Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 3. Abhandlung

Über die elementare Herleitung des Weierstrass'schen „Vorbereitungssatzes"

von

F. Hartogs

Vorgelegt am 9. Januar 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 3. Abhandlung

Über die elementare Herleitung des Weierstrass'schen „Vorbereitungssatzes"

von

F. Hartogs

Vorgelegt am 9. Januar 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Eine der wichtigsten Grundlagen für die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sowie für die Theorie der impliziten (speziell also der algebraischen) Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen bildet der Weierstraßsche „Vorbereitungssatz“, welcher über die in der Umgebung der Stelle $x = x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ gelegenen Nullstellen einer Potenzreihe von $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ Auskunft gibt.[1]) Es soll im folgenden für diesen Satz ein elementarer Beweis angegeben werden, welcher, obwohl nur auf Überlegungen einfachster Art beruhend, bisher unbekannt geblieben zu sein scheint. Derselbe gewinnt eine besonders übersichtliche Gestalt, wenn man einen speziellen Fall des Laurentschen Satzes für mehrere Veränderliche zu Hilfe nimmt, nämlich die Entwicklung einer im Gebiete $\varrho_0 < |x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_i$ eindeutigen und regulären Funktion von $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ in eine nach steigenden und fallenden Potenzen von x sowie nach steigenden Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fortschreitende $(n+1)$-fache Reihe.[2]) Aus diesem Satze ergibt sich dann

---

[1]) Weierstraß, Einige auf die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze, § 1 (Abhandlungen aus der Funktionenlehre, p. 107 = Werke II, p. 135). Außer dem nur auf elementaren Betrachtungen fußenden Weierstraßschen Beweise ist noch ein Beweis von Simart (siehe Picard, Traité d'analyse II, 1re édit. p. 241—245, 2e édit. p. 261—265 sowie Jordan, Cours d'analyse II, 2e édit. p. 301—306) bekannt geworden, welcher auf der Anwendung von Randintegralen beruht. (Vgl. auch Enzykl. der math. Wiss. II B 1, Osgood, Nr. 45 und Fußnote 181.) Kurz vor der Drucklegung dieses Aufsatzes erschien ein auf Betrachtungen völlig anderer Art beruhender Beweis von Goursat (Bull. soc. math. 36 (1908), p. 209—215), bei welchem von der Theorie der impliziten Funktionen Anwendung gemacht wird.

[2]) Doch kann in der nämlichen Weise wie beim Weierstraßschen Beweise die Anwendung des Laurentschen Satzes auch umgangen werden. (Vgl. p. 8, Fußnote [2]).)

zunächst in bekannter Weise die Darstellung einer im genannten Gebiete regulären und nichtverschwindenden Funktion durch einen gewissen Exponentialausdruck (§ 1); bei Zugrundelegung dieser Darstellung erfordert aber der Beweis des Weierstraßschen Satzes selbst nur noch wenige Bemerkungen (§ 2). Was den Laurentschen Satz betrifft, so läßt sich dieser in der Gestalt, in der er hier benutzt wird, ebenfalls leicht elementar beweisen, worüber einiges Nähere in § 3 hinzugefügt ist.

§ 1.

Darstellung einer in einem gewissen Gebiete regulären und nichtverschwindenden Funktion durch einen Exponentialausdruck.

Es sind hier die folgenden beiden Sätze zu beweisen, von denen der erste als Vorbereitung für den zweiten dient:

1. Ist die Funktion $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ im Gebiete $|x_i| < \varrho_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ eindeutig, regulär und nichtverschwindend, so gibt es eine in diesem Gebiete absolut konvergierende, nach ganzzahligen positiven Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fortschreitende Reihe $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ derart, daß:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \qquad (|x_i| < \varrho_i).$$

