den Schaffungsakt im Zeitpunkte $t = 0$ ohnehin illusorisch wird, unser Beispiel rein analytisch definieren. Es handle sich also um die Auswertung des obigen Integrales (4) für den Fall, daß $R = r$ von τ unabhängig ist, also um die Berechnung von

$$\varphi = \frac{3 \varepsilon c}{2 \pi^2 a^3 r} \int_0^t S \, d\tau. \tag{4''}$$

Diese Auswertung ist äußerst einfach und von uns für den Fall $r > a$, auf den wir uns auch jetzt beschränken können, schon unter 2 bewirkt. In der Tat gaben wir dort die Aus-

[1]) Wie mir Herr Lindemann freundlichst mitteilt, hat er bei einer Revision seiner Formeln die Irrtümlichkeit des Ausdruckes (7) für $\mathfrak{F}$ inzwischen selbst festgestellt. (Zusatz bei der Korrektur.)

rechnung des Integrales (4') für $t = 0$ und $R = r$; diese ist mit der Ausrechnung von (4'') identisch, bis auf die Bezeichnung t_0 statt t. Wir können also unsere Formeln 1, 2, 3 von pag. 160 direkt übernehmen, wenn wir darin t_0 durch t ersetzen. Sie lauten dann:

1. $c\,t < r - a \ldots \varphi = 0,$

2. $r - a < c\,t < r + a \ldots \varphi = \dfrac{3\,\varepsilon\,c}{16\,\pi\,a^3\,r}\displaystyle\int\limits_{(r-a)/c}^{t}(a^2 - (c\,\tau - r)^2)\,d\,\tau,$

3. $r + a < c\,t \ldots \varphi = \dfrac{\varepsilon}{4\,\pi\,r}.$

Vergleichen wir damit die Lindemannschen Angaben von pag. 253 und 254. Die dort erklärten Zeitpunkte $\tau', \tau'' \ldots$ werden in unserem Spezialfalle $R = r$:

$$\tau' = \frac{a - r}{c}, \quad \tau'' = \frac{r - a}{c}, \quad \tau''' = \frac{r + a}{c}, \quad \tau^{\mathrm{IV}} = \frac{r - a}{c}.\text{[1]}$$

Da τ' unter der Annahme $r > a$ negativ wird, käme der Fall 1 (pag. 253 unten und pag. 254 oben) in Fortfall; die Integration würde mit $\tau = 0$ im Falle 2 beginnen und die Lindemannschen Formeln[2]) ergeben:

$$t < \tau'', \text{ d. h. } c\,t < r - a \ldots \varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c}{16\,\pi\,a^3\,r}\int\limits_0^t (a^2 - (c\,\tau - r)^2)\,d\,\tau,$$

$$\tau'' < t < \tau''', \text{ d. h. } r - a < c\,t < r + a \ldots$$

$$\ldots \varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c}{16\,\pi\,a^3\,r}\int\limits_0^{(r-a)/c}(a^2 - (c\,\tau - r)^2)\,d\,\tau.$$

---

[1]) Die Definitionsgleichung für τ^{IV} auf pag. 254 liefert $(a - r)/c$. Aus dem Zusammenhange scheint aber hervorzugehen, daß hier ein Druckfehler vorliegt und diejenige Gleichung gemeint ist, aus der $(r - a)/c$ folgen würde.

[2]) Bei Lindemann ist versehentlich 8π statt 16π im Nenner geschrieben, was ich im Text korrigiert habe.

Schon diese Formeln stimmen, wie man sieht, keineswegs mit den vorangestellten Werten unter 1 und 2 überein. Für das Weitere versagen aber die fraglichen Formeln vollständig. Denn es erweist sich $\tau^{IV} < \tau'''$ und es fehlt eine Vorschrift, wie die Formeln (53a) und (53b) in diesem Falle aufzufassen sind.

Jedenfalls scheint mir dieses einfache Beispiel zu zeigen, daß die Fallunterscheidungen bei Lindemann pag. 254 unzulänglich und die Formeln (52), (53), auf denen alles Weitere beruht, irrig sind.

