Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVII. Jahrgang 1907.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1908.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Flächen eines dreifach unendlichen linearen Systems, welche mit einer gegebenen algebraischen Raumkurve eine Berührung 3. Ordnung eingehen.

Von Dr. **Franz Thalreiter.**

(*Eingelaufen 6. Juli.*)

Die Lösung des vorliegenden Problems verlangt die Elimination der Parameter $\varkappa$, λ und μ, der homogenen Variabeln x_1, x_2, x_3, x_4, der Differentiale dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, der Differentiale zweiter und dritter Ordnung $d^2x_1, d^2x_2, d^2x_3, d^2x_4$ und $d^3x_1, d^3x_2, d^3x_3, d^4x_4$ aus folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi + \varkappa\psi + \lambda\chi + \mu\omega &= 0\\
d\varphi + \varkappa d\psi + \lambda d\chi + \mu d\omega &= 0\\
d^2\varphi + \varkappa d^2\psi + \lambda d^2\chi + \mu d^2\omega &= 0\\
d^3\varphi + \varkappa d^3\psi + \lambda d^3\chi + \mu d^3 w &= 0\\
f = 0,\ df = 0,\ d^2f = 0,\ d^3f &= 0\\
g = 0,\ dg = 0,\ d^2g = 0,\ d^3g &= 0.
\end{aligned}$$

Mit $\varphi, \psi, \chi, \omega$ sollen ganze homogene Funktionen von derselben Ordnung s bezeichnet werden, mit f und g zwei ganze homogene Funktionen n^{ter} bzw. m^{ter} Ordnung.

Es soll hier dieselbe Methode angewandt werden, die Herr Professor Lindemann in der Arbeit „Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre".[1]) ge-

[1]) Cf. Bulletin de la Société Mathématique de France, Tome dixième, pag. 21.

geben hat. An Stelle der Kurven des dreifach unendlich linearen Systems treten hier Flächen, während die gegebene Kurve, mit der eine Berührung 3. Ordnung erreicht werden soll, mit einer algebraischen Raumkurve vertauscht wird.

In der Ebene wurden zu diesem Zwecke die Punkte bestimmt, in denen die Berührung stattfinden soll, und diese wurden als Koinzidenzpunkte einer gewissen Korrespondenz gefunden. Ebenso kann auch im Raume die Korrespondenz angegeben werden, vermöge deren jedem Punkt x die ihn ihm die Raumkurve berührende Fläche eines Büschels oder Netzes entspricht. Die benützten Sätze über Korrespondenz in der Ebene können ohne weiteres auf den Raum übertragen werden, wie dies Herr Brill in der Arbeit „Zur Theorie der Elimination und der algebraischen Kurven"[1]) gezeigt hat.

Nimmt man Ebenen statt der Flächen des dreifach unendlich linearen Systems, welche mit der Raumkurve eine Berührung 3. Ordnung haben sollen, so kommt man auf das Problem von Clebsch „Über die Wendungsberührebenen der Raumkurven",[2]) so daß die hier behandelte Aufgabe die allgemeinere ist, der sich als Spezialfall die von Clebsch unterordnet.

Wie in der zitierten Arbeit des Herrn Professors Lindemann soll zuerst eine Berührung von der 1. Ordnung untersucht werden.

§ 1. Berührung 1. Ordnung.

Die algebraische Raumkurve soll, um symbolisch rechnen zu können, als Schnitt zweier algebraischer Flächen dargestellt werden:

$$f = 0 \quad \text{oder} \quad f^n(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

und

$$g = 0 \quad \text{oder} \quad g^m(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Ferner sollen die Definitionen gelten:

---

[1]) Mathematische Annalen, Band 4, pag. 522.

[2]) Crelles Journal, Band 63.

$$f_i = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad g_i = \frac{1}{m}\frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Es müssen zuerst die Flächen eines Büschels:

$$\varphi_0(x) + \lambda\,\varphi_1(x) = 0 \tag{1}$$

bestimmt werden, welche die Raumkurve berühren. Zu diesem Zwecke kann man die Berührungspunkte der verlangten Flächen auf der Raumkurve suchen. Diese Punkte sind durch die Korrespondenz gegeben:

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(y) & \varphi_1(y) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Setzt man in dieser Gleichung $y_i = x_i + dx_i$, so wird:

$$\begin{vmatrix} \sum \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}\,dx_i & \sum \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\,dx_i \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Die dx_i sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + f_3\,dx_3 + f_4\,dx_4 &= 0 \\ g_1\,dx_1 + g_2\,dx_2 + g_3\,dx_3 + g_4\,dx_4 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

und ferner durch die Idendität:

$$\varkappa_1\,dx_1 + \varkappa_2\,dx_2 + \varkappa_3\,dx_3 + \varkappa_4\,dx_4 = 0, \tag{4}$$

wenn zwischen den $\varkappa_i$ die Relation besteht:

$$\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 + \varkappa_4 x_4 = 1.$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) erhält man:

$$\begin{aligned} \varrho\,dx_1 &= f_4(\varkappa_2 g_3 - g_2\varkappa_3) + g_4(f_2\varkappa_3 - \varkappa_2 f_3) - \varkappa_4(f_2 g_3 - g_2 f_3) \\ \varrho\,dx_2 &= f_1(g_3\varkappa_4 - g_4\varkappa_3) - g_1(f_3\varkappa_4 - f_4\varkappa_3) + \varkappa_1(f_3 g_4 - g_3 f_4) \\ \varrho\,dx_3 &= f_1(\varkappa_2 g_4 - g_2\varkappa_4) - g_1(\varkappa_2 f_4 - f_2\varkappa_4) + \varkappa_1(g_2 f_4 - g_4 f_2) \\ \varrho\,dx_4 &= f_1(g_2\varkappa_3 - \varkappa_2 g_3) - f_2(g_1\varkappa_3 - \varkappa_1 g_3) + f_3(g_1\varkappa_2 - g_2\varkappa_1). \end{aligned} \tag{4^a}$$

Diese Werte führen wir in obiger Determinante ein und finden:

$$\begin{vmatrix} (\varphi_0 f g \varkappa) & (\varphi_1 f g \varkappa) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Setzen wir jetzt:

$$\varphi_0(x) = \alpha_x^s, \quad \varphi_1(x) = \beta_x^s,$$

$$f(x) = a_x^n, \quad g(x) = b_x^m,$$

also

$$(\varphi_0 f g \varkappa) = n \cdot m \cdot s \cdot (\alpha a b \varkappa)\, \alpha_x^{s-1}\, a_x^{n-1}\, b_x^{m-1}$$

$$(\varphi_1 f g \varkappa) = n \cdot m \cdot s \cdot (\beta a b \varkappa)\, \beta_x^{s-1}\, a_x^{n-1}\, b_x^{m-1},$$

so geht Gleichung (5) über in:

$$[(\alpha a b \varkappa)\, \beta_x - (\beta a b \varkappa)\, \alpha_x]\, a_x^{n-1}\, b_x^{m-1}\, \alpha_x^{s-1}\, \beta_x^{s-1} = 0.$$

Hier kann nun der Faktor $\varkappa_x = \varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 + \varkappa_4 x_4$ leicht abgespalten werden durch Anwendung der Relation:[1])

$$\beta_x(\alpha a b \varkappa) - \varkappa_x(\alpha a b \beta) + b_x(\alpha a \varkappa \beta) - a_x(\alpha b \varkappa \beta) + \alpha_x(a b \varkappa \beta) = 0.$$

Und da $a_x^n = 0$, $b_x^m = 0$, $\varkappa_x = 1$, so wird die Gl. (5):

$$(a b \alpha \beta)\, a_x^{n-1}\, b_x^{m-1}\, \alpha_x^{s-1}\, \beta_x^{s-1} = 0.$$

Die gesuchten Berührungspunkte sind also die Schnittpunkte der durch $f = 0$ und $g = 0$ dargestellten Raumkurve mit der Jacobischen Fläche bezüglich der Flächen des Systems:

$$f = 0, \quad g = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 0.$$

---

[1]) Diese Formel kann leicht aus der entsprechenden für ternäre Formen gewonnen werden.

