Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVII. Jahrgang 1907.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1908.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Zur Elektronentheorie.

Von **F. Lindemann.**

(*Eingelaufen 6. August.*)

In einer Arbeit des Herrn Sommerfeld, welche Herr Röntgen in der Sitzung vom 8. Juni der mathematisch-physikalischen Klasse vorlegte (vgl. oben S. 155 ff.), sind verschiedene Einwände gegen meine Behandlung der Elektronentheorie[1]) erhoben worden, indem der Verfasser die von mir gegen seine Darstellung der Theorie geltend gemachten Bedenken zu entkräften sucht. Im folgenden werden diese Einwände des Herrn Sommerfeld als unbegründet nachgewiesen; zugleich nehme ich Gelegenheit, einige Bedenken, die ich in § 16 meiner Abhandlung ausgesprochen hatte, ausführlicher zu begründen, als ich es damals für nötig hielt.

In erster Linie kommt es auf die unten in § 8 gegebenen Ausführungen an, in denen gezeigt wird, daß Herr Sommerfeld seinen Rechnungen eine Potentialfunktion zu Grunde legt, die im Innern des bewegten Elektrons der geforderten partiellen Differentialgleichung nicht genügt. Es dürfte demnach eigentlich überflüssig sein, über die anderen Punkte zu diskutieren; doch ist dies immerhin nützlich, um Mißverständnissen zu begegnen.

Nur in einem Punkte kann ich Herrn Sommerfeld rechtgeben, nämlich in Betreff der Auswertung eines bestimmten

---

[1]) Über die Bewegung der Elektronen. I. Teil, die translatorische Bewegung, Abhandlungen der K. Bayer. Akad. d. Wiss., II. Kl., Bd. 23, 1907; eine Fortsetzung dieser Abhandlung ist gegenwärtig im Drucke

Integrals (vgl. unten § 7); dieses Integral wird indessen in meiner Abhandlung überhaupt nicht benutzt; die Frage der Auswertung ist daher eine nebensächliche; es wird von Herrn Sommerfeld gezeigt, daß an dieser Stelle, wo ich einen Irrtum in seiner Arbeit vermutete, ein solcher nicht vorliegt.

Die Anordnung des Stoffes entspricht genau derjenigen, welche Herr Sommerfeld seinem Aufsatz zu Grunde legt; und dementsprechend sind die Überschriften der Paragraphen gewählt.

§ 1. Berechnung des skalaren Potentials.

Zuerst hebt Herr Sommerfeld hervor, daß die von mir (zur Erleichterung der mathematischen Entwicklung) gestellten Anfangsbedingungen $\varphi = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ für $t = 0$ den physikalischen Bedingungen des Problems nicht entsprechen; dieser Einwurf ist gesperrt gedruckt, so daß ihm also besonderes Gewicht beigelegt wird. Trotzdem ist er nur eine Wiederholung dessen, was ich selbst gesagt habe; ich habe selbst betont, daß der von mir verlangte Anfangszustand den Bedingungen der Elektronentheorie nicht entspricht, vgl. den Schluß von § 3 und den Anfang von § 15. Wenn also für $t = 0$ das elektrostatische Potential resultieren soll, und wenn Herr Sommerfeld die betreffenden Formeln meiner Abhandlung zur Kontrolle benützen wollte, so hätte er ausschließlich die von § 15[1]) und nicht die von § 3 anwenden müssen (vgl. unten § 2). Daß letztere den Wert Null geben, entspricht der von mir gestellten Anfangsbedingung und ist höchstens eine Kontrolle für die Richtigkeit der Lösung, nicht gegen dieselbe. Überhaupt kann man eine Unrichtigkeit nicht durch irgendwelche angebliche Konsequenzen nachweisen, sondern nur durch direkte Angabe darüber, wo der Fehler der mathematischen Entwicklung liegt, wie ich es für die Sommerfeldschen Formeln in § 16 meiner Arbeit getan habe.

---

[1]) Diese sind inzwischen in der oben erwähnten Fortsetzung meiner Abhandlung weiter entwickelt.

Nach der Darstellung des Herrn Sommerfeld könnte man allerdings glauben, daß ich selbst behauptet hätte, meine in Gleichung (34) gegebene Lösung

$$\varphi = \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3}\int_0^t \frac{S}{R}\,d\tau \tag{1}$$

müsse für $t = 0$ in das elektrostatische Potential übergehen; er zitiert dafür einen Satz aus dem Beginne meiner Arbeit, wo die Differentialgleichungen für die Potentiale φ und $\mathfrak{A}$ angegeben werden:

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} - c^2 \varDelta^2 \varphi &= c^2 \varrho, \\
\ddot{\mathfrak{A}}_x - c^2 \varDelta^2 \mathfrak{A}_x &= \varrho c \mathfrak{v}_x, \\
\ddot{\mathfrak{A}}_y - c^2 \varDelta^2 \mathfrak{A}_y &= \varrho c \mathfrak{v}_y, \\
\ddot{\mathfrak{A}}_z - c^2 \varDelta^2 \mathfrak{A}_z &= \varrho c \mathfrak{v}_z.
\end{aligned}$$

Hier fügte ich hinzu: „In ruhendem Zustande geht das skalare Potential φ in das elektrostatische Potential über“; das gilt für alle Anfangsbedingungen, denn diese Bemerkung bezieht sich nur auf die Form der Differentialgleichung, da in diesem Stadium der Untersuchung von etwas anderem noch gar nicht die Rede war. Der weitere Zusatz „das Vectorpotential $\mathfrak{A}$ geht in das magnetische Potential über“, den Herr Sommerfeld beanstandet, ist allerdings ungeschickt; er soll sich auch nur auf die Form der Differentialgleichung beziehen und lautet besser: „das Vectorpotential $\mathfrak{A}$ bezieht sich auf die durch Bewegung des elektrischen Teilchens erzeugten magnetischen Kräfte.“

Bei jedem Probleme, das mathematische Schwierigkeiten bietet, ist es nicht nur erlaubt, sondern notwendig, zunächst solche Beschränkungen zu machen, daß die mathematische Behandlung vereinfacht wird, gleichgültig ob man dabei die ursprünglichen physikalischen Bedingungen verläßt oder nicht, wenn man nur in der Lage ist, das mathematisch einfachere Problem nachträglich als Grundlage für das ursprüngliche physikalische Problem zu benützen. Wie letzteres aber zu geschehen hat, habe ich in § 15 meiner Abhandlung (und, für besondere Fälle, in der demnächst erscheinenden) Fortsetzung ausführlich gezeigt.

§ 2. Die ergänzende Betrachtung über den Anfangszustand in § 15 meiner Arbeit.

Herr Sommerfeld behauptet: „die folgenden ergänzenden Betrachtungen verfehlen nun aber ihr Ziel (nämlich das bisher behandelte Problem den physikalischen Bedingungen anzupassen), wie ich der Kürze halber sogleich an dem Schlußergebnis zeigen will".

Es handelt sich um das Beispiel der Bewegung mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit v; hier gilt nach meinen Entwicklungen die Formel:

$$\varphi = \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3} \int_0^{t+t_0} \frac{S}{R} d\tau, \tag{2}$$

wenn:

$$t_0 = \frac{2a}{c - v}$$

gesetzt wird, indem t_0 nach meinen Angaben (a. a. O. S. 311) so zu bestimmen ist, „daß die vor Beginn der Bewegung vom Elektron ausgehenden Kraftwirkungen volle Berücksichtigung finden." Diese Wirkungen sind elektrostatischer Natur, und somit folgert Herr Sommerfeld, daß der Ausdruck (2) für $t = 0$ in allen Punkten des Raumes in das elektrostatische Potential übergehen müsse; diese Folgerung ist unrichtig; der Ausdruck (2) soll das Potential φ zufolge seiner Ableitung in denjenigen Punkten des Raumes darstellen, in welchen sich das Elektron zurzeit befindet; denn nur so ist die Größe t_0 von mir bestimmt. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich aber das Elektron in der Ruhelage; also nur für $R < a$ (wenn R die Entfernung eines Punktes im Innern des Elektrons von dem Punkte bezeichnet, wo sich zur Zeit $t = 0$ der Mittelpunkt des Elektrons befand) muß die Funktion φ nach meiner Theorie mit dem bekannten elektrostatischen Potentiale übereinstimmen; welche Werte sie für $R > a$, $t = 0$ hat, ist für meine Theorie (und für das gestellte physikalische Problem) ganz gleichgültig.