5. Differentiation nach der oberen Grenze.

Ich werde jetzt nur noch auf diejenigen Punkte eingehen, die Herr Lindemann in § 16 zusammenstellt und in denen er meine eigene Darstellung für irrtümlich hält. Das Zeichen ∞ in der oberen Grenze von (5) ist bei mir aus $\omega + t$ entstanden, wobei ω ins Unendliche rücken soll. Herr Lindemann bemerkt pag. 322 unten, ich hätte bei der Berechnung der Kraft $\mathfrak{F}$ versäumt, in der oberen Grenze nach t zu differenzieren, weil ich dieselbe als konstant (gleich ∞) angenommen hätte. Aber der Integrand verschwindet an der oberen Grenze, wie es ja auch für die Konvergenz des Integrals erforderlich ist, und nicht nur an dieser Grenze, sondern bereits von einem endlichen Werte der Integrationsvariabeln ab. Infolgedessen liefert die Differentiation nach t in der oberen Grenze keinen Beitrag.

Die diesbezüglichen Argumente Lindemanns sind folgende: Die unendliche Grenze $\omega + t$ werde im Laufe der Entwickelung bei mir durch eine endliche Grenze ersetzt (nämlich den soeben genannten Wert der Integrationsvariabeln, von dem ab der Integrand verschwindet); diese endliche Grenze sei dann im allgemeinen eine Funktion von t, was bei der Differentiation berücksichtigt werden müsse. Aber eben jene Grenze ist ja dadurch definiert, daß der Integrand hier zu verschwinden beginnt. Infolgedessen wird auch bei dieser Auffassung der

Beitrag, der aus der Differentiation der oberen Grenze entsteht, gleich Null.

Der Grund, weshalb beide Auffassungen zu demselben Ergebnis führen müssen, ist die Stetigkeit der Größe S, als Funktion der Integrationsvariabeln τ. (Die Differentialquotienten von S nach τ setzen sich dagegen natürlich unstetig aneinander.) Man betrachte die oben angegebenen Werte S_1, S_2, S_3, in denen nur, da es sich jetzt nicht wie oben um ein ruhendes Elektron handelt, r durch R zu ersetzen ist. Die fragliche obere Grenze, für die das Dreieck $(a, c\tau, R)$ unmöglich wird, ist $c\tau = R + a$; für diesen Wert wird $S_1 = 0$, was sich stetig an den Wert $S_3 = 0$ anschließt; dasselbe gilt, wenn $R > a$, für die untere Grenze der Dreiecksmöglichkeit $c\tau = R - a$. Ist aber $R < a$, so lautet diese letztere Grenze $c\tau = a - R$; jetzt wird

$$S_1 = \frac{\pi}{8}(a^2 - (a - 2R)^2) = \frac{\pi}{8}(4aR - 4R^2)$$

$$= \frac{\pi}{2}R(a - R) = \frac{\pi}{2}c\tau R$$

und geht somit stetig in den oben angegebenen Wert S_2 über.[1])

Übrigens hat Herr Lindemann an einer anderen Stelle seiner Arbeit (pag. 269 unten) diese Stetigkeit selbst betont.

Das stetige Verhalten der Ausdrücke S ist namentlich auch für den folgenden Einwand zu beachten.

6. Vertauschung von Differentiation und Integration.

Ich will mich hier an die Betrachtung des von Herrn Lindemann vorgeschlagenen Beispiels anschließen. Es handelt sich dabei um die Vergleichung der beiden folgenden Integrale (pag. 324):

[1]) Dagegen sind die von Herrn Lindemann angegebenen Grenzwerte, welche diese Stetigkeit vermissen lassen, Gl. (40a) und (41a) pag. 247 nicht korrekt; die hier untergelaufenen Rechenfehler bestehen bei (40a) in der Ausrechnung von $\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2$, bei (41a) in der Ausrechnung von $\delta_1 - \delta_3 + \delta_4$.