Beweis. Da die Funktion $\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x_1}$ im betrachteten Gebiete eindeutig und regulär ist, so läßt sie sich daselbst durch eine absolut konvergente gewöhnliche Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ darstellen, welche nach Potenzen von x_1 geordnet werden möge:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{F} = \overline{\mathfrak{P}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_\nu(x_2, x_3, \ldots, x_n)\, x_1^\nu \qquad (|x_i| < \varrho_i).$$

Daraus folgt:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Psi(x_2, \ldots, x_n)\, e^{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \overline{\mathfrak{P}}_\nu(x_2, x_3, \ldots, x_n) \frac{x_1^{\nu+1}}{\nu+1}} \qquad (|x_i| < \varrho_i),$$

wobei der Exponent offenbar wieder eine im betrachteten Gebiete absolut konvergente Potenzreihe von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ darstellt und $\Psi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ eine für $|x_i| < \varrho_i \, (i = 2, 3, \ldots, n)$ eindeutig definierte, von x_1 unabhängige Größe bedeutet, welche, wie aus der Gleichung hervorgeht, überdies für jedes derartige Wertsystem regulär und von 0 verschieden ist.

Hieraus ergibt sich zunächst die Richtigkeit des Satzes für den Fall $n = 1$, in welchem Ψ sich auf eine von 0 verschiedene Konstante reduziert. Nimmt man nun ferner den Satz für $n - 1$ Veränderliche als bewiesen an, so hat man

$$\Psi(x_2, x_3, \ldots, x_n) = e^{\mathfrak{P}_0(x_2, x_3, \ldots, x_n)}$$

und somit:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{\mathfrak{P}_0(x_2, x_3, \ldots, x_n) + \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu(x_2, x_3, \ldots, x_n) \frac{x_1^{\nu+1}}{\nu+1}}$$

$$= e^{\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

wo $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wiederum eine im betrachteten Gebiete absolut konvergente Reihe bezeichnet. Mithin gilt der Satz auch für beliebig viele Veränderliche.

2. Es sei $0 < \varrho_0 < \varrho$. Ist alsdann die Funktion $F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ im Gebiete $|x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$ eindeutig und regulär, und ferner, solange $|x| > \varrho_0$ bleibt, daselbst beständig von Null verschieden, so gibt es eine (nicht negative) ganze Zahl m und eine für $\varrho_0 < |x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_i$ absolut konvergierende, nach steigenden und fallenden Potenzen von x sowie nach steigenden Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fortschreitende $(n+1)$-fache Reihe $P(x, x_1, \ldots, x_n)$ derart, daß

$$F(x, x_1, \ldots, x_n) = x^m e^{P(x, x_1, \ldots, x_n)}$$

für:

$$\varrho_0 < |x| < \varrho, \quad |x_i| < \varrho_i.$$

Beweis. Da die Funktion $\dfrac{1}{F}\dfrac{\partial F}{\partial x}$ im Gebiete

$$\varrho_0 < |x| < \varrho, \quad |x_i| < \varrho_i$$

eindeutig und regulär ist, so gilt nach dem Laurentschen Satze (vgl. § 3) für dieses Gebiet:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, x^\nu.$$

Dabei bedeuten die $\mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gewöhnliche Potenzreihen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und der rechtsstehende Ausdruck ist, auch wenn er als $(n+1)$-fache Reihe aufgefaßt wird, im betrachteten Gebiete absolut konvergent. Denkt man sich nun den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ irgend ein spezielles (den Bedingungen $|x_i| < \varrho_i$ genügendes) Wertsystem beigelegt, so bezeichnet nach einem bekannten Satze der Koeffizient von x^{-1} die Anzahl der dem Gebiete $|x| \leqq \varrho_0$ angehörenden Elementarnullstellen von $F(x, x_1, \ldots, x_n)$. Es ist also $\mathfrak{P}_{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für jedes derartige Wertsystem gleich einer (nicht negativen) ganzen Zahl und somit konstant:

$$\mathfrak{P}_{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m.$$

Hieraus folgt:

$$F(x, x_1, \ldots, x_n) = \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot x^m e^{\sum\limits_{(\nu \gtrless -1)} \mathfrak{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}},$$

wobei der Exponent offenbar wiederum eine im betrachteten Gebiete absolut konvergente $(n+1)$-fache Reihe darstellt und $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine für $|x_i| < \varrho_i$ eindeutig definierte, von x unabhängige Größe bedeutet, welche, wie aus der Gleichung hervorgeht, überdies für jedes derartige Wertsystem regulär und von 0 verschieden ist. Nach dem vorigen Satze gilt also:

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \qquad (|x_i| < \varrho_i),$$

wo $\mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine für $|x_i| < \varrho_i$ absolut konvergente gewöhnliche Potenzreihe bezeichnet, und durch Einsetzen in die vorige Gleichung folgt daraus die Behauptung.[1])

---

[1]) Wird von der Funktion $F(x, x_1, \ldots, x_n)$ lediglich vorausgesetzt, daß sie im Gebiete $\varrho_0 < |x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_i$ eindeutig definiert, regulär

§ 2.

Beweis des Weierstrassschen Vorbereitungssatzes.

Es handelt sich um den Beweis des folgenden Satzes:

Ist $F(x, x_1, \ldots, x_n)$ eine für die Umgebung der Stelle $x = x_1 = \cdots = x_n = 0$ eindeutig definierte und reguläre Funktion der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ und verschwindet die Funktion $F(x, 0, \ldots, 0)$ von x für $x = 0$ genau von der m^{ten} Ordnung ($m \geqq 1$), so gilt für eine gewisse Umgebung

$$|x| < \varrho, \quad |x_i| < \varrho_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

jener Stelle die Beziehung:

$$F(x, x_1, \ldots, x_n) = (x^m + f_1 x^{m-1} + f_2 x^{m-2} + \cdots + f_m)\, e^{\mathfrak{G}(x, x_1, \ldots, x_n)}.$$

Dabei bedeuten $f_1, f_2, \ldots, f_m$ gewöhnliche Potenzreihen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche sämtlich für $|x_i| < \varrho_1$ absolut konvergieren und für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ verschwinden; $\mathfrak{G}(x, x_1, \ldots, x_n)$ eine für $|x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_1$ absolut konvergente gewöhnliche Potenzreihe von $x, x_1, \ldots, x_n$.

Durch geeignete Wahl von ϱ_1 kann man es überdies erreichen, daß für $|x_i| < \varrho_1$ die absoluten Beträge der sämtlichen Wurzeln der Gleichung

$$x^m + f_1 x^{m-1} + \cdots + f_m = 0$$

unterhalb einer beliebig vorgeschriebenen positiven Zahl ϱ_0 verbleiben.

Beweis. Da die Funktion $F_0(x) = F(x, 0, \ldots, 0)$ nach Voraussetzung nicht identisch verschwindet, so kann man eine positive Größe ϱ von der Eigenschaft bestimmen, daß $F_0(x)$ für $0 < |x| \leqq \varrho$ von 0 verschieden bleibt und daß zugleich

---

und nichtverschwindend sei, so behält auch dann noch der Satz seine Gültigkeit bei, mit dem einzigen Unterschiede, daß m dann auch negativ sein kann. Der Beweis stimmt mit dem des Textes überein, falls der Satz für den Fall einer Variablen als bekannt vorausgesetzt wird.