§ 2. Berührung 2. Ordnung.

Gegeben ist ein zweifach unendliches lineares System:

$$\varphi + \lambda\psi + \mu\chi = 0 \tag{1}$$

wo

$$\varphi = a_x^s, \quad \psi = \beta_x^s, \quad \chi = \gamma_x^s$$

und

$$\varphi_i = \frac{1}{s}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \quad \psi_i = \frac{1}{s}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \quad \chi_i = \frac{1}{s}\frac{\partial\chi}{\partial x_i}.$$

Die Gleichung der Fläche von der Ordnung s, welche obigem System angehört und die Kurve $f = 0$ und $g = 0$ in einem Punkt x berührt, ist, wenn y der variable Punkt ist:

$$(fg\psi\chi)\varphi(y) + (fg\chi\varphi)\psi(y) + (fg\varphi\psi)\chi(y) = 0 \tag{2}$$

oder

$$\begin{aligned}&[(a\,a'\beta\gamma)\beta_x^{s-1}\gamma_x^{s-1}a_y^s \\ &+ (aa'\gamma a)\gamma_x^{s-1}a_x^{s-1}\beta_y^s + (aa'a\beta)a_x^{s-1}\beta_x^{s-1}\gamma_y^s]a_x^{n-1}a'^{m-1}_x = 0\end{aligned} \tag{3}$$

wobei folgende Definitionen eingeführt werden sollen:

$$a_x^n = b_x^n = c_x^n = 0$$

und

$$a'^m_x = b'^m_x = c'^m_x = 0.$$

Diese Gleichung (3) kann man auch in der Form schreiben:

$$\begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) & \chi(y) & 0 & 0 \\ \varphi_1(x) & \psi_1(x) & \chi_1(x) & f_1(x) & g_1(x) \\ \varphi_2(x) & \psi_2(x) & \chi_2(x) & f_2(x) & g_2(x) \\ \varphi_3(x) & \psi_3(x) & \chi_3(x) & f_3(x) & g_3(x) \\ \varphi_4(x) & \psi_4(x) & \chi_4(x) & f_4(x) & g_4(x) \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Man hat ferner noch die Relationen:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + x_3\varphi_3 + x_4\varphi_4 \\ \psi(x) &= x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3 + x_4\psi_4 \\ \chi(x) &= x_1\chi_1 + x_2\chi_2 + x_3\chi_3 + x_4\chi_4 \\ f(x) &= x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 = 0 \\ g(x) &= x_1 g_1 + x_2 g_2 + x_3 g_3 + x_4 g_4 = 0.\end{aligned}$$

Setzt man nun:

$$y = x + 2\,d\,x + d^2 x,$$

so gehen die Glieder der 1. Horizontalreihe obiger Determinante über in:

$$(s-1)\,\alpha_x^{s-2}\,\alpha_{dx}^2, \quad (s-1)\,\beta_x^{s-2}\,\beta_{dx}^2, \quad (s-1)\,\gamma_x^{s-2}\,\gamma_{dx}^2,$$
$$(n-1)\,a_x^{n-2}\,a_{dx}^2, \quad (m-1)\,a_x'^{m-2}\,a_{dx}'^2.$$

Wir berechnen zuerst den Ausdruck $\varrho^2 a_{dx}^2$:

$$\varrho^2\,a_{dx}^2 = (a\,f\,g\,\varkappa)^2 = (\alpha\,a\,a'\,\varkappa)\,(\alpha\,b\,b'\,\varkappa)\,a_x^{n-1}\,b_x^{n-1}\,a_x'^{m-1}\,b_x'^{m-1}. \quad (5)$$

Und es ist:

I. $a_x(\alpha\,b\,b'\,\varkappa) = \varkappa_x\,(\alpha b b' a) - b'_x(\alpha\,b\,\varkappa a) + b_x(\alpha b'\,\varkappa\,a) - \alpha_x(b\,b'\,\varkappa\,a)$.

II. $b_x(\alpha\,a\,a'\,\varkappa) = \varkappa_x(\alpha\,a\,a'\,b) - a'_x(\alpha\,a\,\varkappa\,b) + a_x(\alpha a'\,\varkappa\,b) - \alpha_x(a\,a'\,\varkappa\,b)$.

Wendet man dies auf den Ausdruck (5) an, so wird, da die Glieder mit den Faktoren $a_x'^m$ und $b_x'^m$ verschwinden:

$$\begin{aligned}\varrho^2\,a_{dx}^2 = a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,a_x'^{m-1}\,b_x'^{m-1}\,&[b_x\,\varkappa_x\,(\alpha\,a\,a'\,b)\,(\alpha\,b'\,\varkappa\,a)\\ &+ a_x\,b_x\,(\alpha\,a'\,\varkappa\,b)\,(\alpha\,b'\,\varkappa\,a) - a_x\,b_x\,(a\,a'\,\varkappa\,b)\,(\alpha\,b'\,\varkappa\,a)\\ &- \alpha_x\,\varkappa_x\,(\alpha\,a\,a'\,b)(b\,b'\,\varkappa\,a) - a_x\,\varkappa_x\,(\alpha\,a'\,\varkappa\,b)\,(\alpha\,b\,b'\,a)\\ &+ \varkappa_x^2\,(\alpha\,a\,a'\,b)\,(\alpha\,b\,b'\,a) + \alpha_x\,\varkappa_x\,(a\,a'\,\varkappa\,b)\,(\alpha\,b\,b'\,a)\\ &- a_x\,\alpha_x\,(\alpha\,a'\,\varkappa\,b)\,(b\,b'\,\varkappa\,a) + \alpha_x^2(a\,a'\,\varkappa\,a)\,(b\,b'\,\varkappa\,\mathrm{a})].\end{aligned} \quad (6)$$

Durch Anwendung der Formel II geht das 1. Glied über in:

$$\begin{aligned}a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,a_x'^{m-1}\,b_x'^{m-1}\,&[b_x^2(\alpha a a' b)(\alpha a\,a'\,\varkappa) + a'_x b_x(\alpha a \varkappa b)(\alpha\,a\,a'\,b)\\ &- a_x\,b_x\,(\alpha\,a\,a'\,b)\,(\alpha\,a'\,\varkappa\,b) + \alpha_x\,b_x(\alpha\,a\,a'\,b)\,(a\,a'\,\varkappa\,b)].\end{aligned}$$

In diesem Ausdruck verschwindet das 1. und 2. Glied identisch wegen $a_x'^m = 0$ und $b_x^n = 0$, das 3. und 4. Glied heben sich mit dem zweiten und dritten des Ausdruckes (6) auf und das 4. Glied von (6) geht durch Vertauschung von a' und b' in das 5. Glied über. Also wird:

$$\begin{aligned}\varrho^2 a_{d\,x}^2 = a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} [\varkappa_x^2 (a\,a\,a'\,b)(a\,b\,b'\,a)\\ + a_x^2 (a\,a'\,\varkappa\,b)(b\,b'\,\varkappa\,a) - 2\,a_x \varkappa_x (a\,a'\,\varkappa\,b)(a\,b\,b'\,a)\\ - a_x a_x (a\,a'\,\varkappa\,b)(b\,b'\,\varkappa\,a) + a_x \varkappa_x (a\,a'\,\varkappa\,b)(a\,b\,b'\,a)].\end{aligned} \tag{7}$$