$$L = \int_0^a dx \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(x + a\,\xi)\int_0^\infty \frac{\sin \xi s \cos x s}{s}\, d s\right]$$

und

$$L' = \frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^a \left[(x + a\,\xi)\int_0^\infty \frac{\sin \xi s \cos x s}{s}\, d s\right] d x.$$

Letzteres hat den Wert

$$L' = (1 + 2\,a)\frac{\pi}{2}\,\xi,$$

ersteres ergibt nach Lindemann

$$L = \frac{\pi}{2}\,\xi\, a.$$

Das Beispiel ist insofern unglücklich gewählt, als L ohne weiteres gar keinen Sinn hat, da das Integral nach s in L für $x = \xi$ von $\pi/2$ auf 0 springt. Es müßte also diese Stelle ausdrücklich von der Integration ausgeschlossen werden.

Herr Lindemann bemerkt pag. 325 oben: Nur für $a = -1$ geben beide Integrale denselben Wert. (Wir können hinzufügen: Nur in diesem Falle wird auch der Sprung des Integrals nach s durch den Faktor $x + a\,\xi = x - \xi$ aufgehoben und der nach ξ zu differenzierende Ausdruck in x und ξ einzeln stetig.) Gerade dieser Fall liegt aber an der beanstandeten Stelle meiner Elektronenarbeit vor. Handelt es sich doch hier um die Größe $\int\int\int \frac{S}{R}\, d x\, d y\, d z$ (vgl. pag. 323 bei Lindemann), welche ebenso wie S eine stetige Funktion der Variabeln ξ, nach der differenziert wird, sowie der Variabeln τ ist, nach der integriert wird (vgl. den Schluß der vorangehenden Nummer). Das Lindemannsche Beispiel spricht also nicht gegen, sondern für mich.

Durch die Stetigkeit von S erledigt sich auch der Einwand, den Herr Lindemann durch die letzte Formel von pag. 323 begründet. Hier wird das Gebiet, in dem S verschwindet, unterschieden von demjenigen Gebiet (Volumenelement $d'\omega$), in dem S nicht verschwindet. Wegen der Stetigkeit verschwindet aber S auch noch auf der Begrenzung dieses Gebietes. Differenzieren wir nun $\iiint \frac{S}{R}\, d'\omega$, wie es der erste Term der [ ] in der fraglichen Gleichung verlangt, nach ξ in den Grenzen des Raumintegrals, so ist nach der Differentiation derjenige Wert von S einzutragen, der auf der Begrenzung statthat, d. h. eben der Wert $S = 0$. Damit verschwindet aber der soeben genannte Term, der den Unterschied der von Lindemann mit K und K' bezeichneten Integrale bedingen würde.

7. Über die Berechnung des bestimmten Integrales Ω.

Das Lindemannsche Integral Ω, bei mir mit (B) bezeichnet,[1]) ist folgendermaßen definiert:

$$\Omega = \int_0^a S\beta\, d\beta.$$

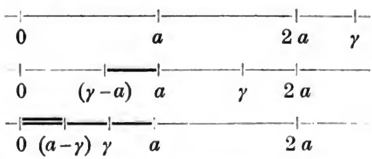
Für S kommen wieder die drei Werte S_1, S_2, S_3 in Betracht, in denen wir, um an die Lindemannschen Bezeichnungen anzuknüpfen, $c\tau$ durch β und r durch γ ersetzen wollen.

Es sind hier sowohl nach Lindemann wie nach meiner früheren Arbeit zunächst drei Fälle zu unterscheiden, welche ich durch die folgenden drei Figuren verdeutliche:

1. $\gamma > 2a\cdot$

2. $2a > \gamma > a\cdot$

3. $a > \gamma\cdot$



1. Da β bei der Integration auf die Werte $0 < \beta < a$ beschränkt ist, ist in diesem ersten Falle dauernd $\gamma > a + \beta$,

[1]) Vgl. meine Note II in den Göttinger Nachrichten, pag. 390.

das Dreieck (a, β, γ) also unmöglich. Da außerdem a nicht die größte dieser drei Zahlen darstellt, so gilt für das ganze Integrationsgebiet $S = S_3 = 0$ und es wird

$$\Omega = 0 \tag{7}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (232) von Herrn Lindemann.

