Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 7. Abhandlung

Eine Bemerkung zum Michelsonschen Versuch

von

J. Lüroth

Vorgelegt am 12. Juni 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 11 2, 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. A. 11 3, 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. A. 14 3, 1883 ℳ —.50
* — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 14 2, 1883 ℳ 1.—
* — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
* — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. A. 17 1, 1889 ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.

Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 ℳ —.40

Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1ter O. definirten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892. p. 101—138.
* — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
— Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 ℳ 1.20
— Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 ℳ —.20

Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2. Sb. 1887, p. 33—42.
— Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
— Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
— Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 ℳ 3.—
— Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 ℳ —.20
— Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 ℳ —.40
— u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 ℳ —.40
— Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 ℳ —.40
— Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 ℳ —.20

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 7. Abhandlung

Eine Bemerkung zum Michelsonschen Versuch

von

J. Lüroth

Vorgelegt am 12. Juni 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Durch den Versuch, von dem hier die Rede ist, wollte Michelson die relative Bewegung der Erde gegen den Äther nachweisen. Der Effekt, der unter der Annahme die Erde bewege sich gegen den Äther berechnet war, blieb bekanntlich aus. Der Schluß, den man hieraus ziehen konnte, daß die Erde den in ihrer Nähe befindlichen Äther mit sich fortführe, brachte andere Schwierigkeiten, so daß Lorentz die Hypothese aufstellte, daß alle Körper durch die Bewegung, in deren Richtung, um den $\frac{1}{2}10^{-8}$ten Teil ihrer Länge verkürzt würden. In neuester Zeit ist die Theorie des Versuchs durch Kohl einer Kritik unterzogen worden, die seine Beweiskraft zweifelhaft gemacht hat. Es kam mir nun vor einiger Zeit der Gedanke, ob nicht vielleicht die durch die Umdrehungs- und Umlaufsbewegung der Erde hervorgerufenen Zentrifugalkräfte eine Änderung der Dimensionen des Michelsonschen Apparates zur Folge hätten, die für das Resultat des Versuchs von Einfluß wäre. Ich will im folgenden über die Rechnungen berichten, die ich darüber angestellt habe. Da es sich um ein verwickelteres Problem der relativen Bewegung eines elastischen Körpers handelt, möchte ich etwas weiter ausholen.

§ 1.

Ein System von materiellen Punkten sei auf ein im Raum ruhendes, rechtwinkeliges Koordinatensystem S' bezogen. Es seien m die Masse, x', y', z', die Koordinaten eines Punktes P des Systems und X', Y', Z' die Komponenten der auf ihn wirkenden äußeren Kraft. Die Gleichungen der Bewegung des Systems können dann in die Gleichung zusammengefaßt werden

$$1)\quad \Sigma\left[\left(m\frac{d^2x'}{dt^2}-X'\right)\delta x'+\left(m\frac{d^2y'}{dt^2}-Y'\right)\delta y' + \left(m\frac{d^2z'}{dt^2}-Z'\right)\delta z'\right]=0$$

in der die Summe sich über alle Punkte des Systems erstreckt und $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x'$ die Komponenten einer, mit den Bedingungen verträglichen, virtuellen Verschiebung des Punktes P sind.

Sei S ein zweites rechtwinkeliges Koordinatensystem, das gegen das System S' in Bewegung begriffen ist. Es seien ξ, η, ζ die Koordinaten des Punktes P, die mit den x', y', z' durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= a + \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta \\ y' &= a_1 + \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta \\ z' &= a_2 + \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta \end{aligned}$$

verbunden sind, in denen die Koeffizienten Funktionen der Zeit sind. Trägt man in die Gleichung 1) ein und ersetzt die Größen $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ durch andere, die mit jenen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta x' &= \alpha\,\delta\xi + \beta\,\delta\eta + \gamma\,\delta\zeta \\ \delta y' &= \alpha_1\,\delta\xi + \beta_1\,\delta\eta + \gamma_1\,\delta\zeta \\ \delta z' &= \alpha_2\,\delta\xi + \beta_2\,\delta\eta + \gamma_2\,\delta\zeta \end{aligned}$$

zusammenhängen, so erhält man eine Gleichung:

$$2)\quad \Sigma\left[\left(m\frac{d^2\xi}{dt^2}-X+F\right)\delta\xi+\left(m\frac{d^2\eta}{dt^2}-Y+G\right)\delta\eta + \left(m\frac{d^2\zeta}{dt^2}-Z+H\right)\delta\zeta\right]=0.$$

