Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVII. Jahrgang 1907.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1908.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Über die Konvergenz der Jacobi-Kettenalgorithmen mit komplexen Elementen.

Von **Oskar Perron.**

(*Eingelaufen 7. Dezember 1907.*)

Das Studium des Kettenbruches

$$\frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

ist gleichbedeutend mit dem Studium der dreigliedrigen linearen Rekursionsformel:

$$A_{\nu+2} = a_\nu A_\nu + b_\nu A_{\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots \infty).$$

Denn aus dieser berechnen sich sukzessive sowohl die Zähler als die Nenner der Näherungsbrüche, wenn man nur von geeigneten Anfangswerten A_0, A_1 ausgeht. Man kann dabei von der formalen Bildungsweise des Kettenbruches überhaupt absehen und die ganze Theorie auf die Rekursionsformel gründen.

Ebenso ist die Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus nichts anderes als eine Theorie der $(n+2)$-gliedrigen Rekursionsformel:

$$A_{\nu+n+1} = a_0^{(\nu)} A_\nu + a_1^{(\nu)} A_{\nu+1} + \cdots + a_n^{(\nu)} A_{\nu+n}.$$

Wie nun bei den unendlichen Kettenbrüchen die Frage nach der Konvergenz das Hauptproblem darstellt, so steht auch bei der Jacobischen Verallgemeinerung ein analoges Konvergenzproblem im Vordergrund (was allerdings Jacobi selbst, der von dem ganzen Algorithmus bloß die formale Seite ins Auge faßte, gar nicht bemerkt zu haben scheint). Ich habe in meiner Habilitationsschrift[1]) für den Fall reeller positiver $a_i^{(\nu)}$, die noch gewissen einschränkenden Ungleichungen genügen, die Konvergenz festgestellt und die gleiche Frage außerdem für periodische Algorithmen auch im Fall komplexer $a_i^{(\nu)}$ vollständig erledigt. In der gegenwärtigen Arbeit will ich nun auch beliebige komplexe $a_i^{(\nu)}$ in Betracht ziehen und für diesen Fall eine Reihe von Konvergenzkriterien aufstellen. Für $n = 1$, d. h. für die Kettenbrüche, ergeben sich daraus insbesondere auch das Fundamentaltheorem des Herrn Pringsheim, wonach der obige Kettenbruch allemal konvergiert, wenn durchweg $|b_\nu| \geq 1 + |a_\nu|$ ist, späterhin (§ 4) aber auch einige neue Kriterien.

Sind die Teilzähler und -nenner des Kettenbruches ganze rationale (positive oder negative) Zahlen, so besagt ein Satz von Legendre, daß der Kettenbruch, wenn durchweg $|b_\nu| > 1 + |a_\nu|$ ist, abgesehen von einem leicht angebbaren Ausnahmsfall, stets einen irrationalen Wert hat. Mit Hilfe dieses Satzes ergibt sich bekanntlich aus dem Lambertschen Kettenbruch für die Exponentialfunktion die Irrationalität der Zahlen e, e^n, π u. a. m. Der Legendresche Irrationalitätssatz gestattet nun eine Ausdehnung auf den Jacobischen Algorithmus, woraus dann ganz entsprechend gefolgert werden kann, daß zwischen gewissen Transzendenten keine lineare Relation mit rationalen Koeffizienten besteht (§ 9). Bei dieser Gelegenheit leite ich dann nicht nur das genaue Analogon zum Lambertschen Kettenbruch her, sondern gebe gleichzeitig noch viel allgemeinere Entwicklungen an, welche der bekannten Kettenbruchdarstellung für den Quotienten zweier Besselschen Funktionen entsprechen. Weitere funktionentheoretische Anwendungen gedenke ich an anderer Stelle zu veröffentlichen.

---

[1]) Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus (Math. Annal. 64 (1907), pag. 1—76).

§ 1.
Definitionen und formale Entwicklungen.

Sei n eine natürliche Zahl, deren Wert wir im Laufe der Untersuchung unverändert festhalten, und

$$a_0^{(\nu)}, a_1^{(\nu)}, \dots a_n^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots \infty)$$

unendlich viele ganz beliebige (reelle oder komplexe) Zahlen. Wir leiten daraus eine unbegrenzte Folge von Zahlen $A^{(\nu)}$ her vermittels der rekurrenten Formel:

$$A^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu)} A^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} A^{(\nu+1)} + \dots + a_n^{(\nu)} A^{(\nu+n)}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \dots \infty),$$

wobei ein beliebiges System von Anfangswerten $A^{(0)}, A^{(1)}, \dots A^{(n)}$ zum Ausgang gewählt werden mag. Geht man von irgendwelchen anderen Anfangswerten aus, die zum Unterschied etwa mit $A_i^{(0)}, A_i^{(1)}, \dots A_i^{(n)}$ bezeichnet sein mögen, so liefert die Rekursionsformel auch eine andere unendliche Zahlenfolge, deren Individuen wir entsprechend durch $A_i^{(\nu)}$ bezeichnen wollen. Die unendlich vielen Möglichkeiten für die Anfangswerte liefern so unendlich viele Zahlenfolgen, die wir durch Suffixe unterscheiden. Wir nennen dann mehrere solche Zahlenfolgen

$$A_0^{(\nu)}, \ A_1^{(\nu)}, \dots A_m^{(\nu)}$$

voneinander unabhängig, wenn keine Relation der Form

$$\gamma_0 A_0^{(\nu)} + \gamma_1 A_1^{(\nu)} + \dots + \gamma_m A_m^{(\nu)} = 0$$

mit von ν unabhängigen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten γ_i besteht. Unter all den betrachteten Zahlenfolgen sind dann nur $n+1$ voneinander unabhängige, die aber auf mannigfache Weise ausgewählt werden können; und aus irgend $n+1$ unabhängigen läßt sich jede andere linear zusammensetzen.

Denn man wähle $n+1$ verschiedene Systeme von Anfangswerten

$$\begin{array}{cccc} A_0^{(0)} & A_0^{(1)} & \dots & A_0^{(n)} \\ A_1^{(0)} & A_1^{(1)} & \dots & A_1^{(n)} \\ - & - & - & - \\ A_n^{(0)} & A_n^{(1)} & \dots & A_n^{(n)} \end{array}$$

derart, daß die Determinante $|A_i^{(k)}| \neq 0$ ist, und bilde daraus die $n+1$ Zahlenfolgen:

$$A_0^{(\nu)}, A_1^{(\nu)}, \dots A_n^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, \dots \infty),$$

welche offenbar im obigen Sinne voneinander unabhängig sind. Ist dann $A^{(0)}, A^{(1)}, \dots A^{(n)}$ ein ganz beliebiges System von Anfangswerten, so kann man $n+1$ Zahlen $\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_n$ so bestimmen, daß

$$A^{(\nu)} = \gamma_0 A_0^{(\nu)} + \gamma_1 A_1^{(\nu)} + \dots + \gamma_n A_n^{(\nu)} \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \dots n$$

wird. Aus der Rekursionsformel folgt dann sukzessive, daß dieselbe Gleichung auch für $\nu = n+1$, $n+2$ u. s. w. besteht. Also läßt sich $A^{(\nu)}$ linear aus $A_0^{(\nu)}, A_1^{(\nu)}, \dots A_n^{(\nu)}$ zusammensetzen mit von ν unabhängigen Koeffizienten.

Für die $n+1$ voneinander unabhängigen Zahlenfolgen wählt man am einfachsten diejenigen mit den Anfangswerten:

$$A_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \phantom{\text{für }} i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \dots n),$$

bei welchen ja die Bedingung, daß die Determinante $|A_i^{(k)}| \neq 0$ sein soll, erfüllt ist. Der Kürze halber will ich mich nun der folgenden Ausdrucksweise bedienen:

Definition I. Das System der linearen Rekursionsformeln

$$A_i^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu)} A_i^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \dots + a_n^{(\nu)} A_i^{(\nu+n)} \tag{1}$$
$$(i = 0, 1, \dots n; \ \nu = 0, 1, 2, \dots \infty)$$

mit den Anfangswerten

$$A_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \;\;\text{„}\;\; i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \dots n) \tag{2}$$

heißt eine **Jacobi-Kette** oder einfach **Kette n^{ter} Ordnung.** Die Zahlen $a_i^{(\nu)}$ heißen die Elemente der Kette.

Jede Wahl von unendlich vielen Zahlen

$$a_0^{(\nu)}, a_1^{(\nu)}, \ldots a_n^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots \infty)$$

bestimmt hienach eine Kette n^{ter} Ordnung. Die Theorie der Ketten erster Ordnung ist identisch mit der Theorie der Kettenbrüche.

Aus den die Zahlen $A_i^{(\nu)}$ definierenden Rekursionsformeln schließt man genau wie bei den Kettenbrüchen:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} A_0^{(\nu)} & A_0^{(\nu+1)} & \ldots & A_0^{(\nu+n)} \\ A_1^{(\nu)} & A_1^{(\nu+1)} & \ldots & A_1^{(\nu+n)} \\ - & - & - & - \\ A_n^{(\nu)} & A_n^{(\nu+1)} & \ldots & A_n^{(\nu+n)} \end{vmatrix} = (-1)^{n\nu} a_0^{(0)} a_0^{(1)} \ldots a_0^{(\nu-1)}.^{1)}$$

Zur Aufstellung der weiteren Formeln ist es zweckmäßig, die Elemente $a_i^{(\nu)}$ nicht als numerisch gegebene Zahlwerte, sondern zunächst als irgendwelche Unbestimmte oder Variable anzusehen. Die $A_i^{(\nu)}$ berechnen sich dann aus den Rekursionsformeln als ganze rationale Funktionen der $a_k^{(\mu)}$. Wenn man in der Funktion $A_i^{(\nu)}$ die oberen Indices aller auftretenden $a_k^{(\mu)}$ um eine Zahl λ erhöht, so soll der entstehende Ausdruck mit $A_{i,\lambda}^{(\nu)}$ bezeichnet werden; danach ist insbesondere auch $A_{i,0}^{(\nu)}$ mit $A_i^{(\nu)}$ gleichbedeutend. Für die $A_{i,\lambda}^{(\nu)}$ gelten nach ihrer Definition die zu (1) analogen Rekursionsformeln:

$$(4) \quad \begin{gathered} A_{i,\lambda}^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu+\lambda)} A_{i,\lambda}^{(\nu)} + a_1^{(\nu+\lambda)} A_{i,\lambda}^{(\nu+1)} + \cdots + a_n^{(\nu+\lambda)} A_{i,\lambda}^{(\nu+n)} \\ (i = 0, 1, \ldots n;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \infty), \end{gathered}$$

und die Anfangswerte sind wieder:

$$(5) \qquad A_{i,\lambda}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{„ } i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \ldots n).$$

Hieraus folgt unschwer die wichtige Beziehung:

1) Für $\nu = 0$ ist die rechte Seite durch 1 zu ersetzen.

$$(6) \quad A_i^{(\nu+\lambda)} = A_{0,\lambda}^{(\nu)} A_i^{(\lambda)} + A_{1,\lambda}^{(\nu)} A_i^{(\lambda+1)} + \cdots + A_{n,\lambda}^{(\nu)} A_i^{(\lambda+n)};$$

denn einerseits ist dies für $\nu = 0, 1, \ldots n$ evident; anderseits geht aber aus (1) und (4) hervor, daß, wenn die Formel (6) für $n+1$ aufeinander folgende Werte von ν gilt, sie auch für den nächstfolgenden Wert richtig ist. Damit ist ihre Allgemeingültigkeit erwiesen.

Man merke insbesondere die aus (1) und (4) für $\nu = 0$ hervorgehenden Formeln:

$$(7) \qquad A_i^{(n+1)} = a_i^{(0)}, \quad A_{i,\lambda}^{(n+1)} = a_i^{(\lambda)}.$$

Ferner folgt aus (6) für $\lambda = 1$:

$$A_i^{(\nu+1)} = A_{i-1,1}^{(\nu)} + A_{n,1}^{(\nu)} a_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$
$$A_0^{(\nu+1)} = A_{n,1}^{(\nu)} a_0^{(0)},$$

oder auch, wenn $\nu - 1$ an Stelle von ν gesetzt wird:

$$(8) \quad \begin{aligned} A_i^{(\nu)} &= a_i^{(0)} A_{n,1}^{(\nu-1)} + A_{i-1,1}^{(\nu-1)} \quad (i = 1, 2, \ldots n), \\ A_0^{(\nu)} &= a_0^{(0)} A_{n,1}^{(\nu-1)}. \end{aligned}$$

Erhöht man hier wieder die oberen Indices aller $a_k^{(\mu)}$ um eine Zahl λ, so folgt allgemeiner:

$$(9) \quad \begin{aligned} A_{i,\lambda}^{(\nu)} &= a_i^{(\lambda)} A_{n,\lambda+1}^{(\nu-1)} + A_{i-1,\lambda+1}^{(\nu-1)} \quad (i = 1, 2, \ldots n), \\ A_{0,\lambda}^{(\nu)} &= a_0^{(\lambda)} A_{n,\lambda+1}^{(\nu-1)}. \end{aligned}$$

Aus der Art, wie wir $A_{i,\lambda}^{(\nu)}$ aus $A_i^{(\nu)}$ entstehen ließen, folgt, daß in $A_{i,\lambda}^{(\nu)}$ nur solche $a_k^{(\mu)}$ auftreten können, bei denen $\mu \geqq \lambda$ ist; es ist also $A_{i,\lambda}^{(\nu)}$ unabhängig von allen $a_k^{(\mu)}$ für $\mu < \lambda$. Insbesondere ist daher $A_{i,1}^{(\nu-1)}$ unabhängig von $a_k^{(0)}$, also gewiß von $a_0^{(0)}$. Aus (8) folgt somit, daß auch

$$A_1^{(\nu)}, A_2^{(\nu)}, \ldots A_n^{(\nu)}$$

von $a_0^{(0)}$ ganz unabhängig sind, während dagegen $A_0^{(\nu)}$ das Produkt aus $a_0^{(0)}$ in einen von $a_0^{(0)}$ unabhängigen Faktor ist. Ebenso sind dann auch

$$A_{1,\lambda}^{(\nu)}, A_{2,\lambda}^{(\nu)}, \ldots A_{n,\lambda}^{(\nu)}$$

unabhängig von $a_0^{(\lambda)}$, während $A_{0,\lambda}^{(\nu)}$ das Produkt aus $a_0^{(\lambda)}$ in einen von $a_0^{(\lambda)}$ freien Faktor ist.

Das eingangs erwähnte Konvergenzproblem knüpft sich nun an die folgende

Definition II. Sind die Elemente $a_i^{(\nu)}$ einer Kette als bestimmte numerische Zahlen vorgegeben, so heißt die Kette **konvergent,** wenn die Quotienten $a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}$ mit wachsendem ν gegen bestimmte endliche Grenzwerte konvergieren:

$$a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_1^{(0)}, \quad a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_2^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_2^{(0)}, \; \ldots \; a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_n^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_n^{(0)},$$

welche dann **das Wertesystem der Kette** genannt werden. Andernfalls heißt die Kette divergent.[1])

Die Konvergenz erfordert hienach, daß, zum mindesten von einer gewissen Stelle $\nu \geqq \nu'$ ab, durchweg $A_0^{(\nu)} \neq 0$ ist; dagegen soll es nicht ausgeschlossen sein, daß für eine endliche Anzahl von ν-Werten gleichwohl $A_0^{(\nu)} = 0$ ist.

Nach den vorigen Bemerkungen ist das Wertesystem der Kette (welches natürlich bloß im Fall der Konvergenz existiert) unabhängig von $a_0^{(0)}$, und wegen (8) kann man statt der obigen Gleichungen auch schreiben:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_1^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu-1)}} = a_1^{(0)}, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_2^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu-1)}} = a_2^{(0)}, \; \ldots \; \lim_{\nu=\infty} \frac{A_n^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu-1)}} = a_n^{(0)}.$$

Diese Schreibweise hat vor der ersten den Vorzug, daß sie auch für $a_0^{(0)} = 0$ ihren Sinn behält, während zuvor für diesen Fall alle Nenner den Wert Null hatten. Indessen wollen wir für die gegenwärtige Arbeit **gleich jetzt ein für allemal festsetzen, dass $a_0^{(0)} \neq 0$ ist; ebenso $a_0^{(\nu)} \neq 0$ für alle ν.** Man kann infolgedessen an der ersten Schreibweise festhalten; außerdem ist zu beachten, daß jetzt auch die Determinante (3) stets von Null verschieden ist, was für spätere Untersuchungen von Wichtigkeit sein wird.

[1]) Ein ähnlicher Konvergenzbegriff auch bei Herrn Pincherle: Contributo alla generalizzazione delle frazioni continue, Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna, ser. V, t. IV (1894) p. 297—320.

Aus den Formeln (8) folgt:

$$(8^a)\qquad a_0^{(0)}\frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_i^{(0)} + \frac{A_{i-1,1}^{(\nu-1)}}{A_{n,1}^{(\nu-1)}}\quad (i = 1, 2, \ldots n);$$

die Konvergenz der Kette ist daher auch gleichbedeutend mit der Existenz der Grenzwerte:

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{A_{0,1}^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu)}},\quad \lim_{\nu=\infty}\frac{A_{1,1}^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu)}}\quad \ldots\quad \lim_{\nu=\infty}\frac{A_{n-1,1}^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu)}}.$$

Da diese Brüche von $a_0^{(0)}$, $a_1^{(0)}$, ... $a_n^{(0)}$ nicht abhängen (nach pag. 406 unten), so schließen wir, daß Konvergenz und Divergenz der Kette durch die Zahlen $a_0^{(0)}$, $a_1^{(0)}$, ... $a_n^{(0)}$ nicht beeinflußt werden können. Erst das Verhalten von $a_i^{(\nu)}$ für $\nu \geq 1$ kommt dabei in Frage.

Den Zusammenhang der Kette mit ihrem Wertesystem deuten wir symbolisch an durch die Formel:

$$(10)\qquad \begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & a_0^{(3)} & \ldots \\ a_1^{(0)}, & a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & a_1^{(3)} & \ldots \\ - & - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & a_n^{(3)} & \ldots \end{bmatrix} = \begin{cases} a_1^{(0)} \\ a_2^{(0)} \\ \\ a_n^{(0)}. \end{cases}$$

Danach wird insbesondere für Ketten erster Ordnung ($n = 1$):

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)} & \ldots \\ a_1^{(0)}, & a_1^{(1)}, & a_1^{(2)} & \ldots \end{bmatrix} = a_1 = a_0^{(0)}\lim_{\nu=\infty}\frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}},$$

also das Symbol

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)} & \ldots \\ a_1^{(0)}, & a_1^{(1)}, & a_1^{(2)} & \ldots \end{bmatrix}$$

gleichbedeutend mit dem unendlichen Kettenbruch

$$a_1^{(0)} + \frac{a_0^{(1)}|}{|a_1^{(1)}} + \frac{a_0^{(2)}|}{|a_1^{(2)}} + \frac{a_0^{(3)}|}{|a_1^{(3)}} + \cdots.$$

Übrigens soll das Zeichen auf der linken Seite von (10) überhaupt als Symbol für die Kette gebraucht werden, ohne Rücksicht auf Konvergenz oder Divergenz. Eine Gleichung der Form (10) hat dann allerdings bloß einen Sinn, wenn das Wertesystem der Kette existiert, also nur, wenn die Konvergenz feststeht; bei Divergenz hat das Kettensymbol, ebenso wie ein Kettenbruch lediglich formale Bedeutung. An Stelle des ausführlichen Kettensymboles (10) soll gelegentlich auch abkürzend

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\nu)} \\ - \\ a_n^{(\nu)} \end{bmatrix}_{\nu=0}^{\infty} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(\nu)} \\ - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(\nu)} \end{bmatrix}_{\nu=1}^{\infty} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(\nu)} \\ - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(\nu)} \end{bmatrix}_{\nu=2}^{\infty} \quad \text{etc.}$$

geschrieben werden.

Wir betrachten jetzt die beiden Ketten n^{ter} Ordnung:

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \dots \\ a_1^{(0)}, & a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \dots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \dots \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \dots \\ 0, & a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \dots \\ - & - & - & - \\ 0, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \dots \end{bmatrix}.$$

Ist eine von diesen konvergent, so ist es auch die andere, da ja die Konvergenz durch $a_i^{(0)}$ nicht beeinflußt wird. Bezeichnet man dann das Wertesystem der ersten Kette wieder mit $\alpha_1^{(0)}, \dots \alpha_n^{(0)}$, das der zweiten mit $\beta_1^{(0)}, \dots \beta_n^{(0)}$, so ist wegen (8ᵃ):

$$\alpha_i^{(0)} = a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_i^{(0)} + \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{i-1,1}^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu)}}.$$

Die zweite der obigen Ketten geht nun aber aus der ersten dadurch hervor, daß

$$a_0^{(0)} = 1, \; a_1^{(0)} = a_2^{(0)} = \dots = a_n^{(0)} = 0$$

gesetzt wird, während alle andern Elemente unverändert bleiben. Man erhält also entsprechend, da $A_{0,1}^{(\nu)}, A_{1,1}^{(\nu)}, \dots A_{n,1}^{(\nu)}$ von $a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \dots a_n^{(0)}$ gar nicht abhängen,

$$\beta_i^{(0)} = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{i-1,1}^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu)}},$$

und folglich auch:

$$\alpha_i^{(0)} = a_i^{(0)} + \beta_i^{(0)}.$$

Dies wichtige Resultat wird für Ketten erster Ordnung trivial, sobald man die Kette in Form eines Kettenbruches schreibt. Es besagt dann nämlich nichts weiter, als daß der Kettenbruch

$$a_1^{(0)} + \frac{a_0^{(1)} |}{| a_1^{(1)}} + \frac{a_0^{(2)} |}{| a_1^{(2)}} + \frac{a_0^{(3)} |}{| a_1^{(3)}} + \cdots$$

die Summe ist von $a_1^{(0)}$ und dem Kettenbruch

$$\frac{a_0^{(1)} |}{| a_1^{(1)}} + \frac{a_0^{(2)} |}{| a_1^{(2)}} + \frac{a_0^{(3)} |}{| a_1^{(3)}} + \cdots.$$

Ferner untersuchen wir die beiden Ketten n^{ter} Ordnung:

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\nu)} \\ a_1^{(\nu)} \\ -- \\ a_{n-1}^{(\nu)} \\ a_n^{(\nu)} \end{bmatrix}_{\nu=0}^{\infty} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} a_0^{(\nu)}\, \varrho_\nu\, \varrho_{\nu-1} \cdots \varrho_{\nu-n} \\ a_1^{(\nu)}\, \varrho_\nu\, \varrho_{\nu-1} \cdots \varrho_{\nu-n+1} \\ - - - - - - \\ a_{n-1}^{(\nu)}\, \varrho_\nu\, \varrho_{\nu-1} \\ a_n^{(\nu)}\, \varrho_\nu \end{bmatrix}_{\nu=0}^{\infty},$$

wobei $\varrho_\nu = 1$ ist für $\nu < 0$, während die ϱ_ν für $\nu \geqq 0$ ganz beliebige, aber von Null verschiedene Zahlen bedeuten sollen. Zur ersten dieser beiden Ketten gehören die Rekursionsformeln (1), während die entsprechenden zur zweiten Kette gehörigen Formeln lauten:

$$B_i^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu)}\, \varrho_\nu \varrho_{\nu-1} \cdots \varrho_{\nu-n} B_i^{(\nu)} + a_1^{(\nu)}\, \varrho_\nu \varrho_{\nu-1} \cdots \varrho_{\nu-n+1} B_i^{(\nu+1)} \\ + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)}\, \varrho_\nu\, \varrho_{\nu-1}\, B_i^{(\nu+n-1)} + a_n^{(\nu)}\, \varrho_\nu\, B_i^{(\nu+n)},$$

wobei die Anfangswerte wieder

$$B_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \;\;\text{„}\;\; i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \ldots n)$$

sind. Hieraus folgt nun sogleich durch den Schluß von ν auf $\nu + 1$:

$$B_i^{(\nu+n+1)} = \varrho_0\, \varrho_1 \cdots \varrho_\nu\, A_i^{(\nu+n+1)} \quad (\nu = 0, 1, \ldots \infty),$$

und folglich auch:

$$\varrho_0 \cdot \left(a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} \right) = a_0^{(0)}\, \varrho_0 \cdot \frac{B_i^{(\nu+n+1)}}{B_0^{(\nu+n+1)}},$$

sobald nur $A_0^{(\nu+n+1)} \neq 0$ ist. Läßt man ν über alle Grenzen wachsen, so besagt dies: Wenn von den obigen beiden Ketten die eine konvergent ist, so ist es auch die andere, und das Wertesystem der zweiten Kette ist das ϱ_0-fache des Wertesystems der ersten. Ist speziell $\varrho_0 = 1$, so heißen die beiden Ketten **äquivalent**, in Zeichen:

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\nu)} \\ a_1^{(\nu)} \\ - \\ a_n^{(\nu)} \end{bmatrix}_{\nu=0}^{\infty} \sim \begin{bmatrix} a_0^{(\nu)}\,\varrho_\nu\,\varrho_{\nu-1} \cdots \varrho_{\nu-n} \\ a_1^{(\nu)}\,\varrho_\nu\,\varrho_{\nu-1} \cdots \varrho_{\nu-n+1} \\ - - - - - - \\ a_n^{(\nu)}\,\varrho_\nu \end{bmatrix}_{\nu=0}^{\infty} \qquad \begin{pmatrix} \varrho_\nu = 1 \text{ für } \nu \leq 0 \\ \varrho_\nu \neq 0 \quad „ \quad \nu > 0 \end{pmatrix},$$

und wir erhalten den Satz:

Zwei äquivalente Ketten sind stets gleichzeitig konvergent oder divergent und haben im Fall der Konvergenz das gleiche Wertesystem.