Um nun den fraglichen Wert für $R < a$ zu berechnen, hat man die Gleichung (52b) in § 6 meiner Arbeit anzuwenden, in der:

$$\tau' = \frac{a - R}{c}, \quad \tau'' = \frac{a + R}{c} \left(< t_0 = \frac{2a}{c - v} \right)$$

zu wählen ist; dann wird:

$$\varphi = \frac{3\varepsilon c^2}{4\pi a^3} \int_0^{\tau'} \tau \, d\tau + \frac{3\varepsilon c}{16\pi a^3 R} \int_{\tau'}^{\tau''} [a^2 - (c\tau - R)^2] \, d\tau$$

$$= \frac{\varepsilon}{8\pi a^3} (3a^2 - R^2);$$

und dies ist der bekannte Wert des Potentials der Kugel auf einen innern Punkt.

Für einen äußern Punkt muß meine Formel noch den üblichen Wert für alle diejenigen Punkte ergeben, bis zu welchen sich die von den Punkten des ruhenden Elektrons ausgehende elektrische Erregung im Laufe der Zeit t_0 hat fortpflanzen können, d. h. für alle Punkte im Innern einer Kugel, deren Radius R_0 durch die Gleichung:

$$a + R_0 = c t_0 = \frac{2ac}{c - v}$$

bestimmt wird; es ist also:

$$R_0 = \frac{c + v}{c - v} \cdot a \cdot$$

Für die Punkte im Innern dieser Kugel ergibt aber meine Formel, wie Herr Sommerfeld berechnet (vgl. oben S. 160), in der Tat den richtigen Wert:

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{4\pi R}.$$

Um diese Kugel legt sich eine Schale, innerhalb welcher nur ein Teil der vom Elektron ausgegangenen Wirkung zur Geltung kommt; man hat um einen Punkt dieser Schale mit dem Radius R_0 eine Kugel zu beschreiben, welche aus der ruhenden Kugel des Elektrons ein Gebiet ausschneidet. Die Wirkung dieses Gebietes wird durch meine Formel, d. h. hier durch den Potentialwert (vgl. Sommerfeld oben S. 160):

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon c}{16\,\pi\, a^3 R}\int\limits_{\tau'''}^{t_0} [a^2 - (c\tau - R)^2]\, d\tau, \quad \text{wo } \tau''' = \frac{R-a}{c},$$

dargestellt. Endlich außerhalb dieser Schale, d. h. außerhalb einer Kugel mit dem Radius:

$$R = \left(2 + \frac{c+v}{c-v}\right) a$$

muß $\varphi = 0$ werden, wie es a. a. O. berechnet ist; denn bis zu einem solchen Punkte hat sich von keiner Stelle im Inneren des Elektrons aus die elektrische Wirkung während der Zeit t_0 verbreiten können. Bei richtiger Anwendung gibt daher die von mir aufgestellte Formel auch richtige Resultate. Die Bemerkung des Herrn Sommerfeld, nach welcher meine „in Rede stehenden ergänzenden Betrachtungen bei richtiger Durchführung auf seine Formeln hätten führen müssen, in der vorliegenden Fassung aber in sich widersprechend sind", entbehrt hiernach der Begründung.

In einer Note unter dem Texte sagt Herr Sommerfeld ferner: „Daß die Größe t_0 und damit die Potentialverteilung zur Zeit $t = 0$ von dem Charakter der nachfolgenden Bewegung abhängen soll, ist an sich kaum verständlich." Hierbei hat derselbe nicht beachtet, wie die Variable τ (die er in seiner Arbeit doch in ganz gleicher Weise benutzt) definiert ist; sie mißt die Zeit von der jeweiligen Lage des Elektrons aus nach rückwärts. Die Zeit von $\tau = t$ bis $\tau = t + t_0$ bezieht sich also auf die vor der Zeit $t = 0$ entstandene Potentialverteilung; für den Zeitpunkt $t = 0$ gibt also das Intervall von $\tau = 0$ bis $\tau = t_0$ die durch die Ruhelage vor Beginn der Bewegung bedingte Potentialverteilung; von einem Einflusse der nachfolgenden Bewegung kann bei meinen Formeln keine Rede sein.

§ 3. Zahlenbeispiel.

Infolge eines Versehens bei Auswertung des von mir mit Φ_2 bezeichneten Integrales sind die entsprechenden Formeln in der Weise zu revidieren, wie es im zweiten Teile meiner Abhandlung inzwischen geschehen ist (vgl. oben S. 171), was ich in der Junisitzung (in der Herr Röntgen die Sommerfeldsche Arbeit vorlegte) der Akademie bereits mitteilte; das von Herrn Sommerfeld berechnete Zahlenbeispiel sagt also nichts gegen die Richtigkeit meiner Methode.

§ 4. Die Ausrechnung von φ in § 6 meiner Arbeit.

Herr Sommerfeld stellt sich die Aufgabe, das oben in (1) gegebene Potential φ für den Fall zu berechnen, daß das Elektron auch nach der Zeit $t = 0$ dauernd in Ruhe bleibt, und zwar auf Grund meiner Formeln. Hier ist $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, also:

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

und R unabhängig von τ; es wird also nach (1):

$$\varphi = \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^2 R} \int_0^t S\, d\tau,$$

wo S ein Integral bedeutet, welches den folgenden Bedingungen genügt; es ist:

(3) $S = \frac{\pi}{8}[a^2 - (c\tau - R)^2]$, wenn sich aus den Strecken a, $c\tau$ und R ein Dreieck bilden läßt,

(4) $S = \frac{\pi}{2} c\tau R$, wenn ein solches Dreieck nicht möglich ist, weil $a > c\tau + R$,

(5) $S = 0$, wenn das Dreieck unmöglich ist, weil $a < ct - R$ bzw. $a < R - c\tau$.

Herr Sommerfeld beschränkt seine Rechnung ausdrücklich auf das Äußere der Kugel $R = a$ (also $R > a$).

Nach Seite 253 meiner Arbeit haben wir zunächst die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden:

$$\text{I. } ct < a, \qquad \text{II. } ct > a.$$

Im Falle I. ist auch stets $c\tau < a$; ferner wird $R > a$ vorausgesetzt; wir haben also das Zeitintervall in zwei Teile zu zerlegen:

$$1.\ c\tau < R - a$$
$$2.\ c\tau > R - a;$$

im ersteren Intervalle ist $S = 0$ nach (5), im anderen ist S durch (3) bestimmt; und wir erhalten:

$$\varphi = 0 \text{ für } ct < R - a$$

$$\varphi = \frac{3\varepsilon c}{16\pi a^2 R}\int\limits_{(R-a)/c}^{t}[a^2 - (c\tau - R)^2]\,d\tau \text{ für } R - a < ct < a.$$

Das sind aber ganz dieselben Formeln, welche Herr Sommerfeld für das Intervall $ct < a$ als die richtigen angibt. Aus meinen Formeln leitet er unrichtige Resultate ab, indem er sogleich für kleine Werte von τ meine Gleichung (53) anwendet, während dieselbe, wie ich a. a. O. ausdrücklich bemerkt habe, nur für $c\tau > a$ in Betracht kommt. Ebenso geben meine Formeln auch im folgenden das Richtige; und die Behauptung des Herrn Sommerfeld, daß „meine Formeln (52) und (53), auf denen alles weitere beruht, irrig sind", ist unzutreffend. Sie geben selbstredend etwas Unrichtiges, wenn man sie auf Fälle anwendet, für die sie ausdrücklich nicht bestimmt sind.

Mit der Angabe, daß „auf diesen Formeln alles weitere beruhe", befindet sich Herr Sommerfeld überdies im Irrtume; der Inhalt von § 6 könnte, abgesehen von der ersten Seite (nämlich S. 253), ganz gestrichen werden, ohne am folgenden etwas zu ändern; er zeigt nur und soll nur zeigen, daß man bei dieser direkten Behandlung des Problems auf Schwierigkeiten stößt, und daß deshalb (vgl. den Schluß von § 6) ein anderer Weg eingeschlagen werden muß. Auch im folgenden (vgl. S. 259) ist hervorgehoben worden, daß die in § 6 eingeführten Hülfsgrößen τ', τ'', τ''' .... bei Ausführung der räumlichen Integrationen nicht weiter in Betracht kommen.

Selbstverständlich ist, daß die Bestimmung dieser Größen nicht alle möglichen Fälle einzeln umfaßt; das brauchte nicht besonders gesagt zu werden, denn wegen des Eingehens der willkürlichen Funktionen in die Rechnung wäre es ein unsinniges Unternehmen, alle Möglichkeiten erschöpfen zu wollen; es konnte sich nur darum handeln, ein im allgemeinen brauchbares Schema aufzustellen und daran die Methode zu erläutern, wie das im folgenden auch wiederholt hervorgehoben wurde (vgl. die Anmerkung auf S. 262 und den Schluß von § 7 sowie S. 284). Zu Beginn von § 6 formuliere ich überdies die zu behandelnde Aufgabe dahin, daß zu verfolgen ist, wie das Elektron allmählich sich von der Anfangslage (bzw. aus der jeweils kurz vorhergehenden Lage) befreit, um dann seine Bahn zu beschreiben. Für den Fall, daß überhaupt keine Bewegung eintritt, können daher die Größen τ', τ'', ... keine Bedeutung haben; man kann den Wert von φ aber stets aus den Formeln (3), (4) und (5) ganz elementar berechnen, wie es oben geschah.

