Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVIII. Jahrgang 1908.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1909.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Sitzungsberichte

der

Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 4. Januar 1908.

Herr FERDINAND LINDEMANN legt eine Arbeit des Herrn ARTUR ROSENTHAL: „Zur Theorie der gleichflächigen Polyeder“ vor.

Zur Theorie der gleichflächigen Polyeder.

Von **Artur Rosenthal** in München.

(*Eingelaufen 4. Januar.*)

Es war bisher nicht gelungen, den Formenreichtum der höheren gleichflächigen Polyeder zu ergründen. Was man zu geben vermochte, waren nur einzelne Beispiele; ein Überblick über die Mannigfaltigkeit der Formen wurde nicht gewonnen.[1]) Ich habe nun in einer größeren, noch unveröffentlichten Abhandlung versucht, wenigstens über die gleichflächigen Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten einige Klarheit zu verschaffen; und zwar wurden vorläufig die Polyeder des formenreichsten, nämlich des kubischen Systems vollständig untersucht, nach Methoden, welche sich unmittelbar auf die

---

[1]) Vgl. die zusammenfassende Darstellung des bisher Geleisteten und die Literaturangaben in: M. Brückner, Vielecke und Vielflache. Leipzig 1900. Vor allem: Abschnitt F. Die besonderen Vielflache höherer Art.

übrigen Systeme werden anwenden lassen.[1]) Im folgenden soll nun, unter Andeutung der Methoden, eine kurze Übersicht über die wesentlichsten Resultate meiner Arbeit gegeben werden.

Da die Flächen jedes höheren gleichflächigen Polyeders (wie schon Heß gezeigt hat) ein konvexes gleichflächiges Polyeder erster Art als inneren Kern einschließen, so fällt unser Problem zusammen mit der Frage, wie viele der von uns gesuchten Körper in der vollständigen Figur der (durchaus bekannten) konvexen gleichflächigen Polyeder erster Art enthalten sind. Um dies zu entscheiden, verfolgt man in einer solchen vollständigen Figur eine Polyederfläche ihrer ganzen Ausdehnung nach und untersucht die von den direkt-symmetrischen Kanten hervorgebrachten Einteilungen der Fläche. Durch die Zellachsenpunkte lassen sich diese Teile („Zellformen") in einfacher Weise charakterisieren und durch Ziffern symbolisieren.

Die Zahl s dieser Zellformen ist gleich der Anzahl der in der vollständigen Figur enthaltenen Polyeder erster Art (eines konvex, die übrigen nichtkonvex). Allgemein ist die Zahl der Körper A^{ter} Art: $\binom{s}{A}$; die Anzahl aller hierher gehörigen Polyeder ist $\sum_{1}^{s} {}_A \binom{s}{A} = 2^s - 1$. Dabei sind immer die eigentlichen, vollständig geschlossenen Polyeder noch zu scheiden von den uneigentlichen, nämlich den offenen bzw. den transgredienten Gestalten (d. i. denjenigen, welche, im Sinne der projektiven Geometrie, durch das Unendliche hindurch zusammenhängen oder geschlossen sind). Außerdem lassen sich von den vollständig geschlossenen noch die halbgeschlossenen Formen abtrennen, d. h. diejenigen, bei welchen gewisse Eckpunkte ins Unendliche fallen.

Es ist ferner klar, daß immer eine Anzahl von Polyedern denselben äußeren Anblick darbieten, daß sie sich also nur in Teilen unterscheiden, welche von der Außenfläche verdeckt sind.

[1]) Das für die gleichflächigen Polyeder Abgeleitete gilt natürlich in dualer Übertragung für die reziproken gleicheckigen Körper.

Also sind die möglichen Typen der Außenflächen zu bestimmen. Ich nenne dabei Polyeder von demselben Typus „isophän“, von verschiedenem Typus „allophän“.[1]) Man muß, von den Zellachsenpunkten ausgehend, vor allem feststellen, welche Zellformen sich schneiden, welche nicht. Mit Hilfe dieser Untersuchung lassen sich dann in systematischer Weise aus den Typen $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades die sämtlichen Typen m^{ten} Grades ableiten und sodann die Existenzbereiche der neuen Typen aufstellen. Zugleich kann man angeben, welche Zellformen an der Bildung der Außenfläche jedesmal beteiligt sind, welche verdeckt sein können. Hieraus endlich ergibt sich ohne weiteres die Anzahl der isophänen Polyeder des betreffenden Typus, nämlich 2^r, wenn r die Zahl der möglicherweise von der Außenfläche verdeckten Zellformen ist.