Sind die Elemente $a_i^{(\nu)}$ einer Kette sämtlich rationale Zahlen, so kann man offenbar durch geeignete Wahl der Multiplikatoren ϱ_ν eine äquivalente Kette finden, deren Elemente, wenigstens von der zweiten Kolonne ab, sämtlich ganze Zahlen sind.

Herr Pringsheim[1]) nennt einen Kettenbruch unbedingt konvergent, wenn er nach Weglassung einer beliebigen Anzahl von Anfangsgliedern konvergent bleibt. Im Anschluß hieran definieren wir:

Definition III. Die Kette n^{ter} Ordnung

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)},\ a_0^{(1)},\ a_0^{(2)} \ldots \\ - - - - \\ a_n^{(0)},\ a_n^{(1)},\ a_n^{(2)} \ldots \end{bmatrix}$$

heißt **unbedingt konvergent**, wenn die Ketten

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\lambda)},\ a_0^{(\lambda+1)},\ a_0^{(\lambda+2)} \ldots \\ - - - - - - \\ a_n^{(\lambda)},\ a_n^{(\lambda+1)},\ a_n^{(\lambda+2)} \ldots \end{bmatrix} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots \infty)$$

[1]) Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche. Diese Sitzungsberichte, Bd. 28 (1898), pag. 295—324.

sämtlich konvergent sind. Finden sich dagegen eine oder mehrere divergente unter diesen Ketten, so heißt die Kette (wenn sie überhaupt konvergiert) nur bedingt konvergent.

Eine unbedingt konvergente Kette ist also dadurch ausgezeichnet, daß für alle λ die Grenzwerte

$$a_0^{(\lambda)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{1,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = a_1^{(\lambda)}, \quad a_0^{(\lambda)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = a_2^{(\lambda)}, \ldots$$

$$a_0^{(\lambda)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{n,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = a_n^{(\lambda)}$$

existieren; diese sind offenbar von $a_0^{(\lambda)}$ unabhängig, wie ja auch $a_i^{(0)}$ von $a_0^{(0)}$ unabhängig war. Offenbar kann auch die unbedingte Konvergenz durch die Zahlen $a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \ldots a_n^{(0)}$ nicht beeinflußt werden.

Aus den Gleichungen (9) erhält man:

$$(11) \quad a_0^{(\lambda)} \frac{A_{i,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = a_i^{(\lambda)} + \frac{A_{i-1,\lambda+1}^{(\nu-1)}}{A_{n,\lambda+1}^{(\nu-1)}} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots n \\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots \infty \end{pmatrix}.$$

Bei unbedingter Konvergenz nähert sich die linke Seite in (11) mit wachsendem ν dem endlichen Grenzwert $a_i^{(\lambda)}$; daher muß insbesondere (für $i = 1$) auch $\frac{A_{0,\lambda+1}^{(\nu-1)}}{A_{n,\lambda+1}^{(\nu-1)}}$ einen endlichen Grenzwert haben; da dieser aber offenbar gleich $\frac{a_0^{(\lambda+1)}}{a_n^{(\lambda+1)}}$ ist, so folgt $a_n^{(\lambda+1)} \neq 0$, d. h.:

$$a_n^{(1)} \neq 0, \quad a_n^{(2)} \neq 0, \quad a_n^{(3)} \neq 0, \ldots;$$

dagegen kann sehr wohl $a_n^{(0)} = 0$ sein. Läßt man nun in (11) ν unbegrenzt wachsen, so folgt:

$$a_1^{(\lambda)} = a_1^{(\lambda)} + \frac{a_0^{(\lambda+1)}}{a_n^{(\lambda+1)}}$$

$$a_i^{(\lambda)} = a_i^{(\lambda)} + \frac{a_{i-1}^{(\lambda+1)}}{a_n^{(\lambda+1)}} \qquad (i = 2, 3, \ldots n).$$

Dies ist gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} a_1^{(0)} = a_1^{(0)} + \frac{a_0^{(1)}}{a_n^{(1)}}, \quad a_2^{(0)} = a_2^{(0)} + \frac{a_1^{(1)}}{a_n^{(1)}}, \ldots a_n^{(0)} = a_n^{(0)} + \frac{a_{n-1}^{(1)}}{a_n^{(1)}} \\ a_1^{(1)} = a_1^{(1)} + \frac{a_0^{(2)}}{a_n^{(2)}}, \quad a_2^{(1)} = a_2^{(1)} + \frac{a_1^{(2)}}{a_n^{(2)}}, \ldots a_n^{(1)} = a_n^{(1)} + \frac{a_{n-1}^{(2)}}{a_n^{(2)}} \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -, \end{array} \tag{12}$$

welches in meiner Habilitationsschrift zum Ausgangspunkt der Untersuchung gewählt war; nur war dort durchweg $a_0^{(\lambda)} = 1$.

Es empfiehlt sich, statt der Größen $a_i^{(\lambda)}$ gewisse homogene Größen einzuführen, nämlich:

$$\frac{a_i^{(\lambda)}}{a_0^{(\lambda)}} = \lim_{\nu = \infty} \frac{A_{i,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = \frac{x_i^{(\lambda)}}{x_0^{(\lambda)}} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots n \\ \lambda = 0, 1, \ldots \infty \end{pmatrix},$$

wobei $x_0^{(\lambda)} \neq 0$ ist, und die Zahlen $x_0^{(\lambda)}, x_1^{(\lambda)}, \ldots x_n^{(\lambda)}$ nur bis auf einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor bestimmt sind (der natürlich mit λ variieren darf). Nach geeigneter Festsetzung der willkürlichen Faktoren gewinnt man aus (12) das folgende homogene Gleichungssystem:

$$\begin{array}{c} x_0^{(0)} = a_0^{(0)} x_n^{(1)}, \; x_1^{(0)} = x_0^{(1)} + a_1^{(0)} x_n^{(1)}, \; x_2^{(0)} = x_1^{(1)} + a_2^{(0)} x_n^{(1)}, \ldots \\ x_n^{(0)} = x_{n-1}^{(1)} + a_n^{(0)} x_n^{(1)} \\ x_0^{(1)} = a_0^{(1)} x_n^{(2)}, \; x_1^{(1)} = x_0^{(2)} + a_1^{(1)} x_n^{(2)}, \; x_2^{(1)} = x_1^{(2)} + a_2^{(1)} x_n^{(2)}, \ldots \\ x_n^{(1)} = x_{n-1}^{(2)} + a_n^{(1)} x_n^{(2)} \\ x_0^{(2)} = a_0^{(2)} x_n^{(3)}, \; x_1^{(2)} = x_0^{(3)} + a_1^{(2)} x_n^{(3)}, \; x_2^{(2)} = x_1^{(3)} + a_2^{(2)} x_n^{(3)}, \ldots \\ x_n^{(2)} = x_{n-1}^{(3)} + a_n^{(2)} x_n^{(3)} \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \end{array} \tag{13}$$

Dieses stimmt der Form nach überein mit einem System linearer Substitutionen, durch welche die $x_i^{(0)}$ sukzessive in $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, etc. transformiert werden. Will man durch Zusammensetzung der Substitutionen die $x_i^{(0)}$ direkt in $x_i^{(\lambda)}$ transformieren, so geschieht das durch die Formeln

$$x_i^{(0)} = A_i^{(\lambda)} x_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} x_1^{(\lambda)} + \cdots + A_i^{(\lambda+n)} x_n^{(\lambda)} \tag{14}$$
$$(i = 0, 1, \ldots n),$$

wie durch den Schluß von λ auf $\lambda + 1$ ohne weiteres bestätigt wird, nachdem die Formel für $\lambda = 0$ ja evident ist. Erhöht man in einer der Gleichungen (13) die oberen Indices der $a_i^{(\nu)}$, $x_i^{(\nu)}$ um eine Zahl μ, so kommt wieder eine Gleichung des Systems (13) zum Vorschein. Man darf also auch in (14) diese Operation ausführen und erhält dann:

$$x_i^{(\mu)} = A_{i,\mu}^{(\lambda)} x_0^{(\lambda+\mu)} + A_{i,\mu}^{(\lambda+1)} x_1^{(\lambda+\mu)} + \cdots + A_{i,\mu}^{(\lambda+n)} x_n^{(\lambda+\mu)} \tag{14a}$$
$$(i = 0, 1, \ldots n).$$

Da $x_0^{(0)} \neq 0$ ist, so folgt aus (14), indem man wieder zur inhomogenen Bezeichnung zurückkehrt:

$$a_i^{(0)} = a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+2)} a_2^{(\lambda)} + \cdots + A_i^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+2)} a_2^{(\lambda)} + \cdots + A_0^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)}} \tag{15}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n;\ \lambda = 0, 1, \ldots \infty).$$

Diese Formel wurde abgeleitet unter der Voraussetzung unbedingter Konvergenz; bei nur bedingter Konvergenz sind ja die zur Herleitung sukzessive benutzten Zahlen $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$, ..., die als gewisse Grenzwerte definiert sind, gar nicht immer vorhanden.[1]) Es ist aber von größter Wichtigkeit, daß trotzdem der folgende Satz gilt:

Lemma: Wenn die Kette:

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\lambda)}, & a_0^{(\lambda+1)}, & a_0^{(\lambda+2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(\lambda)}, & a_n^{(\lambda+1)}, & a_n^{(\lambda+2)}, & \ldots \end{bmatrix},$$

wo λ ein **bestimmter** Index $\lambda > 1$ ist, konvergiert, und ihr Wertesystem mit $a_1^{(\lambda)}, \ldots a_n^{(\lambda)}$ bezeichnet wird, so ist die Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix}$$

konvergent oder divergent, je nachdem die Größe

---

1) Dagegen ist die Einführung der homogenen Größen $x_i^{(\lambda)}$ für den Beweis der Formel (15) unwesentlich; diese wird vielmehr auch direkt durch vollständige Induktion gewonnen.

$$A_0^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+2)} a_2^{(\lambda)} + \cdots + A_0^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)}$$

von Null verschieden oder gleich Null ist. Das Wertesystem der Kette ist im Konvergenzfall gegeben durch die Formel:

$$a_i^{(0)} = a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + \cdots + A_i^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + \cdots + A_0^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)}} \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Man beachte, daß hier nirgends von unbedingter Konvergenz die Rede ist. Es kann sehr wohl vorkommen, daß die in dem Satz auftretenden Ketten beide konvergieren, während dagegen

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\nu)}, & a_0^{(\nu+1)}, & a_0^{(\nu+2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(\nu)}, & a_n^{(\nu+1)}, & a_n^{(\nu+2)}, & \ldots \end{bmatrix}$$

für $0 < \nu < \lambda$ divergiert. Zum Beweis des Satzes beachte man, daß nach unseren Voraussetzungen die Grenzwerte

$$a_0^{(\lambda)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{i,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = a_i^{(\lambda)}$$

existieren, und daß also für genügend große ν stets $A_{0,\lambda}^{(\nu)} \neq 0$ ist. Daher folgt aus Formel (6):

$$\frac{A_i^{(\nu+\lambda)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = A_i^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} \frac{A_{1,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} + A_i^{(\lambda+2)} \frac{A_{2,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} + \cdots + A_i^{(\lambda+n)} \frac{A_{n,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}}.$$

Multipliziert man mit $a_0^{(\lambda)}$ und läßt dann ν unbegrenzt wachsen, so nähern sich die einzelnen Terme der rechten Seite bestimmten endlichen Grenzwerten. Gleiches gilt also auch von der linken Seite, und zwar ist:

$$(16) \quad a_0^{(\lambda)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu+\lambda)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = A_i^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + \cdots + A_i^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)};$$

insbesondere für $i = 0$:

$$(17) \quad a_0^{(\lambda)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_0^{(\nu+\lambda)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = A_0^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + \cdots + A_0^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)}.$$

Ist dieser letztere Ausdruck von Null verschieden, so folgt die Behauptung, soweit sie sich auf diesen Fall bezieht, unmittelbar, indem man Gleichung (16) durch (17) dividiert. Hat der Ausdruck (17) aber den Wert Null, so können die Ausdrücke (16) nicht für alle Werte von i ebenfalls verschwinden, sonst müßte die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_0^{(\lambda)} & A_0^{(\lambda+1)} & \dots & A_0^{(\lambda+n)} \\ - & - & - & - \\ A_n^{(\lambda)} & A_n^{(\lambda+1)} & \dots & A_n^{(\lambda+n)} \end{vmatrix} = 0$$

sein, was nach Formel (3) nicht der Fall ist. Es ist daher wenigstens für einen Wert von i, indem man Gleichung (17) durch (16) dividiert,

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_0^{(\nu+\lambda)}}{A_i^{(\nu+\lambda)}} = 0.$$

Also kann der reziproke Bruch keinen endlichen Grenzwert haben, und folglich divergiert die Kette. Damit ist aber der Satz in allen Teilen bewiesen.

§ 2.

Konvergenz für positive $a_i^{(\nu)}$ und für $|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leqq \vartheta(|a_n^{(\nu)}| - 1)$.

Es handelt sich nun vor allem darum, bei numerisch gegebenen Elementen festzustellen, ob die Kette konvergiert, und auch, ob sie unbedingt konvergiert. Ein erstes Konvergenzkriterium entnimmt man dem Satz II meiner Habilitationsschrift (a. a. O., pag. 12); ich will es der Vollständigkeit halber hier in etwas anderer Form wiederholen:

Theorem I. Wenn die Elemente $a_i^{(\nu)}$ reelle Zahlen sind und für $\nu \geqq 1$ den Ungleichungen:

$$a_n^{(\nu)} \geqq c; \quad a_n^{(\nu)} \geqq c\, a_i^{(\nu)} > 0 \quad (i = 0, 1, \dots n-1)$$

genügen, wo c eine von ν unabhängige, positive, im übrigen aber auch beliebig kleine Zahl bedeutet, so ist die Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)} & \dots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)} & \dots \end{bmatrix}$$

unbedingt konvergent.[1])

A. a. O. sind allerdings die gleichen Bedingungen auch für $\nu = 0$ gefordert, und ist obendrein nur die Konvergenz schlechthin, nicht die unbedingte, bewiesen. Da aber, wie bereits hervorgehoben, die Zahlen $a_i^{(0)}$ die Konvergenz gar nicht beeinflussen, so sind die ihnen auferlegten Bedingungen überflüssig. Weiter ist aber die Konvergenz auch eine unbedingte; denn bei den Ketten

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\lambda)}, & a_0^{(\lambda+1)}, & a_0^{(\lambda+2)} & \dots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(\lambda)}, & a_n^{(\lambda+1)}, & a_n^{(\lambda+2)} & \dots \end{bmatrix} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots \infty)$$

sind ja ebenfalls die Bedingungen des Theorems erfüllt, also sind sie sämtlich konvergent.

Wir wenden uns jetzt zu dem fundamentalsten Konvergenzkriterium für komplexe Elemente. Es lautet:

Theorem II. Wenn für $\nu \geqq 1$ durchweg die Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leqq \vartheta\,(|a_n^{(\nu)}| - 1)$$

gilt, wo ϑ eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet, während die Zahlen $a_i^{(\nu)}$ auch komplex sein dürfen, so ist die Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)} & \dots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)} & \dots \end{bmatrix}$$

unbedingt konvergent.

---

[1]) Die Bedingung $a_0^{(\nu)} \neq 0$ wurde schon pag. 407 ein für allemal gestellt. und wird daher in allen Kriterien neben den jeweiligen Bedingungen noch stillschweigend als erfüllt vorausgesetzt, obwohl dies gerade bei Theorem I nicht absolut nötig wäre.

Die Voraussetzungen sind hier offenbar wieder derartige, daß aus der einmal bewiesenen Konvergenz auch sogleich die unbedingte Konvergenz gefolgert werden kann. Da ferner die Zahlen $a_i^{(0)}$ die Konvergenz nicht beeinflussen, so können wir beim Beweis des Theorems annehmen, daß die Bedingungen auch für $\nu = 0$ erfüllt sind; also:

$$\vartheta |a_n^{(\nu)}| - |a_0^{(\nu)}| - |a_1^{(\nu)}| - \cdots - |a_{n-1}^{(\nu)}| \geqq \vartheta \quad (\text{für } \nu = 0, 1, 2, \ldots \infty).$$

Dabei bedeute ϑ vorläufig eine Zahl, die $\leqq 1$ ist. Tritt in den Gleichungen (9) $\nu - \lambda$ an Stelle von λ, so folgt, wenn i der Reihe nach gleich $n, n-1, \ldots 1$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
|A_{n,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| &\geqq |a_n^{(\lambda)} A_{n,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| - |A_{n-1,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}|,\\
|A_{n-1,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| &\leqq |a_{n-1}^{(\lambda)} A_{n,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| + |A_{n-2,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}|,\\
|A_{n-2,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| &\leqq |a_{n-2}^{(\lambda)} A_{n,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| + |A_{n-3,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}|,\\
&- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -\\
|A_{1,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| &\leqq |a_1^{(\lambda)} A_{n,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| + |A_{0,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}|,\\
|A_{0,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| &= |a_0^{(\lambda)} A_{n,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}|.
\end{aligned}$$

Die erste dieser Ungleichungen multiplizieren wir mit ϑ und subtrahieren davon die n übrigen; dann folgt:

$$\begin{aligned}
&\vartheta |A_{n,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| - (|A_{0,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| + |A_{1,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| + \cdots + |A_{n-1,\lambda}^{(\nu-\lambda)}|)\\
&\geqq (\vartheta |a_n^{(\lambda)}| - |a_0^{(\lambda)}| - |a_1^{(\lambda)}| - \cdots - |a_{n-1}^{(\lambda)}|) |A_{n,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}|\\
&- (|A_{0,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| + |A_{1,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| + \cdots + |A_{n-2,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| + \vartheta |A_{n-1,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}|)\\
&\geqq \vartheta \cdot |A_{n,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| - (|A_{0,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| + |A_{1,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| + \cdots + |A_{n-1,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}|).
\end{aligned}$$

Hier bedeuten ν, λ irgendwelche Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots$; nur muß natürlich $\nu \geqq \lambda + 1$ sein, damit keine negativen oberen Indices vorkommen. Setzt man zur Abkürzung:

$$\vartheta |A_{n,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| - (|A_{0,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| + |A_{1,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| + \cdots + |A_{n-1,\lambda}^{(\nu-\lambda)}|) = \Phi_{\nu,\lambda},$$

so besagt die letzte Ungleichung:

$$\Phi_{\nu,\lambda} \geqq \Phi_{\nu,\lambda+1}.$$

Daher nimmt die Größe $\Phi_{\nu,\lambda}$ mit wachsendem λ niemals zu; es ist also auch, wenn $\nu > n$ vorausgesetzt wird,

$$\Phi_{\nu,0} > \Phi_{\nu,\nu-n},$$

oder ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned} &\vartheta\,|A_n^{(\nu)}| - (|A_0^{(\nu)}| + |A_1^{(\nu)}| + \cdots + |A_{n-1}^{(\nu)}|) \\ &\geqq \vartheta\,|A_{n,\nu-n}^{(n)}| - (|A_{0,\nu-n}^{(n)}| + |A_{1,\nu-n}^{(n)}| + \cdots + |A_{n-1,\nu-n}^{(n)}|) \\ &= \vartheta. \end{aligned}$$

Somit ist allgemein:

(18) $\vartheta\,|A_n^{(\nu)}| \geqq \vartheta + |A_0^{(\nu)}| + |A_1^{(\nu)}| + \cdots + |A_{n-1}^{(\nu)}|$ (für $\nu > n$);

ebenso, wenn man die oberen Indices aller $a_k^{(\mu)}$ um λ erhöht, wobei ja die Voraussetzungen des Theorems erhalten bleiben:

(19) $\vartheta\,|A_{n,\lambda}^{(\nu)}| > \vartheta + |A_{0,\lambda}^{(\nu)}| + |A_{1,\lambda}^{(\nu)}| + \cdots + |A_{n-1,\lambda}^{(\nu)}|$ (für $\nu > n$).

Aus (18) ergibt sich einmal, daß $|A_n^{(\nu)}| \geqq 1$ ist, sodann aber vor allem, daß die Quotienten

$$\frac{A_0^{(\nu)}}{A_n^{(\nu)}},\quad \frac{A_1^{(\nu)}}{A_n^{(\nu)}},\ \ldots\ \frac{A_{n-1}^{(\nu)}}{A_n^{(\nu)}}$$

absolut genommen unter einer von ν unabhängigen endlichen Schranke bleiben, nämlich alle kleiner als ϑ. Daraus folgt bekanntlich, daß es eine gewisse unendliche Auswahl von wachsenden ν-Werten gibt: $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ derart, daß die Grenzwerte

$$\lim_{s=\infty} \frac{A_0^{(\nu_s)}}{A_n^{(\nu_s)}},\quad \lim_{s=\infty} \frac{A_1^{(\nu_s)}}{A_n^{(\nu_s)}},\ \ldots\ \lim_{s=\infty} \frac{A_{n-1}^{(\nu_s)}}{A_n^{(\nu_s)}} \tag{20}$$

existieren, und zwar sind sie absolut $\leqq \vartheta$.

Dabei ist aber der erste dieser Grenzwerte sicher auch von Null verschieden. Denn aus (19) ergibt sich auch, daß $|A_{n,\lambda}^{(\nu)}| \geqq 1$ ist, und daß $\left|\frac{A_{i,\lambda}^{(\nu)}}{A_{n,\lambda}^{(\nu)}}\right| < \vartheta$ bleibt für alle $\nu > n$; also insbesondere für $\lambda = 1$, $i = n-1$:

$$\left|\frac{A^{(\nu)}_{n-1,1}}{A^{(\nu)}_{n,1}}\right| < \vartheta.$$

Anderseits erhält man aus (8) für $i = n$:

$$|A^{(\nu)}_n| \leq |a^{(0)}_n A^{(\nu-1)}_{n,1}| + |A^{(\nu-1)}_{n-1,1}|$$

und

$$|A^{(\nu)}_0| = |a^{(0)}_0 A^{(\nu-1)}_{n,1}| > |a^{(0)}_0| > 0.$$

Also durch Division:

$$\left|\frac{A^{(\nu)}_n}{A^{(\nu)}_0}\right| \leq \left|\frac{a^{(0)}_n}{a^{(0)}_0}\right| + \left|\frac{A^{(\nu-1)}_{n-1,1}}{a^{(0)}_0 A^{(\nu-1)}_{n,1}}\right| < \left|\frac{a^{(0)}_n}{a^{(0)}_0}\right| + \frac{\vartheta}{|a^{(0)}_0|},$$

und folglich, indem man die reziproken Werte nimmt:

$$\lim_{s=\infty}\left|\frac{A^{(\nu_s)}_0}{A^{(\nu_s)}_n}\right| > \frac{|a^{(0)}_0|}{|a^{(0)}_n| + \vartheta} > 0, \text{ w. z. b. w.}$$

Von den Zahlen (20) kann man daher die $n-1$ letzten durch die erste dividieren, und findet so, daß die folgenden Grenzwerte existieren:

$$(21) \qquad a^{(0)}_0 \lim_{s=\infty}\frac{A^{(\nu_s)}_1}{A^{(\nu_s)}_0} = a^{(0)}_1, \ \ldots \ a^{(0)}_0 \lim_{s=\infty}\frac{A^{(\nu_s)}_n}{A^{(\nu_s)}_0} = a^{(0)}_n,$$

und daß insbesondere auch $a^{(0)}_n \neq 0$ ist.