Hier sind die $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ die in S genommenen Komponenten einer virtuellen Verschiebung von P, die X, Y, Z die Komponenten in S der Kraft, die in S' die Komponenten X', Y', Z' hatte, F aber ist ein Ausdruck, den man mit Anwendung der Abkürzung

$$(l\,m) = l\,m + l_1\,m_1 + l_2\,m_2$$

schreiben kann:

$$3)\quad \begin{aligned} F = m\Big\{&(\alpha\alpha'') + (\alpha\alpha'')\,\xi + (\alpha\beta'')\,\eta + (\alpha\gamma'')\,\zeta \\ &+ 2(\alpha\alpha')\frac{d\xi}{dt} + 2(\alpha\beta')\frac{d\eta}{dt} + 2(\alpha\gamma')\frac{d\zeta}{dt}\Big\}. \end{aligned}$$

Man findet G, H, indem man in den Klammersymbolen $(\alpha\alpha'')\ldots(\alpha\gamma')$ den ersten Buchstaben α durch β bez. γ ersetzt. Dabei bezeichnen die Akzente einfache oder doppelte Differentiation nach der Zeit. Man kann also, wie bekannt, die relative Bewegung des Systems gegen S so berechnen als ob dieses System ruhte, wenn man zu den äußeren Kräften noch an jeden Punkt, die Kräfte mit den Komponenten $-F$, $-G$, $-H$ beifügt.

Wendet man das an auf die Theorie eines festen elastischen Körpers, so sieht man, daß in den Formeln, wie sie z. B. Kirchhoff in der 11. und 27. seiner Vorlesungen über mathematische Physik gibt, nur für die dort auftretenden X, Y, Z, zu setzen hat $X - \varrho F$, $Y - \varrho G$, $Z - \varrho H$, wo ϱ die Dichte ist, während alle anderen Formeln unverändert bleiben. Doch brauchen wir hier diese allgemeinen Formeln nicht, wir reichen mit einer einfacheren Betrachtung aus.

§ 2.

Das Punktsystem sei ein Teil eines zylindrischen elastischen Stabs, der sich parallel der ξ-Achse erstreckt. Ein Schnitt durch den Stab senkrecht zur ξ-Achse heiße ein Querschnitt. Der Stab sei im Ursprung des Systems S, in einem Orte mit der geographischen Breite φ horizontal befestigt. Die Richtung des Stabs, oder der ξ-Achse, bilde mit den südlichen Meridian das Azimut A. Auf keinen Punkt des Stabs, im Innern oder auf der Oberfläche, sollen äußere Kräfte wirken, wobei wir von dem Luftdruck und der Schwere absehen, da deren Komponente längs der Stabrichtung Null ist, und die durch die Schwere hervorgerufene Biegung durch Vergrößerung des Quer-

schnittes beliebig klein gemacht werden kann. Die Schwerpunkte aller Querschnitte mögen auf der ξ-Achse liegen. Wir wollen die Gleichung (2) auf einen Teil des Stabs anwenden, der von zwei Querschnitten begrenzt ist. Dabei reicht es hin, wenn wir die einzige Gleichung betrachten, die wir erhalten indem wir $\delta\xi$ konstant, und $\delta\eta = \delta\zeta$ gleich Null setzen. So entsteht, weil $(a\,a')$, $\sum m\eta$, $\sum m\zeta$ Null sind,

$$4) \qquad \sum\left(m\frac{d^2\xi}{dt^2} - X - m\,(a\,a'') - m\,(a\,a'')\,\xi\right) = 0,$$

wo sich die Summe über alle Punkte des betrachteten Stabteils erstreckt. Für X ist dabei die in der Richtung der ξ-Achse wirkende elastische Kraft zu setzen, da dies die einzige äußere Kraft ist die an dem Stabteil wirkt.

Als die begrenzenden Querschnitte wählen wir nun die beiden unendlich nahen mit den Abszissen ξ und $\xi + d\xi$. Ist ξ gleich $x + u$, und u die Verschiebung, die alle Punkte des Querschnitts mit der Abszisse ξ erlitten haben, so ist, nach den in der Elastizitätstheorie üblichen Annahmen, die an dem ersten Querschnitt wirkende elastische Zugkraft $-Eq\dfrac{\partial u}{\partial x}$, und die am zweiten Querschnitt wirkende $Eq\dfrac{\partial(u + du)}{\partial x}$. Hiebei bezeichnet q den Flächeninhalt des Querschnitts und E den Elastizitätsmodul. Wir machen dabei die erlaubte Annahme (vgl. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper, Seite 356), daß die elastische Zugkraft in jedem Punkt des Querschnitts die gleiche ist, welche Annahme keinen wesentlichen Fehler mit sich bringen wird. Ist ferner ϱ die überall gleiche Dichte, also $\varrho q\,dx$ die Maße des Stabteils, so ergibt die Gleichung (4):

$$-Eq\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q\varrho\,(a\,a'') - q\varrho\,x\,(a\,a'') = 0.$$

Hier sind jetzt die Koeffizienten $(a\,a'')$ und $(a\,a'')$ zu berechnen.