$F(x, x_1, \ldots, x_n)$ sicher noch regulär ist, solange $|x| \leqq \varrho$ verbleibt und die absoluten Beträge von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine gewisse positive Zahl nicht überschreiten. Wenn ferner eine zweite positive Größe ϱ_0 der Bedingung $0 < \varrho_0 < \varrho$ entsprechend beliebig angenommen wird, so bleibt $F(x, x_1, \ldots, x_n)$ im ganzen Gebiete

$$\varrho_0 < |x| < \varrho, \quad |x_i| < \varrho_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

durchweg regulär und von Null verschieden, vorausgesetzt, daß die positive Zahl ϱ_1 hinlänglich klein gewählt wird.[1])

Nach § 1 gibt es daher für $F(x, x_1, \ldots, x_n)$ in diesem Gebiete eine Darstellung von der folgenden Art:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &F(x, x_1, \ldots, x_n) \\ &= x^{\bar m} e^{P(x, x_1, \ldots, x_n)} = x^{\bar m} e^{\mathfrak{G}(x, x_1, \ldots, x_n) + \frac{1}{x} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, x_1, \ldots, x_n\right)}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\bar m$ eine (nicht negative) ganze Zahl, $\mathfrak{G}(x, x_1, \ldots, x_n)$ und $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, x_1, \ldots, x_n\right)$ gewöhnliche, im betrachteten Gebiete absolut konvergierende Potenzreihen der angegebenen Argumente. Legt man in dieser Gleichung jeder der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ den Wert 0 bei und differentiiert logarithmisch nach x, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\frac{\dfrac{d F_0(x)}{d x}}{F_0(x)} = \frac{m}{x} + c_0 + c_1 x + \cdots \\ &= \frac{\bar m}{x} + \frac{d}{d x}\left\{\mathfrak{G}(x, 0, \ldots, 0) + \frac{1}{x} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, 0, \ldots, 0\right)\right\} \quad (\varrho_0 < |x| < \varrho), \end{aligned}$$

woraus noch hervorgeht, daß $\bar m = m$ und $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, 0, \ldots, 0\right) = 0$.[2])

---

[1]) Die gegenteilige Annahme würde — da in einem Gebiete, in welchem eine analytische Funktion mehrerer Veränderlichen regulär ist, jede Häufungsstelle von Nullstellen wiederum eine solche ist — unmittelbar einen Widerspruch ergeben. (Die Größe ϱ_1 kann auch in der nämlichen Weise bestimmt werden wie zu Anfang des Weierstraß-schen Beweises die dort ebenso bezeichnete Größe.)

[2]) Leitet man auf dem von Weierstraß angegebenen Wege eine Beziehung von der Form

Aus der Gleichung (1) folgt:

$$(2)\quad \begin{aligned} &e^{-\mathfrak{G}(x, x_1, \ldots, x_n)} F(x, x_1, \ldots, x_n) = x^m \cdot e^{\frac{1}{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, x_1, \ldots, x_n\right)} \\ &= x^m \left\{1 + \frac{1}{x}\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{x}, x_1, \ldots, x_n\right)\right\}, \quad (\varrho_0 < |x| < \varrho, \ |x_i| < \varrho_1), \end{aligned}$$

da ja $e^{\frac{1}{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, x_1, \ldots, x_n\right)}$ eine für $\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{\varrho_0}$, $|x_i| < \varrho_1$ eindeutige und reguläre Funktion von $\frac{1}{x}, x_1, \ldots, x_n$ bezeichnet, welche sich für $\frac{1}{x} = 0$ auf 1 reduziert. Die Größe auf der linken Seite dieser Gleichung nun läßt sich als eine im vollen Gebiete $|x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_1$ eindeutige und reguläre Funktion daselbst durch eine absolut konvergente gewöhnliche Potenzreihe von $x, x_1, \ldots, x_n$ darstellen. Diese letztere aber muß — da eine Funktion in einem und demselben Gebiete nicht auf zwei verschiedene Weisen nach steigenden und fallenden Potenzen von x entwickelt werden kann — mit dem auf der rechten Seite stehenden Ausdrucke identisch sein. Hiernach können rechts (nachdem die Multiplikation mit x^m ausgeführt ist) Potenzen von x mit negativem Exponenten überhaupt nicht auftreten und man erhält nun die für das ganze Gebiet $|x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_1$ gültige Darstellung:

$$(3)\quad \begin{aligned} &F(x, x_1, \ldots, x_n) \\ &= (x^m + f_1 x^{m-1} + f_2 x^{m-2} + \cdots + f_m)\, e^{\mathfrak{G}(x, x_1, \ldots, x_n)}, \end{aligned}$$

wobei $f_1, f_2, \ldots, f_m$ gewöhnliche, für $|x_i| < \varrho_1$ absolut konvergente Potenzreihen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bedeuten.