Sodann werden alle konvexen Polyeder bestimmt. Man findet: Damit ein gleichflächiges Polyeder nur konvexe Flächenwinkel besitze, muß seine Begrenzungsfläche ein geschlossenes Polygon sein, in dessen Innern sich der Berührungspunkt H der einbeschriebenen Kugel befindet, und bei dessen Umlaufung der Punkt H immer auf der gleichen Seite der Kanten gelegen ist. Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich dann eine Methode aufstellen, um aus den Symbolen der konvexen Polyeder $(m-1)^{\text{ter}}$ Art alle konvexen Polyeder m^{ter} Art abzuleiten, und zwar so, daß die neugefundenen Polyeder sofort in der natürlichen Zahlenfolge ihrer Symbole, also in lexikographischer Anordnung, sich ergeben. Aus den Symbolen kann man sogleich ersehen, welche Zellformen die Außenfläche bilden, welche verdeckt werden, also welchem allophänen Typus der Körper angehört. Ferner läßt sich aus der Begrenzungsfläche ohne weiteres die Art der körperlichen Ecken ablesen. Außerdem wird immer angegeben, wann die Begrenzungsfläche selbst konvex ist.

Auf Grund von Symmetriebetrachtungen werden ferner die konzentrischen Anordnungen von Vielflachen, d. h. die zerfallenden Polyeder, bestimmt. Endlich werden durch Einführung

[1]) Die Typen können in Gruppen zusammengefaßt werden nach ihrem Grade, d. i. nach der Zahl der Zellformen, welche die Außenfläche bilden.

Gesamtanzahl der Polyeder. (Zu S. 8.)

Gattung	Untergattungen α und β				Untergattung γ			
	eigentliche Polyeder		uneigentliche Polyeder		eigentliche Polyeder		uneigentliche Polyeder	
	ganz geschlossene	halb geschlossene	offene	transgrediente	ganz geschlossene	halb geschlossene	offene	transgrediente
Hexakisoktaeder	$2^{15}-1 = 32\,767$	—	$2^{33}-2^{15} = 8\,589\,901\,824$	$2^{24}-2^{15} = 16\,744\,448$	$2^{13}-1 = 8\,191$	$2^{17}-2^{13} = 122\,880$	$2^{31}-2^{17} = 2\,147\,352\,576$	$2^{24}-2^{17} = 16\,646\,144$
holoedrisch-holosymmetrisch:								
α) Tetrakishexaeder	$2^{6}-1 = 63$	$2^{9}-2^{6} = 448$	$2^{15}-2^{9} = 32\,256$	$2^{12}-2^{9} = 3584$	—	—	—	—
Ikositetraeder	$2^{7}-1 = 127$	$2^{8}-2^{7} = 128$	$2^{16}-2^{8} = 65\,280$	$2^{12}-2^{8} = 3840$	$2^{6}-1 = 63$	$2^{9}-2^{6} = 448$	$2^{15}-2^{9} = 32\,256$	$2^{12}-2^{9} = 3584$
β) Triakisoktaeder	$2^{7}-1 = 127$	$2^{8}-2^{7} = 128$	$2^{16}-2^{8} = 65\,280$	$2^{12}-2^{8} = 3840$	—	—	—	—
γ) Rhombendodekaeder	—	—	—	—	$2^{2}-1 = 3$	$2^{6}-2^{2} = 60$	—	—
α) Hexaeder	$2^{1}-1 = 1$	$2^{3}-2^{1} = 6$	—	—	—	—	—	—
β) Oktaeder	$2^{2}-1 = 3$	$2^{3}-2^{2} = 4$	$2^{5}-2^{3} = 24$	$2^{5}-2^{3} = 24$	—	—	—	—