Diese Relation kann noch weiter vereinfacht werden; durch Vertauschung von a und b und indem man die halbe Summe des alten und neuen Ausdruckes bildet, geht das letzte Glied über in:

$$\begin{aligned}&a_x^{n-1} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \varkappa_x (a\,a'\,\varkappa\,b)(a\,b\,b'\,a)\\ &= \tfrac{1}{2} a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \varkappa_x (a\,b\,b'\,a) [a_x (a\,a'\,\varkappa\,b) - b_x (a\,a'\,\varkappa\,a)]\\ &= \tfrac{1}{2} a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \varkappa_x (a\,b\,b'\,a) [a_x (a\,a'\,\varkappa\,b) - \varkappa_x (a\,a\,a'\,b)];\end{aligned}$$

Ebenso erzielt man durch Vertauschung von a und b:

$$\begin{aligned}&a_x^{n-1} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} a_x (a\,a'\,\varkappa\,b)(b\,b'\,\varkappa\,a)\\ &= \tfrac{1}{2} a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} (b\,b'\,\varkappa\,a) [a_x (a\,a'\,\varkappa\,b) - b_x (a\,a'\,\varkappa\,a)]\\ &= \tfrac{1}{2} a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} (b\,b'\,\varkappa\,a) [(a_x (a\,a'\,\varkappa\,b) - \varkappa_x (a\,a\,a'\,b)].\end{aligned}$$

Der Ausdruck (7) erhält jetzt die Form:

$$\begin{aligned}\varrho^2 a_{d\,x}^2 = a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} [\tfrac{1}{2} \varkappa_x^2 (a\,a\,a'\,b)(a\,b\,b'\,a)\\ + \tfrac{1}{2} a_x^2 (a\,a'\,\varkappa\,b)(b\,b'\,\varkappa\,a) + a_x \varkappa_x (a\,a'\,\varkappa\,b)(a\,b\,b'\,a)].\end{aligned} \tag{8}$$

Für die 4. und 5. Kolonne der Determinante (4) pag. (5) läßt sich der Ausdruck (8) noch mehr umformen. Setzt man zuerst $a = c$, dann kommt:

$$\begin{aligned}&(n-1)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} \varkappa_x (a\,a'\,\varkappa\,b)(c\,b\,b'\,a)\\ &= \tfrac{1}{3} (n-1)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \varkappa_x \cdot (c\,b\,b'\,a) \cdot [(a\,a'\,\varkappa\,c)\, c_x\\ &\qquad - (c\,a'\,\varkappa\,b)\, a_x - (a\,a'\,\varkappa\,c)\, b_x]\\ &= \tfrac{1}{3} (n-1)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \varkappa_x^2 (c\,a\,a'\,b)(c\,b\,b'\,a).\end{aligned}$$

Und weil noch die Gleichungen gelten:

$$f = 0 \quad \text{und} \quad df = 0,$$

so wird schließlich:

$$\varrho^2 c_{dx}^2 c_x^{n-2} = \tfrac{1}{6} a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \varkappa_x^2 (c\,a\,a'\,b)(c\,b\,b'\,a) \quad (9)$$

Setzt man aber in (8):

$$a = c',$$

so verschwindet das 3. Glied identisch und es bleibt:

$$\varrho^2 c_{dx}'^2\; c_x'^{m-2} = \tfrac{1}{2} a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x'^{m-2} \varkappa_x^2 (c' a a' b)(c' b b' a). \quad (10)$$

Multipliziert man die vier letzten Reihen der Determinante (4) mit:

$$(s-1)(a\,b\,b')_1 (a\,a'\,\varkappa\,b)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \varkappa_x,$$
$$(s-1)(a\,b\,b')_2 (a\,a'\,\varkappa\,b)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \varkappa_x,$$
$$(s-1)(a\,b\,b')_3 (a\,a'\,\varkappa\,b)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \varkappa_x,$$
$$(s-1)(a\,b\,b')_4 (a\,a'\,\varkappa\,b)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \varkappa_x,$$

und zieht diese Produkte von den Gliedern der 1. Reihe ab, so werden diese:

$$\tfrac{1}{2}(s-1)(\alpha\,a\,a'\,b)(\alpha b b' a)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \alpha_x^{s-2} \varkappa_x^2,$$
$$\tfrac{1}{2}(s-1)(\beta\,a\,a'\,b)(\beta b b' a)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \beta_x^{s-2} \varkappa_x^2,$$
$$\tfrac{1}{2}(s-1)(\gamma\,a\,a'\,b)(\gamma b b' a)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \gamma_x^{s-2} \varkappa_x^2,$$
$$\frac{n+2s-2}{6}(c\,a\,a'\,b)(c b b' a)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-2} \varkappa_x^2,$$
$$\tfrac{1}{2}(m-1)(c'\,a\,a'\,b)(c' b b' a)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x'^{m-2} \varkappa_x^2.$$

Durch diese Operationen ist der Faktor $\varkappa_x^2$ vollständig abgespalten, und die $\varkappa_i$ kommen in den Gliedern der Determinante nicht mehr vor.

Die Punkte unserer Raumkurve, in denen eine Fläche des Büschels (1) pag. (215) eine Berührung von der 2. Ordnung mit ihr hat, sind ihre Schnittpunkte mit folgender Fläche:

$$\begin{vmatrix} (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)X & \frac{n+2s-3}{3}\Delta & (m-1)G \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & f_1 & g_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & f_2 & g_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & f_3 & g_3 \\ \varphi_4 & \psi_4 & \chi_4 & f_4 & g_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

wo:

$$\Phi = (\alpha a a' b)(\alpha b b' a) a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \alpha_x^{s-2}$$
$$\Psi = (\beta a a' b)(\beta b b' a) a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \beta_x^{s-2}$$
$$X = (\gamma a a' b)(\gamma b b' a) a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \gamma_x^{s-2}$$
$$\Delta = (c a a' b)(c b b' a) a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-2}$$
$$G = (c' a a' b)(c' b b' a) a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x'^{m-2}.$$

In dem Ausdruck (5) pag. 216 wurden zu seiner Berechnung die Symbole a, b der Form $a_x^n = b_x^n \ldots$ in den Formeln I und II zusammengefaßt. Statt dessen kann dies auch in anderer Weise noch geschehen. Hier soll z. B. von den Formeln:

$$\text{III.} \quad a_x'(a b b' \varkappa) = \varkappa_x (a b b' a') - b_x'(a b \varkappa a') + b_x (a b \varkappa a') - a_x (b b' \varkappa a')$$

$$\text{IV.} \quad b_x'(a a a' \varkappa) = \varkappa_x (a a a' b') - a_x'(a a \varkappa b') + a_x (a a' \varkappa b') - a_x (a a' \varkappa b')$$

ausgegangen werden.