2. Für diejenigen Werte von β, welche kleiner als $\gamma - a$ sind, ist das Dreieck (a, β, γ) wieder unmöglich und $S = S_3 = 0$. Es sind also bei der Integration nur die Werte $\gamma - a < \beta < a$ zu berücksichtigen, die in der Figur durch eine verstärkte Linie markiert sind. Hier gilt, da das Dreieck (a, β, γ) möglich wird, $S = S_1$ und es wird

$$\Omega = \frac{\pi}{8}\int\limits_{\gamma - a}^{a}(a^2 - (\beta - \gamma)^2)\,\beta\, d\beta. \tag{8}$$

Herr Lindemann schreibt (s. seine Gl. (233)) in der unteren Grenze $\gamma/2$ statt $\gamma - a$. Dies ist nach Fig. 2 offenbar ein Irrtum. Aus (8) ergibt sich der von mir früher gefundene Wert

$$\Omega = \frac{\pi}{8}\left(\frac{4}{3}a^3\gamma - a^2\gamma^2 + \frac{\gamma^4}{12}\right) \tag{9}$$

statt des von Lindemann angegebenen:[1])

$$\Omega = \frac{\pi}{8}\left(\frac{a^4}{4} + \frac{2}{3}a^3\gamma - \frac{5}{8}a^2\gamma^2 - \frac{5}{64}\gamma^4\right). \tag{10}$$

Eine Probe auf die Richtigkeit meines und die Unrichtigkeit des Lindemannschen Ausdruckes liefert der besondere Wert $\gamma = 2a$, der die Grenze des Falles 1 und 2 bildet.

Hierfür ergibt meine Formel (9) den Wert

$$\Omega = \frac{\pi}{8}a^4\left(\frac{8}{3} - 4 + \frac{4}{3}\right) = 0,$$

der sich stetig an (7) anschließt, die Lindemannsche Formel (10) dagegen

---

[1]) Herr Lindemann schreibt versehentlich $+\frac{5}{64}\gamma^4$ statt $-\frac{5}{64}\gamma^4$.

$$\Omega = \frac{\pi a^4}{8}\left(\frac{1}{4}+\frac{4}{3}-\frac{5}{2}-\frac{5}{4}\right) = -\frac{13\,\pi a^4}{48};$$

dies ist unmöglich, da Ω sicher stetig von γ abhängt.

3. Im dritten Falle ist das Dreieck (a, β, γ) unmöglich, solange $\beta < a - \gamma$. Da aber jetzt a größer als β und γ, gilt nicht mehr $S = S_3 = 0$, sondern $S = S_2 = \frac{\pi}{2}\beta\gamma$. Dieses Intervall ist in Fig. 3 durch einen Doppelstrich hervorgehoben. In dem Rest des Integrationsintervalles $a - \gamma < \beta < a$, der wieder durch einen einfachen Strich markiert ist, wird die Dreiecksbildung möglich und daher $S = S_1$. Der Wert von Ω lautet daher jetzt:

$$\Omega = \frac{\pi}{2}\int_0^{a-\gamma}\beta^2\gamma\,d\beta + \frac{\pi}{8}\int_{a-\gamma}^{a}(a^2-(\beta-\gamma)^2)\,\beta\,d\beta. \tag{11}$$

Herr Lindemann gibt statt dessen den folgenden Wert an:

$$\begin{aligned}\Omega = {} & \frac{\pi}{8}\int_{\gamma/2}^{\gamma}(a^2-(\beta-\gamma)^2)\,\beta\,d\beta + \frac{\pi}{2}\int_{\gamma}^{a-\gamma}\beta^2\gamma\,d\beta \\ & + \frac{\pi}{8}\int_{a-\gamma}^{a}(a^2-(\beta-\gamma)^2)\,\beta\,d\beta.\end{aligned} \tag{12}$$

Der Vergleich mit Fig. 3 zeigt unmittelbar, daß hier das erste Integral fortfallen muß, und daß im zweiten die untere Grenze durch 0 zu ersetzen ist.