holoedrisch-merosymmetrisch		Tetrakishexaeder α)	$\frac{2^5-2^4}{2}=8$	$\frac{2^7-2^5}{2}-\frac{2^5-2^4}{2}=40$	$\frac{2^{17}-2^{11}}{2}-\frac{2^7-2^5}{2}=64464$	$\frac{2^{12}-2^8}{2}-\frac{2^7-2^5}{2}=1872$	—	—	—	—
		Rhombendodekaeder γ)	—	—	—	—	—	$\frac{2^6-2^4}{2}=24$	—	—
		Oktaeder β)	—	2	—	—	—	—	—	—
Hemiedrie	geneigtflächige H.	Hexakistetraeder	$2^6-1=63$	—	$2^{18}-2^6=262080$	$2^{12}-2^6=4032$	$2^4-1=15$	$2^8-2^4=240$	$2^{16}-2^8=65280$	$2^{12}-2^8=3840$
		Triakistetraeder	$2^3-1=7$	—	$2^9-2^3=504$	$2^6-2^3=56$	$2^2-1=3$	$2^4-2^2=12$	$2^8-2^4=240$	$2^6-2^4=48$
		Deltoiddodekaeder β)	$2^3-1=7$	—	$2^9-2^3=504$	$2^6-2^3=56$	—	—	—	—
		Tetraeder β	1	—	$2^3-2^1=6$		—	—	—	—
	parallelflächige H.	Diakisdodekaeder	1	—	$2^7-2^1=126$	$2^4-2^1=14$	1	—	$2^7-2^1=126$	$2^4-2^1=14$
		Pentagondodekaeder α)	—	1	$2^3-2^1=6$	$2^2-2^1=2$	—	—	—	—

Die allophänen Typen. (Zu S. 9.)

Gattung		Anzahl der allophänen Typen vom Grade I	II	III	IV	V	VI	Gesamtanzahl der Typen in Untergattung α	β	γ	
	Hexakisoktaeder	17 α β γ 15 15 17 (4)	64 α β γ 51 45 61 (28)	79 α β γ 55 42 79 (49)	40 α β γ 21 14 40 (32)	10 α β γ 3 2 10 (9)	1 α β γ — — 1 (1)	145	118	211 (123)	NB. ₁!
holoedrisch-holosymmetrisch	α) Tetrakishexaeder	9 (3)	13 (8)	4 (4)	—	—	—	26 (15)	—	—	NB. ₁!
	Ikositetraeder	9 α β γ 8 8 9 (1) (1) (3)	13 α β γ 10 8 13 (1) (1) (7)	3 α β γ 2 1 3 (2)	—	—	—	20 (2)	17 (2)	25 (12)	
	β) Triakisoktaeder	8 (1)	8 (2)	1	—	—	—	—	17 (3)	—	
	γ) Rhombendodekaeder	6 (4)	3 (3)	—	—	—	—	—	—	9 (7)	
	α) Hexaeder	3 (2)	—	—	—	—	—	3 (2)	—	—	
	β) Oktaeder	3 (1)	—	—	—	—	—	—	3 (1)	—	

holoedrisch-merosymmetrisch	α) Tetrakishexaeder	3 (1)	5 (3)	1 (1)	—	—	—	9 (5)	—	—	NB. $_2$!
	γ) Rhombendodekaeder	3 (3)	3 (3)	1 (1)	—	—	—	—	—	7 (7)	NB. $_2$!
	β) Oktaeder	1 (1)	—	—	—	—	—	—	1 (1)	—	
Hemiedrie, geneigtflächige H.	Hexakistetraeder	8 α β γ 6 6 8 (4)	11 α β γ 6 2 11 (10)	3 α β γ 1 — 3 (3)	—	—	—	13	8	22 (17)	
	Triakistetraeder	4 α β γ 3 3 4 (2)	2 α β γ 1 — 2 (2)	—	—	—	—	4	3	6 (4)	
	β) Deltoiddodekaeder	3	—	—	—	—	—	—	3	—	
	β) Tetraeder	1	—	—	—	—	—	—	1	—	
Hemiedrie, parallelflächige H.	Diakisdodekaeder	1 α β γ 1 1 1	—	—	—	—	—	1	1	1	
	α) Pentagondodekaeder	1 (1)	—	—	—	—	—	1 (1)	—	—	

der Bedingung, daß sämtliche Flächenwinkel des Polyeders einander gleich sein müssen, alle halbregulären Varietäten und die Werte ihrer Parameter systematisch abgeleitet. —