Führt man in analoger Weise wie vorher die Rechnung durch, so findet man, daß die Fläche (11) von vorher jetzt durch folgende Fläche ersetzt wird:

$$\begin{vmatrix} (s-1)\Phi_{\mathrm{I}} & (s-1)\Psi_{\mathrm{I}} & (s-1)X_{\mathrm{I}} & (n-1)\Delta_{\mathrm{I}} & \frac{m+2s-3}{3} G_{\mathrm{I}} \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & f_1 & g_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & f_2 & g_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & f_3 & g_3 \\ \varphi_4 & \psi_4 & \chi_4 & f_4 & g_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

wo die Definitionen gelten:

$$\Phi_{\mathrm{I}} = (\alpha\, a\, a'\, b')\,(\alpha\, b\, b'\, a')\, a_x'^{\,m-2}\, b_x'^{\,m-2}\, a_x^{n-1}\, b_x^{n-1}\, \alpha_x^{s-2}$$

$$\Psi^{\mathrm{I}} = (\beta\, a\, a'\, b')\,(\beta\, b\, b'\, a')\, a_x'^{\,m-2}\, b_x'^{\,m-2}\, a_x^{n-1}\, b_x^{n-1}\, \beta_x^{s-2}$$

$$X_{\mathrm{I}} = (\gamma\, a\, a'\, b')(\gamma\, b\, b'\, a')\, a_x'^{\,m-2}\, b_x'^{\,m-2}\, a_x^{n-1}\, b_x^{n-1}\, \gamma_x^{s-2}$$

$$\Delta_{\mathrm{I}} = (c\, a\, a'\, b')(c\, b\, b'\, a')\, a_x'^{\,m-2}\, b_x'^{\,m-2}\, a_x^{n-1}\, b_x^{n-1}\, c_x^{n-2}$$

$$G_{\mathrm{I}} = (c'\, a\, a'\, b')\,(c'\, b\, b'\, a')\, a_x'^{\,m-2}\, b_x'^{\,m-2}\, a_x^{n-1}\, b_x^{n-1}\, c_x'^{\,m-2}.$$

Setzt man nun $s = 1$, so geht das Flächenbüschel (1) pag. 215 in das Ebenenbüschel über:

$$\alpha_x + \lambda\, \beta_x + \mu\, \gamma_x = 0,$$

und die Gleichungen (11) und (12) werden:

$$(m-1)\, G\,(\varphi\, \psi\, \chi\, f) - \frac{(n-1)}{3}\, \Delta\,(\varphi\, \psi\, \chi\, g) = 0$$

$$\frac{(m-1)}{3}\, G_{\mathrm{I}}\,(\varphi\, \psi\, \chi\, f) - (n-1)\, \Delta_{\mathrm{I}}\,(\varphi\, \psi\, \chi\, g) = 0.$$

Durch Umrechnung kann man aber zeigen, daß:

$$\Delta_{\mathrm{I}} = \frac{\Delta}{3} \quad \text{und} \quad G = \frac{G_{\mathrm{I}}}{3}.$$

Für den Fall $s = 1$ sind also die beiden Flächen (11) und (12) identisch.

§ 3. Berührung 3. Ordnung.

Nach den vorausgehenden Resultaten kann man leicht die Gleichung einer Fläche von der s^{ten} Ordnung aufstellen, welche dem 3fach unendlich linearen System:

$$\varphi\,(x) + \varkappa\, \psi\,(x) + \lambda\, \chi\,(x) + \mu\, \omega\,(x) = 0$$

angehört, und welche die Raumkurve $f = 0$ und $g = 0$ in einem gegebenen Punkt x von der 2. Ordnung berührt. Diese Gleichung ist bei variabeln y:

$$\begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) & \chi(y) & \omega(y) & 0 & 0 \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)X & (s-1)\Omega & \frac{n+2s-3}{3}\Delta & (m-1)G \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 & g_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & f_2 & g_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 & g_3 \\ \varphi_4 & \psi_4 & \chi_4 & \omega_4 & f_4 & g_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

Die Größen Φ, Ψ, X, Δ und G sind durch (11) pag. 219 definiert, und es sei noch:

$$\omega(x) = \delta_x^s, \quad \Omega = (\delta\, a\, a'\, b)(\delta\, b\, b'\, a)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \delta_x^{s-2}.$$

Diese Gleichung (1) wird befriedigt für $y = x$, $y = x + dx$ und $y = x + 2dx + d^2x$, wie man durch Anwendung der vorausgehenden Betrachtungen sehen kann.

Nehmen wir: $y = x + 3dx + 3d^2x + d^3x$, um eine Berührung 3. Ordnung zu erzielen, so transformieren sich die Elemente der 1. Reihe in:

$$\begin{array}{l} 3(s-1)\, a_x^{s-2} a_{dx} a_{d^2x} + (s-1)(s-2)\, a_x^{s-3} a_{dx}^3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 3(n-1)\, a_x^{n-2} a_{dx} a_{d^2x} + (n-1)(n-2)\, a_x^{n-3} a_{dx}^3, \\ 3(m-1)\, a_x'^{m-2} a'_{dx} a'_{d^2x} + (m-1)(m-1)\, a_x'^{m-3} a_{dx}'^3. \end{array} \quad (2)$$

Multipliziert man (8) pag. 217 mit a_x^{s-2} und differenziert, so kommt:

$$\begin{aligned} & 2\varrho^2 a_x^{s-2} a_{dx} a_{d^2x} + \varrho^2 (s-2) a_x^{s-3} + 2\varrho\, d\varrho\, a_x^{s-2} a_{dx}^2 \qquad (3) \\ & = (n-2) a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} a_x^{s-2} \varkappa_x^2 (a a a' b)(a b b' a) a_{dx} \\ & + (m-1) a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-2} b_x'^{m-1} a_x^{s-2} \varkappa_x^2 (a a a' b)(a b b' a) a'_{dx} \\ & + \tfrac{1}{2}(s-2) a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} a_x^{s-3} \varkappa_x^2 (a a a' b)(a b b' a) a_{dx} \\ & + (n-2) a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} a_x^{s} (a a' \varkappa b)(b b' \varkappa a) a_{dx} \\ & + (m-1) a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-2} b_x'^{m-1} a_x^{s} (a a' \varkappa b)(b b' \varkappa a) a'_{dx} \\ & + \tfrac{1}{2} \cdot s \cdot a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} a_x^{s-1} (a a' \varkappa b)(b b' \varkappa a) a_{dx} \end{aligned}$$

$$+2(n-2)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}\,\alpha_x^{s-1}\varkappa_x(aa'\varkappa b)(abb'a)a_{dx}$$
$$+2(m-1)a_x^{n-2}b_x^{n-2}a_x'^{m-2}b_x'^{m-1}\,\alpha_x^{s-1}\varkappa_x(aa'\varkappa b)(abb'\alpha)a'_{dx}$$
$$+(s-)a_x^{n-2}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}\,\alpha_x^{s-2}\varkappa_x(aa'\varkappa b)(abb'\alpha)\,\alpha_{dx}.$$