Wir beweisen nun durch vollständige Induktion, daß ganz allgemein auch die Grenzwerte

$$(22) \quad a^{(\lambda)}_0 \lim_{s=\infty}\frac{A^{(\nu_s-\lambda)}_{1,\lambda}}{A^{(\nu_s-\lambda)}_{0,\lambda}} = a^{(\lambda)}_1, \ \ldots \ a^{(\lambda)}_0 \lim_{s=\infty}\frac{A^{(\nu_s-\lambda)}_{n,\lambda}}{A^{(\nu_s-\lambda)}_{0,\lambda}} = a^{(\lambda)}_n$$

existieren und daß $a^{(\lambda)}_n \neq 0$ ist. Für $\lambda = 0$ ist dies nämlich soeben bewiesen worden. Nehmen wir daher an, die Behauptung sei für einen bestimmten Wert von λ richtig, so folgt aus Formel (11), wenn dort $\nu_s - \lambda$ an Stelle von ν tritt,

$$a^{(\lambda)}_0 \frac{A^{(\nu_s-\lambda)}_{i,\lambda}}{A^{(\nu_s-\lambda)}_{0,\lambda}} = a^{(\lambda)}_i + \frac{A^{(\nu_s-\lambda-1)}_{i-1,\lambda+1}}{A^{(\nu_s-\lambda-1)}_{n,\lambda+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

und durch Übergang zur Grenze $s = \infty$:

$$a_i^{(\lambda)} = a_i^{(\lambda)} + \lim_{s=\infty} \frac{A_{i-1,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}}{A_{n,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}} \quad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{23}$$

Es existieren also die Grenzwerte:

$$\lim_{s=\infty} \frac{A_{0,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}}{A_{n,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}}, \quad \lim_{s=\infty} \frac{A_{1,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}}{A_{n,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}}, \ldots \lim_{s=\infty} \frac{A_{n-1,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}}{A_{n,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}},$$

deren erster sich analog wie oben als von Null verschieden erweist.[1]) Man kann also die $n-1$ letzten durch ihn dividieren, und dadurch ergibt sich die Existenz der folgenden Grenzwerte:

$$a_0^{(\lambda+1)} \lim_{s=\infty} \frac{A_{1,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}}{A_{0,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}} = a_1^{(\lambda+1)}, \ldots a_0^{(\lambda+1)} \lim_{s=\infty} \frac{A_{n,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}}{A_{0,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}} = a_n^{(\lambda+1)},$$

deren letzter gewiß von Null verschieden ist.

Diese unterscheiden sich von (22) lediglich dadurch, daß $\lambda + 1$ an Stelle von λ steht, so daß die Grenzwerte (22) in der Tat für beliebiges λ existieren.

Nachdem dies feststeht, gilt auch die daraus abgeleitete Gleichung (23), aus welcher dann folgt:

$$\begin{gathered} a_1^{(\lambda)} = a_1^{(\lambda)} + \frac{a_0^{(\lambda+1)}}{a_n^{(\lambda+1)}}, \quad a_2^{(\lambda)} = a_2^{(\lambda)} + \frac{a_1^{(\lambda+1)}}{a_n^{(\lambda+1)}}, \ldots \\ a_n^{(\lambda)} = a_n^{(\lambda)} + \frac{a_{n-1}^{(\lambda+1)}}{a_n^{(\lambda+1)}}. \end{gathered} \tag{24}$$

Für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots \infty$ stimmen diese Gleichungen formal genau überein mit dem System (12), und auch jetzt ergibt sich daher genau wie früher (durch den Schluß von λ auf $\lambda + 1$):

$$a_i^{(0)} = a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + \cdots + A_i^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + \cdots + A_0^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)}}.$$

---

[1]) Der Beweis entsteht natürlich aus dem früher gegebenen einfach dadurch, daß man die oberen Indices aller $a_k^{(\mu)}$ um die Zahl $\lambda + 1$ erhöht.

Setzt man daher zur Abkürzung:

$$(25)\qquad a_0^{(0)} A_i^{(\lambda)} - a_i^{(0)} A_0^{(\lambda)} = H_i^{(\lambda)} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots n \\ \lambda = 0, 1, \ldots \infty \end{pmatrix},$$

so kommt:

$$(26)\quad a_0^{(\lambda)} H_i^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} H_i^{(\lambda+1)} + a_2^{(\lambda)} H_i^{(\lambda+2)} + \cdots + a_n^{(\lambda)} H_i^{(\lambda+n)} = 0.$$

Hier brauchen wir nun eine wichtige Ungleichung, welcher die Zahlen $a_i^{(\lambda)}$ genügen. Man erhält sie aus (19), indem man rechter Hand den Summanden ϑ wegläßt, und dann die ganze Ungleichung durch $|A_{0,\lambda}^{(\nu)}|$ dividiert und mit $|a_0^{(\lambda)}|$ multipliziert; es ergibt sich so:

$$\vartheta \left| a_0^{(\lambda)} \frac{A_{n,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} \right| > |a_0^{(\lambda)}| + \left| a_0^{(\lambda)} \frac{A_{1,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} \right| + \cdots + \left| a_0^{(\lambda)} \frac{A_{n-1,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} \right|.$$

Setzt man hier $\nu = \nu_s - \lambda$ und läßt s ins Unendliche wachsen, so kommt nach den Definitionsgleichungen (22):

$$(27)\qquad \begin{gathered} \vartheta\, |a_n^{(\lambda)}| \geq |a_0^{(\lambda)}| + |a_1^{(\lambda)}| + |a_2^{(\lambda)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\lambda)}| \\ (\lambda = 0, 1, \ldots \infty), \end{gathered}$$

welches die gesuchte Ungleichung ist. Man bemerke bei dieser Gelegenheit auch:

$$(28)\qquad \begin{gathered} |a_1^{(\lambda)} - a_1^{(\lambda)}| + |a_2^{(\lambda)} - a_2^{(\lambda)}| + \cdots + |a_n^{(\lambda)} - a_n^{(\lambda)}| < \vartheta, \\ (\lambda = 0, 1, \ldots \infty); \end{gathered}$$

denn die linke Seite ist nach (24) gleich:

$$\frac{|a_0^{(\lambda+1)}| + |a_1^{(\lambda+1)}| + |a_2^{(\lambda+1)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\lambda+1)}|}{|a_n^{(\lambda+1)}|},$$

also nach (27) in der Tat $< \vartheta$.

Da $|a_n^{(\lambda)}| > 0$ ist, so folgt aus Gleichung (26):

$$|H_i^{(\lambda+n)}| < \frac{|a_0^{(\lambda)} H_i^{(\lambda)}| + |a_1^{(\lambda)} H_i^{(\lambda+1)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\lambda)} H_i^{(\lambda+n-1)}|}{|a_n^{(\lambda)}|}.$$

Bezeichnet man daher die größte der n Zahlen

$$|H_i^{(\lambda)}|,\ |H_i^{(\lambda+1)}|,\ \ldots\ |H_i^{(\lambda+n-1)}|$$

mit $M_i^{(\lambda)}$, so ergibt sich:

$$|H_i^{(\lambda+n)}| \leqq \frac{|a_0^{(\lambda)}| + |a_1^{(\lambda)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\lambda)}|}{|a_n^{(\lambda)}|} M_i^{(\lambda)},$$

und daher mit Rücksicht auf (27):

(29) $$|H_i^{(\lambda+n)}| \leqq \vartheta M_i^{(\lambda)} \leqq M_i^{(\lambda)}.$$

Es ist daher auch $M_i^{(\lambda+1)} \leqq M_i^{(\lambda)}$; somit nehmen die Zahlen $M_i^{(\lambda)}$ mit wachsendem λ monoton ab; sie und folglich auch die Zahlen $|H_i^{(\lambda)}|$ bleiben also unter einer von λ unabhängigen Schranke.

Soweit ergab sich dies alles unter der Annahme $\vartheta \leqq 1$. Von jetzt ab sei aber $\vartheta < 1$. Dann ist wegen (29):

$$\begin{aligned}
|H_i^{(\lambda+n)}| &\leqq \vartheta M_i^{(\lambda)} \\
|H_i^{(\lambda+n+1)}| &\leqq \vartheta M_i^{(\lambda+1)} \leqq \vartheta M_i^{(\lambda)} \\
&- - - - - - - \\
|H_i^{(\lambda+2n-1)}| &\leqq \vartheta M_i^{(\lambda+n-1)} \leqq \vartheta M_i^{(\lambda)}.
\end{aligned}$$

Es ist also auch die größte der n Zahlen

$$|H_i^{(\lambda+n)}|,\ |H_i^{(\lambda+n+1)}|,\ \ldots\ |H_i^{(\lambda+2n-1)}|$$

höchstens gleich $\vartheta M_i^{(\lambda)}$, d. h.:

$$M_i^{(\lambda+n)} \leqq \vartheta M_i^{(\lambda)},$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Ungleichung folgt dann auch:

(30) $$M_i^{(\lambda+\nu n)} \leqq \vartheta^\nu M_i^{(\lambda)},$$

also gewiß wegen $\vartheta < 1$:

$$\lim_{\nu=\infty} M_i^{(\lambda+\nu n)} = 0.$$

Da aber die Zahlen $M_i^{(\lambda)}$ mit wachsendem λ monoton abnehmen, so ergibt sich hieraus:

$$\lim_{\lambda=\infty} M_i^{(\lambda)} = 0,$$

und folglich auch:

$$\lim_{\lambda=\infty} H_i^{(\lambda)} = 0.$$

Nach der Definition von $H_i^{(\lambda)}$ (Gleichung (25)) besagt dies aber:

(31) $$\lim_{\lambda=\infty} (a_0^{(0)} A_i^{(\lambda)} - a_i^{(0)} A_0^{(\lambda)}) = 0.$$

Nun ist für $\nu > n$ wegen Ungleichung (19): $|A_{n,\lambda}^{(\nu)}| > 1$; also:

$$|A_0^{(\lambda)}| = |a_0^{(0)} A_{n,1}^{(\lambda-1)}| > |a_0^{(0)}| \quad (\text{für } \lambda > n+1).$$

$A_0^{(\lambda)}$ liegt also über einer von λ unabhängigen positiven Zahl; daher kann man die Formel (31) durch $A_0^{(\lambda)}$ dividieren und erhält so:

$$\lim_{\lambda=\infty} \left(a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)}} - a_i^{(0)} \right) = 0.$$

Somit konvergieren die Zahlen $a_0^{(0)} \dfrac{A_i^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)}}$ mit wachsendem λ gegen die endlichen Grenzwerte $a_i^{(0)}$, und damit ist unser Theorem vollständig bewiesen.

Die übrigen in dieser Untersuchung erlangten Resultate fassen wir zusammen in:

Theorem III. Wenn für $\nu \geq 0$ durchweg die Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leq \vartheta (|a_n^{(\nu)}| - 1)$$

gilt, wo ϑ eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet, so genügt das Wertesystem der nach Theorem II konvergenten Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix} = \begin{cases} a_1^{(0)} \\ \\ a_n^{(0)} \end{cases}$$

den zwei Ungleichungen:

$$\vartheta\,|a_n^{(0)}| \geq |a_0^{(0)}| + |a_1^{(0)}| + |a_2^{(0)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(0)}|,$$

$$|a_1^{(0)} - a_1^{(0)}| + |a_2^{(0)} - a_2^{(0)}| + \cdots + |a_n^{(0)} - a_n^{(0)}| < \vartheta;$$

und außerdem gilt die Beziehung:

$$\lim_{\nu=\infty} (a_0^{(0)} A_i^{(\nu)} - a_i^{(0)} A_0^{(\nu)}) = 0,$$

wobei die Zahlen $A_i^{(\nu)}$ vermittels der Formeln (1) (2) aus den Elementen $a_k^{(\mu)}$ gebildet sind.

Diese letzte Formel besagt, da im allgemeinen $|A_0^{(\nu)}|$ mit ν ins Unendliche wachsen wird,[1]) daß die Annäherung der Brüche $a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}$ an ihren Grenzwert a_i eine verhältnismäßig rasche ist.

Durch das Theorem III erzielt man auch eine Verschärfung des Satzes V und folglich auch VI meiner Habilitationsschrift (a. a. O. pag. 24, 25), indem dort an Stelle von

$$\frac{n + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}}$$

der kleinere Bruch

$$\frac{2 + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}},$$

ja sogar

$$\frac{1 + \vartheta + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}}$$

treten darf.[2]) Ich will diese Gelegenheit benutzen, um für den so modifizierten Satz V noch einen Beweis mitzuteilen, der viel einfacher ist, als er aus dem Vorstehenden entnommen werden kann. Wir setzen also voraus, daß für alle ν, die eine Zahl ν' übersteigen,

$$\frac{1 + \vartheta + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}} < \vartheta < 1$$

---

[1]) Näheres darüber siehe im nächsten Paragraphen.

[2]) Nur für $n = 1$ sind die beiden letzten Brüche nicht kleiner als der erste. Jedoch ist dieser Fall ohnehin interesselos, da für die regelmäßigen Kettenbrüche ja immer die sehr viel mehr als Satz V sagende Fehlerformel gilt: $\left| \frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} - a_1^{(0)} \right| < \frac{1}{A_0^{(\nu)2}}$.

ist. Der a. a. O., pag. 24 gegebene Beweis bleibt dann vollkommen in Kraft, sobald wir zeigen können, daß für $\nu > \nu'$ auch

$$\lambda_\nu \equiv \frac{1 + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}} \leqq \vartheta$$

wird. Nun sind a. a. O. die Zahlen $\frac{1}{a_n^{(\nu)}}, \frac{a_i^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}}$ echte Brüche, also gewiß $\lambda_\nu < n$. Anderseits ist auch für $\nu > \nu'$:

$$\lambda_\nu = \frac{1 + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)} + \frac{1}{a_n^{(\nu+1)}} + \frac{a_1^{(\nu+1)}}{a_n^{(\nu+1)}} + \cdots + \frac{a_{n-2}^{(\nu+1)}}{a_n^{(\nu+1)}}}{a_n^{(\nu)}}$$

$$\leqq \frac{\vartheta\, a_n^{(\nu)} - \vartheta + \lambda_{\nu+1} - \frac{a_{n-1}^{(\nu+1)}}{a_n^{(\nu+1)}}}{a_n^{(\nu)}}$$

$$= \frac{\vartheta\, a_n^{(\nu)} - \vartheta + \lambda_{\nu+1} - (a_n^{(\nu)} - a_n^{(\nu)})}{a_n^{(\nu)}}.$$

Also durch leichte Reduktion:

$$\lambda_\nu - \vartheta \leqq \frac{\lambda_{\nu+1} - \vartheta - (\vartheta + 1)(a_n^{(\nu)} - a_n^{(\nu)})}{a_n^{(\nu)}}$$

$$< \frac{\lambda_{\nu+1} - \vartheta}{a_n^{(\nu)}}.$$

Setzt man diese Ungleichung für eine Reihe aufeinanderfolgender ν-Werte an, so erhält man durch Multiplikation:

$$\lambda_\nu - \vartheta < \frac{\lambda_{\nu+\varkappa} - \vartheta}{a_n^{(\nu)}\, a_n^{(\nu+1)} \ldots a_n^{(\nu+\varkappa-1)}}$$

$$< \frac{n - \vartheta}{a_n^{(\nu)}\, a_n^{(\nu+1)} \ldots a_n^{(\nu+\varkappa-1)}} \quad (\text{für } \nu > \nu').$$

Der hier auftretende Nenner ist aber unter Benutzung von Formel (7) meiner Habilitationsschrift gleich:

$$\frac{A_0^{(\nu+\varkappa-1)} + A_0^{(\nu+\varkappa)} a_1^{(\nu+\varkappa-1)} + \cdots + A_0^{(\nu+\varkappa+n-1)} a_n^{(\nu+\varkappa-1)}}{A_0^{(\nu-1)} + A_0^{(\nu)} a_1^{(\nu-1)} + \cdots + A_0^{(\nu+n-1)} a_n^{(\nu-1)}},$$

wächst also bei festbleibendem ν mit $\varkappa$ ins Unendliche. Daher folgt $\lambda_\nu - \vartheta \leq 0$ oder $\lambda_\nu \leq \vartheta$ für $\nu > \nu'$; w. z. b. w.

§ 3.

Untersuchung für $\vartheta = 1$.

Indem wir zum eigentlichen Gegenstand dieser Arbeit zurückkehren, soll jetzt untersucht werden, inwieweit bei den Theoremen II und III des vorigen Paragraphen auch der Wert $\vartheta = 1$ zulässig ist. Wir setzen daher jetzt

$$(32) \quad |a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leq |a_n^{(\nu)}| - 1 \quad \text{für } \nu > 0$$

voraus. Wie pag. 423 gezeigt wurde, bleiben dann die Zahlen

$$H_i^{(\lambda)} = a_0^{(0)} A_i^{(\lambda)} - a_i^{(0)} A_0^{(\lambda)}\ {}^{1)}$$

absolut unter einer von λ unabhängigen Schranke, da ja bei der Ableitung dieser Tatsache der Wert $\vartheta = 1$ ausdrücklich zugelassen war. Wenn sich nun sogar

$$\lim_{\lambda=\infty} H_i^{(\lambda)} = 0$$

herausstellt, so ergibt sich die Konvergenz wörtlich wie im vorigen Paragraphen. Wenn aber diese Grenzbeziehung nicht erweisbar ist, so findet gleichwohl Konvergenz statt, sobald nur

---

[1]) Es ist vielleicht nicht überflüssig, darauf aufmerksam zu machen, daß hier das Auftreten der Zahlen $a_i^{(0)}$ durchaus nicht schon die Konvergenz voraussetzt. Die $a_i^{(0)}$ sind lediglich durch die Gleichungen (21) definiert, nicht etwa wie in § 1 durch:

$$a_i^{(0)} = a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}.$$

Daß diese letzte Beziehung tatsächlich statthat, und somit die Kette konvergiert, bleibt stets Gegenstand eines eigenen Beweises.

$$\lim_{\lambda=\infty} |A_0^{(\lambda)}| = \infty$$

wird; denn da $H_i^{(\lambda)}$ endlich bleibt, so folgt dann:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{H_i^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)}} = 0; \quad \text{d. h.} \lim_{\lambda=\infty}\left(a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)}} - a_i^{(0)}\right) = 0,$$

wodurch wieder die Konvergenz evident wird.

Wir wollen daher zuvörderst das Wachstum der Zahlen $|A_0^{(\lambda)}|$ unter der Annahme (32) untersuchen. Als erstes Resultat beweisen wir, daß die $|A_0^{(\lambda)}|$ von $\lambda = 1$ ab mit λ monoton wachsen, d. h. es gilt die Ungleichung:

$$|A_0^{(\lambda+1)}| \geqq |A_0^{(\lambda)}| \quad (\lambda \geqq 1).$$

Die Behauptung ist evident für $\lambda = 1, 2, \ldots n$; ihre Allgemeingültigkeit ergibt sich durch vollständige Induktion. Angenommen nämlich, es sei bereits bewiesen:

$$|A_0^{(1)}| \leqq |A_0^{(2)}| \leqq \ldots \leqq |A_0^{(\lambda+n-1)}| \leqq |A_0^{(\lambda+n)}|,$$

was jedenfalls für $\lambda = 1$ zutrifft. Es ist dann mit Rücksicht auf Voraussetzung (32):

$$\begin{aligned}
|A_0^{(\lambda+n+1)}| &= |a_0^{(\lambda)} A_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} A_0^{(\lambda+1)} + \cdots + a_n^{(\lambda)} A_0^{(\lambda+n)}| \\
&\geqq |a_n^{(\lambda)} A_0^{(\lambda+n)}| - (|a_0^{(\lambda)} A_0^{(\lambda)}| + |a_1^{(\lambda)} A_0^{(\lambda+1)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\lambda)} A_0^{(\lambda+n-1)}|) \\
&\geqq |a_n^{(\lambda)} A_0^{(\lambda+n)}| - (|a_0^{(\lambda)}| + |a_1^{(\lambda)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\lambda)}|)\,|A_0^{(\lambda+n-1)}| \\
&\geqq |a_n^{(\lambda)} A_0^{(\lambda+n)}| - (|a_n^{(\lambda)}| - 1)\,|A_0^{(\lambda+n-1)}|.
\end{aligned}$$

Also auch, wenn man beiderseits $|A_0^{(\lambda+n)}|$ subtrahiert:

$$|A_0^{(\lambda+n+1)}| - |A_0^{(\lambda+n)}| \geqq (|a_n^{(\lambda)}| - 1)(|A_0^{(\lambda+n)}| - |A_0^{(\lambda+n-1)}|) \geqq 0.$$

Es folgt hieraus $|A_0^{(\lambda+n+1)}| \geqq |A_0^{(\lambda+n)}|$, womit die Behauptung vollständig erwiesen ist.

Wir können aber jetzt das Wachstum der $|A_0^{(\lambda)}|$ noch genauer bestimmen. Denn nachdem das monotone Wachstum für $\lambda \geqq 1$ festgestellt ist, besteht auch die soeben daraus abgeleitete Ungleichung

$$|A_0^{(\lambda+n+1)}| - |A_0^{(\lambda+n)}| \geqq (|a_n^{(\lambda)}| - 1)(|A_0^{(\lambda+n)}| - |A_0^{(\lambda+n-1)}|)$$

für $\lambda \geqq 1$ zu Recht. Aus dieser folgt dann, indem man sie für $\lambda = 1, 2, \ldots \lambda$ anwendet:

$$|A_0^{(\lambda+n+1)}| - |A_0^{(\lambda+n)}| \geqq |a_0^{(0)}|(|a_n^{(1)}| - 1)(|a_n^{(2)}| - 1)\ldots(|a_n^{(\lambda)}| - 1);$$

und hieraus endlich:

$$|A_0^{(\lambda+n+1)}| > |a_0^{(0)}| + |a_0^{(0)}|(|a_n^{(1)}| - 1) + |a_0^{(0)}|(|a_n^{(1)}| - 1)(|a_n^{(2)}| - 1)$$
$$+ \cdots + |a_0^{(0)}|(|a_n^{(1)}| - 1)(|a_n^{(2)}| - 1)\cdots(|a_n^{(\lambda)}| - 1).$$

Wenn daher die unendliche Reihe

$$(33)\qquad \begin{aligned} &(|a_n^{(1)}| - 1) + (|a_n^{(1)}| - 1)(|a_n^{(2)}| - 1)\\ &+ (|a_n^{(1)}| - 1)(|a_n^{(2)}| - 1)(|a_n^{(3)}| - 1) + \cdots \end{aligned}$$

divergiert, so ist gewiß:

$$\lim_{\lambda=\infty} |A_0^{(\lambda+n+1)}| = \infty,$$

und daher nach den Erörterungen zu Beginn dieses Paragraphen die Kette konvergent. Um auch die unbedingte Konvergenz behaupten zu können, werden wir verlangen müssen, daß unsere Bedingungen erhalten bleiben, wenn man darin die oberen Indices aller $a_k^{(\nu)}$ um eine beliebige Zahl λ vermehrt; dann sind nämlich auch für die Ketten

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\lambda)}, & a_0^{(\lambda+1)}, & a_0^{(\lambda+2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \quad - \\ a_n^{(\lambda)}, & a_n^{(\lambda+1)}, & a_n^{(\lambda+2)}, & \ldots \end{bmatrix} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots \infty)$$

die gleichen Konvergenzbedingungen erfüllt. Diese Forderung ist aber schon von selbst befriedigt. Denn wenn man in der Reihe (33) die oberen Indices aller $a_k^{(\nu)}$ um λ erhöht, so entsteht eine Reihe, die aus (33) offenbar auch durch Weglassung der ersten λ Glieder und Unterdrückung eines allen Gliedern gemeinsamen Faktors gewonnen werden kann, die also ebenfalls divergent ist. Wir erhalten also:

Theorem IV. Wenn für $\nu \geq 1$ durchweg die Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leq |a_n^{(\nu)}| - 1$$

gilt,[1]) und wenn außerdem die unendliche Reihe

$$(|a_n^{(1)}| - 1) + (|a_n^{(1)}| - 1)(|a_n^{(2)}| - 1)$$
$$+ (|a_n^{(1)}| - 1)(|a_n^{(2)}| - 1)(|a_n^{(3)}| - 1) + \cdots$$

divergiert, so ist die Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ \overline{} & \overline{} & \overline{} & \overline{} \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix}$$

unbedingt konvergent.

Man bemerke, daß die einfacher gebaute Reihe

$$(34) \qquad |a_0^{(1)}| + |a_0^{(1)} a_0^{(2)}| + |a_0^{(1)} a_0^{(2)} a_0^{(3)}| + \ldots$$

infolge der geforderten Ungleichungen kleinere Glieder hat als die vorige. Die Kette ist daher a fortiori unbedingt konvergent, wenn die Reihe (34) divergiert. Dies trifft insbesondere in dem wichtigen Fall, wenn alle $a_0^{(\nu)} = 1$ sind, stets zu.