Dies alles habe ich zunächst für die allgemeinste Gattung des kubischen Systems, für das Hexakisoktaeder $(n:m:1)$, und sodann, teilweise durch bloße Spezialisierung, für alle anderen Gattungen des kubischen Systems (sowohl für die holoedrischen als auch für die meroedrischen) vollständig durchgeführt. Es war dabei notwendig, beständig drei Untergattungen α, β und γ zu unterscheiden, je nachdem für die Parameter $mn >$, $<$ oder $= m + n$ ist. Ferner sei hervorgehoben, daß sich für einige spezielle holoedrische Gattungen (nämlich für das Tetrakishexaeder, Rhombendodekaeder und Oktaeder) die Existenz von Polyedern mit verminderter Symmetrie ergab. Ich nenne diese Polyeder (im Gegensatz zu den vollsymmetrischen oder holosymmetrischen) teilsymmetrisch oder merosymmetrisch. Durch Meroedrien endlich wurden auch gewisse hauptachsige Gestalten (die also nicht mehr dem kubischen System angehören) erhalten. —

Nunmehr in tabellarischer Zusammenstellung die hauptsächlichsten Ergebnisse meiner Untersuchungen!

Gesamtanzahl der Polyeder. (Tabelle s. S. 4 und 5!)

Hierzu ist zu bemerken: Bei der plagiedrischen Hemiedrie ergeben sich keine gleichflächigen Polyeder mit direkt-symmetrischen Kanten. Dagegen entstehen durch Tetartoedrie, Ogdoedrie, Tritoedrie und Hektoedrie hauptachsige Gestalten, die jedoch nicht im speziellen hier aufgezählt werden mögen.

α), β), bzw. γ) soll bedeuten: „nur Untergattung α, β, bzw. γ“.

NB.! Rechts- und Linksgestalten sind nicht besonders gezählt; dies ist zu beachten bei den holoedrisch-merosymmetrischen Polyedern und bei der geneigtflächigen Hemiedrie.

Es ist noch darauf hinzuweisen, daß in allen Gattungen die Summe der Zahlen der ganz- und halbgeschlossenen und der transgredienten Polyeder für alle drei Untergattungen konstant ist; z. B. beim Hexakisoktaeder: $2^{24} - 1 = 16777215$.

Die weiteren Untersuchungen beziehen sich nur auf die eigentlichen Polyeder, da diese Betrachtungen für die uneigentlichen Polyeder größtenteils ihren Sinn verlieren. —

Die allophänen Typen. (Tabelle s. S. 6 und 7!)

Hierbei ist zu berücksichtigen: (a) soll heißen: „hiervon sind a Typen halb geschlossen". Also ist z. B. Hexakisoktaeder II: $\begin{array}{ccc} & 64 & \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 51 & 45 & 64 \\ & & (28) \end{array}$ folgendermaßen zu lesen: „Die Anzahl der Typen vom II. Grad beträgt 64; in Untergattung α existieren 51, in Untergattung β existieren 45; in Untergattung γ existieren 64 und zwar sind hiervon 28 halb geschlossen."

NB.$_1$! Beim Hexakisoktaeder und Tetrakishexaeder bestehen einige der Typen nicht für die ganze Gattung oder Untergattung, sondern nur, wenn von den Parametern noch gewisse Existenzkriterien erfüllt werden. Wenn diese Kriterien nicht befriedigt sind, so geht der betreffende Typus in einen schon abgeleiteten (immer anzugebenden), um einen oder zwei Grade niedrigeren Typus über. Die Anzahl solcher Typen mit beschränktem Existenzbereich (sie sind natürlich in obiger Tabelle mitgezählt) ist beim Hexakisoktaeder: für den Grad:

I: —;	II: —;	III: 31;	IV: 28;	V: 8;	VI: 1;	zusammen:
		$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$
		28 16 31	20 11 28	3 2 8	— — 1	51 29 68
		(17)	(20)	(7)	(1)	(45)

beim Tetrakishexaeder (a): für den Grad: I: —; II —; III: 2.
(2)

Da nun aber beim Hexakisoktaeder mehrere von den Existenzbedingungen sich beständig ausschließen, so reduziert sich die Anzahl der Typen, welche zugleich nebeneinander bestehen können. Nur in Untergattung β ist es möglich, alle Bedingungen gleichzeitig zu erfüllen. Es wird also das Maximum der gleichzeitig bestehenden Typen des Hexakisoktaeders

in Untergattung α:	III: 54;	IV: 18;	V: 2		I und II
in Untergattung γ:	III: 78;	IV: 35;	V: 9;	VI: 1	unverändert.
	(48)	(27)	(8)	(1)	

Maximum der Gesamtanzahl der Typen des Hexakisoktaeders: für α: 140; für γ: $\underset{(112)}{200}$.