Es ist weiter:

$$\varrho\,\alpha_{dx}\,\alpha_x = (\alpha c c'\varkappa)\,\alpha_x\,c_x^{n-1}\,c_x'^{m-1}$$
$$= [(\alpha cc'a)\varkappa_x - (\alpha c\varkappa a)c'_x + (\alpha c'\varkappa a)c_x - (cc'\varkappa a)\alpha_x]\,c_x^{n-1}c_x'^{m-1}$$

wobei aber immer gilt:

$$c_x^n = 0 \quad \text{und} \quad c_x'^m = 0.$$

Relation (3) geht dann über in:

$$2\varrho^3\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}\alpha_{d^2x} + \varrho^3(s-2)\alpha_x^{s-3}\alpha_{dx}^3 + 2\varrho^2 d\varrho\,\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}^2 \tag{4}$$
$$=(n-2)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}\alpha_x^{s-2}\varkappa_x^2c_x^{n-1}c_x'^{m-1}(\alpha aa'b)(abb'\alpha)(\alpha cc'\varkappa)$$
$$+(m-1)a_x^{n-2}b_x^{n-2}a_x'^{m-2}b_x'^{m-1}\alpha_x^{s-2}\varkappa_x^2c_x^{n-1}c_x'^{m-1}(\alpha aa'b)(abb'\alpha)(a'cc'\varkappa)$$
$$+\tfrac{1}{2}(s-2)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}\alpha_x^{s-3}\varkappa_x^3c_x^{n-1}c_x'^{m-1}(\alpha aa'b)(abb'\alpha)(\alpha cc'a)$$
$$-\tfrac{1}{2}(s-2)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}\alpha_x^{s-2}\varkappa_x^2c_x^{n-1}c_x'^{m-1}(\alpha aa'b)(abb'\alpha)(cc'\varkappa a)$$
$$+(n-2)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}\alpha_x^{s}a_{dx}\cdot\varrho(aa'\varkappa b)(bb'\varkappa a)$$
$$+(m-1)a_x^{n-2}b_x^{n-2}a_x'^{m-2}b_x'^{m-1}\alpha_x^{s}a'_{dx}\cdot\varrho(aa'\varkappa b)(bb'\varkappa a)$$
$$+\tfrac{1}{2}s\,a_x^{n-2}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}\alpha_x^{s-1}\alpha_{dx}\cdot\varrho(aa'\varkappa b)(bb'\varkappa a)$$
$$+2(n-2)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}\alpha_x^{s-1}\varkappa_xc_x^{n-1}c_x'^{m-1}(aa'\varkappa b)(abb'\alpha)(acc'\varkappa)$$
$$+2(m-1)a_x^{n-2}b_x^{n-2}a_x'^{m-2}b_x'^{m-1}\alpha_x^{s-1}\varkappa_xc_x^{n-1}c_x'^{m-1}(aa'\varkappa b)(abb'\alpha)(a'cc'\varkappa)$$
$$+(s-1)\,a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}\alpha_x^{s-2}\varkappa_x^2c_x^{n-1}c_x'^{m-1}(aa'\varkappa b)(abb'\alpha)(\alpha cc'a)$$
$$-(s-1)\,a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}\alpha_x^{s-1}\varkappa_xc_x^{n-1}c_x'^{m-1}(aa'\varkappa b)(abb'\alpha)(cc'\varkappa a).$$

Dies kann man anders schreiben:

$$2\varrho^3\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}\alpha_{d^2x} + \varrho^3(s-2)\alpha_x^{s-3}\alpha_{dx}^3 + 2\varrho^2 d\varrho\,\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}^2 \tag{5}$$
$$= \frac{s-2}{2}\varkappa_x^3\,\Phi' - \frac{2n+s-6}{2}\varkappa_x^2\Phi'' + (2n+s-5)\varkappa_x\Phi'''$$
$$+(s-1)\Phi^{\mathrm{IV}}\varkappa_x^2 + A\varphi + B\,d\varphi - (m-1)\varkappa_x^2\Phi^{\mathrm{VI}} + 2(m-1)\varkappa_x\Phi^{\mathrm{VII}}.$$

Hier bezeichnen A und B Größen, welche die Symbole a nicht mehr enthalten und wir setzen:

$$\Phi' = (\alpha a a' b)(a b b' a)(a c c' a) a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \alpha_x^{s-3} c_x^{n-1} c_x'^{m-1}, \qquad (5^a)$$

$$\Phi'' = (\alpha a a' b)(a b b' a)(\varkappa c c' a) a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \alpha_x^{s-2} c_x^{n-1} c_x'^{m-1},$$

$$\Phi''' = (\varkappa a a' b)(a b b' a)(\varkappa c c' a) a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \alpha_x^{s-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} = \Sigma R_i \varphi_i,$$

wo:

$$R_i = (a b' b)_i (\varkappa a a' b)(\varkappa c c' a) a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1},$$

$$\Phi^{IV} = (a a' \varkappa b)(a b b' a)(a c c' a) a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} \alpha_x^{s-2},$$

$$\Phi^{VI} = (\alpha a a' b)(a b b' a)(\varkappa c c' a') a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-2} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} \alpha_x^{s-2},$$

$$\Phi^{VII} = (\varkappa a a' b)(a b b' a)(\varkappa c c' a') a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-2} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} \alpha_x^{s-2} = \Sigma P_i \varphi_i,$$

wo:

$$P_i = (a b' b)_i (\varkappa a a' b)(\varkappa c c' a') a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-2} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1}.$$

Den Ausdruck für Φ_{IV} wollen wir noch weiter behandeln. Es ist:

$$\Phi^{IV} = (a b b' a)[(\varkappa c c' a)(\alpha a a' b) + (b c c' a)(a a' \varkappa \alpha) + (a \varkappa b \alpha)(a' c c' a)] c_x \Pi.$$

Das 1. Glied wird gleich Φ'', das dritte verschwindet durch Vertauschung von a' mit c' identisch, und es bedeutet:

$$\Pi = a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \alpha_x^{s-2} c_x^{n-2} c_x'^{m-1}.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned}
\Phi^{IV} &= -\Phi'' - \tfrac{1}{2}(b c c' a)(a a' \varkappa \alpha)[(a b b' a) c_x - (a c b' a) b_x] \cdot \Pi. \\
&= -\Phi'' - \tfrac{1}{2}(b c c' a)(a a' \varkappa \alpha)[a_x (\alpha b b' c) - \alpha_x (b b' a c) \\
&\quad + b_x' (a b \alpha c)] \cdot \Pi \\
&= \Phi'' + \tfrac{1}{2}(b c c' a)(a a' \varkappa \alpha)(c b' a b) a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-2} c_x'^{m-1} \alpha_x^{s-1}
\end{aligned}$$

da das 3. Glied verschwindet wegen $b_x'^m = 0$ und das 1. Glied wird:

$$\tfrac{1}{3}(a a' \varkappa \alpha)(\alpha b b' c)(b c c' a)$$

$$= \tfrac{1}{3}[(a a' \varkappa \alpha)(\alpha b b' c) - (c a' \varkappa \alpha)(a b b' \alpha) - (b a' \varkappa \alpha)(\alpha a b' c)](b c c' a) = 0.$$

Definieren wir noch:

$$\begin{aligned}\Phi^{\mathrm{V}} &= (bcc'a)(aa'\varkappa a)(cb'ab)\,a_x^{n-3}\,b_x^{n-2}\,a_x'^{\,m-1}\,b_x'^{\,m-1}\,c_x^{n-2}\,c_x'^{\,m-1}\,\alpha_x^{s-1}\\ &= \Sigma\, S_i\,\varphi_i, \qquad (5^{\mathrm{b}})\end{aligned}$$

so geht die rechte Seite des Ausdruckes (5) über in:

$$\begin{aligned}&\frac{s-2}{2}\,\varkappa_x^3\,\Phi' - \frac{2n+3s-8}{2}\,\varkappa_x^2\,\Phi'' + (2\,n+s-5)\,\varkappa_x\,\Phi'''\\ &\qquad + \frac{s-1}{2}\,\varkappa_x^2\,\Phi^{\mathrm{V}} \qquad (6)\\ &+ A\,\varphi + B\,d\,\varphi - (m-1)\,\varkappa_x^2\,\Phi^{\mathrm{VI}} + 2\,(m-1)\,\varkappa_x\,\Phi^{\mathrm{VII}}.\end{aligned}$$