§ 5. Differentiation nach der oberen Grenze.

In der Theorie des Vektorpotentiales kommt es unter anderem nach meinen Formeln auf die Berechnung des folgenden Integrales an:

$$\int\int\int\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\frac{S}{R}\,d\tau\right\}dx\,dy\,dz. \tag{6}$$

Da Herr Sommerfeld überall die obere Grenze t durch ∞ ersetzt (vgl. darüber unten § 8), so hätte bei ihm das Integral:

$$\begin{aligned}&\int\int\int\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \mathfrak{v}_x(t-\tau)\frac{S}{R}\,d\tau\right\}dx\,dy\,dz\\ &=\int_0^\infty d\tau\int\int\int\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{S}{R}\mathfrak{v}_x(t-\tau)\right)dx\,dy\,dz\end{aligned} \tag{7}$$

berechnet werden sollen, wobei die Volum-Integration sich auf das ganze Innere des Elektrons bezieht. Statt dessen wird von ihm das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathfrak{v}_x(t-\tau)\iiint \frac{S}{R}\,dx\,dy\,dz\right]d\tau \tag{8}$$

ausgewertet. Mein Einwurf gegen dieses Verfahren gründet sich darauf, daß infolge der Werte von S, die oben in (3), (4) und (5) angegeben wurden, die oberen Grenzen des dreifachen Integrals Funktionen von t sind, daß also Herr Sommerfeld diese Grenzen mit differentiert, während sie in dem ursprünglichen Ausdrucke (7) nicht differentiert werden sollten.

Herr Sommerfeld beruft sich darauf, daß S eine stetige Funktion von τ sei, und daß infolgedessen die Differentiation der Grenzen keinen Beitrag liefere; das ist richtig, wenn es sich um Differentiation einer Summe von der Form:

$$\int_0^{\tau'} \mathfrak{v}\frac{S}{R}\,d\tau + \int_{\tau'}^{\tau''} \mathfrak{v}\frac{S}{R}\,d\tau + \cdots$$

handelt; und von dieser Bemerkung habe ich selbst Gebrauch gemacht (S. 269). Aber dadurch, daß der Ausdruck (6) durch (8) ersetzt wurde, ist die Sachlage eine ganz andere, und eine Übereinstimmung der aus beiden Ausdrücken durch Differentiation nach t zu erhaltenen Resultate ist nicht mehr zu erwarten. Es kommt also darauf an, den Einfluß der vorgenommenen Vertauschungen von Differentiation und Integration zu untersuchen.

Bei Einführung von Polarkoordinaten R, Θ, Ψ wird die Integration nach dem Winkel Ψ immer von 0 bis 2π ausgeführt; wir haben also nur noch mit Doppelintegralen zu tun. Es sei:

$$U = \int_0^{\Theta_1} d\,\Theta \int_b^{R_1} f(R,\Theta)\,d\,R,$$

wo Θ_1 und R_1 Funktionen von t sind:

$$\Theta_1 = \chi(t), \quad R_1 = \psi(\Theta, t),$$

während b eine von t unabhängige Konstante bedeutet. Die Variable t soll auch in der Funktion f neben R und Θ vorkommen. Mit δU möge der Ausdruck bezeichnet werden, der durch Differentiation der Grenzen allein entsteht; dann ist:

$$\delta U = \int_0^{\Theta_1} f(R_1, \Theta) \frac{\partial \psi}{\partial t} d\Theta + \int_b^{\psi(\Theta_1, t)} f(R, \Theta)\, dR \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

Es entsteht also die Frage, ob diese Ausdrücke verschwinden. Wir müssen hier die einzelnen Fälle und Lagen durchgehen. Allerdings kommen diese bei Herrn Sommerfeld nicht vor, aber nur deshalb, weil er unter Voraussetzung der Vertauschbarkeit der betreffenden Operationen die Unterscheidung der Fälle umgehen kann.

I. Unterlichtgeschwindigkeit.

Erste Lage, vgl. Figur 1. Hier ist in dem vertikal schraffierten Gebiete S nach (3), in dem horizontal schraffierten Gebiete S nach (4) zu berechnen. Die Integrationen erstrecken sich über geschlossene Gebiete; in ersterem ist:

$$\Theta_1 = \pi, \quad b = a - c\tau$$

und R_1 durch die Gleichung (99) meiner Abhandlung bestimmt, d. h. durch:

(9) $$a^2 = R_1^2 + T^2 - 2 R_1 T \cos \Theta,$$

wo T eine Funktion von τ und t bedeutet. Wir haben also, da:

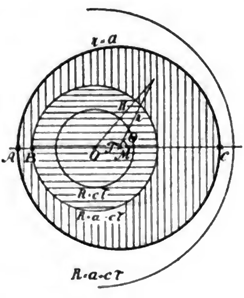

Fig. 1.

$$f = \frac{S}{R} \cdot R^2 \cdot \sin \Theta, \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0$$

zu setzen ist:

(10) $$\delta U_1 = \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi} [a^2 - (c\tau - R_1)^2]\, R_1 \frac{\partial R_1}{\partial t} \sin \Theta \, d\Theta.$$

In dem horizontal schraffierten Gebiete ist:

$$R_1 = a - c\tau, \quad b = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0,$$

also auch $\delta U_2 = 0$. Der Ausdruck:

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_2 = \delta U_1$$

verschwindet also keineswegs identisch, wie Herr Sommerfeld anzunehmen scheint. Nur im Falle konstanter Geschwindigkeit ist $T = v\tau$ von t unabhängig und dann $\frac{\partial R_1}{\partial t} = 0$, also auch $\delta U = 0$.

Zweite Lage, vgl. Figur 3.[1]) In dem vertikal schraffierten Gebiete ist alles wie im vorigen Falle; nur muß jetzt $b = c\tau - a$ genommen werden. Es behält also δU_1 denselben Wert. Im horizontal schraffierten Gebiete ist $R < c\tau - a$, und somit $S = 0$ nach (5), also wieder $\delta U_2 = 0$.

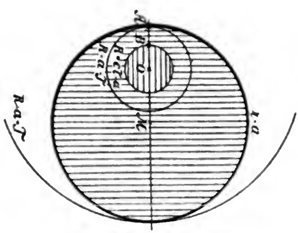

Fig. 3.

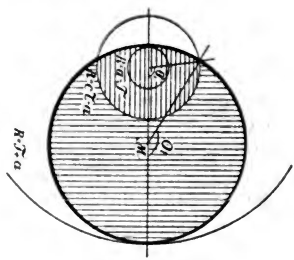

Fig. 4.

Dritte Lage, vgl. Figur 4. Wir haben (vgl. S. 274 meiner Abhandlung) im vertikal schraffierten Gebiete:

$$U_1 = \int_{c\tau - a}^{T + a} S R \, d R \int_0^{\Theta_1} \sin \Theta \, d\Theta, \tag{11}$$

[1]) Die Nummern der Figuren sind dieselben wie in meiner größeren Abhandlung.

wo Θ_1 durch die Gleichung (109), d. h. durch:

(11ª) $$2\,R\,T \cos \Theta_1 = R^2 + T^2 - a^2$$

bestimmt wird, und es ist S durch (3) bestimmt, also:

(12)
$$\begin{aligned}\delta U_1 &= \frac{\pi}{8}\,[a^2 - (c\tau - T - a)^2](T+a)(1-\cos\Theta_1)\frac{\partial T}{\partial t}\\ &+ \frac{\pi}{8}\int\limits_{c\tau - a}^{T+a}[a^2 - (c\tau - R)^2]\,R \sin \Theta_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial t}\,d\,R,\end{aligned}$$

wo im ersten Gliede die Klammer $(1 - \cos\Theta_1)$ für $R = T + a$ gleich Null wird.

Im horizontal schraffierten Gebiete ist wieder $R < c\tau - a$, also $S = 0$ nach (5) und $\delta U_2 = 0$.