Die Ausrechnung von (11) liefert, wie ich früher angegeben habe, wieder den Wert (9), so daß insbesondere für die Grenze zwischen 2 und 3, d. h. für den Wert $\gamma = a$, wieder ein stetiger Anschluß der beiden Intervalle aneinander stattfindet.

Die Ausrechnung von (12) ist bei Herrn Lindemann nicht ganz richtig durchgeführt, indem das erste Integral nicht

$$\frac{\pi}{8}\,\frac{67}{192}\,\gamma^4,$$

sondern

$$\frac{\pi}{8}\left(\frac{3\,a^2\gamma^2}{8}-\frac{5}{192}\,\gamma^4\right)$$

liefert. Man überzeugt sich sehr leicht, daß auch nach Berichtigung des letztgenannten Versehens der Lindemannsche Wert (12) von Ω die Probe auf seinen stetigen Anschluß an das Intervall 2 nicht aushält.

Ich will nur noch auf die Bemerkung von pag. 328 eingehen, daß bei der vorstehend erörterten Berechnung von Ω in dem Intervall $0 < \beta < \gamma/2$ nicht die Gl. (40) von Lindemann (d. h. $S = S_2$), sondern die Gl. (42) (d. h. $S = 0$) anzuwenden sei. Letzteres steht in direktem Gegensatz zu den zusammenfassenden Bemerkungen Lindemanns auf pag. 248, welche sich mit der oben angegebenen Wertbestimmung von pag. 157 decken. Denn wenn $\beta < \gamma/2$ und wie im vorliegenden Falle 3, $\gamma < a$ ist, so bedeutet a jedenfalls die größte der drei Zahlen a, β, γ während nach den Lindemannschen Gleichungen (42) und (45) $S = 0$ nur statthat, wenn a (oder wie es pag. 248 heißt a) nicht die größte jener drei Zahlen ist.

Hiernach werden auch die folgenden Einwände, die sich auf meine Berechnung des an Ω anschließenden Integrales Q beziehen, gegenstandslos.

8. Über meine vereinfachte Behandlung der Elektronenbewegung in den Sitzungsberichten der Amsterdamer Akademie.

Zu dieser bemerkt Herr Lindemann: „Weshalb nach τ zwischen den Grenzen 0 und ∞ integriert wird, geht aus der a. a. O. gegebenen neueren Darstellung nicht hervor.“ Demgegenüber möchte ich hervorheben: Im Anschluß an die Greenschen Methoden hatte ich eine aus der Differentialgleichung des Problems folgende Identität über den unendlichen Raum (mit Ausschluß der Unstetigkeitsstelle) zu erstrecken; ich hatte sodann, im Anschluß an Kirchhoffs Behandlung der optischen

Probleme, eine Integration nach der Zeit hinzuzufügen. Die Grenzen dieser Integration können an sich beliebig festgesetzt werden, ohne daß die Identität zu gelten aufhört. Um aber zu einem einfachen Ergebnis und zur Ableitung übersichtlicher physikalischer Tatsachen zu gelangen, wird man diese Grenzen passend zu wählen haben. So gut wie die Raumintegration über den unendlichen Raum, darf die Zeitintegration über die unendliche Zeitskala, d. h. in der Variabeln τ über die ganze Vergangenheit von $\tau = 0$ bis $\tau = \infty$ erstreckt werden. Einer Rechtfertigung für dieses Verfahren bedarf es nicht. Wollte man die Zeitintegration nur von $\tau = 0$ bis $\tau = t$ erstrecken, was zwar möglich, aber unvorteilhaft wäre, so würden von der oberen Grenze herrührende Zusatzglieder auftreten, welche die physikalische Bedeutung des Ergebnisses verschleiern und die beabsichtigte explizite Berechnung von φ unmöglich machen würden.

Zusammenfassend glaube ich versichern zu können, daß die Elektronentheorie durch die Lindemannsche Untersuchung in keiner Weise erschüttert ist.