Studiert man den Ausdruck $\alpha_x^{s-3}\,\alpha_{dx}^3$, so kommt:

$$\begin{aligned}\varrho^3\,\alpha_{dx}^3\,\alpha_x^{s-3} &= (a\alpha a'\varkappa)(\alpha bb'\varkappa)(\alpha cc'\varkappa)\,a_x^{n-1}\,b_x^{n-1}\,a_x'^{\,m-1}\,b_x'^{\,m-1}\,c_x^{n-1}\,c_x'^{\,m-1}\,\alpha_x^{s-3}\\ &= \tfrac{1}{2}\,\varkappa_x^2(a\alpha a'b)(\alpha bb'a)(\alpha cc'\varkappa)\,a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,a_x'^{\,m-2}\,b_x'^{\,m-1}\,c_x^{n-1}\,c_x'^{\,m-1}\,\alpha_x^{s-3} \qquad (7)\\ &+ \varkappa_x\,(aa'\varkappa b)\,(\alpha bb'a)\,(\alpha cc'\varkappa)\,a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,a_x'^{\,m-2}\,b_x'^{\,m-1}\,c_x^{n-1}\,c_x'^{\,m-1}\,\alpha_x^{s-2}\\ &+ A'\,\varphi + B'\,d\,\varphi.\end{aligned}$$

Durch Anwendung der Relation:

$$(\alpha cc'\varkappa)\,\alpha_x\,c_x^{n-1}\,c_x'^{\,m-1} = [(\alpha cc'a)\,\varkappa_x - (cc'\varkappa a)\,\alpha_x]\,c_x^{n-1}\,c_x'^{\,m-1} \qquad (8)$$

erhält man:

$$\begin{aligned}\varrho^3\,\alpha_x^{s-3}\,\alpha_{dx}^3 &= \tfrac{1}{2}\,\varkappa_x^3\Phi' - \tfrac{1}{2}\,\varkappa_x^2\,\Phi'' + \varkappa_x^2\,\Phi^{\mathrm{IV}} + \varkappa_x\,\Phi''' + A'\,\varphi + B'd\varphi\\ &= \tfrac{1}{2}\,\varkappa_x^3\Phi' - \tfrac{3}{2}\,\varkappa_x^2\,\Phi'' + \tfrac{1}{2}\,\varkappa_x^2\,\Phi^{\mathrm{V}} + \varkappa_x\,\Phi''' + A'\,\varphi + B'd\varphi\end{aligned} \qquad (9)$$

Multipliziert man die Gleichung (5) bzw. (6) mit $\frac{3}{2}(s-1)$ und zieht davon die mit $\frac{1}{2}(s-1)(s-2)$ multiplizierte Gl. (9) ab, so erhält man das Resultat:

$$\begin{aligned}&3\,\varrho^3(s-1)\,\alpha_x^{s-2}\,\alpha_{dx}\,\alpha_{d^2x} + \varrho^3(s-1)(s-2)\,\alpha_x^{s-3}\,\alpha_{dx}^3\\ &= -3(s-1)\,\varrho^2\,d\varrho\,\alpha_x^{s-2}\,\alpha_{dx}^2 + A''\varphi + B''\,d\varphi + \frac{s-1\cdot s-2}{2}\,\Phi'\,\varkappa_x^3\\ &- \tfrac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\,\Phi''\,\varkappa_x^2 + \tfrac{1}{2}(s-1)(6n+2s-13)\,\Phi'''\,\varkappa_x\\ &+ \tfrac{1}{4}(s-1)(2s-1)\,\Phi^{\mathrm{V}}\,\varkappa_x^2 - \tfrac{3}{2}(m-1)(s-1)\,\varkappa_x^2\,\Phi^{\mathrm{VI}}\\ &+ 3\,(m-1)\,(s-1)\,\varkappa_x\,\Phi^{\mathrm{VII}}.\end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise erzielt man andere Relationen, die aus (10) hervorgehen, indem man α durch β, γ, δ nacheinander ersetzt. Nimmt man aber d an Stelle von $a\,(d_x^n = a_x^n = 0)$, so gehen die Ausdrücke (5^a) über in:

$$\Delta' = (daa'b)(dbb'a)(dcc'a)a_x^{n-3}b_x^{n-2}d_x^{n-3}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1} = 0 \quad (11)$$

$$\Delta'' = (daa'b)(dbb'a)(\varkappa cc'a)a_x^{n-3}b_x^{n-2}d_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1}$$

$$\Delta''' = (\varkappa aa'b)(dbb'a)(\varkappa cc'a)a_x^{n-3}b_x^{n-2}d_x^{n-1}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1} = \Sigma R_i f_i$$

$$\Delta^{\mathrm{V}} = (bcc'a)(aa'\varkappa d)(cb'ab)a_x^{n-3}b_x^{n-2}d_x^{n-1}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}c_x^{n-2}c_x'^{m-1} = \Delta''$$

$$\Delta^{\mathrm{VI}} = (daa'b)(dbb'a)(\varkappa cc'a')a_x^{n-2}b_x^{n-2}d_x^{n-2}a_x'^{m-2}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1}$$

$$\Delta^{\mathrm{VII}} = (\varkappa aa'b)(dbb'a)(\varkappa cc'a')a_x^{n-2}b_x^{n-2}d_x^{n-1}a_x'^{m-2}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1}.$$

Daß Δ' identisch verschwindet, sieht man sofort bei Vertauschung der Symbole a und d. Vertauscht man in Δ''' b mit d, so wird:

$$\begin{aligned}\Delta''' &= \tfrac{1}{2}(\varkappa cc'a)(dbb'a)[(\varkappa aa'b)d_x \\ &\qquad - (\varkappa aa'd)b_x]a_x^{n-3}b_x^{n-2}d_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1} \\ &= \tfrac{1}{2}(\varkappa cc'a)(dbb'a)[(\varkappa a'bd)a_x \\ &\qquad - (aa'bd)\varkappa_x]a_x^{n-3}b_x^{n-2}d_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1} \\ &= \tfrac{1}{2}\varkappa_x\Delta'' \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}(\varkappa a'bd)(\varkappa cc'a)(dbb'a)a_x^{n-2}b_x^{n-2}d_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1}.\end{aligned}$$

Letzteres Glied ist aber Null, da:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{3}[(\varkappa a'bd)(\varkappa cc'a) - (\varkappa a'ad)(\varkappa cc'b) - (\varkappa a'ba)(\varkappa cc'd)] \\ &\qquad = \tfrac{1}{3}(\varkappa a'bd)(\varkappa cc'a) = 0\end{aligned}$$

Ebenso behandelt man Δ^{VII}:

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathrm{VII}} &= \tfrac{1}{2}(\varkappa cc'a')(dbb'a)[(\varkappa aa'b)a_x \\ &\qquad - (\varkappa aa'd)b_x]a_x^{n-2}b_x^{n-2}d_x^{n-2}a_x'^{m-2}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1} \\ &= \tfrac{1}{2}(\varkappa cc'a')(dbb'a)[(\varkappa a'bd)a_x - (\varkappa abd)a'_x \\ &\qquad - (aa'bd)\varkappa_x]a_x^{n-2}b_x^{n-2}d_x^{n-2}a_x'^{m-2}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1}.\end{aligned}$$

Das 3. Glied ist gleich Δ^{VI}, das 2. verschwindet bei Vertauschung von a' und c' identisch, und geht bei Vertauschung von a mit d in Δ^{VII} über. Also wird:

$$\Delta^{VII} = \tfrac{1}{3}\, \varkappa_x\, \Delta^{VI}.$$

Gleichung (10) nimmt dann die Form an:

$$\begin{aligned} 3\,\varrho^3 (n-1)\, a_x^{n-2}\, a_{dx}\, a_{d^2x} + \varrho^3 (n-1)(n-2)\, a_x^{n-3}\, a_{dx}^3 \\ = -3(n-1)\varrho^2 d\varrho\, a_x^{n-2} a_{dx}^2 - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\Delta'' \varkappa_x^2 \\ - \tfrac{1}{2}(m-1)(n-1)\, \varkappa_x^2\, \Delta^{VI}. \end{aligned} \tag{12}$$