II. Überlichtgeschwindigkeit.

Erste Lage, vgl. Figur 8. Im vertikal schraffierten Gebiete haben wir:

$$U_1 = \frac{\pi}{8}\int\limits_{a-c\tau}^{a+c\tau}[a^2 - (c\tau - R)^2]\,R\,d\,R\int\limits_0^{\Theta_0}\sin\Theta\,d\,\Theta,$$

wo nach Gleichung (145) meiner Abhandlung Θ_0 durch die Gleichung:

(12ª) $$a^2 = T^2 + R^2 - 2\,R\,T \cos \Theta_0$$

bestimmt ist. Wir erhalten also:

$$\delta U_1 = \frac{\pi}{8}\int\limits_{a-c\tau}^{a+c\tau}[a^2 - (c\tau - R)^2]\,R \sin\Theta_0 \frac{\partial\Theta_0}{\partial t}\,d\,R.$$

Das horizontal schraffierte Gebiet ist wieder so in zwei Teile zu zerlegen, wie es auf S. 286 meiner Abhandlung geschah; wir haben nach (4) in dem einen Teile:

$$U_2 = \frac{\pi c\tau}{2}\int\limits_0^{a-T}R^2\,d\,R\int\limits_0^{\pi}\sin\Theta\,d\,\Theta, \quad \delta U_2 = -\pi c\tau(a - T)^2\frac{\partial T}{\partial t};$$

und im anderen Teile:

$$U_3 = \frac{\pi c \tau}{2} \int_{a-T}^{a-c\tau} R^2 \, d R \int_0^{\Theta_0} \sin \Theta \, d \Theta,$$

wo Θ_0 wieder durch obige Gleichung bestimmt wird; also:

$$\delta U_3 = + \frac{\pi c \tau}{2} (a - T)^2 \frac{\partial T}{\partial t} (1 - \cos \Theta_0)$$

$$+ \frac{\pi c \tau}{2} \int_{a-T}^{a-c\tau} R^2 \sin \Theta_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial t} \, d R,$$

wo das erste Glied für $R = a - T$ nach (12ª) verschwindet.

Ein viertes, gesondert zu betrachtendes Gebiet endlich ist in Figur 8 nicht schraffiert; in ihm ist:

$R > a + c\tau$, und folglich nach (5): $U_4 = 0$, $\delta U_4 = 0$.

Zweite Lage; es bleiben die Formeln der ersten Lage gültig (vgl. S. 287 f. meiner Abhandlung, und Figur 9 daselbst S. 280).

Dritte Lage; vgl. Figur 11. Es ist im vertikal schraffierten Teile:

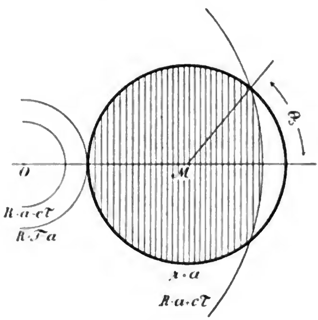

Fig. 11.

$$U = \frac{\pi}{8} \int_{T-a}^{c\tau+a} [a^2 - (c\tau - R)^2] \, R \, d R \int_0^{\Theta_0} \sin \Theta \, d \Theta,$$

also:

$$\delta U = \frac{\pi}{8}\left[a^2 - (c\tau - T + a)^2\right](T - a)(1 - \operatorname{cosin} \Theta_0)\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$+ \frac{\pi}{8}\int\limits_{T-a}^{c\tau+a}\left[a^2 - (c\tau - R)^2\right] R \sin\Theta_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial t}\, d R,$$

wo wieder das erste Glied wegen (12^a) verschwindet.

In dem nicht schraffierten Gebiete dagegen ist wieder $U = 0$ und $\delta U = 0$.

Es geht hieraus hervor, daß die durch Differentiation der Grenzen entstehenden Terme keineswegs zu vernachlässigen sind. Es soll aber, gemäß (8), das Resultat noch nach τ integriert werden, nachdem vorher mit $\mathfrak{v}_x(t-\tau)$ multipliziert ist. Bei Unterlichtgeschwindigkeit wird die Grenze der ersten Lage gegen die zweite durch den Wert $\tau = a/c$ gegeben (vgl. S. 261 meiner Abhandlung); dieser ist unabhängig von t; die Grenze der zweiten Lage gegen die dritte ist durch $\tau = \tau^0$ gegeben; es ist also:

$$\int\limits_0^{\tau^0} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,\delta U_1\, d\tau + \int\limits_{\tau^0} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,\delta U_1'\, d\tau$$

zu bilden, wenn mit δU_1 der Ausdruck (10), mit $\delta U_1'$ der Ausdruck (12) bezeichnet wird. Es ist nicht abzusehen, weshalb die von δU_1 und $\delta U_1'$ herrührenden Beiträge herausfallen sollen. Anders ist es bei der nochmaligen Vertauschung von Differentiation und Integration; hier soll die Relation bestehen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{\infty} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\, U\, d\tau = \int\limits_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathfrak{v}_x(t-\tau)\, U\right] d\tau.$$

Die konstante Grenze a/c bietet offenbar kein Hindernis. Die Grenze zwischen der zweiten und dritten Lage ist durch den Wert τ^0 gegeben, welcher durch die Gleichung (73^b), d. h. durch:

(13) $$c\tau + T = 2a$$

als Funktion von t definiert war. Es fragt sich hier, ob der Wert:

$$\frac{\partial \tau^0}{\partial t} \mathfrak{v}_x(t-\tau^0)\,[U_1 - U_1']_{\tau=\tau^0} \tag{14}$$

verschwindet, wo:

$$U_1 = \frac{\pi}{8}\int_0^\pi \sin\Theta\, d\Theta \int_{c\tau-a}^{R_1} [a^2 - (c\tau - R)^2]\, R\, dR$$

gesetzt (woraus durch Differenzieren der Ausdruck (10) entsteht), während U_1' durch (11) gegeben wird:

$$U_1' = \frac{\pi}{8}\int_{c\tau-a}^{T+a} [a^2 - (c\tau - R)^2]\, R\, dR \int_0^{\Theta_1} \sin\Theta\, d\Theta.$$

Nun ist für $\tau = \tau^0$ nach (13) $c\tau - a = a - T$; ein Blick auf die Figuren 3 und 4 lehrt also, daß die Integrationsgebiete für die Integrale U_1 und U_1' für $\tau = \tau^0$ zusammenfallen, und daß somit der Ausdruck (14) gleich Null wird.

Jetzt kommen aber noch die aus (10) und (12) entstehenden Glieder in Betracht, die im allgemeinen nicht verschwinden. Es ist also, da Analoges für die Grenzen zwischen den anderen Intervallen gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,d\tau \iiint \frac{S}{R}\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathfrak{v}_x(t-\tau)\iiint \frac{S}{R}\,dx\,dy\,dz\right] d\tau \\
&= \int^\infty d\tau \iiint \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{S}{R}\,\mathfrak{v}_x(t-\tau)\right) dx\,dy\,dz + \int_0^{\tau^0} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,\delta U_1\, d\tau \\
&\quad + \int_{\tau^0}^{\tau_1} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,\delta U_1'\, d\tau + \cdots,
\end{aligned} \tag{15}$$

wenn δU_1 durch (10), $\delta U_1'$ durch (12) gegeben wird, und wenn τ_1 den Endpunkt der dritten Lage bezeichnet, d. h. durch die Gleichung:

$$c\tau - T = 2a$$

bestimmt wird. Nach Herrn Sommerfeld müßten diese Integrale über δU_1, $\delta U_1'$, ... der rechten Seite verschwinden, was aber nur in besonderen Fällen wird eintreten können.

Ein wesentlicher Unterschied der Sommerfeldschen Formeln gegenüber den meinigen liegt ferner, wie schon bemerkt wurde, in der Wahl der oberen Grenze, die bei ihm gleich ∞, bei uns gleich t bzw. $t + t_0$ gesetzt wurde [vgl. obige Formeln (1) und (2), in denen für das Vektorpotential unter dem Integralzeichen der Faktor $\frac{\mathfrak{v}_x(t-\tau)}{c}$ hinzuzufügen ist]; es ist klar, daß bei Differentiation des Potentials nach t dies einen wesentlichen Einfluß übt.

§ 6. Vertauschung von Differentiation und Integration.

Neben der Differentiation nach t kommt diejenige nach ξ, η, ζ in Betracht. Die Kräfte werden durch die Differentialquotienten des Potentials und den räumlichen Koordinaten berechnet; es kommt also auf Integrale der Form:

$$\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy\, dx\, dz$$

an, wo das räumliche Integral über das Volumen zu erstrecken ist; da nun x und ξ im φ nun in der Verbindung $x + \xi$ vorkommen, so ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi};$$

und es kommt also darauf an, ob die Gleichung:

$$(16) \qquad \frac{\partial}{\partial \xi}\iiint \varphi\, dx\, dy\, dz = \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\, dx\, dy\, dz$$

richtig ist. Diese Frage ist durch die Betrachtung des vorhergehenden Paragraphen schon mit erledigt, denn bei der

Differentiation der Grenzen nach t muß eben erst nach ξ und dann ξ nach t differenziert werden, da t in den Grenzen nur vorkommt, insofern:

$$T = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

von t abhängt. Die obigen Relationen (10), (12), ... zeigen, daß die Gleichung (16) tatsächlich nicht bestehen kann.