NB.$_2$! Die von den holoedrisch-merosymmetrischen Polyedern des Tetrakishexaeders und Rhombendodekaeders gebildeten Typen sind teils merosymmetrisch, teils holosymmetrisch. Diese letzteren sind identisch mit gewissen, schon bei holosymmetrischen Polyedern der betreffenden Gattung aufgetretenen Außenflächen, so daß es also beim Tetrakishexaeder und Rhombendodekaeder Typen gibt, denen sowohl holosymmetrische als merosymmetrische Polyeder angehören. Die Anzahl dieser holosymmetrischen Typen (die von den merosymmetrischen Typen eventuell abzusondern wären) ist:

beim Tetrakishexaeder: I: 1; II: $\underset{(1)}{2}$; III: $\underset{(1)}{1}$;

beim Rhombendodekaeder: I: $\underset{(1)}{1}$; II: $\underset{(1)}{1}$ III: $\underset{(1)}{1}$.

Die konvexen Polyeder.

Beim Hexakisoktaeder beträgt die Anzahl der konvexen Polyeder:

Art $A =$	1	2	3	4	5	6
Anzahl	1	3	7	14	23	35
α	1	3	7	13	21	30
β	1	3	7	13	21	30
γ	1	3	7	14 (2)	23 (4)	35 (10)

Art $A =$	7	8	9	10	11	12
Anzahl	46	57	63	66	62	51
α	36	41	41	37	29	20
β	37	43	44	43	35	23
γ	46 (18)	57 (28)	63 (37)	66 (46)	62 (50)	51 (46)

Art $A =$	13	14	15	16	17
Anzahl	37	22	11	4	1
α	10	4	1	—	—
β	13	4	1	—	—
γ	37 (36)	22 (22)	11 (11)	4 (4)	1 (1)

Gesamtanzahl der konvexen Polyeder: für Untergattung α: 294; für Untergattung β: 318; für Untergattung γ: $\underset{(315)}{503}$.

Für die übrigen Gattungen ergibt sich:

holoedrisch-holosymmetrisch

Gattung	Anzahl der konvexen Polyeder von der Art									Gesamtanzahl		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β	γ
α) Tetrakishexaeder	1	2	4 (1)	5 (2)	6 (4)	6 (5)	4 (4)	3 (3)	1 (1)	32 (20)	—	—
Ikositetraeder	1 α β γ 1 1 1	2 α β γ 2 2 2	3 α β γ 3 3 3	5 α β γ 4 4 5 (2)	6 α β γ 5 5 6 (1) (1) (3)	7 α β γ 5 5 7 (2) (2) (6)	6 α β γ 3 3 6 (2) (2) (6)	3 α β γ 1 1 3 (1) (1) (3)	1 α β γ — — 1 (1)	24 (6)	24 (6)	34 (21)
β) Triakisoktaeder	1	2	4	5 (1)	6 (2)	5 (3)	3 (2)	1 (1)	—	—	27 (9)	—
γ) Rhombendodekaeder	1	1	2 (2)	2 (2)	2 (2)	1 (1)	—	—	—	—	—	9 (7)
α) Hexaeder	1	1 (1)	1 (1)	—	—	—	—	—	—	3 (2)	—	—
β) Oktaeder	1	1	1 (1)	—	—	—	—	—	—	—	3 (1)	—

Gattung		Anzahl der konvexen Polyeder von der Art									Gesamtanzahl		
		1	2	3	4	5	6	7	7	9	α	β	γ
holoedrisch-merosymmetrisch	α) Tetrakishexaeder	—	1	2 (1)	2 (2)	2 (2)	1 (1)	—	—	—	8 (6)	—	—
	γ) Rhombendodekaeder	—	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	—	—	—	—	—	—	4 (4)
	β) Oktaeder	1 (1)	1 (1)	—	—	—	—	—	—	—	—	2 (2)	—
Hemiedrie, geneigtflächige H.	Hexakistetraeder	1 α β γ 1 1 1	3 α β γ 3 2 3 (1)	5 α β γ 4 3 5 (3)	6 α β γ 4 2 6 (5)	5 α β γ 3 1 5 (5)	4 α β γ 1 1 4 (4)	2 α β γ — — 2 (2)	1 α β γ — — 1 (1)	—	16	10	27 (21)
	Triakistetraeder	1 α β γ 1 1 1	2 α β γ 2 1 2 (1)	2 α β γ 1 1 2 (2)	1 α β γ — — 1 (1)	—	—	—	—	—	4	3	6 (4)
	β) Deltoiddodekaeder	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—	3	—
	β) Tetraeder	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—
Hemiedrie, parallelflächige H.	Diakisdodekaeder	—	—	1 α β γ 1 1 1	—	—	—	—	—	—	1	1	1
	α) Pentagondodekaeder	—	—	1 (1)	—	—	—	—	—	—	1 (1)	—	—