§ 3.

Als ein im Raum festes System S kann man das zu Grunde legen, dessen Ursprung der Sonnenmittelpunkt, dessen X' Y'-Ebene die mittlere Ekliptik-Ebene einer bestimmten Epoche und dessen X'-Achse die zur Epoche gehörige mittlere Nachtgleichenlinie ist. Bei der Kleinheit der Faktoren, die, wie man sehen wird, die vom Umlauf der Erde um die Sonne herrührenden Glieder haben, kann man ohne Fehler die Breite der Erde inbezug auf dieses System Null setzen und annehmen die Erde beschreibe um die Sonne einen Kreis von Radius R mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω. Die Länge der Erde sei λ. Dann sind die Koordinaten des Erdmittelpunktes:

$$x' = R\cos\lambda \qquad y' = R\sin\lambda \qquad z' = 0.$$

Die Achse der ξ war durch die Lage des Stabs gegeben.

Die Achse der η liege in der Horizontalebene des Beobachtungsortes, die der ζ ist dann dessen Lotlinie. Ist ε die Schiefe der Ekliptik, ϑ die Sternzeit der Beobachtung, so kann man die Ausdrücke der zwölf Koeffizienten in den Beziehungen zwischen den beiden Systemen von Koordinaten berechnen. Man macht zu dem Zweck Gebrauch von den Formeln, die in der sphärischen Astronomie zur Berechnung von Länge und Breite aus Höhe und Azimut gegeben werden (vgl. Brünnow, Sphärische Astronomie, 2. Auflage, Seite 84 ff.). Für die Genauigkeit, die hier nötig ist, genügt es die bei der Bestimmung der Sternzeit benützte Nachtgleichenlinie als parallel mit der Achse der x' anzunehmen, die Schiefe der Ekliptik konstant zu setzen und die geozentrische mit der geographischen Breite zu verwechseln. Ist r der Erdradius, so findet man die Koeffizienten, die allein gebraucht werden.

$$a = \sin A \sin\vartheta + \sin\varphi \cos A \cos\vartheta$$

$$a_1 = -\sin A \cos\varepsilon \cos\vartheta + \sin\varphi \cos A \cos\varepsilon \sin\vartheta - \cos\varphi \cos A \sin\varepsilon$$

$$a_2 = \sin A \sin\varepsilon \cos\vartheta - \sin\varphi \cos A \sin\varepsilon \sin\vartheta - \cos\varphi \cos A \cos\varepsilon$$

$$a = R\cos\lambda + r\cos\varphi \cos\vartheta$$

$$a_1 = R\sin\lambda + r(\cos\varphi \cos\varepsilon \sin\vartheta + \sin\varphi \sin\varepsilon)$$

$$_2 = r(-\cos\varphi \sin\varepsilon \sin\vartheta + \sin\varphi \cos\varepsilon).$$

Damit berechnet sich, wenn das konstante $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$ gesetzt wird,

$$(a\,a'') = -\Omega^2 R(a\cos\lambda + a_1 \sin\lambda) - r\,\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi\cos A$$
$$(a\,a'') = -\omega^2(1 - \cos^2\varphi\cos^2 A).$$

Die partielle Differentialgleichung für u wird dann

$$\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varrho\left\{-\Omega^2 R\,a\cos\lambda - \Omega^2 R\,a_1\sin\lambda\right.$$
$$\left. -\frac{r\,\omega^2}{2}\sin 2\varphi\cos A - \omega^2(1 - \cos^2\varphi\cos^2 A)x\right\}$$

oder, wenn man die Größen Γ, Δ, γ, δ aus den Gleichungen

$$\Gamma\cos\gamma = \sin A\sin^2\frac{\varepsilon}{2} \qquad \Gamma\sin\gamma = \sin\varphi\cos A\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Delta\cos\delta = \sin A\cos^2\frac{\varepsilon}{2} \qquad \Delta\sin\delta = \sin\varphi\cos A\cos^2\frac{\varepsilon}{2}$$
$$P = -\cos\varphi\cos A\sin\varepsilon$$

bestimmt,

$$5)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\varrho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -r\,\omega^2\sin\varphi\cos\varphi\cos A - x\,\omega^2(1 - \cos^2\varphi\cos^2 A)$$
$$-\Omega^2 R\{\Gamma\sin(\gamma + \vartheta + \lambda) + \Delta\sin(\delta + \vartheta - \lambda) + P\sin\lambda\}.$$