Ebenso erhält man ähnliche Relationen, wenn noch $a = d'$ ($d_x'^m = a_x'^m = 0$) in (10) gesetzt wird:

$$\begin{aligned} G' &= (d'aa'b)(d'bb'a)(d'cc'a)\, a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} d_x'^{m-3} \qquad (13) \\ G'' &= (d'aa'b)(d'bb'a)(\varkappa cc'a)\, a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} d_x'^{m-2} \\ G''' &= (\varkappa aa'b)(d'bb'a)(\varkappa cc'a)\, a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} d_x'^{m-1} = 0 \\ G^{V} &= (bcc'a)(aa'\varkappa d')(cb'ab)\, a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} d_x'^{m-1} = 0 \\ G^{VI} &= (d'aa'b)(d'bb'a)(\varkappa cc'a')\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-2} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} d_x'^{m-2} \\ G^{VII} &= (\varkappa aa'b)(d'bb'a)(\varkappa cc'a)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-2} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} d_x'^{m-1} = 0 \end{aligned}$$

G''', G^{V} und G^{VII} verschwinden identisch, wie man durch Vertauschung der Symbole b' mit d', a' mit d' und b' mit d' sieht, so daß man für Gleichung (10) erreicht:

$$\begin{aligned} 3\,\varrho^3 (m-1)\, a_x'^{m-2}\, a'_{dx}\, a'_{d^2x} + \varrho^3 (m-1)(m-2)\, a_x'^{m-3}\, a_{dx}'^3 \qquad (14) \\ = -3(m-1)\,\varrho^2\, d\varrho\, a_x'^{m-2}\, a_{dx}'^2 - \tfrac{3}{2}(m-1)(n+m-3)\, \varkappa_x^2\, G'' \\ + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\, \varkappa_x^3\, G' - \frac{3}{2}(m-1)^2\, \varkappa_x^2\, G^{VI}. \end{aligned}$$

Nach denselben Methoden wie bei § 2 kann man die Glieder

$$-3(s-1)\,\varrho^2\, d\varrho\, a_x^{s-2} a_{dx}^2, \ldots, -3(n-1)\,\varrho^2\, d\varrho\, a_x^{n-2} a_{dx}^2,$$
$$-3(m-1)\,\varrho^2\, d\varrho\, a_x'^{m-2}\, a_{dx}'^2$$

vernachlässigen, wie auch in Hinsicht auf $f = 0$, $df = 0$ und $g = 0$, $dg = 0$ diejenigen, welche die Faktoren φ und $d\varphi$ u. s. w. enthalten.

Damit auch die Glieder, welche Φ''', Ψ''', X''' und Ω''' enthalten, wegfallen, muß man von dem 4. und 5. der Ausdrücke (2) abziehen:

$$\tfrac{1}{2}(s-1)(6n+2s-13)\,\Delta'''\,\varkappa_x = \tfrac{1}{4}(s-1)(6n+2s-13)\,\Delta''\,\varkappa_x^2,$$
$$\tfrac{1}{2}(s-1)(6n+2s-13)\,G'''\,\varkappa_x = 0.$$

Ebenso entfernt man $\Phi^{\mathrm{V}}\ldots$, bzw. $\Phi^{\mathrm{VII}}\ldots$ durch Subtraktion von:

$$\frac{s-1}{4}(2s-1)\,\Delta^{\mathrm{V}}\varkappa_x^2 = \frac{s-1}{4}(2s-1)\,\Delta''\,\varkappa_x^2,$$
$$\frac{s-1}{4}(2s-1)\,G^{\mathrm{V}}\varkappa_x^2 = 0,$$
$$\text{bzw. } 3(m-1)(s-1)\,\varkappa_x\,\Delta^{\mathrm{VII}} = (m-1)(s-1)\,\Delta^{\mathrm{VI}}\varkappa_x^2,$$
$$3(m-1)(s-1)\,\varkappa_x\,G^{\mathrm{VII}} = 0.$$

Auf diese Weise erhalten die Glieder der 1. Reihe unserer Determinante folgende Form:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(s-1)(s-2)\varkappa_x^3\,\Phi' - \tfrac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\varkappa_x^3\,\Phi'' \\
&\qquad - \tfrac{3}{2}(m-1)(s-1)\,\Phi^{\mathrm{VI}}\varkappa_x^2,\\
&\tfrac{1}{2}(s-1)(s-2)\varkappa_x^3\,\Psi' - \tfrac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\varkappa_x^2\,\Psi'' \\
&\qquad - \tfrac{3}{2}(m-1)(s-1\,\Psi^{\mathrm{VI}}\varkappa_x^2,\\
&\tfrac{1}{2}(s-1)(s-2)\varkappa_x^3\,X' - \tfrac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\varkappa_x^2\,X'' \\
&\qquad - \tfrac{3}{2}(m-1)(s-1)\,X^{\mathrm{VI}}\varkappa_x^2,\\
&\tfrac{1}{2}(s-1)(s-2)\varkappa_x^3\,\Omega' - \tfrac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\varkappa_x^2\,\Omega'' \\
&\qquad - \tfrac{3}{2}(m-1)(s-1)\,\Omega^{\mathrm{VI}}\varkappa_x^2,\\
&-\left[\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + \tfrac{1}{2}(s-1)(3n+2s-7)\right]\varkappa_x^2\,\Delta'' \\
&\qquad - \tfrac{1}{2}(m-1)(n+2s-3)\varkappa_x^2\,\Delta^{\mathrm{VI}},\\
&\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)\varkappa_x^3\,G' - \tfrac{3}{2}(m-1)(m+n-3)\varkappa_x^2\,G'' \\
&\qquad - \tfrac{3}{2}(m-1)^2\varkappa_x^2\,G^{\mathrm{VI}}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Die Determinante selbst nimmt den Wert an:

$$D = \tfrac{1}{2}\varkappa_x^3 A - \tfrac{3}{2}\varkappa_x^2 B - \tfrac{3}{2}(m-1)\varkappa_x^2 C \tag{16}$$

wenn man setzt:

$$A = \begin{vmatrix} r'\Phi' & r'\Psi' & r'X' & r'\Omega' & 0 & t\cdot G' \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)X & (s-1)\Omega & \sigma'\Delta & (m-1)G \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 & g_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & f_2 & g_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 & g_3 \\ \varphi_4 & \psi_4 & \chi_4 & \omega_4 & f_4 & g_4 \end{vmatrix}, \tag{17}$$

$$B = \begin{vmatrix} \sigma\Phi'' & \sigma\Psi'' & \sigma X'' & \sigma\Omega'' & r\Delta'' & \varrho G'' \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)X & (s-1)\Omega & \sigma'\Delta & (m-1)G \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 & g_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & f_2 & g_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 & g_3 \\ \varphi_4 & \psi_4 & \chi_4 & \omega_4 & f_4 & g_4 \end{vmatrix}, \tag{18}$$

$$C = \begin{vmatrix} (s-1)\Phi^{\mathrm{VI}} & (s-1)\Psi^{\mathrm{VI}} & (s-1)X^{\mathrm{VI}} & (s-1)\Omega^{\mathrm{VI}} & \sigma'\Delta^{\mathrm{VI}} & (m-1)G^{\mathrm{VI}} \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)X & (s-1)\Omega & \sigma'\Delta & (m-1)G \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 & g_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_1 & f_2 & g_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 & g_3 \\ \varphi_4 & \psi_4 & \chi_4 & \omega_4 & f_4 & g_4 \end{vmatrix}, \tag{19}$$