Von diesen konvexen Polyedern besitzen konvexe Begrenzungsfläche:

beim Hexakisoktaeder:

$A=$	1	2		3		4		5		6		7	8		9	10		11	12	13	14	15	16	17
	1 △	2△+1□		3△+3□		5△+3□		2△+5□		8△+2□		3 △	4 □ + 1 ‖		3 △	2△+3□		3 △	1 △	—	1 △	—	1 ‖	—
	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$		$\alpha\ \beta\ \gamma$		$\alpha\ \beta\ \gamma$	
	1 1 1	2 2 2	1 1 1	3 3 3	3 3 3	4 4 5	3 3 3	2 2 2	5 5 5	7 7 8	2 2 2	2 2 3	3 3 4	– – 1	3 3 3	2 – 2	1 3 3	1 3 3	– 1 1		1 – 1		– – 1	
						(2)				(2)		(2)	(2)	(1)		(2)	(2)	(2)	(1)		(1)		(1)	

zusammen: für Untergattung α: 28 (△) + 18 (□); für Untergattung β: 28 (△) + 20 (□);

für Untergattung γ: $\underset{(12)}{34}$ (△) + $\underset{(4)}{21}$ (□) + $\underset{(2)}{2}$ (‖).

holoedrisch-holosymmetrisch

$A=$	1	2	3	4	5	6		7	8	9	zusammen
α) Tetrakishexaeder	1 △	2 □	2△+(1)‖	1 □	1 △	(2) ‖		—	—	(1) ‖	4 △ + 3 □ + (4) ‖
Ikositetraeder	1 □	1 △	1 △	2 □	1 □	1 △ + 1 ‖		1 △	1 ‖	1 ╬	α: 3△+3□ β: 3△+3□ γ: $\underset{(2)}{4}$ △ + $\underset{(2)}{4}$ □ + (2)‖ + (1) ╬
	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \beta\ \gamma$	
	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 2	1 1 1	– 1 1	– – 1	1 – 1	– – 1	– – 1	
				(2)		(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	
β) Triakisoktaeder	1 △	1 □	1 △	1 □	1 □	1 △ + (1) ‖		—	—	—	3 △ + 3 □ + (1) ‖

Rhombendodekaeder γ): 1 □ [$A = 1$] + (1) ‖ [$A = 3$] + (1) ○ [$A = 6$];

Hexaeder α): 1 □ [$A = 1$] + (1) ╬ [$A = 2$] + (1) ○ [$A = 3$];

Oktaeder β): 1 △ [$A = 1$] + 1 △ [$A = 2$].

holoedrisch-merosymmetrisch:
- Tetrakishexaeder α): $1\triangle\,[A=2] + \underset{(1)}{2\triangle}\,[A=3] + \underset{(1)}{1\triangle}\,[A=5]$; Rhombendodekaeder γ): $\underset{(1)}{1\triangle}\,[A=3]$;
- Oktaeder β): $\underset{(1)}{1\,\|}\,[A=2]$.

	$A =$	1	2	3	4	5	6	7	8	zusammen α	zusammen β	zusammen γ
geneigtflächige Hemiedrie	Hexakistetraeder	$1\triangle$ α β γ 1 1 1	$2\triangle + 1\square$ α β γ: 2 1 $\underset{(1)}{2}$ ‖ α β γ: 1 1 1	$4\triangle$ α β γ 3 3 $\underset{(2)}{4}$	$1\square + 1\,\|$ α β γ: 1 — $\underset{(1)}{1}$ ‖ α β γ: — — $\underset{(1)}{1}$	$2\triangle$ α β γ 2 — $\underset{(2)}{2}$	$1\triangle$ α β γ — 1 $\underset{(1)}{1}$	—	$1\,\|$ α β γ — — $\underset{(1)}{1}$	$8\triangle + 2\square$	$6\triangle + 1\square$	$\underset{(6)}{10\triangle} + \underset{(1)}{2\square} + \underset{(2)}{2\,\|}$
	Triakistetraeder	$1\triangle$ α β γ 1 1 1	$1\square$ α β γ 1 — $\underset{(1)}{1}$	$1\triangle + 1\,\|$ α β γ: — 1 $\underset{(1)}{1}$ ‖ α β γ: — — $\underset{(1)}{1}$	$1\,\|$ α β γ — — $\underset{(1)}{1}$	—	—	—	—	$1\triangle + 1\square$	$2\triangle$	$\underset{(1)}{2\triangle} + \underset{(1)}{1\square} + \underset{(2)}{2\,\|}$