Wir wenden uns jetzt zu der zweiten Möglichkeit, daß die Reihe (29) konvergiert. Dann kann gleichwohl $\lim\limits_{\lambda=\infty} |A_0^{(\lambda)}| = \infty$ sein, und in diesem Fall ist die Kette sicher wieder konvergent. Andernfalls aber nähern sich die Zahlen $|A_0^{(\lambda)}|$, da sie von $\lambda = 1$ ab mit λ monoton wachsen, einem bestimmten endlichen Grenzwerte:

$$\lim_{\lambda=\infty} |A_0^{(\lambda)}| = A,$$

der von keinem $|A_0^{(\lambda)}|$ $(\lambda \geq 1)$ an Größe übertroffen wird, also wegen $A_0^{(n+1)} = a_0^{(0)} \neq 0$ jedenfalls größer als Null ist. Nach den auch für $\vartheta = 1$ gültigen Gleichungen (21) in § 2 hat man:

---

[1]) Daß wir beim Beweis auch für $\nu = 0$ diese Ungleichung vorausgesetzt hatten, schadet natürlich wieder so wenig wie bei Theorem II.

$$a_0^{(0)} \lim_{s=\infty} \frac{A_i^{(\nu_s)}}{A_0^{(\nu_s)}} = a_i^{(0)},$$

und da jetzt $|A_0^{(\nu_s)}| \leq A$ ist, so folgt hieraus:

$$\lim_{s=\infty} (a_0^{(0)} A_i^{(\nu_s)} - a_i^{(0)} A_0^{(\nu_s)}) = 0.$$

Oder auch unter Anwendung der früheren Bezeichnung:

$$\lim_{s=\infty} H_i^{(\nu_s)} = 0,$$

und daher jedenfalls:

(35) $$\underline{\lim}_{\lambda=\infty} |H_i^{(\lambda)}| = 0.$$

Außerdem ist auf pag. 423 gezeigt, daß $|H_i^{(\lambda+n)}|$ nicht größer ist als die größte der Zahlen:

$$|H_i^{(\lambda)}|, \quad |H_i^{(\lambda+1)}|, \quad \ldots \; |H_i^{(\lambda+n-1)}|.$$

Nehmen wir daher zuerst den Fall $n = 1$, so besagt dies (da dann auch für i nur der Wert 1 Bedeutung hat):

$$|H_1^{(\lambda+1)}| \leq |H_1^{(\lambda)}|.$$

Die Zahlen $|H_1^{(\lambda)}|$ nehmen also mit wachsendem λ monoton ab, und haben anderseits nach (35) den unteren Limes Null; sie nähern sich daher schlechtweg der Grenze Null, also:

$$\lim_{\lambda=\infty} (a_0^{(0)} A_1^{(\lambda)} - a_1^{(0)} A_0^{(\lambda)}) = 0.$$

Dividiert man dies durch $\lim_{\lambda=\infty} |A_0^{(\lambda)}| = A > 0$, so kommt:

$$\lim_{\lambda=\infty} \left(a_0^{(0)} \frac{A_1^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)}} - a_1^{(0)} \right) = 0.$$

Das besagt aber, daß die Kette konvergiert. Bei Ketten erster Ordnung findet also auch für $\vartheta = 1$ stets Konvergenz statt, ob der Grenzwert $\lim_{\lambda=\infty} |A_0^{(\lambda)}|$ unendlich oder endlich ist. Wir erhalten damit das Fundamentalkriterium des Herrn Pringsheim:

Der Kettenbruch $a_1^{(0)} + \frac{a_0^{(1)}|}{|a_1^{(1)}} + \frac{a_0^{(2)}|}{|a_1^{(2)}} + \frac{a_0^{(3)}|}{|a_1^{(3)}} + \cdots$

ist unbedingt konvergent, wenn für $\nu \geq 1$ durchweg $|a_0^{(\nu)}| \leq |a_1^{(\nu)}| - 1$ ist.

Nachdem die Ketten erster Ordnung hiemit vollständig erledigt sind, wollen wir von jetzt ab ausdrücklich $n > 1$ voraussetzen. Dann gilt folgendes:

Theorem V. Wenn für $\nu \geq 1$ durchweg die Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leq |a_n^{(\nu)}| - 1$$

gilt, und wenn außerdem für alle ν von einer gewissen Stelle $\nu > \nu'$ ab

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leq \frac{\Theta}{2(n-1)}$$

ist, wo Θ eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet: dann ist die Kette $n(>1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix}$$

unbedingt konvergent.

Offenbar genügt es wieder, die Konvergenz schlechthin zu beweisen, die dann sicher eine unbedingte ist. Auch bedeutet es wie früher keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir die erste Ungleichung des Theorems auch für $\nu = 0$ als erfüllt voraussetzen und uns damit auf den Boden unserer früheren Untersuchungen stellen. Wenn sich dann $\lim_{\nu=\infty} |A_0^{(\nu)}| = \infty$ oder $\lim_{\nu=\infty} H_i^{(\nu)} = 0$ herausstellt, so folgt daraus, wie wir wissen, sogleich die Konvergenz der Kette. Wir wollen daher im Gegenteil voraussetzen, man habe gleichzeitig:

$$(\alpha) \qquad \lim_{\nu=\infty} |A_0^{(\nu)}| = A,$$

$$(\beta) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} |H_i^{(\nu)}| = \eta_i > 0,$$

letzteres wenigstens für einen der Werte $i = 1, 2, \ldots n$. Wir wollen zeigen, daß diese beiden Annahmen nicht zusammen mit den Bedingungen des Theorems bestehen können.

Von den n Zahlen

$$|H_i^{(\nu)}|, \; |H_i^{(\nu+1)}|, \; \ldots \; |H_i^{(\nu+n-1)}|$$

muß wenigstens eine $\geqq \eta_i$ sein. Denn wären sie alle $< \zeta_i$, wo $\zeta_i < \eta_i$ ist, so würde die Zahl $|H_i^{(\nu+n)}|$, welche ja nach pag. 423 höchstens gleich der größten der obigen n Zahlen ist, ebenfalls $\leqq \zeta_i$ sein. Durch Wiederholung des gleichen Schlusses folgt dann sukzessive, daß auch die Zahlen

$$|H_i^{(\nu+n+1)}|, \quad |H_i^{(\nu+n+2)}|, \quad |H_i^{(\nu+n+3)}|, \; \ldots$$

sämtlich $\leqq \zeta_i < \eta_i$ sind, was der Annahme (β) widerstreitet.

Bezeichnet man daher die absolut größte der n Zahlen:

$$(36) \qquad \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}, \quad \frac{H_i^{(\nu+1)}}{A_0^{(\nu+1)}}, \; \ldots \; \frac{H_i^{(\nu+n-1)}}{A_0^{(\nu+n-1)}},$$

oder, falls mehrere den absolut größten Betrag haben, eine beliebige von diesen, mit $G_i^{(\nu)}$, so ist wegen $|A_0^{(\nu)}| \leqq A$ auch für alle $\nu \geqq 0$:

$$(37) \qquad |G_i^{(\nu)}| \geqq \frac{\eta_i}{A}.$$

Ferner folgt aus den Annahmen (α), (β):

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left| \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| = \frac{\eta_i}{A},$$

und daher für alle genügend großen Werte von ν, etwa für $\nu \geqq N$:

$$(38) \qquad \left| \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < \frac{\eta_i + \varepsilon}{A}, \quad (\nu \geqq N),$$

wo ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeuten darf.

Nach diesen Vorbereitungen setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{a_k^{(\nu)} A_0^{(\nu+k)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} = l_k^{(\nu)} \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots n \\ \nu = 1, 2, \ldots \infty \end{pmatrix}.$$

Es ist dann, wie man sofort aus Formel (1) entnimmt:

$$l_0^{(\nu)} + l_1^{(\nu)} + \cdots + l_n^{(\nu)} = 1,$$

$$\frac{A_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} = l_0^{(\nu)} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} + l_1^{(\nu)} \frac{A_i^{(\nu+1)}}{A_0^{(\nu+1)}} + \cdots + l_n^{(\nu)} \frac{A_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}}.$$

Nun ist aber nach der Definition von $H_i^{(\nu)}$ (Formel (25)):

$$a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_i^{(0)} + \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}},$$

sodaß sich die letzte Gleichung nach Multiplikation mit $a_0^{(0)}$ auch folgendermaßen schreiben läßt:

$$a_i^{(0)} + \frac{H_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}}$$

$$= l_0^{(\nu)}\left(a_i^{(0)} + \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}\right) + l_1^{(\nu)}\left(a_i^{(0)} + \frac{H_i^{(\nu+1)}}{A_0^{(\nu+1)}}\right) + \cdots + l_n^{(\nu)}\left(a_i^{(0)} + \frac{H_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}}\right).$$

Hier hebt sich $a_i^{(0)}$ auf der linken Seite gegen

$$(l_0^{(\nu)} + l_1^{(\nu)} + \cdots + l_n^{(\nu)})\, a_i^{(0)} = a_i^{(0)}$$

auf der rechten Seite. Subtrahiert man dann noch beiderseits die Zahl $\frac{H_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}}$, so kommt:

$$\frac{H_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} - \frac{H_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}}$$

$$= l_0^{(\nu)} \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} + \cdots + l_{n-1}^{(\nu)} \frac{H_i^{(\nu+n-1)}}{A_0^{(\nu+n-1)}} + (l_n^{(\nu)} - 1) \frac{H_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}},$$

woraus weiter unter Berücksichtigung von Ungleichung (38) folgt:

$$\left| \frac{H_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} - \frac{H_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}} \right|$$

$$(39) \quad < \left| l_0^{(\nu)} \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| + \cdots + \left| l_{n-1}^{(\nu)} \frac{H_i^{(\nu+n-1)}}{A_0^{(\nu+n-1)}} \right| + \left| (l_n^{(\nu)} - 1) \frac{H_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}} \right|$$

$$< (|l_0^{(\nu)}| + |l_1^{(\nu)}| + \cdots + |l_{n-1}^{(\nu)}| + |l_n^{(\nu)} - 1|)\, \frac{\eta_i + \varepsilon}{A},$$

sobald nur $\nu \geqq N$ ist.

Da $|A_0^{(\nu)}|$ von $\nu = 1$ ab mit ν monoton wächst, so folgt aus der Definitionsgleichung von $l_k^{(\nu)}$: $|l_k^{(\nu)}| \leq |a_k^{(\nu)}|$. Also mit Rücksicht auf die Bedingungen des Theorems V:

$$|l_0^{(\nu)}| + |l_1^{(\nu)}| + \cdots + |l_{n-1}^{(\nu)}| \leq |a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}|$$
$$\leq \frac{\Theta}{2(n-1)} \quad (\text{für } \nu \geq \nu');$$

ebenso auch:

$$\begin{aligned} 1 - l_n^{(\nu)} | &= | l_0^{(\nu)} + l_1^{(\nu)} + \cdots + l_{n-1}^{(\nu)} | \\ &\leq |l_0^{(\nu)}| + |l_1^{(\nu)}| + \cdots + |l_{n-1}^{(\nu)}| \\ &\leq \frac{\Theta}{2(n-1)} \qquad\qquad (\text{für } \nu > \nu'). \end{aligned}$$

Daher geht Ungleichung (39) über in:

$$\left| \frac{H_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} - \frac{H_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}} \right| < \frac{\Theta}{n-1} \frac{\eta_i + \varepsilon}{A} \quad \left(\text{für } \nu \begin{cases} \geq \nu' \\ \geq N \end{cases}\right).$$

Man hat also, sobald ν eine gewisse Grenze ν'' erreicht oder übersteigt:

$$\left| \frac{H_i^{(\nu+1)}}{A_0^{(\nu+1)}} - \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < \frac{\Theta}{n-1} \frac{\eta_i + \varepsilon}{A} \quad (\nu \geq \nu'');$$

daher auch:

$$\left| \frac{H_i^{(\nu+2)}}{A_0^{(\nu+2)}} - \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < 2 \frac{\Theta}{n-1} \frac{\eta_i + \varepsilon}{A}$$

$$\left| \frac{H_i^{(\nu+3)}}{A_0^{(\nu+3)}} - \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < 3 \frac{\Theta}{n-1} \frac{\eta_i + \varepsilon}{A}$$

— — — — — — — — —

$$\left| \frac{H_i^{(\nu+n-1)}}{A_0^{(\nu+n-1)}} - \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < (n-1) \frac{\Theta}{n-1} \frac{\eta_i + \varepsilon}{A}.$$

Da die rechten Seiten in all diesen Ungleichungen sämtlich nicht größer als $\Theta \frac{\eta_i + \varepsilon}{A}$ sind, so erhält man insbesondere auch:

$$\left| G_i^{(\nu)} - \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < \Theta \frac{\eta_i + \varepsilon}{A} \quad (\text{für } \nu > \nu'),$$

wo $G_i^{(\nu)}$ wieder die gleiche Bedeutung hat wie pag. 433 Mitte.

Nun hat aber nach (35) $|H_i^{(\nu)}|$ den unteren Limes 0; man kann also $\nu (> \nu')$ derart auswählen, daß auch

$$\left| \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < \varepsilon$$

ist; für solche Werte von ν folgt dann:

$$|G_i^{(\nu)}| \leq \left| G_i^{(\nu)} - \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| + \left| \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < \Theta \frac{\eta_i + \varepsilon}{A} + \varepsilon.$$

Da aber $\Theta < 1$ und ε beliebig klein ist, so widerspricht dies der für alle ν gültigen Ungleichung (37). Daraus schließen wir, daß die Annahmen (α), (β) nicht beide zugleich mit den Bedingungen des Theorems V verträglich sind. Wir müssen daher mindestens eine der zwei Annahmen (α), (β) als irrtümlich fallen lassen; dann konvergiert aber die Kette. W. z. b. w.

Weiter ist noch folgendes von Interesse. Die in Theorem III behaupteten Ungleichungen

$$(40) \qquad \begin{aligned} \vartheta\, |a_n^{(0)}| &> |a_0^{(0)}| + |a_1^{(0)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(0)}|, \\ |a_1^{(0)} - a_1^{(0)}| + |a_2^{(0)} - a_2^{(0)}| &+ \cdots + |a_n^{(0)} - a_n^{(0)}| \leq \vartheta \end{aligned}$$

bleiben nach ihrer Herleitung auch für $\vartheta = 1$ bestehen (sofern dann die Kette überhaupt konvergiert). Dagegen ist die Beziehung

$$\lim_{\nu = \infty} (a_0^{(0)} A_i^{(\nu)} - a_i^{(0)} A_0^{(\nu)}) = 0$$

nicht mehr allgemein richtig, wie schon das Beispiel der Kette erster Ordnung

$$\begin{bmatrix} 1, & -1, & -1, & -1, \ldots \\ 2, & 2, & 2, & 2, \ldots \end{bmatrix}$$

beweist. Bei diesem ist nämlich, wie leicht zu sehen:

$$a_0^{(0)} = 1; \quad A_0^{(\nu)} = \nu - 1; \quad A_1^{(\nu)} = \nu \quad (\nu > 1)$$

$$a_1^{(0)} = a_0^{(0)} \lim_{\nu = \infty} \frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \lim_{\nu = \infty} \frac{\nu}{\nu - 1} = 1.$$

Also hat man:

$$a_0^{(0)} A_1^{(\nu)} - a_1^{(0)} A_0^{(\nu)} = \nu - (\nu - 1) = 1,$$

und die linke Seite kann daher nicht den Grenzwert Null haben.[1])

Einige Bemerkungen knüpfen sich noch an den Fall, daß

$$\vartheta = 1; \quad \lim_{\nu = \infty} |A_0^{(\nu)}| = A = \text{endlich}$$

ist, und die Kette trotzdem konvergiert. Dann ist nämlich stets:

$$\lim_{\nu = \infty} (a_0^{(0)} A_i^{(\nu)} - a_i^{(0)} A_0^{(\nu)}) = 0,$$

da ja diese Beziehung jetzt nichts weiter aussagt als:

$$\lim_{\nu = \infty} \left(a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} - a_i^{(0)} \right) = 0,$$

d. h. als die Konvergenz.

Außerdem gestattet aber jetzt die erste Ungleichung (40) eine erhebliche Verschärfung. Denn wenn man die Ungleichung (18) durch $|A_0^{(\nu)}|$ dividiert und mit $a_0^{(0)}$ multipliziert, so erhält man durch Übergang zur Grenze $\nu = \infty$:

$$\vartheta |a_n^{(0)}| \geq \frac{\vartheta |a_0^{(0)}|}{A} + |a_0^{(0)}| + |a_1^{(0)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(0)}|,$$

worin die gesuchte Verschärfung ausgesprochen ist. Man erhält daraus speziell für $\vartheta = 1$:

---

[1]) Auch nicht den unteren Limes 0. Dies steht nicht im Widerspruch mit Ungleichung (35), da diese nur unter der Voraussetzung „$\lim\limits_{\nu = \infty} |A_0^{(\nu)}| = \text{endlich}$" abgeleitet wurde.

$$(41)\qquad \frac{|a_0^{(0)}| + |a_1^{(0)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(0)}|}{|a_n^{(0)}|} \leqq 1 - \frac{|a_0^{(0)}|}{|a_n^{(0)}|\, A}.$$

Diese Ungleichung gilt auch dann, wenn die Konvergenz der Kette noch gar nicht feststeht, und die Zahlen $a_i^{(0)}$ demgemäß nur durch die Gleichungen (21) definiert sind.[1] Sie kann dann unter Umständen sogar zur nachträglichen Feststellung der Konvergenz dienlich sein, wie die folgenden Betrachtungen lehren.

Zunächst folgt aus der Endlichkeit von $\lim\limits_{\nu=\infty} |A_0^{(\nu)}|$ auch die von $\lim\limits_{\nu=\infty} |A_{0,1}^{(\nu)}|$, und daraus dann sukzessive die Endlichkeit von $\lim\limits_{\nu=\infty} |A_{0,2}^{(\nu)}|$, $\lim\limits_{\nu=\infty} |A_{0,3}^{(\nu)}|$, etc.

Denn nach Formel (8) hat man:

$$\begin{aligned} a_0^{(0)} A_1^{(\nu)} &= a_0^{(0)} a_1^{(0)} A_{n,1}^{(\nu-1)} + a_0^{(0)} A_{0,1}^{(\nu-1)} \\ &= a_1^{(0)} A_0^{(\nu)} + a_0^{(0)} A_{0,1}^{(\nu-1)}. \end{aligned}$$

Daher auch:

$$\begin{aligned} a_0^{(0)} A_{0,1}^{(\nu-1)} &= a_0^{(0)} A_1^{(\nu)} - a_1^{(0)} A_0^{(\nu)} \\ &= H_1^{(\nu)} + (a_1^{(0)} - a_1^{(0)}) A_0^{(\nu)}; \end{aligned}$$

aber auf der rechten Seite bleibt hier mit wachsendem ν alles endlich, also bleibt es auch die linke Seite, w. z. b. w. Wir setzen demgemäß:

$$\lim_{\nu=\infty} |A_{0,\lambda}^{(\nu)}| = A_\lambda.$$

Analog zu (41) ist dann auch:

$$\frac{|a_0^{(\lambda)}| + |a_1^{(\lambda)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\lambda)}|}{|a_n^{(\lambda)}|} < 1 - \frac{|a_0^{(\lambda)}|}{|a_n^{(\lambda)}|\, A_\lambda},$$

wobei die Zahlen $a_i^{(\lambda)}$ natürlich durch die Gleichungen (22) zu

[1] Der Beweis bleibt der gleiche; nur muß beim Grenzübergang natürlich ν auf die Werte ν_s beschränkt werden.

definieren sind. Hieraus folgt nun unter Beibehaltung der Bezeichnung und Schlußweise von pag. 423:

$$|H_i^{(\lambda+n)}| < \left(1 - \frac{|a_0^{(\lambda)}|}{|a_n^{(\lambda)}|\, A_\lambda}\right) M_i^{(\lambda)}.$$

Wie damals, können wir daraus auch jetzt die Konvergenz folgern, sobald $\frac{|a_0^{(\lambda)}|}{|a_n^{(\lambda)}|\, A_\lambda}$ über einer von λ unabhängigen positiven Zahl σ bleibt; alsdann ist nämlich wieder

$$|H_i^{(\lambda+n)}| < \vartheta\, M_i^{(\lambda)}, \qquad (\vartheta = 1 - \sigma < 1);$$

und der weitere Beweis bleibt wörtlich der gleiche wie pag. 423 f. Ob nun diese Forderung

$$\frac{|a_0^{(\lambda)}|}{|a_n^{(\lambda)}|\, A_\lambda} > \sigma$$

erfüllt ist, dürfte im allgemeinen schwer zu entscheiden sein. In einem Fall ist sie aber stets erfüllt, nämlich bei periodischen Ketten. Wir nennen eine Kette k-gliedrig periodisch, wenn von einem gewissen Wert ν ab stets

$$a_i^{(\nu+k)} = a_i^{(\nu)} \quad (i = 0, 1, \ldots n)$$

ist. Alsdann ist offenbar auch:

$$A_{\nu+k} = A_\nu.$$

Daher kommt für $\frac{|a_0^{(\lambda)}|}{A_\lambda}$ überhaupt nur eine endliche Anzahl verschiedener Werte in Betracht; also bleibt

$$\frac{|a_0^{(\lambda)}|}{A_\lambda} > \varrho,$$

wo ϱ eine von λ unabhängige positive Zahl bedeutet. Außerdem folgt aber aus der auch für $\vartheta = 1$ gültigen Ungleichung (28):

$$|a_n^{(\lambda)} - a_n^{(\lambda)}| \leq 1,$$

und hieraus wieder:

$$|a_n^{(\lambda)}| < |a_n^{(\lambda)}| + 1.$$

Wegen der Periodizität bleibt $|a_n^{(\lambda)}|$ unter einer von λ unabhängigen Schranke R, und folglich $|a_n^{(\lambda)}| < R + 1.$[1] Daher ist auch:

$$\frac{|a_0^{(\lambda)}|}{|a_n^{(\lambda)}|\, A_\lambda} > \frac{\varrho}{R+1};$$

dieser Quotient bleibt also über einer von λ unabhängigen positiven Zahl, w. z. b. w. Wir erhalten demnach:

Theorem VI. Wenn bei einer **periodischen** Kette für $\nu > 1$ durchweg die Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| < |a_n^{(\nu)}| - 1$$

statthat, so ist sie unbedingt konvergent.

Eigentlich ist das Theorem ja soeben bloß unter der Voraussetzung „$\lim\limits_{\nu=\infty} |A_0^{(\nu)}| =$ endlich" bewiesen worden; aber im entgegengesetzten Fall ist die Kette ja ohnedies immer konvergent.

[1] Es wäre falsch, aus der Periodizität etwa schließen zu wollen, daß $a_n^{(\nu+k)} = a_n^{(\nu)}$ ist, so daß für $a_n^{(\lambda)}$ überhaupt bloß eine endliche Anzahl verschiedener Werte in Betracht käme. Ein solcher Schluß würde die Konvergenz bereits voraussetzen. Denn nach den Definitionsgleichungen (22) ist:

$$(\alpha)\qquad a_n^{(\nu)} = a_0^{(\nu)} \lim_{s=\infty} \frac{A_{n,\nu}^{(\nu_s-\nu)}}{A_{0,\nu}^{(\nu_s-\nu)}},$$

$$(\beta)\qquad a_n^{(\nu+k)} = a_0^{(\nu+k)} \lim_{s=\infty} \frac{A_{n,\nu+k}^{(\nu_s-\nu-k)}}{A_{0,\nu+k}^{(\nu_s-\nu-k)}} = a_0^{(\nu)} \lim_{s=\infty} \frac{A_{n,\nu}^{(\nu_s-\nu-k)}}{A_{0,\nu}^{(\nu_s-\nu-k)}},$$

letzteres wegen der Periodizität. Bevor aber die Konvergenz der Kette bekannt ist, kann die Gleichheit der Grenzwerte in (α) und (β) auf keine Weise gefolgert werden, weil die Zahlen $\nu_s - \nu$ mit wachsendem s im allgemeinen eine ganz andere Wertereihe durchlaufen werden wie die Zahlen $\nu_s - \nu - k$.

Weiteres vermag ich über den Fall $\vartheta = 1$ nicht auszusagen. Vermutlich ist in Theorem II überhaupt der Wert $\vartheta = 1$ ohne Nebenbedingungen zulässig. Wenn ich diese Vermutung auch nicht durch einen Beweis bestätigen kann, so gelang es mir doch anderseits auch nicht, eine erweislich divergente Kette ausfindig zu machen, bei der für $\nu \geqq 1$ durchweg

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leqq |a_n^{(\nu)}| - 1$$

wäre. Die Entscheidung dieser Frage scheint mit großen Schwierigkeiten verknüpft zu sein.

§ 4.

Weitere Konvergenzkriterien.

In § 1 wurde gezeigt, daß zwei äquivalente Ketten entweder beide konvergent oder beide divergent sind. Eine Kette ist daher auch immer dann konvergent, wenn eine dazu äquivalente existiert, deren Elemente die Bedingungen eines der Theoreme I, II, IV, V, VI erfüllen. Von diesem Gedanken ausgehend, hat Herr Pringsheim für die Kettenbrüche aus seinem Fundamentalsatz eine Reihe weiterer Konvergenzkriterien abgeleitet.[1]) In ähnlicher Weise kann man auch für Ketten n^{ter} Ordnung vorgehen; doch sind die so gewonnenen Kriterien für $n > 1$ von komplizierter Bauart und dürften nur geringes Interesse beanspruchen. Erfolgreicher gestaltet sich die nachstehende Methode, welche auch für Kettenbrüche zu neuen Resultaten führt, die sich aus den bisher bekannten kaum dürften ableiten lassen.