Diese Potenzreihen verschwinden sämtlich für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, wie man erkennt, indem man das Wert-

---

$$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{m}{x} + \frac{\partial}{\partial x} P(x, x_1, \ldots, x_n)$$

und damit die Gleichung (1) des Textes her, so wird die Anwendung des Laurentschen Satzes gänzlich vermieden.

*

system $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ entweder in die Gleichung (3) selbst oder in die folgende Beziehung

$$
(4) \qquad x^m e^{\frac{1}{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}, x_1, \ldots, x_n\right)} = x^m + f_1 x^{m-1} + \cdots + f_m
$$
$$
(\varrho_0 < |x| < \varrho_1, \ |x_i| < \varrho_1)
$$

einträgt, deren linke Seite sich alsdann auf x^m reduziert.

Da endlich die linke und somit auch die rechte Seite der offenbar auch noch im größeren Gebiete $|x| > \varrho_0$, $|x_i| < \varrho_1$ gültigen Gleichung (4) daselbst beständig von Null verschieden ist, so ist damit auch der letzte Teil der Behauptung erwiesen.

§ 3.

Beweis des Laurentschen Satzes.

Im § 1 wird folgender Spezialfall des Laurentschen Satzes für Funktionen mehrerer Veränderlichen benutzt:

Eine für $\varrho_0 < |x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ eindeutige und reguläre Funktion $f(x, x_1, \ldots, x_n)$ der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$ kann in diesem Gebiete durch eine absolut konvergierende, nach ganzzahligen positiven und negativen Potenzen von x sowie nach ganzzahligen positiven Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fortschreitende $(n+1)$-fache Reihe dargestellt werden.

Der Beweis hierfür (wie auch für den Laurent'schen Satz in seiner allgemeinsten Gestalt) kann, ähnlich wie bei den Funktionen einer Veränderlichen, sowohl nach der Cauchyschen Methode der Randintegrale als auch nach der von Herrn Pringsheim angegebenen Methode der Mittelwerte geführt werden.[1] Ein dritter Weg, welcher sich darbietet, wenn man den Laurentschen Satz für Funktionen einer Variablen als bekannt voraussetzt, soll hier noch kurz besprochen werden.[2]

---

[1] Über die Anwendung dieser letzteren Methode siehe des Verf. I.-D. (München 1903), Kap. V.

[2] Durch wiederholte Anwendung des im folgenden angegebenen

Genügt der Wert $x = \xi$ der Bedingung $\varrho_0 < |\xi| < \varrho$, so ist $f(\xi, x_1, \ldots, x_n)$ eine für $|x_i| < \varrho_i$ eindeutige und reguläre Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und kann daher durch eine in diesem Gebiete absolut konvergierende gewöhnliche Potenzreihe von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dargestellt werden[1]),

$$f(\xi, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n} f_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n}(\xi)\, x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n},$$

deren Koeffizienten $f_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n}(\xi)$ für jeden der angegebenen Werte von ξ eindeutig definiert sind. Die Funktion $f_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n}(x)$ ist aber zugleich für jeden solchen Wert $x = \xi$ regulär. Man kann nämlich, da die Funktion $f(x, x_1, \ldots, x_n)$ bei geeigneter Wahl der positiven Größe σ im Gebiete $|x - \xi| < \sigma$, $|x_i| < \varrho_i$ regulär ist, dieselbe dort durch eine absolut konvergente gewöhnliche Potenzreihe von $x - \xi, x_1, \ldots, x_n$ darstellen und erhält, wenn man diese letztere nach Potenzen von $x_1, \ldots, x_n$ ordnet:

$$f(x, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n} \mathfrak{P}_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x - \xi)\, x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n},$$

wobei die $\mathfrak{P}_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x - \xi)$ gewöhnliche Potenzreihen von $x - \xi$ bedeuten, welche für $|x - \xi| < \sigma$ konvergieren. Der Vergleich beider Darstellungen ergibt:

$$f_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x) = \mathfrak{P}_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x - \xi) \qquad (|x - \xi| < \sigma).$$

$f_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x)$ ist demnach in der Tat für jedes $x = \xi$ regulär und kann also für $\varrho_0 < |x| < \varrho$ durch eine Laurentsche Reihe dargestellt werden:

$$f_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x) = \sum_{\mu = -\infty}^{+\infty} A^{(\mu)}_{\mu_1, \ldots, \mu_n}\, x^{\mu}.$$

So ergibt sich:

Verfahrens läßt sich auch der Laurentsche Satz in seiner allgemeinsten Gestalt beweisen.

[1]) Soll dies ebenfalls erst bewiesen werden, so kann man sich dazu eines Schlußverfahrens bedienen, welches dem in diesem Paragraphen auseinandergesetzten völlig analog ist.

$$f(x, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n} f_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x)\, x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n}$$
$$= \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n} \Big\{ \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} A^{(\mu)}_{\mu_1, \ldots, \mu_n} x^{\mu} \Big\} x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n}$$
$$(\varrho_0 < |x| < \varrho, \quad |x_i| < \varrho_i).$$

Es ist nun lediglich noch zu zeigen, daß der rechts stehende Ausdruck, auch als $(n+1)$-fache Reihe aufgefaßt, absolut konvergiert (woraus dann zugleich folgt, daß die Summation desselben in beliebiger Weise bewerkstelligt werden kann).

Bezeichnet man mit $a, a_1, \ldots, a_n$ positive Zahlen, welche den Bedingungen

$$\varrho_0 < a < \varrho, \quad 0 < a_i < \varrho_i$$

genügen, so verbleibt $|f(x, x_1, \ldots, x_n)|$ für $|x| = a$, $|x_i| = a_i$ unterhalb einer endlichen Schranke M. Die wiederholte Anwendung der Cauchyschen Koeffizientenungleichung ergibt daher

$$|f_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(x)| \leqq \frac{M}{a_1^{\mu_1} \ldots a_n^{\mu_n}} \qquad (|x| = a)$$

und weiter:

$$\left|A^{(\mu)}_{\mu_1, \ldots, \mu_n}\right| \leqq \frac{M}{a^{\mu}\, a_1^{\mu_1} \ldots a_n^{\mu_n}} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \mu_1, \ldots, \mu_n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Hieraus geht aber unmittelbar sowohl die absolute Konvergenz der $(n+1)$-fachen Reihe

$$\sum_{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_n} A^{(\mu)}_{\mu_1, \ldots, \mu_n} x^{\mu} x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n} \qquad (\mu, \mu_1, \ldots, \mu_n = 0, 1, 2, \ldots)$$

für $|x| < a$, $|x_i| < a_i$ (und daher auch für $|x| < \varrho$, $|x_i| < \varrho_i$), als auch die der $(n+1)$-fachen Reihe

$$\sum_{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_n} A^{(\mu)}_{\mu_1, \ldots, \mu_n} x^{\mu} x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n} \qquad \begin{pmatrix} \mu = -1, -2, \ldots \\ \mu_1, \ldots, \mu_n = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

für $|x| > a$, $|x_i| < a_i$ (und daher auch für $|x| > \varrho_0$, $|x_i| < \varrho_i$) hervor.