Deltoiddodekaeder β): $1\square\,[A=1] + 1\triangle\,[A=3]$; Tetraeder β): $1\triangle\,[A=1]$.

parallelflächige Hemiedrie: Diakisdodekaeder: $1\triangle$ (α β γ: 1 1 1) $[A=3]$; Pentagondodekaeder α): $1\,\|\,[A=3]$.

NB.! Es bedeutet:
- △ = „Die Begrenzungsfläche ist ein Dreieck“;
- □ = „die Begrenzungsfläche ist ein konvexes Viereck“;
- ‖ = „die Begrenzungsfläche ist ein unendlicher Parallelstreifen“;
- ╬ = „die Begrenzungsfläche ist ein Rechteck, dessen Kanten das Unendlichweite enthalten“;
- ○ = die Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung, nur von der unendlich fernen Geraden „begrenzt“.

Die zerfallenden Polyeder und die halbregulären Varietäten.

	Gattung		Anzahl der zerfallenden Polyeder			Davon sind konvexe Polyeder			Anzahl der halbregulären Varietäten
			α	β	γ	α	β	γ	
	Hexakisoktaeder		82	82	274 (240)	26	20	37 (21)	2
holoedrisch-holosymmetrisch	Tetrakishexaeder	α)	11 (9)	—	—	6 (4)	—	—	4 (2)
	Ikositetraeder		10 (2)	10 (2)	18 (14)	6 (1)	5 (1)	8 (5)	6 (2)
	Triakisoktaeder	β)	—	10 (2)	—	—	5 1	—	3
	Rhombendodekaeder	γ)	—	—	3 (3)	—	—	2 (2)	4 (3)
	Hexaeder	α)	1 (1)	—	—	1 (1)	—	—	3 *r* (2)
	Oktaeder	β)	—	1	—	—	1	—	2 *r*
holoedrisch-merosymmetrisch	Tetrakishexaeder	α)	—	—	—	—	—	—	—
	Rhombendodekaeder	γ)	—	—	—	—	—	—	1 (1)
	Oktaeder	β)	—	1 (1)	—	—	1 (1)	—	—
geneigtflächige Hem.	Hexakistetraeder		—	—	3 (3)	—	—	2 (2)	—
	Triakistetraeder		—	—	1 (1)	—	—	1 (1)	2 (1)
	Deltoiddodekaeder	β)	—	—	—	—	—	—	—
	Tetraeder	β)	—	—	—	—	—	—	1 *r*
parallelfläch. Hemiedrie	Diakisdodekaeder		1	1	1	1	1	1	—
	Pentagondodekaeder	α)	1 (1)	—	—	1 (1)	—	—	—

„*r*" heißt regulär.

Da es nicht möglich ist, hier auch die oben angedeuteten, zahlreichen Einzelresultate mitzuteilen, so seien wenigstens einige Beispiele hievon angegeben.

Beispiel für die allophänen Typen.

Die 10 ersten Typen III. Grades vom Hexakisoktaeder.

Nr.	Zellformen der Außenfläche	Verdeckte Zellformen	Anzahl der isophänen Körper	Eine der drei Zellformen der Außenfläche wird verdeckt, wenn	Die verdeckte Zellform	Die Außenfläche geht über in den Typus
1	2. 3. 7	1	$2^1 = 2$	—	—	—
2	3. 8. 11	1, 2, 7	$2^3 = 8$	—	—	—
3	4. 5. 7	1, 2, 3	$2^3 = 8$	—	—	—
4	4. 5. 8	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	$m \leqq \frac{n(n+1)}{n^2-n+2}$	4	II, 16
5	4. 5. 9	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	—	—	—
6	4. 5. 11	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	—	—	—
7	4. 5. 12	1, 2, 3, 7, 8, 11	$2^6 = 64$	$nm(n-1)(m-1) \leqq n^2 - m^2$	4	II, 20
8	4. 8. 9	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	—	—	—
9	4. 8. 11	1, 2, 3, 7	$2^4 = 16$	$\frac{m(m+1)}{m-1} \leqq n$	8	II, 12
10	4. 8. 13	1, 2, 3, 5, 7, 9, 11	$2^7 = 128$	$m \leqq \frac{n(n+1)}{n^2-n+2}$	4	II, 30
				$\frac{m(m+1)}{m-1} \leqq n$	8	II, 14

Beispiel für die konvexen Polyeder.