Herr Sommerfeld beruft sich (oben S. 166) zum Beweise darauf, daß „die Größe $W = \iiint \frac{S}{R}\, dx\, dy\, dz$ ebenso wie die Größe S eine stetige Funktion der Variabeln ξ sei, nach der differenziert wird". Dem ist aber nicht so; in der dritten Lage z. B. ist die Größe W in dem horizontal schraffierten Gebiete (vgl. oben Figur 4) gleich Null, in dem vertikal schraffierten Gebiete von Null verschieden; an der Grenzfläche erleidet sie also einen Sprung. Wenn allgemein eine stetige Funktion über verschiedene Gebiete integriert wird, so gibt sie nicht notwendig stetige Resultate. Ersetzen wir z. B. in dem Integrale W (zum Zwecke der Vereinfachung der Integrationen) die Funktion $\frac{S}{R}$ in dem vertikal schraffierten Gebiete (Figur 4) durch die Konstante 1, so wird:

$$W_1 = \int_{c\tau - a}^{T+a} R^2\, d\, R \int_0^{\Theta_1} \sin \Theta\, d\, \Theta \int_0^{2\pi} d\, \Psi,$$

wo Θ_1 wieder durch (11^a) bestimmt ist; es ist:

$$W_1 = \pi \int_{c\tau - a}^{T+a} [2\, R\, T - (R^2 + T^2 - a^2)]\, R \frac{d\, R}{T}$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{3} \{(T+a)^3 - (c\tau - a)^3\} - \frac{1}{8\, T} \{(T+a)^4 - (c\tau - a)^4\} \right.$$

$$\left. - \frac{T^2 - a^2}{4\, T} \{(T+a)^2 - (c\tau - a)^2\} \right].$$

In dem horizontal schraffierten Gebiete sei $\frac{S}{R}$ ersetzt durch $\frac{R}{c\tau - a}$, welcher Wert an der Grenzfläche gleich 1 wird; dann haben wir hier:

$$W_2 = \frac{\pi}{(c\tau - a)T}\int_0^{c\tau - a}[2RT - (R^2 + T^2 - a^2)]\,R^2\,dR$$
$$= \pi\left[\frac{1}{2}(c\tau - a)^3 - \frac{1}{5T}(c\tau - a)^5 - \frac{T^2 - a^2}{3T}(c\tau - a)^3\right].$$

Wir haben also in beiden Gebieten ganz verschiedene Funktionen von ξ. Dementsprechend hatte ich a. a. O. das Beispiel des Integrals L gewählt, in dem auch unter dem Integralzeichen eine Funktion steht, die in verschiedenen Intervallen verschiedene Funktionen eines Parameters ξ darstellt. Um dies Beispiel den obigen Betrachtungen an die Seite zu stellen, müßte man nur in letzteren erst die beiden Integrationen des Doppelintegrals trennen; die nämliche Variable w des Beispiels ist dann durch obige Variabel R repräsentiert; die Funktion unter dem Zeichen entsteht durch Ausführung der Integration nach Θ. Aber es ist überflüssig, über dieses Beispiel zu diskutieren, nachdem im vorhergehenden Paragraphen die Ungültigkeit der supponierten Gleichung (16) direkt dargetan wurde.

Es sei nur noch betont, daß die Bemerkung des Herrn Sommerfeld (oben S. 166), wonach das von mir im Beispiele benutzte Integral „ohne weiteres keinen Sinn hat", unzutreffend ist. Es ist hier die fundamentale der Bedingung der Integralrechnung, daß die Integrale von 0 bis ξ und von ξ bis a je für sich allein einen Sinn haben müssen, erfüllt; es braucht also die Stelle $x = \xi$ keineswegs von der Integration ausgeschlossen zu werden.

Herr Sommerfeld macht ferner folgende Bemerkung: „Differenzieren wir nun das Integral $W = \iiint \frac{S}{R}\,dx\,dy\,dz$ nach ξ in den Grenzen des Raumintegrals, so ist nach der

Integration derjenige Wert von S einzutragen, der auf der Begrenzung statthat, d. h. eben der Wert $S = 0$." Dieses ist richtig bei einem einfachen Integrale; wenn man aber ein Doppelintegral (und nur mit solchen haben wir hier zu tun) nach einem in den Grenzen vorkommenden Parameter differenziert, so kommt im Resultate zwar der Wert der Funktion unter dem Integralzeichen an der Begrenzung in Betracht; aber es ist das Doppelintegral nur auf ein einfaches Integral reduziert; und unter dem Zeichen ist dabei nicht immer $S = 0$ zu nehmen. Es geht dies aus den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen deutlich hervor.

Betrachten wir z. B. die in Figur 4 dargestellte „dritte Lage", so bildet die Kugel $R = c\tau - a$ einen Teil der Grenzfläche des Raumintegrals; und hier verschwindet in der Tat der zugehörige, in (11) gegebene Wert von δU_1, indem $[a^2 - (c\tau - R)^2]$ und somit S gleich Null wird. Bei der ersten Lage dagegen handelt es sich um die Grenzfläche $R = a - c\tau$, und hier ist S nicht gleich Null, und die in (10) unter dem Integralzeichen stehende Funktion verschwindet nicht. Ebenso ist es bei Überlichtgeschwindigkeit; der für die „erste Lage" oben (S. 189) gegebene Wert von δU_1 ist an der Grenzfläche $R = c\tau + a$ gleich Null; aber für Figur 8 kommt außerdem die Kugel $R = a - c\tau$ in Betracht, und hier ist δU_1 von Null verschieden. Auch die für δU_2 und δU_3 oben gefundenen Werte (die sich auf das Vektorpotential bezogen) sind in der zugehörigen Grenzfläche ($R = a - T$) von Null verschieden, während der auf S. 191 für die dritte Lage (Fig. 14) gegebene Wert von δU an der Grenzfläche $R = a + c\tau$ wiederum gleich Null ist.

§ 7. Über die Berechnung des bestimmten Integrals Ω.

Was die Berechnung dieses bestimmten Integrales betrifft, so erkenne ich an, daß das Verfahren des Herrn Sommerfeld korrekt und mein Einwurf unberechtigt war, indem ich nicht beachtet hatte, daß auch die Funktion unter dem

Integralzeichen noch von der oberen Grenze a abhängt. Zur persönlichen Entschuldigung kann ich nur anführen, daß ich die ganze Arbeit über Elektronen unter einem gewissen Drucke und in Eile habe machen müssen, um meine anderen Arbeiten nicht allzu lange zu unterbrechen. Ich hielt mich aber doch für verpflichtet, die mündlich mehrfach ausgesprochenen Bedenken gegen die bisherige Behandlung der Elektronentheorie zu veröffentlichen und glaube auch, dadurch wesentlich zur Klärung der betreffenden Fragen beigetragen zu haben.

Der Wert des fraglichen Integrals Ω spielt übrigens nur in den Untersuchungen des Herrn Sommerfeld eine Rolle; bei meiner Behandlung des Problems kommt das Integral nicht vor; der betreffende Irrtum ist also hier von nebensächlicher Bedeutung.

§ 8. Über Sommerfelds vereinfachte Behandlung der Elektronenbewegung in den Sitzungsberichten der Amsterdamer Akademie.