In der die Kette n^{ter} Ordnung

$$\left[\begin{matrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{matrix}\right] \tag{42}$$

[1]) A. a. O. und: Über einige Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. Diese Sitzungsberichte, Bd. 35 (1905), pag. 359 bis 380.

definierenden Rekursionsformel

$$(1) \quad A_i^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu)} A_i^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \cdots + a_n^{(\nu)} A_i^{(\nu+n)}$$

ersetzen wir ν durch $\nu+1$; es kommt:

$$(1') \quad A_i^{(\nu+n+2)} = a_0^{(\nu+1)} A_i^{(\nu+1)} + a_1^{(\nu+1)} A_i^{(\nu+2)} + \cdots + a_n^{(\nu+1)} A_i^{(\nu+n+1)}.$$

Wenn man nun Gleichung (1) mit einer beliebigen Zahl δ_ν multipliziert und dann von (1') subtrahiert, so erhält man:

$$(43) \quad A_i^{(\nu+n+2)} = b_0^{(\nu)} A_i^{(\nu)} + b_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \cdots + b_{n+1}^{(\nu)} A_i^{(\nu+n+1)},$$

wobei zur Abkürzung

$$\begin{aligned} - a_0^{(\nu)} \delta_\nu &= b_0^{(\nu)} \\ a_{i-1}^{(\nu+1)} - a_i^{(\nu)} \delta_\nu &= b_i^{(\nu)} \quad (i = 1, 2, \ldots n) \\ a_n^{(\nu+1)} + \delta_\nu &= b_{n+1}^{(\nu)} \end{aligned}$$

gesetzt wurde. Neben der Kette (42) betrachten wir nun auch noch die Kette $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(44) \qquad \begin{bmatrix} b_0^{(0)}, & b_0^{(1)}, & b_0^{(2)}, & \ldots \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ b_{n+1}^{(0)}, & b_{n+1}^{(1)}, & b_{n+1}^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix},$$

deren Rekursionsformeln folgende sind:

$$B_i^{(\nu+n+2)} = b_0^{(\nu)} B_i^{(\nu)} + b_1^{(\nu)} B_i^{(\nu+1)} + \cdots + b_{n+1}^{(\nu)} B_i^{(\nu+n+1)}$$
$$(i = 0, 1, \ldots n+1; \ \nu = 0, 1, \ldots \infty);$$
$$B_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \ldots n+1).$$

Damit die Forderung $b_0^{(\nu)} \neq 0$ für alle ν erfüllt ist, werden wir $\delta_\nu \neq 0$ voraussetzen.

Jede Zahlenfolge, welche der gleichen Rekursionsformel genügt, wie die $B_i^{(\nu)}$, läßt sich nach den Erörterungen zu Beginn des § 1 linear durch $B_0^{(\nu)}, B_1^{(\nu)}, \ldots B_{n+1}^{(\nu)}$ ausdrücken. Wegen Formel (43) kann man daher insbesondere den Ansatz machen:

$$A_i^{(\nu)} = \gamma_{i,0} B_0^{(\nu)} + \gamma_{i,1} B_1^{(\nu)} + \cdots + \gamma_{i,n+1} B_{n+1}^{(\nu)} \quad (i = 0, 1, \ldots n),$$

wobei die Koeffizienten $\gamma_{i,k}$ von ν unabhängig sind. Man berechnet sie sehr einfach, indem man für ν gewisse Spezialwerte einsetzt; so folgt für $\nu = i$:

$$1 = \gamma_{i,i};$$

sodann für $\nu \neq i$ und $\nu \leqq n$:

$$0 = \gamma_{i,\nu};$$

endlich für $\nu = n + 1$:

$$a_i^{(0)} = \gamma_{i,n+1}.$$

Setzt man die so berechneten Werte $\gamma_{i,k}$ oben ein, so kommt:

$$A_i^{(\nu)} = B_i^{(\nu)} + a_i^{(0)} B_{n+1}^{(\nu)} \quad (i = 0, 1, \ldots n).$$

Hieraus folgt endlich auch:

$$a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_0^{(0)} \frac{B_i^{(\nu)} + a_i^{(0)} B_{n+1}^{(\nu)}}{B_0^{(\nu)} + a_0^{(0)} B_{n+1}^{(\nu)}}$$

$$= a_0^{(0)} \frac{b_0^{(0)} \dfrac{B_i^{(\nu)}}{B_0^{(\nu)}} + a_i^{(0)} b_0^{(0)} \dfrac{B_{n+1}^{(\nu)}}{B_0^{(\nu)}}}{b_0^{(0)} + a_0^{(0)} b_0^{(0)} \dfrac{B_{n+1}^{(\nu)}}{B_0^{(\nu)}}}.$$

Wenn nun die Kette (44) konvergiert, so bezeichnen wir ihr Wertesystem mit $\beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \ldots \beta_{n+1}^{(0)}$ und erhalten aus der letzten Gleichung, wenn ν unbegrenzt wächst:

$$a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_0^{(0)} \frac{\beta_i^{(0)} + a_i^{(0)} \beta_{n+1}^{(0)}}{b_0^{(0)} + a_0^{(0)} \beta_{n+1}^{(0)}} = \frac{\beta_i^{(0)} + a_i^{(0)} \beta_{n+1}^{(0)}}{-\delta_0 + \beta_{n+1}^{(0)}}.$$

Daher konvergiert auch die Kette (42), sobald nur der Nenner $\beta_{n+1}^{(0)} - \delta_0$ von Null verschieden ist. Man hat bei dieser Betrachtung den Vorteil, daß die Zahlen δ_ν, abgesehen von der Einschränkung $\delta_\nu \neq 0$, ganz willkürlich sind. Sobald es gelingt, sie derart zu wählen, daß die Kette (44) konvergiert, und zugleich $\beta^{(0)}_{n+1} \neq \delta_0$ wird, dann konvergiert allemal auch die Kette (42).

Nach Theorem II ist nun die Kette (44) unbedingt konvergent, wenn für $\nu > 1$ durchweg die Ungleichung

$$|b_0^{(\nu)}| + |b_1^{(\nu)}| + \cdots + |b_n^{(\nu)}| < \vartheta(|b_{n+1}^{(\nu)}| - 1),$$

das heißt:

$$|a_0^{(\nu)}\delta_\nu| + |a_0^{(\nu+1)} - a_1^{(\nu)}\delta_\nu| + |a_1^{(\nu+1)} - a_2^{(\nu)}\delta_\nu| + \cdots$$
$$+ |a_{n-1}^{(\nu+1)} - a_n^{(\nu)}\delta_\nu| \leq \vartheta(|a_n^{(\nu+1)} + \delta_\nu| - 1)$$

besteht, wo $\vartheta < 1$ ist. Damit aber die Kette (42) ebenfalls konvergiert, muß außerdem noch die Zusatzbedingung

$$\beta^{(0)}_{n+1} \neq \delta_0$$

erfüllt sein, welche sich in folgender Weise umformen läßt.

Wegen der unbedingten Konvergenz der Kette (44) folgt, wenn man eine stets gebrauchte, auf die Kette (42) bezügliche Bezeichnung sinngemäß auf die Kette (44) überträgt:

$$b_0^{(1)} \lim_{\nu=\infty} \frac{B^{(\nu)}_{i,1}}{B^{(\nu)}_{0,1}} = \beta_i^{(1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots n+1),$$

und auch:

$$\beta^{(0)}_{n+1} = b^{(0)}_{n+1} + \frac{\beta_n^{(1)}}{\beta_{n+1}^{(1)}} = a_n^{(1)} + \delta_0 + \frac{\beta_n^{(1)}}{\beta_{n+1}^{(1)}},$$

sodaß sich die obige Zusatzbedingung in die Form setzen läßt:

$$a_n^{(1)} + \delta_0 + \frac{\beta_n^{(1)}}{\beta_{n+1}^{(1)}} \neq \delta_0,$$

oder:

$$a_n^{(1)} + \frac{\beta_n^{(1)}}{\beta_{n+1}^{(1)}} \neq 0. \tag{45}$$

Nun ergibt sich aber, wenn man Theorem III auf die Kette $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\left[\begin{matrix} b_0^{(1)}, & b_0^{(2)}, & b_0^{(3)}, & \ldots \\ \hline b_{n+1}^{(1)}, & b_{n+1}^{(2)}, & b_{n+1}^{(3)}, & \ldots \end{matrix}\right]$$

anwendet, die Ungleichung:

$$\vartheta\,|\beta_{n+1}^{(1)}| \geq |b_0^{(1)}| + |\beta_1^{(1)}| + |\beta_2^{(1)}| + \cdots + |\beta_n^{(1)}|;$$

also auch insbesondere:

$$\left|\frac{\beta_n^{(1)}}{\beta_{n+1}^{(1)}}\right| < \vartheta,$$

mit Ausschluß der Gleichheit, da ja $|b_0^{(1)}| > 0$ ist. Demnach ist die Bedingung (45) gewiß erfüllt, wenn wir $|a_n^{(1)}| \geq \vartheta$ fordern. Dies führt zu dem folgenden sehr allgemeinen Kriterium:

Theorem VII. Wenn sich unendlich viele von Null verschiedene Zahlen δ_ν bestimmen lassen, derart, daß für $\nu \geq 1$ durchweg die Ungleichung

a) $$\begin{aligned}|a_0^{(\nu)}\delta_\nu| + |a_0^{(\nu+1)} - a_1^{(\nu)}\delta_\nu| + |a_1^{(\nu+1)} - a_2^{(\nu)}\delta_\nu| + \cdots \\ + |a_{n-1}^{(\nu+1)} - a_n^{(\nu)}\delta_\nu| \leq \vartheta(|a_n^{(\nu+1)} + \delta_\nu| - 1)\end{aligned}$$

besteht, wo ϑ eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet, und wenn außerdem

b) $$|a_n^{(1)}| > \vartheta$$

ist, so ist die Kette n^{ter} Ordnung

$$\left[\frac{a_0^{(0)},\ a_0^{(1)},\ a_0^{(2)},\ \ldots}{a_n^{(0)},\ a_n^{(1)},\ a_n^{(2)},\ \ldots}\right]$$

konvergent. Sie ist sogar **unbedingt** konvergent, wenn die Ungleichung

c) $$|a_n^{(\nu)}| \geq \vartheta$$

für jedes $\nu > 1$ besteht.

Der letzte Teil des Theorems ergibt sich offenbar wieder aus dem Umstand, daß die Bedingungen erhalten bleiben, wenn die oberen Indices aller $a_k^{(\mu)}$ um eine beliebige Zahl λ erhöht werden. Wir machen zu dem Theorem noch folgenden

Zusatz. In Theorem VII dürfen die Zahlen δ_ν auch alle oder zum Teil gleich Null sein. Wenn aber $\delta_1 = 0$

ist, so ist in der Bedingung b) das Gleichheitszeichen auszuschließen. Ebenso ist in der Bedingung c) das Gleichheitszeichen bei allen denjenigen ν-Werten auszuschließen, für welche $\delta_\nu = 0$ ist.

Der Beweis ist folgender: Infolge der Bedingung a) des Theorems ist:

$$|a_n^{(\nu+1)} + \delta_\nu| - 1 \geqq 0.$$

Würde hier einmal Gleichheit stattfinden, so müßte auch jeder Term auf der linken Seite von a) verschwinden, also insbesondere:

$$a_0^{(\nu)} \delta_\nu = 0, \quad a_0^{(\nu+1)} - a_1^{(\nu)} \delta_\nu = 0,$$

was aber wegen $a_0^{(\nu)} \neq 0$, $a_0^{(\nu+1)} \neq 0$ nicht möglich ist. Es ist also:

$$|a_n^{(\nu+1)} + \delta_\nu| - 1 > 0,$$

und folglich kann man statt Ungleichung a) auch schreiben:

$$\frac{|a_0^{(\nu)} \delta_\nu| + |a_0^{(\nu+1)} - a_1^{(\nu)} \delta_\nu| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu+1)} - a_n^{(\nu)} \delta_\nu|}{|a_n^{(\nu+1)} + \delta_\nu| - 1} \leqq \vartheta.$$

Wird diese Ungleichung für gewisse ν-Werte nur durch die Wahl $\delta_\nu = 0$ erfüllt, so kann der links stehende Ausdruck, wenn δ_ν sich hinreichend wenig von Null unterscheidet, wegen der Stetigkeit jedenfalls nur um beliebig wenig die Zahl ϑ übertreffen. Man kann daher der Ungleichung

$$\frac{|a_0^{(\nu)} \delta_\nu| + |a_0^{(\nu+1)} - a_1^{(\nu)} \delta_\nu| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu+1)} - a_n^{(\nu)} \delta_\nu|}{|a_n^{(\nu+1)} + \delta_\nu| - 1} \leqq \vartheta + \varepsilon$$

durch lauter von Null verschiedene δ_ν Genüge leisten, wie klein auch die positive Zahl ε gewählt wird. Nimmt man insbesondere auch $\varepsilon < 1 - \vartheta$, so wird eben nach Theorem VII Konvergenz stattfinden, wenn noch $|a_n^{(1)}| > \vartheta + \varepsilon$ ist. Da aber ε beliebig klein gewählt werden kann, so ist diese Bedingung gleichbedeutend mit:

$$|a_n^{(1)}| > \vartheta,$$

unter Ausschluß der Gleichheit. Damit ist der Zusatz bewiesen, soweit er sich auf Konvergenz schlechthin bezieht. Die unbedingte Konvergenz ergibt sich dann natürlich durch die frühere Schlußweise.

Durch spezielle Wahl der δ_ν erhält man aus dem Theorem VII mit obigem Zusatz beliebig viele Spezialkriterien, von denen ich wenigstens eines anführen will. Setzt man nämlich durchweg $\delta_\nu = 0$, so folgt, wenn man noch $\nu - 1$ an Stelle von ν schreibt:

Theorem VIII. Wenn für $\nu \geqq 2$ durchweg die Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leqq \vartheta\,(|a_n^{(\nu)}| - 1)$$

gilt, wo ϑ eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet, und wenn außerdem $|a_n^{(1)}| > \vartheta$ ist, so ist die Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix}$$

unbedingt konvergent.

Die zur unbedingten Konvergenz noch erforderlichen Bedingungen $|a_n^{(\nu)}| > \vartheta$ für $\nu > 1$ brauchen nämlich hier nicht mehr eigens verlangt zu werden, da aus der ersten Ungleichung des Theorems sowieso schon $|a_n^{(\nu)}| > 1$ folgt. Durch das Theorem VIII werden die Bedingungen von Theorem II um ein weniges reduziert, indem statt der Forderung

$$|a_0^{(1)}| + |a_1^{(1)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(1)}| \leqq \vartheta\,(|a_n^{(1)}| - 1)$$

nur die viel weniger verlangende „$|a_n^{(1)}| > \vartheta$" erhoben wird.

Wendet man die Ergebnisse dieses Paragraphen nun speziell auf Ketten erster Ordnung an, so erhält man:

Korollar: Der Kettenbruch

$$a_1^{(0)} + \frac{a_0^{(1)}|}{|a_1^{(1)}} + \frac{a_0^{(2)}|}{|a_1^{(2)}} + \frac{a_0^{(3)}|}{|a_1^{(3)}} + \cdots$$

ist unbedingt konvergent, wenn es gewisse Zahlen δ_ν gibt, derart, daß für $\nu \geq 1$ durchweg die zwei Ungleichungen

$$|a_0^{(\nu)}\delta_\nu| + |a_0^{(\nu+1)} - a_1^{(\nu)}\delta_\nu| \leq \vartheta\,(|a_1^{(\nu+1)} + \delta_\nu| - 1); \quad |a_1^{(\nu)}| \geq \vartheta$$

gelten, wo ϑ eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet. Sollte die erste Ungleichung für gewisse ν-Werte etwa nur durch die Wahl $\delta_\nu = 0$ zu befriedigen sein, so ist in der zweiten Ungleichung für diese ν-Werte das Gleichheitszeichen zu unterdrücken.

Unter den Spezialfällen, die sich durch besondere Wahl der Zahlen δ_ν ergeben, seien die folgenden vier hervorgehoben:

1) $\delta_\nu = 0$: $\quad |a_0^{(\nu+1)}| < \vartheta\,(|a_1^{(\nu+1)}| - 1), \quad |a_1^{(1)}| > \vartheta$.[1]

2) $\delta_\nu = \dfrac{a_0^{(\nu+1)}}{a_1^{(\nu)}}$: $\quad \left|\dfrac{a_0^{(\nu)}\,a_0^{(\nu+1)}}{a_1^{(\nu)}}\right| \leq \vartheta\left(\left|a_1^{(\nu+1)} + \dfrac{a_0^{(\nu+1)}}{a_1^{(\nu)}}\right| - 1\right)$,

$$|a_1^{(\nu)}| > \vartheta.$$

3) $\delta_\nu = 1$: $\quad |a_0^{(\nu)}| + |a_0^{(\nu+1)} - a_1^{(\nu)}| \leq \vartheta\,(|a_1^{(\nu+1)} + 1| - 1)$,

$$|a_1^{(\nu)}| \geq \vartheta.$$

4) $\delta_\nu = -1$: $\quad |a_0^{(\nu)}| + |a_0^{(\nu+1)} + a_1^{(\nu)}| < \vartheta\,(|a_1^{(\nu+1)} - 1| - 1)$,

$$|a_1^{(\nu)}| > \vartheta.$$

Der erste dieser vier Fälle entspricht dem Theorem VIII. Er läßt sich übrigens auch auf etwas einfachere Weise aus den Theoremen II und III ableiten und bleibt noch richtig für $\vartheta = 1$, in welchem Fall ihn Herr Pringsheim bewiesen hat.[2]) Indes ist zu beachten, daß der Satz für $\vartheta < 1$ nicht durch den gleichen Satz für $\vartheta = 1$ entbehrlich wird, wie dies bei Theorem II offenbar der Fall wäre; denn für $\vartheta < 1$ lautet

---

[1]) Die Forderung $|a_1^{(\nu)}| > \vartheta$ für $\nu > 2$ ist wie bei Theorem VIII wieder von selbst erfüllt.

[2]) In der auf pag. 441 zitierten Arbeit, Seite 364; die Bedingungen sind dort sogar noch etwas reduziert.

die zweite der geforderten Ungleichungen nur $|a_1^{(1)}| > \vartheta$, aber nicht $|a_1^{(1)}| > 1$.

Ferner ist es wohl nicht überflüssig zu bemerken, daß die absolute Willkürlichkeit der δ_ν die unbedingte Konvergenz nicht nur dann garantiert, wenn für alle $\nu (\geqq 1)$ die Bedingung 1) oder für alle $\nu (> 1)$ die Bedingung 2) oder sonst eine erfüllt ist. Es genügt vielmehr, wenn für jeden einzelnen Wert von $\nu (> 1)$ irgend einer von diesen Bedingungen genügt wird, etwa für gerade ν der Bedingung 1), für ungerade ν der Bedingung 2) oder 3).

§ 5.

Ausdehnung des Legendreschen Irrationalitätssatzes.

Wir wollen jetzt den Legendreschen Irrationalitätssatz auf die Kette n^{ter} Ordnung

$$(46)\qquad \begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \dots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \dots \end{bmatrix} = \begin{cases} a_1^{(0)} \\ \vdots \\ a_n^{(0)} \end{cases}$$

übertragen. Zu dem Zweck setzen wir die Elemente $a_i^{(\nu)}$ als ganze rationale Zahlen voraus und selbstverständlich wieder $a_0^{(\nu)} \neq 0$. Es sind dann auch die $A_i^{(\nu)}$ ganze rationale Zahlen. Wenn nun außerdem für $\nu \geqq 0$ durchweg die Ungleichung

$$(47)\qquad |a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \dots + |a_{n-1}^{(\nu)}| < \vartheta\,(|a_n^{(\nu)}| - 1), \quad \vartheta < 1$$

besteht, wenn also die Elemente den Bedingungen des Theorem III genügen, so ist die Kette konvergent, und wir wollen jetzt zeigen, daß eine Beziehung der Form

$$(48)\qquad P_0 a_0^{(0)} + P_1 a_1^{(0)} + P_2 a_2^{(0)} + \dots + P_n a_n^{(0)} = 0$$

mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten P_i nicht bestehen kann.[1])

---

[1]) Der Gleichung (48) hätte man natürlich ebensogut die Form

$$P_0 + P_1 a_1^{(0)} + \dots + P_n a_n^{(0)} = 0$$

geben können, da ja $a_0^{(0)}$ rational ist. Nur der Symmetrie halber haben wir dem P_0 den Faktor $a_0^{(0)}$ beigegeben.

Angenommen, es bestünde eine solche Relation, so kann man die P_i von vornherein als **ganze** Zahlen annehmen, indem man eventuell mit dem Generalnenner multipliziert. Wir multiplizieren dann die als richtig angenommene Gleichung (48) mit $A_0^{(\nu)}$ und erhalten:

$$a_0^{(0)} P_0 A_0^{(\nu)} = -\sum_{i=1}^{n} P_i a_i^{(0)} A_0^{(\nu)}.$$

Addiert man beiderseits die Größe $\sum_{i=1}^{n} P_i a_0^{(0)} A_i^{(\nu)}$, so kommt:

$$a_0^{(0)} \sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{n} P_i (a_0^{(0)} A_i^{(\nu)} - a_i^{(0)} A_0^{(\nu)}).$$

Hier steht nun auf der linken Seite eine **ganze** Zahl; auf der rechten aber nähern sich nach Theorem III alle n Summanden mit wachsendem ν der Grenze Null. Von einer gewissen Stelle $\nu > N$ ab muß daher die rechte Seite und folglich auch die ihr gleiche linke Seite jedenfalls absolut kleiner als 1 werden; aber dann kann sie als ganze Zahl nur gleich Null sein. Wir bekommen also für $\nu > N$:

$$\sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(\nu)} = 0.$$

Setzt man hier der Reihe nach $\nu = N, N+1, \ldots N+n$, so erhält man ein System von $n+1$ linearen homogenen Gleichungen mit der Determinante:

$$(49) \qquad \begin{vmatrix} A_0^{(N)}, & A_1^{(N)}, & \ldots & A_n^{(N)} \\ A_0^{(N+1)}, & A_1^{(N+1)}, & \ldots & A_n^{(N+1)} \\ - & - & - & - \\ A_0^{(N+n)}, & A_1^{(N+n)}, & \ldots & A_n^{(N+n)} \end{vmatrix},$$

welche wegen Formel (3) von Null verschieden ist. Es folgt also:

$$P_0 = P_1 = \cdots = P_n = 0; \quad \text{w. z. b. w.}$$

Übrigens braucht die Ungleichung (47) nicht für alle Werte von ν erfüllt zu sein, sondern bloß von einer gewissen Stelle $\nu > N$ ab. Denn jedenfalls ist dann die Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(N)}, & a_0^{(N+1)}, & a_0^{(N+2)}, & \dots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(N)}, & a_n^{(N+1)}, & a_n^{(N+2)}, & \dots \end{bmatrix} = \begin{cases} a_1^{(N)} \\ \\ a_n^{(N)} \end{cases}$$

konvergent, und nach dem soeben Bewiesenen ist eine Beziehung der Form

$$Q_0 a_0^{(N)} + Q_1 a_1^{(N)} + \cdots + Q_n a_n^{(N)} = 0 \tag{50}$$

mit rationalen nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten Q_i nicht möglich. Es ist daher insbesondere auch:

$$A_0^{(N)} a_0^{(N)} + A_0^{(N+1)} a_1^{(N)} + \cdots + A_0^{(N+n)} a_n^{(N)} \neq 0;$$

denn andernfalls hätte man:

$$A_0^{(N)} = A_0^{(N+1)} = \cdots = A_0^{(N+n)} = 0,$$

was dem Nichtverschwinden der Determinante (49) widerstreitet. Nach dem Lemma auf pag. 414 ist daher die Kette (46) ebenfalls konvergent, und zwar hat man:

$$a_i^{(0)} = a_0^{(0)} \frac{A_i^{(N)} a_0^{(N)} + A_i^{(N+1)} a_1^{(N)} + \cdots + A_i^{(N+n)} a_n^{(N)}}{A_0^{(N)} a_0^{(N)} + A_0^{(N+1)} a_1^{(N)} + \cdots + A_0^{(N+n)} a_n^{(N)}}.$$

Gleichung (48) ist daher gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\sum_{i=0}^{n} P_i \left(A_i^{(N)} a_0^{(N)} + A_i^{(N+1)} a_1^{(N)} + \cdots + A_i^{(N+n)} a_n^{(N)}\right) = 0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$a_0^{(N)} \sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(N)} + a_1^{(N)} \sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(N+1)} + \cdots + a_n^{(N)} \sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(N+n)} = 0.$$

Dies ist aber eine Gleichung der Form (50) und ist daher nur möglich, wenn sämtliche Koeffizienten verschwinden; also:

$$\sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(N)} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(N+1)} = 0, \ \dots \ \sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(N+n)} = 0.$$

Aber die Determinante dieses Gleichungssystems ist wie vorhin von Null verschieden; also folgt auch jetzt notwendig:

$$P_0 = P_1 = \cdots = P_n = 0.$$

Wir sprechen dieses Resultat aus in

Theorem IX. Wenn die Elemente $a_i^{(\nu)}$ ganze rationale Zahlen sind, welche von einer gewissen Stelle $\nu \geqq N$ ab die Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leqq \vartheta\,(|a_n^{(\nu)}| - 1)$$

erfüllen, wo ϑ eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet, so ist die Kette

$$(46) \qquad \begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \alpha_1^{(0)} \\ \\ \alpha_n^{(0)} \end{matrix} \right.$$

unbedingt konvergent, und ihr Wertesystem genügt keiner Relation der Form

$$P_0\,\alpha_0^{(0)} + P_1\,\alpha_1^{(0)} + P_2\,\alpha_2^{(0)} + \cdots + P_n\,\alpha_n^{(0)} = 0$$

mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten P_i.