ferner:

$$\left.\begin{aligned} r' &= (s-1)(s-2), & \varrho &= (m-1)(m+n-3), \\ t &= (m-1)(m-2), & \sigma' &= \frac{n+2s-3}{3}, \\ \sigma &= (s-1)(n+s-3), & t' &= \frac{m-1}{s-1}, \\ r &= \tfrac{1}{3}\left[(n-1)(n-2)+(s-1)(3n+2s-7)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Es bleibt noch übrig, von den Determinanten B und C einen Faktor $\varkappa_x$ abzuspalten. Setzt man:

$$d_x^n = e_x^n = f_x^n \quad \text{und} \quad d_x'^m = e_x'^m = f_x'^m,$$

$$\Pi' = M' \cdot N',$$

$$M' = \alpha_x^{s-2} \beta_x^{s-2} \gamma_x^{s-2} \delta_x^{s-2} a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-1} d_x^{n-2} e_x^{n-3} f_x^{n-3},$$

$$N' = a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x'^{m-1} d_x'^{m-2} e_x'^{m-1} f_x'^{m-1},$$

ferner:

$$E = \begin{vmatrix} \sigma(\alpha a a' b)(\alpha b b' a) \ldots & \tau(d a a' b)(a b b' a), & \varrho(d' a a' b)(d' b b' a) \\ (s-1)(\alpha e e' f)(\alpha f f' e) \ldots & \sigma'(d e e' f)(d f f' e), & (m-1)(d' e e' f)(d' f f' e) \\ \alpha_1 \alpha_x \quad \ldots & d_1 d_x, & d_1' d_x \\ \alpha_2 \alpha_x \quad \ldots & d_2 d_x, & d_2' d_x \\ \alpha_3 \alpha_x \quad \ldots & d_3 d_x, & d_3' d_x \\ \alpha_4 \alpha_x \quad \ldots & d_4 d_x, & d_4' d_x \end{vmatrix},$$

Die zweite, dritte und vierte Kolonne dieser Determinante sind wie die erste gebaut, nur ist das Symbol α bzw. durch die Symbole β, γ, δ ersetzt.

Es wird dann:

$$B = E \cdot (\varkappa c c' a) b_x e_x f_x \cdot \Pi';$$

nun wendet man die Idendität an:

$$(\varkappa c c' a) e_x = a_x(\varkappa c c' e) - c_x'(\varkappa c a e) + c_x(\varkappa c' a e) - \varkappa_x(c c' a e).$$

Dadurch wird B in eine Summe von vier Gliedern transformiert. Das zweite und dritte Glied dieser Summe verschwinden, weil sie die Faktoren $c_x^n = 0$ und $c_x'^m = 0$ enthalten: das 1. Glied ist gleich B, wie man erkennt, wenn man a mit e, b mit f, a' mit e' und b' mit f' vertauscht. Man erhält also:

$$B = \tfrac{1}{2} \cdot \varkappa_x \cdot E \cdot (e c c' a) b_x f_x \cdot \Pi'. \tag{21}$$

Ebenso behandelt man die Determinante C:

$$C = F \cdot (\varkappa c c' a') b'_x c'_x f'_x \cdot \Pi'',$$

wo:

$$\Pi'' = M'' \cdot N'',$$

$$M'' = \alpha_x^{s-2} \beta_x^{s-2} \gamma_x^{s-2} \delta_x^{s-2} a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-1} d_x^{n-2} e_x^{n-2} f_x^{n-2},$$

$$N'' = a_x'^{m-2} b_x'^{m-2} c_x'^{m-1} d_x'^{m-2} e_x'^{m-2} f_x'^{m-2},$$

und F aus E hervorgeht, wenn in E man ersetzt r durch σ', ϱ durch $m-1$, und σ durch $(s-1)$.

Durch Anwendung der Idendität:

$$(\varkappa c c' a') e'_x = a'_x (\varkappa c c' e') - c'_x (\varkappa c a' e') + c_x (\varkappa c' a' e') - \varkappa_x (c c' a' e')$$

geht die Determinante C, in ähnlicher Weise wie oben B, über in:

$$C = \tfrac{1}{2} \varkappa_x \cdot F (e' c c' a') b'_x f'_x \cdot \Pi''. \tag{22}$$

Das Resultat unserer Untersuchung ist also:

Die Punkte, in denen eine Raumkurve von einer Fläche des linearen Systems:

$$\varphi(x) + \varkappa \psi(x) + \lambda \chi(x) + \mu \omega(x) = 0$$

von der 3. Ordnung berührt wird, sind ihre Schnittpunkte mit der Fläche:

$$D = A - 3 B_0 - 3(m-1) C_0 = 0 \tag{23}$$

wo A, B, C durch die Ausdrücke (17), (21) und (22) definiert sind, und:

$$B = \varkappa_x \cdot B_0, \quad C = \varkappa_x \cdot C_0$$

gesetzt ist.

Setzt man in der Fläche (23) $s = 1$, so erhält man eine Fläche von der Ordnung $6m + 6n - 20$, welche die Kurve $f=0$, $g=0$ in den $nm(6m+6n-20)$ Berührungspunkten von Wendungsberührebenen schneidet.

Die Gleichung dieser Fläche erscheint in der Form:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}(m-2) \cdot \Delta \cdot G' - (b c c' a) R \cdot [(n-2)(d a a' b)(d b b' a)(d' e e' f)(d' f f' e) \\ - (m+n-3)(d' a a' b)(d' b b' a)(d e e' f)(d f f' e)] \qquad (24) \\ - (m-1)(e' c c' a') S \cdot [(d a a' b)(d b b' a)(d' e e' f)(d' f f' e) \\ - (d' a a' b)(d' b b' a)(d e e' f)(d f f' e)] = 0. \end{aligned}$$

Hier sollen die Definitionen gelten:

$$R = a_x^{n-3}\, b_x^{n-2}\, c_x^{n-1}\, d_x^{n-2}\, e_x^{n-3}\, f_x^{n-2}\, a_x'^{m-1}\, b_x'^{m-1}\, c_x'^{m-1}\, d_x'^{m-2}\, e_x'^{m-1}\, f_x'^{m-1},$$

$$S = a_x^{n-2}\, b_x^{n-2}\, c_x^{n-1}\, d_x^{n-2}\, e_x^{n-2}\, f_x^{n-2}\, a_x'^{m-2}\, b_x'^{m-1}\, c_x'^{m-1}\, d_x'^{m-2}\, e_x'^{m-2}\, f_x'^{m-1},$$

und für Δ und G' gelten die Bezeichnungen von p. 219 und 226.

Die Gleichung (24) kann aber noch weiter vereinfacht werden, da die beiden Glieder in der 2. und 3. Summe durch Vertauschung von a mit e, b mit f, a' mit e' und b' mit f' ineinander übergehen. Es wird Gleichung (24) jetzt in der Gestalt erscheinen:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}(m-2)\Delta G' - [(m+2n-5)(ecc'a)R + 2(m-1)(e'cc'a')S] \\ \cdot (daa'b)(dbb'a)(d'ee'f)(d'ff'e) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Dies ist die Gleichung der Clebsch'schen Fläche in symbolischer Form. Die Unsymetrie rührt davon her, daß der Ausdruck (5) p. 216 in verschiedener Weise behandelt werden kann, wie am Schlusse von § 2.