Ein partikuläres Integral dieser Gleichung, das bei $x = 0$ beständig Null ist, gibt der Ausdruck:

$$u = \frac{\varrho}{E}\frac{r\,\omega^2 x^2}{2}\sin\varphi\cos\varphi\cos A + \frac{\varrho}{E}\frac{\omega^2 x^3}{6}(1 - \cos^2\varphi\cos^2 A)$$
$$+\frac{\Omega^2 R\,\Gamma}{(\omega + \Omega)^2}\sin(\gamma + \delta + \lambda)\cdot 2\sin^2\frac{\omega + \Omega}{2}x\sqrt{\frac{\varrho}{E}}$$
$$+\frac{\Omega^2 R\,\Delta}{(\omega - \Omega)^2}\sin(\delta + \vartheta - \lambda)\cdot 2\sin^2\frac{\omega - \Omega}{2}x\sqrt{\frac{\varrho}{E}}$$
$$+P\,R\sin\lambda\cdot 2\sin^2\frac{\Omega}{2}x\sqrt{\frac{\varrho}{E}}.$$

Hat der Stab ursprünglich die Länge l, so wird seine Verlängerung oder Verkürzung u^* gefunden, indem man in diesem Ausdruck $x = l$ setzt.

§ 4.

Bei dem Versuch von Michelson war l ein Meter und, da der Stab von Messing war, ϱ gleich 8,5 und E gleich 10000. Rechnet man im CGS-System, so ist l gleich 100 und E gleich 10^{12} zu setzen. Damit und mit den bekannten Werten der anderen Konstanten wird $(\omega \pm \Omega)\, l \sqrt{\frac{\varrho}{E}}$ kleiner als 10^{-7}. Man kann also in der obigen Formel die Quadrate der Sinus durch die Quadrate der Bogen ersetzen. So entsteht:

$$u^* = \frac{\varrho\, r\, \omega^2 l}{2\, E} \sin\varphi \cos\varphi \cos A + \frac{\varrho\, \omega^2 l^3}{6\, \varepsilon} (1 - \cos^2\varphi \cos^2 A)$$

$$+ \frac{\varrho\, R\, \Omega^2 l^2}{2\, E} \{\Gamma \sin(\gamma + \vartheta + \lambda) + \Delta \sin(\delta + \vartheta - \lambda) + P \sin\lambda\}.$$

Weiter findet sich:

$$\frac{\varrho\, r\, \omega^2 l^2}{2\, E} = 1{,}44 \cdot 10^{-3}\, \mu, \qquad \frac{\varrho\, \omega^2 l^3}{6\, E} = 10^{-10}\, \mu,$$

$$\frac{\varrho\, R\, \Omega^2 l^2}{2\, E} = 0{,}25 \cdot 10^{-3}\, \mu.$$

Man kann also das sehr kleine zweite Glied fortlassen. Mit dem Wert $23^0\ 27'$ der Schiefe der Ekliptik folgt ferner Γ höchstens gleich 0,04, so daß das Glied welches Γ enthält zu vernachläßigen ist. Weiter ergibt sich

$$\Delta \sin\delta = 0{,}96 \sin A \qquad \Delta \cos\delta = 0{,}96 \sin\varphi \cos A$$

und damit endlich in Tausendstel Mikron:

$$u^* = 0{,}72 \sin 2\varphi \cos A + 0{,}24 \sin\varphi \cos A \cos(\vartheta - \lambda)$$
$$+ 0{,}24 \sin A \sin(\vartheta - \lambda) - 0{,}10 \cos\varphi \cos A \sin\lambda.$$

Betrachtet man nur das erste Glied das von der Tages-

und Jahreszeit nicht abhängt, so sieht man, daß in der Breite von 45 Grad, wo es seinen größten Wert hat, durch Änderung des Azimuts eine Änderung der Länge von $1{,}4 \cdot 10^{-3}$ Mikron bewirkt wird. Das ist freilich nur etwa der vierte Teil der von den Lorentzschen Hypothese geforderten Verkürzung eines Stabs von einem Meter Länge, die 5.10^{-3} Mikron beträgt. Ob die Genauigkeit des Michelsonschen Versuchs gestattet von den hier berechneten Einflüssen der Zentrifugalkräfte abzusehen, vermag ich nicht zu beurteilen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1909

Band/Volume: 1909

Autor(en)/Author(s): Lüroth Jacob

Artikel/Article: Eine Bemerkung zum Michelsonschen Versuch 1-11