Ein wesentlicher Unterschied der Sommerfeld'schen Formeln von den meinigen beruht, wie mehrfach hervorgehoben, darin, daß Herr Sommerfeld die obere Grenze t in (1) durch ∞ ersetzt, indem er sich einen Anfangswert t_0 eingeführt denkt, so daß $t - t_0$ an Stelle von t tritt, und dann t_0 gleich $-\infty$ wählt, oder (was auf dasselbe hinauskommt), indem er in (2) die Größe t_0 gleich $+\infty$ setzt; ich hatte hervorgehoben, daß dies nicht erlaubt ist, denn der Grenzprozeß $t_0 = \infty$ darf (nach allgemeinen mathematischen Prinzipien) erst gemacht werden, nachdem alle Größen (auch die Kräfte) für endliche Werte von t_0 berechnet sind; es genügte zur Begründung dessen darauf zu verweisen, daß das vektorielle Potential, bei Berechnung der Kraft, nach t differenziert werden muß, daß also der Ausdruck (vgl. S. 325 meiner Abhandlung):

$$\lim_{t_0=\infty}\int\!\!\int\!\!\int\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^{t+t_0}\mathfrak{v}_x(t-\tau)\,\frac{S}{R}\,d\tau\right\}dx\,dy\,dz$$

zu bilden ist, der offenbar von dem bei Sommerfeld an dessen Stelle tretenden:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^\infty \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,d\tau \int\int\int \frac{S}{R}\,dx\,dy\,dz\right\}$$

verschieden ausfallen muß. Ich hatte ferner erwähnt, daß auch in der später von Herrn Sommerfeld gegebenen „vereinfachten Behandlung" eine Begründung dafür fehlt, weshalb nach der Zeit zwischen den Grenzen 0 und ∞ integriert wird (S. 329 meiner Abhandlung). Herr Sommerfeld gibt jetzt (oben S. 171) zur Begründung an: „man habe die Grenzen passend zu wählen, um zu einem einfachen Ergebnis und zur Ableitung übersichtlicher physikalischer Tatsachen zu gelangen" und weiter bemerkt er: „bei meiner Wahl der oberen Grenze würde die physikalische Bedeutung des Ergebnisses verschleiert und die explizierte Berechnung von φ unmöglich gemacht". Daß letzteres unrichtig ist, glaube ich hinreichend gezeigt zu haben. Die Einfachheit der Resultate ist gewiß ein erstrebenswertes Ziel, die Richtigkeit derselben ist aber doch wichtiger, und diese leidet sehr wesentlich unter der Festsetzung des Herrn Sommerfeld. Die Grenzen des nach der Zeit τ zu nehmenden Integrals sind nicht willkürlich wählbar, sondern der beschränkenden Bedingung unterworfen, daß das Potential φ den fundamentalen partiellen Differentialgleichungen zu genügen hat, nämlich:

$$(17)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta^2 \varphi = 0 \quad \text{außerhalb des Elektrons,} \\ &\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta^2 \varphi = c^2 \varrho \quad \text{innerhalb des Elektrons;} \end{aligned}$$

und dieser Forderung genügt die Sommerfeld'sche Funktion φ nicht.

Wir haben also zu untersuchen, ob die Funktion:

$$(18)\qquad \varphi_\Omega = \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3}\int_0^\Omega \frac{S}{R}\,d\tau$$

den angegebenen Gleichungen genügt. Dabei ist die obere Grenze ∞ durch die Konstante Ω ersetzt, da sich die Grenze ∞ bei der Differentiation nach t ebenso verhält wie eine Konstante. Zu dem Zwecke müssen wir zunächst den Beweis dafür kurz rekapitulieren, daß obige, in (2) gegebene Funktion φ den Bedingungen (17) genügt (vgl. §§ 1, 2 und 3 meiner Abhandlung oder die entsprechenden Untersuchungen bei Sommerfeld, Göttinger Nachrichten, 1904).

In letzterem bezog sich der Ausdruck $\Delta^2 \varphi$ auf ein im Raum festes Koordinatensystem x', y', z'; mittels der Gleichungen:

$$x' = x + \int_0^t \mathfrak{v}_x\, dt, \quad y' = y + \int_0^t \mathfrak{v}_y\, dt, \quad z' = z + \int_0^t \mathfrak{v}_z\, dt,$$

in denen $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ die Komponenten der Geschwindigkeit sind, wurde ein im Körper festes System x, y, z eingeführt. Die zweite Differentialgleichung (17) ging dadurch in die folgende über:

$$(19)\quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - S\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial t} - 2S\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial t}\mathfrak{v}_x + SS\,\mathfrak{v}_x \mathfrak{v}_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - c^2 \Delta^2 \varphi = c^2 \varrho;$$

in ihr bedeutet S ein Summazeichen, so daß z. B.:

$$S\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{d\mathfrak{v}_y}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{d\mathfrak{v}_z}{dt}.$$

Während in (17) die Größe ϱ eine Funktion von x', y', z' und t war, ist jetzt in (18) ϱ eine Funktion von x, y, z; und nach der Theorie der Fourier'schen Integrale haben wir:

$$(20)\qquad \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} P \cdot e^{iSkx}\, dk\, dl\, dm = \varrho \qquad \text{für } r < a,$$
$$= 0 \qquad \text{„ } r > a,$$

wenn $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Entfernung vom Mittelpunkt des Elektrons (Kugel mit Radius a) bezeichnet, und wenn:

$$(20^a)\qquad P = \frac{1}{8\pi^3}\int\!\!\int\!\!\int \varrho(\varkappa, \lambda, \mu)\, e^{-iSk\varkappa}\, d\varkappa\, d\lambda\, d\mu$$

gesetzt wird, wobei die Integration nach $\varkappa, \lambda, \mu$ über das Innere des Elektrons auszudehnen ist. Sei nun φ' eine zu bestimmende Funktion von x, y, z und k, l, m, und es sei:

$$\varphi = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(k, l, m) \cdot P \cdot dk\, dl\, dm; \tag{21}$$

bezeichnen wir ferner mit $D\varphi$ die linke Seite der Differentialgleichung (19), so ist:

$$\begin{aligned} D\varphi &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} P \cdot D\varphi' \cdot dk\, dl\, dm = c^2 \varrho \\ &= c^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} P\, e^{iSkx}\, dk\, dl\, dm. \end{aligned} \tag{22}$$

Es ist folglich φ eine Lösung der Gleichung (19), wenn die Hilfsfunktion φ' der Differentialgleichung:

$$D\varphi' = c^2 e^{iSkx} \tag{23}$$

im ganzen Raum genügt, so daß wir jetzt von der Notwendigkeit befreit sind, das Innere und das Äußere des Elektrons zu unterscheiden. Zur Integration von (23) wurde sodann:

$$\varphi' = e^{iSkx} F(t) \tag{24}$$

gesetzt, wodurch sich für $F(t)$ die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 F}{d t^2} - 2i \frac{dF}{dt} Sk\mathfrak{v}_x + \left[c^2 s^2 - iSk \frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} - (Sk\mathfrak{v}_x)^2\right] F = c^2 \tag{25}$$

ergab. Die letztere endlich ward durch die Funktion:

$$F = \frac{c}{s} \int_0^{t-t_0} e^{iSk\xi} \sin cs\tau\, d\tau \tag{26}$$

integriert, in der t_0 eine Integrationskonstante bedeutet, während

$$Sk\xi = k\xi + l\eta + m\zeta$$

und:

$$(27)\qquad \xi = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_x(\tau)\, d\tau, \quad \eta = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_y(\tau)\, d\tau, \quad \zeta = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_z(\tau)\, d\tau$$

gesetzt ist. Für die Elektronentheorie wird ϱ konstant und zwar $= \frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}$ gewählt; führt man statt $\varkappa, \lambda, \mu$ räumliche Polarkoordinaten, σ, ϑ, ψ ein, so ergab sich:

$$(28)\qquad \begin{aligned} P &= \frac{3\varepsilon}{32 a^3 \pi^4} \int_0^a \sigma^2\, d\sigma \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} e^{-is\sigma \operatorname{cosin}\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta \\ &= \frac{3\varepsilon}{8 a^3 \pi^3} \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^3}, \end{aligned}$$

und somit nach (21), (24) und (26):

$$\varphi = \frac{3\varepsilon c}{8\pi^3 a^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^4}\, dk\, dl\, dm \int_0^{t-t_0} e^{iSkx} \sin cs\tau\, d\tau,$$

oder wenn man statt k, l, m Polarkoordinaten R, Θ, Ψ einführt:

$$(29)\qquad \begin{aligned} \varphi &= \frac{3\varepsilon}{8\pi^3 a^3} \int_0^{\infty} \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^2} \int_0^{\pi} \sin\Theta\, d\Theta \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^{t-t_0} e^{isR\operatorname{cosin}\Theta} \sin cs\tau\, d\tau \\ &= \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3} \int_0^{t-t_0} \frac{S}{R}\, d\tau, \end{aligned}$$

wenn S das folgende Integral bezeichnet:

$$(30)\qquad S = \int_0^{\infty} \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^3} \cdot \sin Rs \cdot \sin cs\tau \cdot ds,$$

dessen Wert oben unter (3), (4) und (5) angegeben wurde.

In (29) haben wir den obigen Ausdruck (2) des Potentials φ gewonnen, es ist nur die willkürliche Konstante t_0 durch $-t_0$ zu ersetzen (da diese Konstante damals eine andere Bedeutung hatte).