Denn daß die Konvergenz der Kette auch eine unbedingte ist, ergibt sich wieder durch den gleichen Schluß wie immer. Ganz die gleiche Analyse führt zu dem folgenden etwas allgemeineren

Theorem X. Wenn die Elemente $a_i^{(\nu)}$ ganze Zahlen eines **imaginären quadratischen Körpers** sind und von einer gewissen Stelle $\nu \geqq N$ ab der Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leqq \vartheta\,(|a_n^{(\nu)}| - 1), \quad \vartheta < 1$$

Genüge leisten, so ist die Kette (46) unbedingt konvergent und ihr Wertesystem genügt keiner Relation der Form

$$P_0\,\alpha_0^{(0)} + P_1\,\alpha_1^{(0)} + \cdots + P_n\,\alpha_n^{(0)} = 0,$$

wo die Koeffizienten P_i Zahlen des betreffenden quadratischen Körpers sind, welche nicht sämtlich verschwinden.

Zu beachten ist bei diesen Theoremen namentlich, daß ganz im Gegensatz zu Theorem II die geforderte Ungleichung nur für $\nu \geqq N$ zu gelten braucht. Für Kettenbrüche spezialisiert lauten diese Sätze:

Wenn die Teilzähler und -nenner des Kettenbruches

$$a_1^{(0)} + \frac{a_0^{(1)} |}{| a_1^{(1)}} + \frac{a_0^{(2)} |}{| a_1^{(2)}} + \frac{a_0^{(3)} |}{| a_1^{(3)}} + \cdots$$

ganze rationale Zahlen sind und von einer gewissen Stelle $\nu \geqq N$ ab der Ungleichung

$$| a_0^{(\nu)} | \leqq \vartheta (| a_1^{(\nu)} | - 1) \qquad (\vartheta < 1)$$

Genüge leisten, so ist der Kettenbruch unbedingt konvergent und hat einen **irrationalen** Wert.

Wenn unter sonst gleichen Bedingungen die $a_i^{(\nu)}$ ganze Zahlen eines imaginären quadratischen Körpers sind, so ist der Kettenbruch ebenfalls unbedingt konvergent, stellt aber niemals eine Zahl desselben quadratischen Körpers dar.

In den Sätzen dieses Paragraphen ist der Wert $\vartheta = 1$ nicht zulässig, obwohl nach Theorem IV die Konvergenz der betreffenden Ketten bestehen bleibt (wenigstens, wenn die geforderte Ungleichung schon von $\nu = 1$ ab erfüllt ist). Schon die Kettenbrüche lehren dies. Denn der Legendresche Irrationalitätssatz wird zwar immer für $\vartheta = 1$ ausgesprochen, erleidet aber dann auch eine Ausnahme, indem der Kettenbruch

$$\frac{c_0 |}{| c_0 + 1} - \frac{c_1 |}{| c_1 + 1} - \frac{c_2 |}{| c_2 + 1} - \cdots$$

den Wert 1 hat, also rational ist. Es ist dies im wesentlichen der einzige Ausnahmefall. Man vergleiche darüber § 4 der auf pag. 411 zitierten Arbeit des Herrn Pringsheim.

§ 6.

Analogon zu dem reellen Kettenbruch

$$\frac{c_0 \,|}{|\, c_0+1} - \frac{c_1 \,|}{|\, c_1+1} - \frac{c_2 \,|}{|\, c_2+1} - \cdots.$$

Unter den reellen Kettenbrüchen, die nach dem Pringsheimschen Fundamentalkriterium unbedingt konvergent sind, bieten bekanntlich die von der Form

$$\frac{c_0 \,|}{|\, c_0+1} - \frac{c_1 \,|}{|\, c_1+1} - \frac{c_2 \,|}{|\, c_2+1} - \cdots \qquad (c_i > 0)$$

ein besonderes Interesse dar, und sie nehmen namentlich, wenn die Reihe

$$c_0 + c_0 c_1 + c_0 c_1 c_2 + \cdots$$

divergiert, eine gewisse Ausnahmestellung ein, die auch am Schluß des vorigen Paragraphen hervorgetreten ist. Der Wert eines solchen Kettenbruches ist immer gleich 1, während er bei Konvergenz der obigen Reihe kleiner als 1 ist. Der Versuch, unter den Ketten n^{ter} Ordnung, die dem Theorem II genügen, ein Analogon zu obigem Kettenbruch zu finden, muß schon daran scheitern, daß dort die Zulässigkeit des Wertes $\vartheta = 1$ nicht allgemein erwiesen werden konnte. Indessen gibt es doch Ketten n^{ter} Ordnung, die den Bedingungen von Theorem II zwar nicht genügen, auch nicht für $\vartheta = 1$, die aber doch unbedingt konvergent und dem obigen Kettenbruch sehr verwandt sind.

Wir betrachten die Kette n^{ter} Ordnung:

$$(51) \qquad \begin{bmatrix} -c_0, & -c_1, & -c_2, & \cdots \\ -c_0+1, & -c_1+1, & -c_2+1, & \cdots \\ - & - & - & - \\ -c_0+1, & -c_1+1, & -c_2+1, & \cdots \\ c_0+1, & c_1+1, & c_2+1, & \cdots \end{bmatrix},$$

in deren $(\nu+1)^{\text{ter}}$ Kolonne zuerst eine Zahl $-c_\nu$, dann $(n-1)$ mal die Zahl $-c_\nu+1$, endlich einmal $c_\nu+1$ auftritt. Wir wollen zunächst unabhängig von der Konvergenzfrage die formale Seite dieser Kette studieren und erst später den Zahlen c_ν gewisse Einschränkungen auferlegen. Die die Kette (51) definierenden Rekursionsformeln lauten:

$$\begin{aligned}(52)\qquad & C_i^{(\nu+n+1)} = -c_\nu C_i^{(\nu)} + (1-c_\nu) C_i^{(\nu+1)} + \cdots \\ & + (1-c_\nu) C_i^{(\nu+n-1)} + (1+c_\nu) C_i^{(\nu+n)} \\ & (i = 0, 1, \ldots n;\ \ \nu = 0, 1, \ldots \infty),\end{aligned}$$

$$(53)\qquad C_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \ \,\text{„}\ \ i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \ldots n).$$

Die erste dieser Gleichungen kann auch in der Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & C_i^{(\nu+n+1)} - C_i^{(\nu+n)} - C_i^{(\nu+n-1)} - \cdots - C_i^{(\nu+1)} \\ = & c_\nu (C_i^{(\nu+n)} - C_i^{(\nu+n-1)} - C_i^{(\nu+n-2)} - \cdots - C_i^{(\nu)}),\end{aligned}$$

wo nun die Klammer rechts ebenso gebildet ist, wie die linke Seite, nur daß $\nu - 1$ an Stelle von ν steht. Setzt man also diese Formel für $\nu = 0, 1, \ldots \nu$ an und multipliziert, so kommt:

$$\begin{aligned} & C_i^{(\nu+n+1)} - C_i^{(\nu+n)} - C_i^{(\nu+n-1)} - \cdots - C_i^{(\nu+1)} \\ = & c_0 c_1 \cdots c_\nu (C_i^{(n)} - C_i^{(n-1)} - \cdots - C_i^{(1)} - C_i^{(0)}) \\ = & c_0 c_1 \cdots c_\nu E_i,\end{aligned}$$

wobei offenbar nach Formel (53)

$$E_i = \begin{cases} -1 & \text{für } i = 0, 1, \ldots n-1 \\ +1 & \ \ \text{„}\ \ \ i = n \end{cases}$$

ist. Hieraus folgt nun für abnehmende Werte von ν das System von Gleichungen:

$$\begin{array}{l|l} C_i^{(\nu+n+1)} - C_i^{(\nu+n)} - C_i^{(\nu+n-1)} - \cdots - C_i^{(\nu+1)} = c_0 c_1 \ldots c_\nu E_i & k_{n-1} \\ C_i^{(\nu+n)} - C_i^{(\nu+n-1)} - C_i^{(\nu+n-2)} - \cdots - C_i^{(\nu)} = c_0 c_1 \ldots c_{\nu-1} E_i & k_n \\ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - & - \ - \\ C_i^{(n+1)} - C_i^{(n)} - C_i^{(n-1)} - \cdots - C_i^{(1)} = c_0 E_i & k_{n+\nu-1} \\ C_i^{(n)} - C_i^{(n-1)} - C_i^{(n-2)} - \cdots - C_i^{(0)} = E_i & k_{n+\nu}. \end{array}$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen der Reihe nach mit den beigesetzten Faktoren k_λ und addieren sie dann; dabei sollen die k_λ so gewählt werden, daß im Endresultat links die Terme

$$C_i^{(\nu+n)},\ C_i^{(\nu+n-1)},\ \ldots\ C_i^{(n+1)},\ C_i^{(n)}$$

herausfallen, während $C_i^{(\nu+n+1)}$ den Koeffizienten 1 erhält. Dies wird offenbar dann und nur dann erreicht, wenn wir die Zahlen k_λ durch die Rekursionsformel

$$(54)\qquad k_\nu = k_{\nu-1} + k_{\nu-2} + \cdots + k_{\nu-n}$$

berechnen, ausgehend von den Anfangswerten:

$$(55)\qquad k_0 = 0,\ k_1 = 0,\ \ldots k_{n-2} = 0,\ k_{n-1} = 1.$$ [1]

Führt man nun besagte Multiplikation und Addition aus, so kommt:

$$\begin{aligned} C_i^{(\nu+n+1)} - C_i^{(0)} k_{n+\nu} - C_i^{(1)}(k_{n+\nu} + k_{n+\nu-1}) - \cdots \\ - C_i^{(n-1)}(k_{n+\nu} + k_{n+\nu-1} + \cdots + k_{\nu+1}) \\ = E_i(k_{n+\nu} + c_0 k_{n+\nu-1} + c_0 c_1 k_{n+\nu-2} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_\nu k_{n-1}). \end{aligned}$$

Hier sind aber die negativen Terme der linken Seite nach (53) für $i = n$ alle gleich Null; für $i \neq n$ ist genau einer von Null verschieden, nämlich derjenige, welcher $C_i^{(i)}$ enthält. Man findet daher schließlich, noch mit Benutzung der oben angegebenen Werte von E_i:

$$\begin{aligned} C_n^{(\nu+n+1)} &= k_{n+\nu} + c_0 k_{n+\nu-1} + c_0 c_1 k_{n+\nu-2} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_\nu k_{n-1}, \\ C_i^{(\nu+n+1)} &= -(k_{n+\nu} + c_0 k_{n+\nu-1} + c_0 c_1 k_{n+\nu-2} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_\nu k_{n-1}) \\ &\quad + (k_{n+\nu} + k_{n+\nu-1} + \cdots + k_{n+\nu-i})\quad (i = 0, 1, \cdots n-1). \end{aligned}$$

Die Zahlen $C_i^{(\nu)}$ sind damit explizit berechnet, sobald die k_ν als bekannt angesehen werden. Setzt man $\nu - n$ an Stelle von ν, und führt noch die Abkürzungen

[1] Für $n = 1$ ist durchweg $k_\lambda = 1$ zu setzen. Für $n > 1$ wächst offenbar k_λ monoton mit λ ins Unendliche.

$$(56)\qquad \begin{aligned} &1+c_0\frac{k_{\nu-1}}{k_\nu}+c_0c_1\frac{k_{\nu-2}}{k_\nu}+\cdots+c_0c_1\cdots c_{\nu-n}\frac{k_{n-1}}{k_\nu}=Q_\nu,\\ &1+\frac{k_{\nu-1}}{k_\nu}+\frac{k_{\nu-2}}{k_\nu}+\cdots+\frac{k_{\nu-i}}{k_\nu}=P_{\nu,i}\quad (i=1,2,\cdots n-1)\end{aligned}$$

ein,[1]) so gehen die letzten Formeln über in:

$$(57)\qquad \begin{aligned} &C_n^{(\nu+1)}=k_\nu Q_\nu\\ &C_i^{(\nu+1)}=-k_\nu Q_\nu+k_\nu P_{\nu,i}\quad (i=1,2,\ldots n-1)\\ &C_0^{(\nu+1)}=-k_\nu Q_\nu+k_\nu.\end{aligned}$$

Also schließlich durch Division:

$$(58)\qquad \begin{aligned} &-c_0\frac{C_i^{(\nu+1)}}{C_0^{(\nu+1)}}=-c_0\frac{P_{\nu,i}-Q_\nu}{1-Q_\nu}\quad (i=1,2,\ldots n-1),\\ &-c_0\frac{C_n^{(\nu+1)}}{C_0^{(\nu+1)}}=-c_0\frac{Q_\nu}{1-Q_\nu}.\end{aligned}$$

Von jetzt ab seien die c_ν reelle positive Zahlen. In diesem Fall können wir das Verhalten von $P_{\nu,i}$ und Q_ν für unendlich wachsende ν aufs genaueste bestimmen und daraus die Konvergenz der Kette folgern. Um uns vor allem über das Wachstum der Zahlen k_ν zu orientieren, von welchen ja $P_{\nu,i}$ und Q_ν abhängen, gehen wir aus von der algebraischen Gleichung n^{ten} Grades:

$$f(x)\equiv x^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\cdots-x-1=0,$$

deren Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ seien. Diese Gleichung hat die folgenden bemerkenswerten Eigenschaften, deren Beweis wir, um hier den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, erst in § 8 nachtragen werden:

1. Die Gleichung $f(x)=0$ hat eine und nur eine positive Wurzel ϱ_1; diese liegt zwischen 1 und 2, während **alle anderen Wurzeln absolut kleiner als 1** sind.

---

[1]) Dabei setzen wir $\nu \geqq n-1$ voraus, damit die Nenner $k_\nu \neq 0$ sind; wir werden später ν ins Unendliche wachsen lassen.

2. Die Gleichung $f(x) = 0$ ist im Bereich der rationalen Zahlen irreduzibel, daher insbesondere ihre Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ alle voneinander verschieden.

Wir behaupten nun, es ist:

$$k_\nu = \sum_{s=1}^{n} \gamma_s \varrho_s^\nu, \tag{59}$$

wo die Koeffizienten γ_s von ν unabhängig sind. Denn fordert man diese Gleichung zunächst für $\nu = 0, 1, \ldots n-1$, so hat man n lineare Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante für die n Unbekannten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$, die hieraus eindeutig berechnet werden können. Da aber anderseits ϱ_s eine Wurzel von $f(x)$ ist, so ist $\varrho_s^{\nu-n} f(\varrho_s) = 0$, oder, was dasselbe sagt:

$$\varrho_s^\nu = \varrho_s^{\nu-1} + \varrho_s^{\nu-2} + \cdots + \varrho_s^{\nu-n}.$$

Der gleichen Rekursionsformel, wie sie hier für die Zahlen ϱ_s^ν gegeben ist, genügen aber nach (54) auch die Zahlen k_ν. Daraus folgt, daß die Formel (59) für einen gegebenen Wert ν richtig ist, sobald sie für die n vorhergehenden ν-Werte besteht. Sie gilt aber für $\nu = 0, 1, \ldots n-1$, und folglich auch für alle größeren ν. Zu bemerken ist noch, daß die Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ alle von Null verschieden sind. Denn offenbar sind sie wegen der Irreduzibilität von $f(x)$ konjugierte algebraische Zahlen, die bzw. den Körpern von $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ angehören; wenn daher eine gleich Null wäre, so wären sie alle gleich Null, was nicht angeht.

Da $\varrho_1 > 1$, sonst aber $|\varrho_s| < 1$ ist, so folgt aus (59):

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{k_\nu}{\varrho_1^\nu} = \gamma_1 \neq 0, \tag{60}$$

oder auch, was dasselbe sagt:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{k_{\nu-1}}{\varrho_1^{\nu-1}} = \gamma_1 \neq 0.$$

Folglich durch Division der zwei letzten Gleichungen:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{k_{\nu-1}}{k_\nu} = \frac{1}{\varrho_1}. \tag{61}$$

Hieraus erhält man auch noch etwas allgemeiner:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{k_{\nu-i}}{k_\nu} = \lim_{\nu=\infty} \frac{k_{\nu-1}}{k_\nu} \frac{k_{\nu-2}}{k_{\nu-1}} \cdots \frac{k_{\nu-i}}{k_{\nu-i+1}} = \frac{1}{\varrho_1^i}. \tag{62}$$

Aus der zweiten Definitionsgleichung (56) folgt daher sofort:

$$\lim_{\nu=\infty} P_{\nu,i} = 1 + \frac{1}{\varrho_1} + \cdots + \frac{1}{\varrho_1^i} = \frac{1 + \varrho_1 + \varrho_1^2 + \cdots + \varrho_1^i}{\varrho_1^i}. \tag{63}$$

Schwieriger ist der Grenzwert von Q_ν zu bestimmen. Wir müssen da zwei Fälle unterscheiden:

I. Die Reihe

$$1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} + \frac{c_0 c_1 c_2}{\varrho_1^3} + \cdots \tag{64}$$

sei divergent. Dann ist, weil ϱ_1 und alle c_ν, k_ν positiv sind:

$$\begin{aligned} Q_\nu &= 1 + c_0 \frac{k_{\nu-1}}{k_\nu} + c_0 c_1 \frac{k_{\nu-2}}{k_\nu} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n} \frac{k_{n-1}}{k_\nu} \\ &> 1 + c_0 \frac{k_{\nu-1}}{k_\nu} + c_0 c_1 \frac{k_{\nu-2}}{k_\nu} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\lambda-1} \frac{k_{\nu-\lambda}}{k_\nu}, \end{aligned} \tag{65}$$

wo λ eine beliebige Zahl zwischen 1 und $\nu - n + 1$ bedeuten kann. Wir wählen jetzt λ willkürlich, aber fest, während ν unbegrenzt wachsen soll. Dann nähert sich die rechte Seite von (65) dem Grenzwert

$$K_\lambda = 1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} + \cdots + \frac{c_0 c_1 \ldots c_{\lambda-1}}{\varrho_1^\lambda},$$

und es folgt daher aus (65):

$$\underline{\lim}_{\nu=\infty} Q_\nu \geqq K_\lambda.$$

Da dies einerseits für jeden endlichen Index λ gilt, da anderseits aber wegen der vorausgesetzten Divergenz der Reihe (64) K_λ mit λ über alle Grenzen wächst, so folgt:

$$\lim_{\nu=\infty} Q_\nu = \infty.$$

Geht man daher in den Formeln (58) zur Grenze $\nu = \infty$ über, so ergeben sich die folgenden Grenzwerte:

$$-c_0 \lim_{\nu=\infty} \frac{C_i^{(\nu)}}{C_0^{(\nu)}} = -c_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1),$$

$$-c_0 \lim_{\nu=\infty} \frac{C_n^{(\nu)}}{C_0^{(\nu)}} = +c_0.$$

In diesem Falle konvergiert also die Kette (51) und zwar, wie wieder leicht zu sehen, unbedingt.

Wir wenden uns jetzt zu dem Fall:

II. Die Reihe (64) sei konvergent und habe den Wert K. Es ist dann:

$$(66) \qquad K = 1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} + \frac{c_0 c_1 c_2}{\varrho_1^3} + \cdots > 1.$$

Multipliziert man jetzt den Ausdruck Q_ν in (56) mit $\frac{k_\nu}{\varrho_1^\nu}$ und ersetzt dann alle vorkommenden k_λ durch ihren in Formel (59) angegebenen Wert, so erhält man:

$$\frac{k_\nu}{\varrho_1^\nu} Q_\nu = \frac{1}{\varrho_1^\nu} \sum_{s=1}^{n} \gamma_s \varrho_s^\nu + \frac{c_0}{\varrho_1^\nu} \sum_{s=1}^{n} \gamma_s \varrho_s^{\nu-1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^\nu} \sum_{s=1}^{n} \gamma_s \varrho_s^{\nu-2}$$
$$+ \cdots + \frac{c_0 c_1 \ldots c_{\nu-n}}{\varrho_1^\nu} \sum_{s=1}^{n} \gamma_s \varrho_s^{n-1}$$
$$= \frac{1}{\varrho_1^\nu} \sum_{s=1}^{n} \gamma_s (\varrho_s^\nu + c_0 \varrho_s^{\nu-1} + c_0 c_1 \varrho_s^{\nu-2} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n} \varrho_s^{n-1}),$$

oder auch, indem man in der rechts stehenden Summe den Term für $s = 1$ abtrennt:

$$(67) \qquad \begin{aligned} \frac{k_\nu}{\varrho_1^\nu} Q_\nu &= \gamma_1 \left(1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} + \cdots + \frac{c_0 c_1 \ldots c_{\nu-n}}{\varrho_1^{\nu-n+1}}\right) \\ &+ \sum_{s=2}^{n} \frac{\gamma_s}{\varrho_1^\nu} (\varrho_s^\nu + c_0 \varrho_s^{\nu-1} + c_0 c_1 \varrho_s^{\nu-2} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n} \varrho_s^{n-1}). \end{aligned}$$

Hier hat nun auf der rechten Seite das Glied außerhalb des Summenzeichens offenbar für $\nu = \infty$ den Grenzwert $\gamma_1 K$. Von den $n-1$ Gliedern unter dem Summenzeichen aber wollen wir beweisen, daß jedes einzelne den Grenzwert 0 hat. Für $s = 2, 3, \ldots n$ ist nämlich $|\varrho_s| < 1$; also:

$$\frac{1}{\varrho_1^\nu}\left|\varrho_s^\nu + c_0\varrho_s^{\nu-1} + c_0 c_1 \varrho_s^{\nu-2} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n}\varrho_s^{n-1}\right|$$

$$< \frac{1}{\varrho_1^\nu}(1 + c_0 + c_0 c_1 + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n})$$

$$= \frac{1+c_0+c_0c_1+\cdots+c_0c_1\cdots c_{\lambda-1}}{\varrho_1^\nu} + \frac{c_0c_1\cdots c_\lambda + c_0c_1\cdots c_{\lambda+1}+\cdots+c_0c_1\cdots c_{\nu-n}}{\varrho_1^\nu}$$

$$< \frac{1+c_0+c_0c_1+\cdots+c_0c_1\cdots c_{\lambda-1}}{\varrho_1^\nu} + \left(\frac{c_0c_1\cdots c_\lambda}{\varrho_1^{\lambda+1}} + \frac{c_0c_1\cdots c_{\lambda+1}}{\varrho_1^{\lambda+2}} + \cdots + \frac{c_0c_1\cdots c_{\nu-n}}{\varrho_1^{\nu-n+1}}\right)$$

$$< \frac{1+c_0+c_0c_1+\cdots+c_0c_1\cdots c_{\lambda-1}}{\varrho_1^\nu} + \left(\frac{c_0c_1\cdots c_\lambda}{\varrho_1^{\lambda+1}} + \frac{c_0c_1\cdots c_{\lambda+1}}{\varrho_1^{\lambda+2}} + \cdots \text{ in infin.}\right).$$

Dabei ist wieder λ eine beliebige Zahl zwischen 1 und $\nu - n + 1$. Wählt man λ hinreichend groß, so ist die Klammergröße als Rest einer konvergenten Reihe beliebig klein, und wenn man bei Festhaltung dieses Wertes λ nachträglich ν unbegrenzt wachsen läßt, so wird auch der Bruch

$$\frac{1 + c_0 + c_0 c_1 \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\lambda-1}}{\varrho_1^\nu}$$

beliebig klein. Hieraus ergibt sich aber in der Tat:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\varrho_1^\nu}(\varrho_s^\nu + c_0\varrho_s^{\nu-1} + c_0c_1\varrho_s^{\nu-2} + \cdots + c_0c_1\cdots c_{\nu-n}\varrho_s^{n-1}) = 0$$
$$(s = 2, 3, \ldots n),$$

und folglich nach Formel (67) für die Grenze $\nu = \infty$:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{k_\nu}{\varrho_1^\nu} Q_\nu = \gamma_1 K.$$

Endlich folgt hieraus mit Rücksicht auf (60):

$$\lim_{\nu=\infty} Q_\nu = K.$$

Führt man die gewonnenen Resultate nun wieder in die Formeln (58) ein, indem man dort zur Grenze $\nu = \infty$ übergeht, so kommt:

$$- c_0 \lim_{\nu=\infty} \frac{C_i^{(\nu)}}{C_0^{(\nu)}} = - c_0 \frac{\dfrac{1 + \varrho_1 + \cdots + \varrho_1^i}{\varrho_1^i} - K}{1 - K}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n - 1),$$

$$- c_0 \lim_{\nu=\infty} \frac{C_n^{(\nu)}}{C_0^{(\nu)}} = - c_0 \frac{K}{1 - K}.$$

Da nach (66) $K > 1$ ist, so ist der hier auftretende Nenner von Null verschieden; daher ist auch im gegenwärtigen Fall die Kette konvergent, und zwar wieder, wie man leicht erkennt, unbedingt konvergent. Die Zusammenfassung dieser verschiedenen Resultate führt nun zu

Theorem XI. Wenn $c_0, c_1, c_2, \ldots$ eine unbegrenzte Folge wesentlich positiver Zahlen sind, so ist die Kette n^{ter} Ordnung:

$$\begin{bmatrix} -c_0, & -c_1, & -c_2, & \\ -c_0+1, & -c_1+1, & -c_2+1, & \ldots \\ - & - & - & - \\ -c_0+1, & -c_1+1, & -c_2+1, & \ldots \\ c_0+1, & c_1+1, & c_2+1, & \ldots \end{bmatrix} = \begin{cases} \gamma_1^{(0)} \\ \gamma_2^{(0)} \\ \\ \gamma_n^{(0)}, \end{cases}$$

in deren $(\nu+1)^{\text{ter}}$ Kolonne zuerst ein Element $-c_\nu$, sodann $(n-1)$mal das Element $-c_\nu + 1$, endlich einmal $c_\nu + 1$ auftritt, unbedingt konvergent. Ihr Wertesystem ist:

$$\gamma_i^{(0)} = - c_0 \quad (i = 1, 2, \ldots n - 1),$$
$$\gamma_n^{(0)} = + c_0;$$

oder aber:

$$\gamma_i^{(0)} = c_0 \frac{1 + \varrho_1 + \varrho_1^2 + \cdots + \varrho_1^i - K \varrho_1^i}{\varrho_1^i (K - 1)} \quad (i = 1, 2, \cdots n - 1),$$

$$\gamma_n^{(0)} = \frac{c_0 K}{K - 1},$$

je nachdem die Reihe

$$1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} + \frac{c_0 c_1 c_2}{\varrho_1^3} + \cdots$$

divergiert oder gegen den Wert K konvergiert. Dabei bedeutet ϱ_1 die positive Wurzel der Gleichung:

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x - 1 = 0.$$

§ 7.