Die konvexen Polyeder 4. Art des Hexakisoktaeders.

Name	Typus	$+\triangle\times$ $\square$	Art der Ecken
$1.\ 2.\ 3.\ \underline{4}$	I, 4	—	$8_2,\ 8_2;\ 6_4;\ 4_1,\ 4_1$
$1.\ 2.\ 3.\ \underline{5}$	I, 5	—	$8_1,\ 8_1,\ 8_2;\ 6_4$
$1.\ \underline{2}.\ \underline{3}.\ \underline{7}$	III, 1	—	$8_1,\ 8_3;\ 6_1;\ 4_1,\ 4_3$
$1.\ 2.\ \underline{3}.\ \underline{11}$	II, 6	$\triangle$	$8_1,\ 8_3;\ 6_1$
$1.\ 2.\ \underline{5}.\ \underline{7}$	II, 15	$\triangle$	$8_1,\ 8_3;\ 6_1$
$1.\ 2.\ \underline{5}.\ \underline{11}$	II, 19	—	$8_1,\ 8_3;\ 6_1;\ 4_1,\ 4_3$
$1.\ 2.\ 7.\ \underline{8}$	I, 8	$\square$	$6_2,\ 6_2;\ 4_1,\ 4_1$
$1.\ 2.\ 7.\ \underline{11}$	I, 11	$\triangle$ $\times$	$6_1,\ 6_1,\ 6_2$
$1.\ 2.\ 11.\ \underline{12}$	I, 12	$\square$	$6_2,\ 6_2;\ 4_1,\ 4_1$
$1.\ 3.\ \underline{4}.\ \underline{7}$	II, 9	—	$8_2,\ 8_2;\ 6_1,\ 6_1;\ 4_1,\ 4_3$
$1.\ 3.\ 4.\ \underline{16}$	I, 16 $\underline{(\beta\gamma)}$	$\triangle$	$8_1,\ 8_3';\ 6_1$
$1.\ \underline{3}.\ 7.\ \underline{8}$	II, 5	—	$8_1,\ 8_3;\ 6_2,\ 6_2;\ 4_1,\ 4_3$
$1.\ 3.\ 7.\ \underline{9}$	I, 9	$\square$ $\times$	$8_2,\ 8_2;\ 6_2,\ 6_2$
$1.\ 7.\ 8.\ \underline{14}$	I, 14 $\underline{(\alpha\gamma)}$	$\triangle$ $\times$	$6_1,\ 6_1,\ 6_2$

NB.! Jedes Polyeder wird durch die Zellformen seiner Begrenzungsfläche charakterisiert und danach benannt.

Die unterstrichenen Zellformen sind an der Bildung der Außenfläche beteiligt, die anderen sind von der Außenfläche verdeckt.

$\times$ zeigt eine gewisse Art des Zerfallens an.

m_ν bedeutet (nach Heß) eine aus m Flächen gebildete Ecke ν^{ter} Art.

Zum Schlusse sei noch auf eine Beziehung zur Kristallographie hingewiesen. Einige in der Natur aufgefundene Kristall-formen (besonders bei Bromammoniumkristallen[1])), die bisher zumeist als „merkwürdige Verzerrungen“ u. dgl. gedeutet wurden, sind identisch mit gewissen, von mir abgeleiteten höheren (nichtkonvexen) Typen (und zwar in Gattungen, bei denen der Typus des gewöhnlichen konvexen Polyeders erster Art häufig als Kristall auftritt). Da nun aber die Symbole der Kristallographie nicht ein einzelnes Polyeder, sondern die gesamte vollständige Figur des Kernpolyeders darstellen, so wird sich die Notwendigkeit ergeben, zur Wahrung der Eindeutigkeit der Beziehung zwischen Symbol und Form, die kristallographischen Zeichen zu ergänzen und zu erweitern.

[1]) Vgl. Fr. Slavík, Beiträge zur Kenntnis der Ammoniumhalogenverbindungen, Zeitschrift für Kristallographie und Mineralogie, herausg. von P. Groth, 1902, 36, S. 271.