Diese Konstante t_0 ist willkürlich; sie darf aber nicht unendlich groß gewählt werden, denn für $t_0 = \pm\infty$ hat das in (26) aufgestellte Integral F keinen Sinn mehr. Wenn man also mit Herrn Sommerfeld trotzdem $t_0 = -\infty$ setzt, so hat man keine Sicherheit darüber, ob die Funktion φ noch den partiellen Gleichungen (17) genügt; es ist im Gegenteil zu erwarten, daß dies nicht mehr der Fall ist. Diese Erwägung veranlaßte mich hauptsächlich zur Nachprüfung der Sommerfeldschen Resultate; sie erschien mir so einleuchtend, daß ich bei der Divergenz unserer Resultate eine direkte Prüfung, ob für $t_0 = -\infty$ die Differentialgleichungen (17) noch erfüllt sind, für nicht notwendig hielt. Eine solche Prüfung soll aber jetzt vorgenommen werden.

Die Annahme $t_0 = -\infty$ hat für das Differenzieren die nämliche Wirkung, als wenn man die obere Grenze $t - t_0$ in (29) durch eine Konstante Ω ersetzt; wir beschäftigen uns also mit der in (18) definierten Funktion φ_Ω. Die Funktion F ist dann durch:

$$(31) \qquad F_\Omega = \frac{c}{s}\int_0^\Omega e^{iSk\xi} \sin c s \tau \, d\tau$$

zu ersetzen. Wir trennen von ihr einen Faktor ab, indem wir:

$$(32) \qquad F_\Omega = \frac{c}{s}\, e^{iSk\mathfrak{V}_x(t)}\, Q$$

setzen, wo:

$$(33) \qquad \mathfrak{V}_x(t) = \int_\omega^t \mathfrak{v}_x(\tau)\, d\tau \qquad \text{(und entsprechend für } \mathfrak{v}_y \text{ und } \mathfrak{v}_z\text{)}$$

gesetzt werde, unter ω eine willkürliche Konstante verstanden; dann ist in Rücksicht auf (31):

$$Q = \int_0^\Omega e^{-\psi(t-\tau)} \sin c s \tau \, d\tau,$$

wenn:

$$(34) \qquad \psi(t-\tau) = i S k \mathfrak{V}_x (t-\tau)$$

gesetzt wird. Wir stellen zunächst für Q eine lineare Differentialgleichung auf. Es ist:

$$\frac{dQ}{dt} = -\psi'(t-\tau)\int_0^\Omega e^{-\psi(t-\tau)} \sin cs\tau\, d\tau$$

$$= -\int_0^\Omega \frac{d e^{-\psi(t-\tau)}}{d\tau} \sin cs\tau\, d\tau$$

$$= -e^{-\psi(t-\Omega)} \sin cs\Omega + cs\int_0^\Omega e^{-\psi(t-\tau)} \operatorname{cosin} cs\tau\, d\tau,$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = \psi'(t-\Omega)\sin cs\Omega\cdot e^{-\psi(t-\Omega)} - cs\int_0^\Omega \frac{d e^{-\psi(t-\tau)}}{d\tau} \operatorname{cosin} cs\tau\, d\tau$$

$$= [\psi'(t-\Omega)\sin cs\Omega - cs \operatorname{cosin} cs\Omega]\, e^{-\psi(t-\Omega)} - c^2 s^2 Q;$$

wir haben also:

$$(34^a) \quad \frac{d^2 Q}{d^2 t} + c^2 s^2 Q = [\psi'(t-\Omega)\sin cs\Omega - cs \operatorname{cosin} cs\Omega]\, e^{-\psi(t-\Omega)}.$$

Gehen wir nun zu F_Ω zurück, indem wir gemäß (33) und (34):

$$Q = \frac{s}{c}\, e^{-\psi(t)} F_\Omega$$

setzen, so finden wir für F_Ω die Differentialgleichung:

$$(35) \quad \begin{aligned} &\frac{d^2 F_\Omega}{dt^2} - 2iSk\mathfrak{v}_x(t)\cdot\frac{dF_\Omega}{dt} + [c^2 s^2 - iSk\mathfrak{v}_x'(t) - (Sk\mathfrak{v}_x(t))^2]\, F_\Omega \\ &\quad = \left[\psi'(t-\omega)\, c\,\frac{\sin cs\Omega}{s} - c^2 \operatorname{cosin} cs\Omega\right] e^{iSk\xi_0}, \end{aligned}$$

wobei ξ_0 aus (27) entsteht, indem man τ durch Ω ersetzt; es ist also:

$$(36) \qquad iSk\xi_0 = \psi(t) - \psi(t-\Omega) = iSk\int_{t-\Omega}^{t} \mathfrak{v}_x(\tau)\, d\tau.$$

Wie vorauszusehen war, ist also die Konstante ω für das Resultat ohne Bedeutung. Die linke Seite der Differentialgleichung (35) ist mit der linken Seite von (25) in Übereinstimmung; die rechten Seiten sind aber vollständig verschieden. Um nun zu einer partiellen Gleichung für φ_Ω zu gelangen, müssen wir die in obigen Gleichungen (19) bis (25) vorgenommenen Operationen rückwärts verfolgen.

Wir setzen demnach, analog zu (24):

$$\varphi'_\Omega = F_\Omega(t) \cdot e^{iSkx};$$

dann genügt φ'_Ω derjenigen Differentialgleichung, welche aus (23) entsteht, wenn man auf der rechten Seite die Konstante c^2, d. h. die rechte Seite von (25), durch den auf der rechten Seite von (35) stehenden Ausdruck ersetzt, d. h. der partiellen Gleichung:

$$(37) \quad D\varphi'_\Omega = \left[\psi'(t-\Omega)\, c\, \frac{\sin cs\Omega}{s} - c^2 \operatorname{cosin} cs\Omega\right] e^{iSk(x+\xi_0)},$$

in der das Zeichen D dieselbe Bedeutung hat wie in (22). Hieraus entsteht, analog wie bei (22), die Differentialgleichung für φ_Ω, wenn man beiderseits mit P multipliziert und nach k, l, m zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ integriert. Dabei ist P durch (20^a) bezw. für konstante Werte von ϱ (die jetzt allein in Betracht kommen), durch (28) definiert. Mit Rücksicht auf den aus (36) zu entnehmenden Wert von $iSk\xi_0$ läßt sich die rechte Seite von (37) in folgender Form schreiben:

$$\frac{c}{s}\left[\sin cs\Omega \frac{\partial}{\partial\Omega}\left(e^{iSk(x+\xi_0)}\right) - e^{iSk(x+\xi_0)} \frac{\partial \sin cs\Omega}{\partial\Omega}\right].$$

Infolgedessen erhalten wir als partielle Differentialgleichung für die Funktion φ_Ω:

$$(38) \qquad D\varphi_\Omega = c(J_1 - J_2),$$

wo mit J_1 und J_2 die folgenden Integrale bezeichnet sind:

$$J_1 = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin cs\Omega}{s} \frac{\partial}{\partial\Omega}\left(e^{iSk(x+\xi_0)}\right) \cdot P \cdot dk\, dl\, dm,$$

$$J_2 = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iSk(x+\xi_0)} \frac{\partial \sin cs\Omega}{\partial \Omega} \cdot P \cdot dk\, dl\, dm,$$

oder, wenn die konstante Dichte ϱ eingeführt wird, nach (28):

$$J_1 = \frac{3\varepsilon}{8a^3\pi^3} \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^4} \sin cs\Omega \frac{\partial}{\partial \Omega}(e^{iSk(x+\xi_0)})\, dk\, dl\, dm$$

$$J_2 = \frac{3\varepsilon}{8a^3\pi^3} \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^4} e^{iSk(x+\xi_0)} \frac{\partial \sin cs\Omega}{\partial \Omega}\, dk\, dl\, dm.$$

Statt k, l, m führen wir räumliche Polarkoordinaten s, Θ, Ψ in der gleichen Weise ein, wie auf S. 244 meiner Abhandlung; es ist dort nur τ durch den konstanten Wert Ω und demnach R durch R_0 zu ersetzen, wo:

$$R_0^2 = (x + \xi_0)^2 + (z + \eta_0)^2 + (z + \zeta_0)^2,$$

wenn ξ_0, η_0, ζ_0 dieselbe Bedeutung haben wie in (36). Dann wird:

$$Sk(x + \xi_0) = R_0 \cdot s \cdot \operatorname{cosin} \Theta;$$

also:

$$J_1 = \frac{3\varepsilon}{4\pi^2 a^3} \frac{\partial R_0}{\partial \Omega} \int_0^\infty \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^2} \sin cs\Omega \cdot ds \frac{\partial}{\partial R_0} \int_0^\pi e^{iR_0 s \operatorname{cosin}\Theta} \sin\Theta\, d\Theta$$

$$= -\frac{3\varepsilon}{2\pi^2 a^3 R_0^2} \frac{\partial R_0}{\partial \Omega} \int_0^\infty \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^3} (\sin R_0 s - R_0 s \operatorname{cosin} R_0 s) \sin cs\Omega\, ds$$

$$J_2 = \frac{3\varepsilon}{4\pi^2 a^3} \int_0^\infty \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^2} \frac{\partial \sin cs\Omega}{\partial \Omega} ds \int_0^\pi e^{iR_0 s \operatorname{cosin}\Theta} \sin\Theta\, d\Theta$$

$$= \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3 R_0} \int_0^\infty \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^2} \operatorname{cosin} cs\Omega \cdot \sin R_0 s \cdot ds.$$