Ausdehnung der letzten Untersuchung auf komplexe Elemente.

Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen bleiben, soweit sie sich auf den Fall der Konvergenz der Reihe (64) beziehen, mit geringen Änderungen noch gültig, wenn die c_ν beliebige komplexe von Null verschiedene Zahlen sind. Doch muß dann die absolute Konvergenz der Reihe (64) gefordert werden (früher waren ihre Glieder alle positiv, die Konvergenz also von selbst eine absolute).

Sei also die Reihe

$$1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} + \frac{c_0 c_1 c_2}{\varrho_1^3} + \cdots \tag{64}$$

absolut konvergent und ihre Summe gleich K. Wenn dann Q_ν und $P_{\nu, i}$ wieder ihre frühere, durch die Definitionsgleichungen (56) festgesetzte Bedeutung haben, so bleiben die Formeln (58) bestehen, und außerdem ist auch jetzt nach (63):

$$\lim_{\nu=\infty} P_{\nu, i} = \frac{1 + \varrho_1 + \varrho_1^2 + \cdots + \varrho_1^i}{\varrho_1^i} \quad (i = 1, 2, \ldots n-1),$$

da ja $P_{\nu, i}$ gar nicht von den Zahlen c_λ abhängt. Es kommt also nur noch darauf an, zu zeigen, daß auch wieder

$$\lim_{\nu=\infty} Q_\nu = K$$

ist. Das wird ganz ähnlich wie früher erreicht, indem wir beweisen, daß die unter dem Summenzeichen stehenden Glieder in der auch jetzt gültigen Formel (67) mit wachsendem ν der Grenze Null zustreben. In der Tat ist jetzt für $s = 2, 3, \ldots n$ analog zu der Analyse auf pag. 461:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varrho_1^\nu} \left| \varrho_s^\nu + c_0 \varrho_s^{\nu-1} + c_0 c_1 \varrho_s^{\nu-2} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n} \varrho_s^{n-1} \right| \\
&< \frac{1}{\varrho_1^\nu} (1 + |c_0| + |c_0 c_1| + \cdots + |c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n}|) \\
&< \frac{1 + |c_0| + |c_0 c_1| + \cdots + |c_0 c_1 \cdots c_{\lambda-1}|}{\varrho_1^\nu} \\
&+ \left(\frac{|c_0 c_1 \ldots c_\lambda|}{\varrho_1^{\lambda+1}} + \frac{|c_0 c_1 \ldots c_{\lambda+1}|}{\varrho_1^{\lambda+2}} + \cdots \text{ in infin.} \right).
\end{aligned}$$

Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe (64) können wir hieraus wieder wie früher schließen:

$$\lim_{\nu = \infty} \frac{1}{\varrho_1^\nu} (\varrho_s^\nu + c_0 \varrho_s^{\nu-1} + c_0 c_1 \varrho_s^{\nu-2} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n} \varrho_s^{n-1}) = 0.$$

Wenn man also in Formel (67) zur Grenze $\nu = \infty$ übergeht, so kommt wieder:

$$\lim_{\nu = \infty} \frac{k_\nu}{\varrho_1^\nu} Q_\nu = \gamma_1 K,$$

und folglich auch:

$$\lim_{\nu = \infty} Q_\nu = K.$$

Läßt man daher endlich auch in den Formeln (58) ν wieder unbegrenzt wachsen, so ergibt sich:

$$- c_0 \lim_{\nu = \infty} \frac{C_i^{(\nu)}}{C_0^{(\nu)}} = - c_0 \frac{\dfrac{1 + \varrho_1 + \cdots + \varrho_1^i}{\varrho_1^i} - K}{1 - K} \qquad (i = 1, 2, \ldots n - 1),$$

$$- c_0 \lim_{\nu = \infty} \frac{C_n^{(\nu)}}{C_0^{(\nu)}} = - c_0 \frac{K}{1 - K}.$$

Diese Resultate sind die gleichen wie die des vorigen Paragraphen. Jedoch ist jetzt die Bedingung $K \neq 1$ nicht ohne weiteres erfüllt; die Formeln zeigen aber, daß die Kette konvergiert oder divergiert, je nachdem $K \neq 1$ oder $K = 1$ ist. Übrigens ist die Konvergenz für $K \neq 1$ nicht immer eine unbedingte. Betrachtet man nämlich die Kette:

$$(68)\qquad \begin{bmatrix} -c_\lambda, & -c_{\lambda+1}, & -c_{\lambda+2}, & \dots \\ -c_\lambda+1, & -c_{\lambda+1}+1 & -c_{\lambda+2}+1, & \dots \\ - & - & - & - \\ c_\lambda+1, & c_{\lambda+1}+1, & c_{\lambda+2}+1, & \dots \end{bmatrix},$$

so ist diese von gleicher Bauart wie die Kette (51), aber an Stelle der Reihe (64) tritt jetzt die folgende:

$$1 + \frac{c_\lambda}{\varrho_1} + \frac{c_\lambda c_{\lambda+1}}{\varrho_1^2} + \frac{c_\lambda c_{\lambda+1} c_{\lambda+2}}{\varrho_1^3} + \dots,$$

welche offenbar auch absolut konvergiert und den Wert

$$\frac{\varrho_1^\lambda}{c_0 c_1 \cdots c_{\lambda-1}}\left(K - 1 - \frac{c_0}{\varrho_1} - \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} - \dots - \frac{c_0 c_1 \dots c_{\lambda-2}}{\varrho_1^{\lambda-1}}\right)$$

hat. Die Kette (68) wird daher nur dann konvergieren, wenn dieser Reihenwert ebenfalls von 1 verschieden ist, d. h. wenn

$$K \neq 1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} + \dots + \frac{c_0 c_1 \dots c_{\lambda-1}}{\varrho_1^\lambda}$$

ist. Bei unbedingter Konvergenz der Kette (51) muß daher diese Ungleichung für alle endlichen $\lambda > 1$ erfüllt sein. Wir erhalten also:

Theorem XII. Wenn unter Beibehaltung der Bezeichnung von Theorem XI die c_ν beliebige komplexe Zahlen ($c_\nu \neq 0$) sind, und wenn die unendliche Reihe

$$1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} + \frac{c_0 c_1 c_2}{\varrho_1^3} + \cdots$$

absolut konvergiert, so ist die Kette divergent oder konvergent, je nachdem der Wert K dieser Reihe gleich 1 oder von 1 verschieden ist; das Wertesystem der Kette ist im letzteren Fall das gleiche wie bei

Theorem XI. Die Konvergenz ist eine bloß bedingte oder unbedingte, je nachdem unter den Zahlen

$$K_\lambda = 1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} + \cdots + \frac{c_0 c_1 \ldots c_{\lambda-1}}{\varrho_1^\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \cdots \infty)^{1)}$$

mindestens eine gleich K ist oder nicht.

Noch weit vollständiger können wir das Verhalten der Kette im Fall $n = 1$, also für Kettenbrüche, bestimmen. Dann ist nämlich nach (58):

$$-c_0 \frac{C_1^{(\nu+1)}}{C_0^{(\nu+1)}} = \frac{c_0 Q_\nu}{Q_\nu - 1},$$

wobei aber, da jetzt alle k_ν den Wert 1 haben, einfach

$$Q_\nu = 1 + c_0 + c_0 c_1 + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-1}$$

zu setzen ist.

Hieraus kann ohne Schwierigkeit folgendes (im wesentlichen ja bekannte) Resultat entnommen werden:

Die Kette erster Ordnung

$$\begin{bmatrix} -c_0, & -c_1, & -c_2, & \cdots \\ c_0 + 1, & c_1 + 1, & c_2 + 1, & \cdots \end{bmatrix} \quad (c_\nu \neq 0),$$

oder, was dasselbe ist, der Kettenbruch

$$c_0 + 1 - \frac{c_1 \,|}{|\, c_1 + 1} - \frac{c_2 \,|}{|\, c_2 + 1} - \frac{c_3 \,|}{|\, c_3 + 1} - \cdots$$

zeigt folgendes Verhalten:

1. Wenn die unendliche Reihe

$$1 + c_0 + c_0 c_1 + c_0 c_1 c_2 + \cdots$$

konvergiert und ihr Wert K von 1 verschieden ist, so konvergiert der Kettenbruch gegen den Wert

1) Die Klammer ($\lambda = 1, 2, \ldots \infty$) bedeutet natürlich wie seither immer, daß in K_λ der Index λ alle endlichen Zahlen durchlaufen soll; dagegen ist der Grenzwert $\lim\limits_{\lambda=\infty} K_\lambda$ nicht inbegriffen; dieser wäre ja nach Definition gleich K.

$$\frac{c_0 K}{K-1};$$

die Konvergenz ist eine bloß bedingte oder unbedingte, je nachdem von den Zahlen

$$1 + c_0 + c_0 c_1 + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\lambda-1} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \cdots \infty)$$

eine gleich K ist oder nicht.

2. Wenn die obige Reihe gegen den Wert 1 konvergiert, so ist der Kettenbruch divergent.

3. Wenn die selbe Reihe derart divergiert, daß die absolut genommene Summe ihrer ν ersten Glieder für wachsende ν den Grenzwert ∞ hat, so konvergiert der Kettenbruch gegen den Wert c_0, und zwar unbedingt.

4. Wenn die selbe Reihe derart divergiert, daß die absolut genommene Summe ihrer ν ersten Glieder doch für unendlich viele ν-Werte unter einer endlichen Schranke bleibt, so divergiert der Kettenbruch.

Diese vier Möglichkeiten bilden eine vollständige Disjunktion, sodaß das Verhalten des Kettenbruches jederzeit aus dem Verhalten der unendlichen Reihe

$$1 + c_0 + c_0 c_1 + c_0 c_1 c_2 + \cdots$$

abgelesen werden kann. Sind speziell die c_ν reelle positive Zahlen, so können bloß der erste und dritte Fall eintreten, sodaß in Übereinstimmung mit Theorem XI und mit dem Pringsheimschen Fundamentalkriterium der Kettenbruch jetzt immer konvergiert.

§ 8.

Hilfssatz über eine besondere algebraische Gleichung.

Es sollen jetzt die in den zwei letzten Paragraphen benutzten Eigenschaften der Gleichung

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x - 1 = 0$$

nachträglich bewiesen werden. Wir betrachten zu dem Zweck gleich die folgende Gleichung, welche die vorige als Spezialfall umfaßt:

$$f(x) \equiv x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \cdots - a_{n-1} x - a_n = 0,$$

wobei die a_i beliebige positive Zahlen sind, die den Ungleichungen

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots \geqq a_n > 0$$

genügen.

Nach der Descartesschen Zeichenregel hat $f(x)$ eine und nur eine (einfache) positive Wurzel ϱ_1. Es ist dann das Polynom $f(x)$ teilbar durch $x - \varrho_1$, und man kann daher den Ansatz machen:

$$(69) \quad \frac{f(x)}{x - \varrho_1}(x-1) = x^n - b_1 x^{n-1} - b_2 x^{n-2} - \cdots - b_{n-1} x - b_n.$$

Zur Berechnung der Koeffizienten b_i findet man, indem man mit dem Nenner $x - \varrho_1$ ausmultipliziert, die Formeln

$$\begin{gathered}
\varrho_1 b_n = a_n \\
\varrho_1 b_{n-1} - b_n = a_{n-1} - a_n \\
\varrho_1 b_{n-2} - b_{n-1} = a_{n-2} - a_{n-1} \\
- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
\varrho_1 b_1 - b_2 = a_1 - a_2.
\end{gathered}$$

Da hier nach Voraussetzung $a_n > 0$, im übrigen aber die rechts auftretenden Differenzen wenigstens $\geqq 0$ sind, und da außerdem auch ϱ_1 positiv ist, so lehren diese Formeln der Reihe nach:

$$b_n > 0, \;\; b_{n-1} > 0, \;\ldots\; b_2 > 0, \;\; b_1 > 0.$$

Die b_i sind also alle positiv; außerdem ist ihre Summe

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1,$$

wie sich ohne weiteres aus (69) für $x = 1$ ergibt.

Wir beweisen nun: Die von ϱ_1 verschiedenen Wurzeln von $f(x)$ sind alle absolut kleiner als 1. Angenommen nämlich, es sei ϱ_2 eine von ϱ_1 verschiedene Wurzel, und man habe $|\varrho_2| > 1$. Dann ist ϱ_2 auch Wurzel des Polynoms (69), und folglich:

$$
\begin{aligned}
|\varrho_2^n| &= |b_1 \varrho_2^{n-1} + b_2 \varrho_2^{n-2} + \cdots + b_{n-1} \varrho_2 + b_n| \\
&< b_1 |\varrho_2|^{n-1} + b_2 |\varrho_2|^{n-2} + \cdots + b_{n-1} |\varrho_2| + b_n \,^{1)} \\
&\leq (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n) |\varrho_2|^{n-1} = |\varrho_2|^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Dies besagt aber $|\varrho_2| < 1$, was der Voraussetzung $|\varrho_2| > 1$ widerspricht; diese ist also unzulässig, und daher gewiß $|\varrho_2| < 1$; w. z. b. w.

Wir nehmen nun weiter die Koeffizienten a_i als ganze rationale Zahlen an. Dann ist:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_n < 0, \\
f(a_1+1) &\geq (a_1+1)^n - a_1 [(a_1+1)^{n-1} + (a_1+1)^{n-2} + \cdots + (a_1+1) + 1] \\
&= (a_1+1)^n - a_1 \frac{(a_1+1)^n - 1}{a_1} = 1 > 0.
\end{aligned}
$$

Also liegt die positive Wurzel zwischen 1 und $a_1 + 1$, während nach obigem die anderen Wurzeln absolut kleiner als 1 sind. Daraus folgt aber auch sofort die Irreduzibilität des Polynoms $f(x)$ im Bereich der rationalen Zahlen; denn wäre es reduzibel, so hätte es wenigstens einen Faktor

$$x^k + f_1 x^{k-1} + \cdots + f_{k-1} x + f_k$$

mit ganzzahligen[2]) Koeffizienten, dessen sämtliche Wurzeln absolut < 1 sind, während doch ihr Produkt gleich $\pm f_k$, also absolut ≥ 1 ist. Die in den Paragraphen 6 und 7 benutzten Eigenschaften des Polynoms $f(x)$ sind hiemit alle bewiesen.

§ 9.

Anwendungen.

Um jetzt eine kleine Anwendung der entwickelten Konvergenzsätze zu geben, setzen wir:

$$\varphi(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{\Gamma(u+s)\,\Gamma(v+s)\,s!}, \tag{70}$$

[1]) Unter Ausschluß der Gleichheit, weil ϱ_2 als eine von ϱ_1 verschiedene Wurzel nicht positiv sein kann.

[2]) Nach einem bekannten Satz von Gauß.

wobei u, v irgendwelche konstante komplexe Zahlen sind, während z eine komplexe Variable ist. Es ist dann $\varphi(u, v)$ eine ganze transzendente Funktion von z.

Man verifiziert nun leicht die beiden Funktionalgleichungen:

$$\text{(a)} \qquad \varphi(u, v) - u\varphi(u+1, v) = z\varphi(u+2, v+1),$$

$$\text{(b)} \qquad \varphi(u, v) - v\varphi(u, v+1) = z\varphi(u+1, v+2).$$

Schreibt man in (b) $u+1$ an Stelle von u, multipliziert sodann mit u und addiert die entstehende Gleichung zu (a), so folgt:

$$\text{(c)} \quad \varphi(u,v) - uv\varphi(u+1, v+1) = z\varphi(u+2, v+1) + uz\varphi(u+2, v+2).$$

Schreibt man ferner in (b) $u+2$ an Stelle von u, und $v+1$ an Stelle von v, so kommt:

$$\text{(d)} \quad \varphi(u+2, v+1) - (v+1)\varphi(u+2, v+2) = z\varphi(u+3, v+3).$$

Multipliziert man endlich diese Gleichung mit z und addiert sie dann zu (c), so fällt $\varphi(u+2, v+1)$ heraus, und man erhält schließlich als Endresultat:

$$\text{(71)} \quad \begin{aligned} \varphi(u,v) = uv\varphi(u+1, v+1) + (u+v+1)z\varphi(u+2, v+2) \\ + z^2\varphi(u+3, v+3). \end{aligned}$$

Wir führen jetzt die ganzen transzendenten Funktionen von z ein:

$$\text{(72)} \quad \Phi_\nu(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{\Gamma(u+\nu+s)\Gamma(v+\nu+s)s!} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots \infty).$$

Es ist dann offenbar:

$$\Phi_\nu(z) = \varphi(u+\nu, v+\nu),$$

und daher erhält man, wenn man in (71) $u+\nu$, $v+\nu$ an Stelle von u, v setzt, die Rekursionsformel:

$$\text{(73)} \quad \begin{aligned} \Phi_\nu(z) = (u+\nu)(v+\nu)\Phi_{\nu+1}(z) + z(u+v+2\nu+1)\Phi_{\nu+2}(z) \\ + z^2\Phi_{\nu+3}(z). \end{aligned}$$

Schreibt man jetzt zur Abkürzung:

$$(74)\quad z^2 = a_0^{(\nu)}, \quad z(u+v+2\nu-1) = a_1^{(\nu)}, \quad (u+\nu)(v+\nu) = a_2^{(\nu)},$$

$$(75)\quad \begin{gathered} z^2 \Phi_{\nu+1}(z) = x_0^{(\nu)}, \quad z(u+v+2\nu-1)\Phi_{\nu+1}(z) + z^2 \Phi_{\nu+2}(z) = x_1^{(\nu)}, \\ \Phi_\nu(z) = x_2^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, \ldots \infty), \end{gathered}$$

so resultiert aus dieser Bezeichnungsweise im Verein mit (73) das Gleichungssystem:

$$(76)\quad \begin{gathered} x_0^{(\nu)} = a_0^{(\nu)} x_2^{(\nu+1)}, \quad x_1^{(\nu)} = x_0^{(\nu+1)} + a_1^{(\nu)} x_2^{(\nu+1)}, \quad x_2^{(\nu)} = x_1^{(\nu+1)} + a_2^{(\nu)} x_2^{(\nu+1)} \\ (\nu = 0, 1, \ldots \infty). \end{gathered}$$

Dieses stimmt formal genau mit dem System (13) überein (für $n = 2$) und gibt daher Veranlassung zum Studium der Kette zweiter Ordnung:

$$(77)\quad \begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ a_1^{(0)}, & a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \ldots \\ a_2^{(0)}, & a_2^{(1)}, & a_2^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix}.$$

Aus (76) erhält man auch wieder (vgl. (14), (14 a)):

$$(78)\quad x_i^{(0)} = A_i^{(\lambda)} x_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} x_1^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+2)} x_2^{(\lambda)} \qquad (i = 0, 1, 2),$$

$$(78^a)\quad x_i^{(\mu)} = A_{i,\mu}^{(\lambda)} x_0^{(\lambda+\mu)} + A_{i,\mu}^{(\lambda+1)} x_1^{(\lambda+\mu)} + A_{i,\mu}^{(\lambda+2)} x_2^{(\lambda+\mu)} \quad (i = 0, 1, 2),$$

wobei die A natürlich durch die bekannten Rekursionsformeln (für $n = 2$) aus den durch die Formeln (74) definierten Größen $a_i^{(\nu)}$ gebildet sind. Dagegen darf aus dem Gleichungssystem (76) allein natürlich nicht geschlossen werden, daß die Kette (77) konvergiert, oder gar, daß ihr Wertesystem wie in § 1 gleich

$$a_0^{(0)} \frac{x_1^{(0)}}{x_0^{(0)}}, \qquad a_0^{(0)} \frac{x_2^{(0)}}{x_0^{(0)}}$$

wäre.[1]) Doch wollen wir dies jetzt tatsächlich beweisen.

[1]) Durch diese Schlußweise ließe sich geradezu beweisen, daß jede Kette ein willkürlich vorgegebenes Wertesystem hat. Vgl. § 2 der folgenden Mitteilung des Verfassers: Über die Kettenbruchentwicklung des Quotienten zweier Besselschen Funktionen.

Wir beschränken zu diesem Zweck die Variable z in der komplexen Zahlenebene auf das Innere und die Peripherie eines Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und von beliebig großem Radius R; also:

$$|z| \leq R; \tag{79}$$

den Nullpunkt selbst schließen wir aus, damit die stets zu machende Annahme $a_0^{(\nu)} \neq 0$ erfüllt ist; also:

$$|z| > 0. \tag{80}$$

Unter diesen Einschränkungen folgt aus der Definitionsgleichung (72), wenn $\nu > |u|$, $\nu > |v|$ ist:

$$|\Gamma(u+\nu)\,\Gamma(v+\nu)\,\Phi_\nu(z) - 1| = \left|\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Gamma(u+\nu)\,\Gamma(v+\nu)}{\Gamma(u+\nu+s)\,\Gamma(v+\nu+s)} \frac{z^s}{s!}\right|$$

$$= \left|\sum_{s=1}^{\infty} \frac{z^s}{(u+\nu)(u+\nu+1)\cdots(u+\nu+s-1)(v+\nu)(v+\nu+1)\ldots(v+\nu+s-1)\,s!}\right|$$

$$< \sum_{s=1}^{\infty} \frac{R^s}{(\nu-|u|)^s(\nu-|v|)^s\,s!} = e^{\frac{R}{(\nu-|u|)(\nu-|v|)}} - 1.$$

Dieser Ausdruck nähert sich für unbegrenzt wachsende ν der Grenze 0; also folgt:

$$\lim_{\nu=\infty} \Gamma(u+\nu)\,\Gamma(v+\nu)\,\Phi_\nu(z) = 1. \tag{81}$$

Setzt man hier $\nu + 1$ an Stelle von ν und dividiert die entstehende Gleichung durch (81), so kommt:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{(u+\nu)(v+\nu)\,\Phi_{\nu+1}(z)}{\Phi_\nu(z)} = 1. \tag{82}$$

Daher ist $x_2^{(\nu)} = \Phi_\nu(z)$ für genügend große Werte von ν gewiß von Null verschieden, und man erhält als erstes wichtiges Resultat:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{x_0^{(\nu)}}{x_2^{(\nu)}} = z^2 \lim_{\nu=\infty} \frac{\Phi_{\nu+1}(z)}{\Phi_\nu(z)} = 0. \tag{83}$$

Ferner ist nach den Definitionsgleichungen (75):

$$\frac{x_1^{(\nu)}}{x_2^{(\nu)}} = \frac{z(u+v+2\nu-1)\,\Phi_{\nu+1}(z) + z^2\,\Phi_{\nu+2}(z)}{\Phi_\nu(z)}$$

$$= \frac{z(u+v+2\nu-1)}{(u+\nu)(v+\nu)}\,\frac{(u+\nu)(v+\nu)\,\Phi_{\nu+1}(z)}{\Phi_\nu(z)} + z^2\,\frac{\Phi_{\nu+2}(z)}{\Phi_{\nu+1}(z)}\,\frac{\Phi_{\nu+1}(z)}{\Phi_\nu(z)}.$$

Hieraus folgt dann unter Berücksichtigung von (82), (83) das zweite wichtige Resultat:

(84) $$\lim_{\nu=\infty} \frac{x_1^{(\nu)}}{x_2^{(\nu)}} = 0.$$

Wegen $|z| < R$ folgt aus den Definitionsgleichungen (74) für $\nu > |u|$, $\nu > |v|$:

$$|a_0^{(\nu)}| \leq R^2, \quad |a_1^{(\nu)}| < R(|u| + |v| + 2\nu - 1),$$
$$|a_2^{(\nu)}| \geq (\nu - |u|)(\nu - |v|).$$

Daher gibt es eine nur von R, nicht aber vom speziellen Wert z abhängende Zahl N, derart, daß für $\nu > N$ durchweg

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| \leq \tfrac{1}{2}(|a_2^{(\nu)}| - 1)$$

ist. Dann nehmen aber nach den Entwicklungen zu Beginn des § 3 die Zahlen $|A_{0,N}^{(\nu)}|$ von $\nu = 1$ ab mit wachsendem ν monoton zu, und die Kette

(85) $$\begin{bmatrix} a_0^{(N)}, & a_0^{(N+1)}, & a_0^{(N+2)}, & \dots \\ a_1^{(N)}, & a_1^{(N+1)}, & a_1^{(N+2)}, & \dots \\ a_2^{(N)}, & a_2^{(N+1)}, & a_2^{(N+2)}, & \dots \end{bmatrix}$$

erfüllt die Voraussetzungen der Theoreme II und III (mit $\vartheta = \frac{1}{2}$). Sie ist also unbedingt konvergent, und, wenn ihr Wertesystem mit $\alpha_1^{(N)}$, $\alpha_2^{(N)}$ bezeichnet wird, so ist (Theorem III):

(86) $$\tfrac{1}{2}|\alpha_2^{(N)}| \geq |a_0^{(N)}| + |\alpha_1^{(N)}| > 0.$$

Nun ist nach der Definition des Wertesystems einer Kette (pag. 407):

(87) $$\alpha_1^{(N)} = a_0^{(N)} \lim_{\lambda=\infty} \frac{A_{1,N}^{(\lambda)}}{A_{0,N}^{(\lambda)}}, \quad \alpha_2^{(N)} = a_0^{(N)} \lim_{\lambda=\infty} \frac{A_{2,N}^{(\lambda)}}{A_{0,N}^{(\lambda)}}.$$

Da also diese Grenzwerte existieren, und nach (86) überdies $a_2^{(N)} \neq 0$ ist, so ist für hinreichend große Werte von λ gewiß auch:

$$A_{0,N}^{(\lambda)} \neq 0, \quad A_{2,N}^{(\lambda)} \neq 0.$$

Ferner wurde bereits hervorgehoben, daß dann auch $x_2^{(\lambda)} \neq 0$ ist, sodaß man aus (78ª) für $\mu = N$ und für hinreichend große λ erhält:

$$(88) \quad \frac{x_i^{(N)}}{x_2^{(\lambda+N)}\, A_{i,N}^{(\lambda+2)}} = \frac{A_{i,N}^{(\lambda)}}{A_{i,N}^{(\lambda+2)}} \frac{x_0^{(\lambda+N)}}{x_2^{(\lambda+N)}} + \frac{A_{i,N}^{(\lambda+1)}}{A_{i,N}^{(\lambda+2)}} \frac{x_1^{(\lambda+N)}}{x_2^{(\lambda+N)}} + 1$$

$$(i = 0, 2).$$

Der Wert $i = 1$ ist hier aber nicht ohne weiteres zulässig, da wir nicht wissen, ob der dann auftretende Nenner $A_{1,N}^{(\lambda+2)}$ ebenfalls von Null verschieden ist.

Da die Größen $|A_{0,N}^{(\nu)}|$ mit ν monoton wachsen, so ist:

$$(89) \qquad \left| \frac{A_{0,N}^{(\lambda)}}{A_{0,N}^{(\lambda+2)}} \right| \leq 1; \quad \left| \frac{A_{0,N}^{(\lambda+1)}}{A_{0,N}^{(\lambda+2)}} \right| \leq 1.$$

Wählt man jetzt in Formel (88) für i den Wert 0 und läßt dann λ unbegrenzt wachsen, so folgt unter Berücksichtigung von (83), (84), (89):

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{x_0^{(N)}}{x_2^{(\lambda+N)}\, A_{0,N}^{(\lambda+2)}} = 1.$$

Daher ist notwendig $x_0^{(N)} \neq 0$, und außerdem:

$$(90) \qquad \lim_{\lambda=\infty} x_2^{(\lambda+N)}\, A_{0,N}^{(\lambda+2)} = x_0^{(N)} \neq 0.$$

Um in Gleichung (88) denselben Prozeß auch für $i = 2$ ausführen zu können, setze man in der zweiten Gleichung (87) an Stelle von λ zuerst $\lambda + 1$, sodann $\lambda + 2$, und dividiere die zwei entstehenden Gleichungen durcheinander, was wegen $a_2^{(N)} \neq 0$ erlaubt ist. Es kommt so:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{A_{2,N}^{(\lambda+1)}}{A_{2,N}^{(\lambda+2)}} : \frac{A_{0,N}^{(\lambda+1)}}{A_{0,N}^{(\lambda+2)}} = 1.$$

Mit Rücksicht auf (89) folgt daher:

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \left| \frac{A_{2,N}^{(\lambda+1)}}{A_{2,N}^{(\lambda+2)}} \right| \leqq 1; \quad \text{also auch:} \quad \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \left| \frac{A_{2,N}^{(\lambda)}}{A_{2,N}^{(\lambda+2)}} \right| \leqq 1.^{1})$$

Infolgedessen kann jetzt auch für $i = 2$ aus (88) geschlossen werden:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{x_2^{(N)}}{x_2^{(\lambda+N)} A_{2,N}^{(\lambda+2)}} = 1.$$

Es ist also auch $x_2^{(N)} \neq 0$, und außerdem

(91) $$\lim_{\lambda=\infty} x_2^{(\lambda+N)} A_{2,N}^{(\lambda+2)} = x_2^{(N)} \neq 0.$$

Dividiert man jetzt (91) durch (90), so kommt:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{A_{2,N}^{(\lambda+2)}}{A_{0,N}^{(\lambda+2)}} = \frac{x_2^{(N)}}{x_0^{(N)}},$$

oder auch mit Rücksicht auf die zweite Gleichung (87):

(92) $$a_2^{(N)} = a_0^{(N)} \frac{x_2^{(N)}}{x_0^{(N)}}.$$

Da die Kette (85) unbedingt konvergiert, so setzen wir:

$$\begin{bmatrix} a_0^{(N+1)}, & a_0^{(N+2)}, & a_0^{(N+3)}, & \ldots \\ a_1^{(N+1)}, & a_1^{(N+2)}, & a_1^{(N+3)}, & \ldots \\ a_2^{(N+1)}, & a_2^{(N+2)}, & a_2^{(N+3)}, & \ldots \end{bmatrix} = \begin{cases} \alpha_1^{(N+1)} \\ \alpha_2^{(N+1)}, \end{cases}$$

und erhalten natürlich (vgl. (12) pag. 413):

$$\alpha_1^{(N)} = a_1^{(N)} + \frac{a_0^{(N+1)}}{\alpha_2^{(N+1)}}, \qquad \alpha_2^{(N)} = a_2^{(N)} + \frac{\alpha_1^{(N+1)}}{\alpha_2^{(N+1)}}.$$

Analog zu Formel (92) finden wir jetzt aber auch:

$$a_2^{(N+1)} = a_0^{(N+1)} \frac{x_2^{(N+1)}}{x_0^{(N+1)}};$$

---

1) Übrigens kann man leicht beweisen, daß auch $\left| A_{2,N}^{(\lambda)} \right|$ mit λ monoton wächst, wodurch die obigen Betrachtungen sich etwas vereinfachen würden.

und folglich:

$$a_1^{(N)} = a_1^{(N)} + \frac{x_0^{(N+1)}}{x_2^{(N+1)}} = \frac{x_0^{(N+1)} + a_1^{(N)} x_2^{(N+1)}}{x_2^{(N+1)}} = a_0^{(N)} \frac{x_1^{(N)}}{x_0^{(N)}},$$

letzteres nach (76) für $\nu = N$. Mit (92) zusammen besagt dies aber, daß das Wertesystem der konvergenten Kette (85) kein anderes ist als:

$$a_0^{(N)} \frac{x_1^{(N)}}{x_0^{(N)}}, \qquad a_0^{(N)} \frac{x_2^{(N)}}{x_0^{(N)}}.$$

Jetzt ist es nicht mehr schwer, das Analoge auch für die Kette (77) nachzuweisen. Nach dem Lemma auf pag. 414 wird diese nämlich konvergent oder divergent sein, je nachdem der Ausdruck

$$A_0^{(N)} a_0^{(N)} + A_0^{(N+1)} a_1^{(N)} + A_0^{(N+2)} a_2^{(N)}$$

von Null verschieden oder gleich Null ist; und ihr Wertesystem ist im Konvergenzfall:

$$a_i^{(0)} = a_0^{(0)} \frac{A_i^{(N)} a_0^{(N)} + A_i^{(N+1)} a_1^{(N)} + A_i^{(N+2)} a_2^{(N)}}{A_0^{(N)} a_0^{(N)} + A_0^{(N+1)} a_1^{(N)} + A_0^{(N+2)} a_2^{(N)}} \quad (i = 1, 2).$$

Nach unseren Resultaten ist aber für $i = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} & A_i^{(N)} a_0^{(N)} + A_i^{(N+1)} a_1^{(N)} + A_i^{(N+2)} a_2^{(N)} \\ &= \frac{a_0^{(N)}}{x_0^{(N)}} \left(A_i^{(N)} x_0^{(N)} + A_i^{(N+1)} x_1^{(N)} + A_i^{(N+2)} x_2^{(N)}\right) \\ &= \frac{a_0^{(N)}}{x_0^{(N)}} x_i^{(0)} \text{ (nach Formel (78)).} \end{aligned}$$

Die Kette (77) wird daher konvergieren oder divergieren, je nachdem $x_0^{(0)}$ von Null verschieden oder gleich Null ist, und ihr Wertesystem ist im ersten Fall:

$$a_1^{(0)} = a_0^{(0)} \frac{x_1^{(0)}}{x_0^{(0)}}, \qquad a_2^{(0)} = a_0^{(0)} \frac{x_2^{(0)}}{x_0^{(0)}}.$$

Nun ist nach Formel (75) $x_0^{(0)} = z^2 \Phi_1(z)$, also eine ganze transzendente Funktion von z, und hat als solche nur eine endliche Anzahl von Nullstellen im Gebiet $|z| < R$. Schließt man diese nachträglich noch aus, so ist demnach die Kette (77) konvergent, und wenn man für $a_i^{(\nu)}$, $x_i^{(\nu)}$ die in (74), (75) angegebenen Werte einsetzt, so erhält man die Formel:

$$\left[\begin{matrix} z^2 \\ z(u+v+2\nu-1) \\ (u+\nu)(v+\nu) \end{matrix}\right]_{\nu=0}^{\infty} = \left\{\begin{matrix} z(u+v-1)+z^2\dfrac{\Phi_2(z)}{\Phi_1(z)} \\ \dfrac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}, \end{matrix}\right.$$

oder auch (vgl. pag. 409):

$$\left[\begin{matrix} 1, & z^2 \\ 0, & z(u+v+2\nu-1) \\ 0, & (u+\nu)(v+\nu) \end{matrix}\right]_{\nu=1}^{\infty} = \left\{\begin{matrix} z^2\dfrac{\Phi_2(z)}{\Phi_1(z)} \\ \dfrac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} - uv. \end{matrix}\right.$$

Da der Radius R des Kreises, innerhalb dessen die Variable z gelegen sein sollte, beliebig groß gewählt werden kann, so gilt diese Formel für jeden endlichen Wert von z, welcher nicht Nullstelle der Funktion $\Phi_1(z)$ ist. Man darf nachträglich sogar den seither ausgeschlossenen Wert $z=0$ wieder zulassen, da unschwer die Formel

$$\left[\begin{matrix} 1, & 0 \\ 0, & 0 \\ 0, & (u+\nu)\ (v+\nu) \end{matrix}\right]_{\nu=1}^{\infty} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

zu bestätigen ist.[1]) Wir bekommen demnach:

Theorem XIII. Bedeuten u, v zwei beliebige Konstante, und z eine komplexe Variable, so gilt die Beziehung:

$$\left[\begin{matrix} 1, & z \\ 0, & z(u+v+2\nu-1) \\ 0, & (u+\nu)(v+\nu) \end{matrix}\right]_{\nu=1}^{\infty} = \left\{\begin{matrix} z^2\dfrac{\Phi_2(z)}{\Phi_1(z)} \\ \dfrac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} - uv \end{matrix}\right.$$

[1]) Bei dieser Kette ist nämlich für $\nu \geqq 3$ durchweg:

$$A_1^{(\nu)} = 0,\ A_2^{(\nu)} = 0,\ A_0^{(\nu)} \neq 0,$$

wobei dann allerdings vorausgesetzt werden muß, daß weder u noch v eine negative ganze Zahl ist.

für alle endlichen Werte von z, ausgenommen die Nullstellen der Funktion $\Phi_1(z)$; für diese divergiert die Kette. Dabei bedeuten $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ die ganzen transzendenten Funktionen:

$$\Phi_\nu(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{\Gamma(u+\nu+s)\,\Gamma(v+\nu+s)\,s!} \qquad (\nu = 0, 1, 2).$$

Übrigens ist die obige Kette nicht immer unbedingt konvergent; dies ist offenbar nur dann der Fall, wenn wir von z die Nullstellen aller Funktionen $\Phi_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots \infty)$ ausschließen. Führt man die analoge Entwicklung für Ketten erster Ordnung durch, so gelangt man zu einer Formel, welche im wesentlichen mit der bekannten[1]) Kettenbruchdarstellung für den Quotienten zweier Besselschen Funktionen übereinstimmt.

Wir wählen jetzt für u, v, z speziell rationale Werte:

$$u = \frac{e}{h}, \quad v = \frac{f}{h}, \quad z = \frac{g}{h} \neq 0,$$

wo e, f, g, h ganze Zahlen sind. Dann sind die Elemente der in Theorem XIII auftretenden Kette sämtlich rationale Zahlen. Es gibt daher eine äquivalente Kette mit lauter ganzzahligen Elementen, nämlich:

$$\begin{bmatrix} 1, & \dfrac{g^2}{h^2} \\ 0, & \dfrac{g}{h}\left(\dfrac{e}{h} + \dfrac{f}{h} + 2\nu - 1\right) \\ 0, & \left(\dfrac{e}{h} + \nu\right)\left(\dfrac{f}{h} + \nu\right) \end{bmatrix}_{\nu=1}^{\infty}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1, & g^2, & g^2 h^2, & g^2 h^4 \\ 0, & g(e+f+h), & gh^2(e+f+3h), & gh^2(e+f+(2\nu-1)h) \\ 0, & (e+h)(f+h), & (e+2h)(f+2h), & (e+\nu h)(f+\nu h) \end{bmatrix}_{\nu=3}^{\infty}.$$

Diese letzte Kette erfüllt nun aber die Voraussetzungen von Theorem IX. Daraus folgt erstens, daß sie unbedingt

[1]) In der Literatur übrigens meist ohne ausreichenden Beweis. Vgl. die folgende Mitteilung des Verfassers: Über die Kettenbruchentwicklung des Quotienten zweier Besselschen Funktionen.

konvergiert, daher kann der Wert $z = \frac{g}{h}$ keine Nullstelle von $\Phi_1(z)$ sein, weil sonst nach Theorem XIII die Kette divergieren müßte. Zweitens folgt aber auch aus Theorem IX, daß keine Relation der Form

$$P_0 + P_1 z^2 \frac{\Phi_2(z)}{\Phi_1(z)} + P_2 \left(\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} - uv \right) = 0$$

mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten P bestehen kann; oder, was dasselbe sagt, da u, v, z rational sind: keine Relation der Form

$$Q_0 \Phi_0(z) + Q_1 \Phi_1(z) + Q_2 \Phi_2(z) = 0$$

mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten Q_i. Dies Resultat läßt sich folgendermaßen formulieren:

Theorem XIV. Wenn $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ die gleichen ganzen transzendenten Funktionen sind wie in Theorem XIII, und wenn die dabei auftretenden Konstanten u, v rationale Werte haben, so kann die Gleichung

$$Q_0 \Phi_0(z) + Q_1 \Phi_1(z) + Q_2 \Phi_2(z) = 0 \qquad (z \neq 0)$$

für rationale Q_0, Q_1, Q_2, z nicht bestehen, es sei denn, daß $Q_0 = Q_1 = Q_2 = 0$ ist. Insbesondere haben also die Funktionen $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ keine rationalen Nullstellen.

Besonderes Interesse bietet die Annahme:

$$u = \tfrac{1}{3},\ v = \tfrac{2}{3}.$$

Setzt man dann noch $z = \left(\frac{\zeta}{3}\right)^3$, so findet man nach leichter Reduktion:

$$\varrho\, \Phi_0 = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\zeta^{3s}}{(3s)!} = \tfrac{1}{3}\left(e^{\zeta} + e^{\varepsilon\zeta} + e^{\varepsilon^2\zeta}\right),$$

$$\varrho\, \Phi_1 = 9 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\zeta^{3s}}{(3s+2)!} = \frac{3}{\zeta^2}\left(e^{\zeta} + \varepsilon e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta}\right),$$

$$\varrho\, \Phi_2 = 243 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+1)\zeta^{3s}}{(3s+5)!} = \frac{27}{\zeta^5}\left[\zeta\left(e^{\zeta} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon e^{\varepsilon^2\zeta}\right) - 2\left(e^{\zeta} + \varepsilon e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta}\right)\right],$$

wo ε eine primitive dritte Einheitswurzel bedeutet, und $\varrho = \Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})$ ist. Aus Theorem XIII folgt daher:

$$\begin{bmatrix} 1, \frac{1}{729}\zeta^6 \\ 0, \frac{2}{27}\nu\zeta^3 \\ 0, (\frac{1}{3}+\nu)(\frac{2}{3}+\nu) \end{bmatrix}_{\nu=1}^{\infty} = \begin{cases} \frac{\zeta^4}{81}\frac{e^{\zeta}+\varepsilon^2 e^{\varepsilon\zeta}+\varepsilon e^{\varepsilon^2\zeta}}{e^{\zeta}+\varepsilon e^{\varepsilon\zeta}+\varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta}} - \frac{2}{81}\zeta^3 \\ \frac{\zeta^2}{9}\frac{e^{\zeta}+e^{\varepsilon\zeta}+e^{\varepsilon^2\zeta}}{e^{\zeta}+\varepsilon e^{\varepsilon\zeta}+\varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta}} - \frac{2}{9}. \end{cases}$$

Hierauf wenden wir zur Beseitigung der Nenner die auf pag. 410 betrachtete Transformation an mit $\varrho_0 = 81$, $\varrho_\nu = 9\,(\nu \geq 1)$, wodurch das Wertesystem das $\varrho_0 (= 81)$-fache wird. Dann kommt:

$$\begin{bmatrix} 81, & \zeta^6, & 9\zeta^6, & \zeta^6 \\ 0, & 54\zeta^3, & 12\zeta^3, & 6\nu\zeta^3 \\ 0, & 4\cdot 5, & 7\cdot 8, & (1+3\nu)(2+3\nu) \end{bmatrix}_{\nu=3}^{\infty} = \begin{cases} \zeta^4\frac{e^{\zeta}+\varepsilon^2 e^{\varepsilon\zeta}+\varepsilon e^{\varepsilon^2\zeta}}{e^{\zeta}+\varepsilon e^{\varepsilon\zeta}+\varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta}} - 2\zeta^3 \\ 9\zeta^2\frac{e^{\zeta}+e^{\varepsilon\zeta}+e^{\varepsilon^2\zeta}}{e^{\zeta}+\varepsilon e^{\varepsilon\zeta}+\varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta}} - 18. \end{cases}$$

Statt des Elementes $a_0^{(0)} = 81$ darf natürlich auch nachträglich wieder 1 geschrieben werden, da ja das Wertesystem einer Kette von $a_0^{(0)}$ nicht abhängt. Endlich kann man die rechts stehenden Glieder $2\zeta^3$ und 18 als $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$ unter die Kette bringen (vgl. pag. 409) und erhält so:

$$\begin{bmatrix} 1, & \zeta^6, & 9\zeta^6, & \zeta^6 \\ 2\zeta^3, & 54\zeta^3, & 12\zeta^3, & 6\nu\zeta^3 \\ 18, & 4\cdot 5, & 7\cdot 8, & (1+3\nu)(2+3\nu) \end{bmatrix}_{\nu=3}^{\infty} = \begin{cases} \zeta^4\frac{e^{\zeta}+\varepsilon^2 e^{\varepsilon\zeta}+\varepsilon e^{\varepsilon^2\zeta}}{e^{\zeta}+\varepsilon e^{\varepsilon\zeta}+\varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta}} \\ 9\zeta^2\frac{e^{\zeta}+e^{\varepsilon\zeta}+e^{\varepsilon^2\zeta}}{e^{\zeta}+\varepsilon e^{\varepsilon\zeta}+\varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta}}. \end{cases}$$

Diese Formel ist das Äquivalent zum Lambertschen Kettenbruch für $\frac{e^{\zeta}+e^{-\zeta}}{e^{\zeta}-e^{-\zeta}}$. Wie man aus diesem mit Hilfe des Legendreschen Irrationalitätssatzes die Irrationalität von $\frac{e^{\zeta}+e^{-\zeta}}{e^{\zeta}-e^{-\zeta}}$, also von e^{ζ} für rationale ζ erschließt, so schließen wir jetzt, unter Anwendung von Theorem XIV, daß zwischen den drei Zahlen

$$\omega_1 = e^{\zeta} + e^{\varepsilon\zeta} + e^{\varepsilon^2\zeta},$$
$$\omega_2 = e^{\zeta} + \varepsilon e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta},$$
$$\omega_3 = e^{\zeta} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon e^{\varepsilon^2\zeta},$$

wenn ζ rational und von Null verschieden ist, eine Relation der Form

$$Q_1\,\omega_1 + Q_2\,\omega_2 + Q_3\,\omega_3 = 0$$

mit rationalen Koeffizienten Q_i nicht bestehen kann, außer es ist $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$; insbesondere sind ω_1, ω_2, ω_3 niemals gleich Null. Wenn auch dies Resultat nicht Anspruch auf Neuheit erheben kann, weil es in dem viel allgemeineren Lindemannschen Satz über die Zahl e enthalten ist, so bietet doch die Herleitung hinreichend Interesse und zeigt die Anwendbarkeit der Jacobiketten auf derartige Fragen.

Die Untersuchungen dieses Paragraphen lassen sich auf Ketten beliebiger n^{ter} Ordnung ausdehnen und liefern dann insbesondere auch das Resultat, daß zwischen den $n+1$ Zahlen

$$\omega_i = e^{\zeta} + \varepsilon^i e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon^{2i} e^{\varepsilon^2\zeta} + \cdots + \varepsilon^{ni} e^{\varepsilon^n\zeta} \qquad (i = 0, 1 \cdots n),$$

wo ζ ($\neq 0$) rational, und ε eine primitive $(n+1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel ist, eine Relation $\sum Q_i\,\omega_i = 0$ mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten Q_i nicht bestehen kann. Indes werden diese Untersuchungen für $n > 2$ schon äußerst kompliziert; ich werde aber an anderer Stelle von einem neuen Gesichtspunkt auf die Frage zurückkommen.

Inhalt.

Theoreme.