Das in J_1 auftretende bestimmte Integral ist von Herrn Sommerfeld ausgewertet;[1]) es ist dasjenige, auf welches sich

[1]) Göttinger Nachrichten, 1904, S. 120.

seine obigen Bemerkungen (S. 167 ff.) beziehen. Wir haben darnach:

1. Aus den Strecken $a, c\Omega, R_0$ kann ein Dreieck gebildet werden, dann ist:

$$(39)\qquad J_1 = -\frac{3\varepsilon}{16\pi a^2 R_0}\,\frac{a^2 + R_0^2 - c^2\Omega^2}{a R_0}\,\frac{\partial R_0}{\partial \Omega};$$

2. Aus den Strecken a, $c\Omega$, R_0 kann kein Dreieck gebildet werden; dann ist:

$$(39^a)\qquad J_1 = 0.$$

Das Integral J_2 können wir berechnen, indem wir es auf die beiden Integrale:

$$P(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha s \cdot \sin\beta s}{s^2}\,ds,$$

$$P_1(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{cosin}\alpha s \cdot \sin\beta s}{s}\,ds$$

zurückführen; es ist dann:

$$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3 R_0}\,[P(a, R_0 + c\Omega) + P(a, R_0 - c\Omega)$$
$$- a P_1(a, R_0 + c\Omega) - a P_1(a, R_0 - c\Omega)].$$

Nun ist bekanntlich:

$$\int_0^\infty e^{-ps}\frac{\sin\alpha s\sin\beta s}{s^2}\,ds = \frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arctang}\frac{\alpha+\beta}{p}$$
$$-\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{arctang}\frac{\alpha-\beta}{p} + \frac{p}{4}\log\frac{p^2+(\alpha-\beta)^2}{p^2+(\alpha+\beta)^2},$$

folglich, indem $p = 0$ gesetzt wird:

$$P(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2}\beta \quad \text{für} \quad \alpha > \beta,$$
$$= \frac{\pi}{2}\alpha \quad „ \quad \alpha < \beta$$

und bekanntlich:

$$P_1(a, \beta) = 0 \quad \text{für} \quad a > \beta$$
$$= \frac{\pi}{2} \quad \text{"} \quad a < \beta.$$

Hiernach erhalten wir:

$$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3 R_0}\left[\frac{\pi}{2}a + \frac{\pi}{2}a - \frac{\pi}{2}a - \frac{\pi}{2}a\right]$$
$$= 0 \quad \text{für} \quad a < R_0 - c\Omega < R_0 + c\Omega,$$

$$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3 R_0}\left[\frac{\pi}{2}a + \frac{\pi}{2}(R_0 - c\Omega) - \frac{\pi}{2}a - 0\right]$$
$$= \frac{3\varepsilon c}{16\pi a^3 R_0}(R_0 - c\Omega) \quad \text{für} \quad 0 < R_0 - c\Omega < a < R_0 + c\Omega,$$

$$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3 R_0}\left[\frac{\pi}{2}(R_0 + c\Omega) + \frac{\pi}{2}(R_0 - c\Omega) - 0 - 0\right]$$
$$= \frac{3\varepsilon c}{4\pi a^3} \quad \text{für} \quad 0 < R_0 - c\Omega < R_0 + c\Omega < a,$$

$$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3 R_0}\left[\frac{\pi}{2}a - \frac{\pi}{2}a - \frac{\pi}{2}a + \frac{\pi}{2}a\right]$$
$$= 0 \quad \text{für} \quad a < c\Omega - R_0 < c\Omega + R_0,$$

$$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3 R_0}\left[\frac{\pi}{2}a - \frac{\pi}{2}(c\Omega - R_0) - \frac{\pi}{2}a - 0\right]$$
$$= \frac{3\varepsilon c}{8\pi a^3 R_0}(R_0 - c\Omega) \quad \text{für} \quad 0 < c\Omega - R_0 < a < c\Omega + R_0,$$

$$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3 R_0}\left[\frac{\pi}{2}(R_0 + c\Omega) - \frac{\pi}{2}(c\Omega - R_0) - 0 - 0\right]$$
$$= \frac{3\varepsilon c}{4\pi a^3} \quad \text{für} \quad 0 < c\Omega - R_0 < c\Omega + R_0 < a.$$

Wir fassen diese Resultate in folgender Weise zusammen; es ist:

(40) $$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{8\pi a^3}\,\frac{R_0 - c\,\Omega}{R_0},$$

wenn sich aus den Strecken a, R_0, $c\,\Omega$ ein Dreieck bilden läßt,

(40^a) $$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi a^3},$$

wenn ein solches Dreieck unmöglich ist, weil a zu groß ist,

(40^b) $$J_2 = 0,$$

wenn das Dreieck unmöglich ist, weil a zu klein ist.

Die durch Gleichung (18) definierte Funktion φ_Ω genügt der durch Gleichung (38) dargestellten Differentialgleichung, wenn die auf der rechten Seite auftretenden Ausdrücke J_1 und J_2 so gewählt werden, wie es die Gleichungen (39), ... (40^b) vorschreiben.

Die vorstehende Betrachtung wird ungültig, wenn die Funktion $\psi(t - \Omega)$ von t unabhängig wird, welche Werte auch k, l, m haben mögen; dies tritt nach (33) und (34) ein, wenn $\mathfrak{v}_x = 0$, $\mathfrak{v}_y = 0$, $\mathfrak{v}_z = 0$, d. h. im Falle der dauernden Ruhe des Elektrons. Dann nämlich ist auch die durch (32) eingeführte Funktion Q von t unabhängig, und an Stelle von (34^a) erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{d^2 Q}{d t^2} = 0,$$

aus der sich eine Gleichung von der Form (35) nicht ableiten läßt. Dieser einfachste Fall, mit dem wir uns schon oben in § 2 beschäftigt haben, ist also hier auszuschließen.

Herr Sommerfeld nimmt nun in (18) für Ω den Wert ∞ oder eine sehr große endliche Zahl. Bei Unterlichtgeschwindigkeit kann man jedenfalls Ω so groß nehmen, daß $c\,\Omega > R_0$ ist und zugleich $a < c\,\Omega - R_0$; denn R_0 bedeutet die Entfernung des Punktes x', y', z' d. h. des Punktes, in dem sich der Punkt x, y, z zur Zeit t befindet, von der Stelle, wo sich der Mittelpunkt des Elektrons zur Zeit $t - \Omega$ befand. Dann gelten aber die Gleichungen (39^a) und (40^b), und zwar für alle Punkte x, y, z des Raumes, unabhängig davon, ob der Punkt x, y, z im Innern oder außerhalb des Elektrons liegt. Bei Überlichtgeschwindigkeit kann Ω so groß gewählt werden, daß $R_v > c\Omega$ und $a < R_v - c\Omega$ wird, und es gelten wieder die Gleichungen (39^a) und (40^b); ausgenommen sind hier solche Bewegungen mit Überlichtgeschwindigkeit, bei denen das Elektron ein gewisses endliches Raumgebiet nicht verläßt.

Für hinreichend große Werte von Ω genügt hiernach die Funktion φ_Ω im allgemeinen der Differentialgleichung:

$$D\varphi_\Omega = 0,$$

und somit der ersten Differentialgleichung (17) im ganzen Raume, während die zweite Gleichung (17) nicht erfüllt ist. Das gilt dann auch für $\Omega = \infty$.

Alle Entwicklungen des Herrn Sommerfeld beziehen sich also, von Gleichung (16) seiner ersten Abhandlung ab, auf eine Lösung φ (und ebenso bei $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$), die nur außerhalb des Elektrons brauchbar ist; die vom Elektron auf sein eigenes Innere während der Bewegung ausgeübten Kräfte können daher durch die Sommerfeld'schen Formeln nicht richtig dargestellt werden.

Auf S. 330 meiner Abhandlung erwähnte ich, daß Herr Herglotz die Sommerfeld'schen Formeln auf anderem Wege abgeleitet habe, daß aber bei ihm ein Beweis dafür fehle, daß seine Lösung auch der zweiten Gleichung (17) genüge. Nach vorstehenden Ausführungen ist derselbe Einwurf gegen die Sommerfeld'schen Entwicklungen zu erheben, und es ist daher nicht auffällig, wenn beide Forscher zu den gleichen Resultaten gelangt sind.