Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 2. Abhandlung

Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie

von

Arnold Sommerfeld

Vorgelegt am 9. Januar 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 2. Abhandlung

Über die Ausbreitung der Wellen inder drahtlosen Telegraphie

von

Arnold Sommerfeld

Vorgelegt am 9. Januar 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Während sich die weitaus größte Mehrzahl der praktischen und theoretischen Arbeiten über drahtlose Telegraphie mit den Verhältnissen beim Sender und Empfänger beschäftigt, hat die Frage nach der Ausbreitung der Wellen zwischen Sender und Empfänger, insbesondere nach der Rolle, die die Erde hierbei spielt, verhältnismäßig wenig Beachtung gefunden. Mit gutem Grunde: Jene Verhältnisse sind es allein, die der Experimentator kontrollieren kann; dagegen muß er den Mechanismus der Ausbreitung als etwas Gegebenes hinnehmen.

Ein mehr formaler Grund mag hinzukommen: Während sich die Theorie des Senders und Empfängers verhältnismäßig einfach gestaltet und mit praktisch genügender Annäherung (man denke an die gekoppelten Systeme) durch totale Differentialgleichungen beherrscht wird, führt uns die Frage nach der Ausbreitung der Wellen unausbleiblich in das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen und stellt uns vor nicht ganz einfache Randwertaufgaben.

Zwei Auffassungen stehen sich hier gegenüber, die — wenigstens in allgemeinen Umrissen — durch den Gegensatz „Raumwellen“ und „Oberflächenwellen“ gekennzeichnet werden. Mit Raumwellen haben wir es in der Akustik und bei der überwiegenden Mehrzahl der optischen Erscheinungen zu tun. Ebenfalls zu den Raumwellen gehören die Hertzschen Wellen der Elektrodynamik. Das klassische Beispiel von Oberflächenwellen sind diejenigen der Hydrodynamik. In der Optik treten bei der Totalreflexion im optisch dünneren Medium Oberflächen-

---

*) Auszug aus einer umfangreicheren Arbeit, welche in den Annalen der Physik erscheinen wird.

wellen auf, die namentlich von Voigt theoretisch und experimentell untersucht sind. Ferner sind die elektrodynamischen Drahtwellen typische Oberflächenwellen. Endlich sei auf die Elastizitätstheorie hingewiesen, wo sich in den neueren seismischen Beobachtungen die Wellen vom Raum- und Oberflächentyp deutlich voneinander sondern lassen.

Welchem Typus sind nun die Wellen der drahtlosen Telegraphie zuzuzählen? Sind sie den Hertzschen Wellen in Luft zu vergleichen oder den Hertzschen Drahtwellen?

Die erste Ansicht dürfte die vorherrschende sein. Sie stützt sich in quantitativer Hinsicht auf eine Untersuchung von M. Abraham, dem es unter Annahme einer vollkommen leitenden ebenen Erdoberfläche gelang, aus der Hertzschen Funktion des Dipols Gesetze für die Ausbreitung der elektrischen und magnetischen Kraft, ihre Abhängigkeit von Entfernung und Azimut etc. zu entwickeln und damit zu einer ersten Klärung unseres Gebietes wesentlich beizutragen.

Die Hertzsche Funktion des Dipols lautet bekanntlich:

$$\Pi = \frac{e^{ikR}}{R},$$

wo R den Abstand des Aufpunktes vom Dipol, k eine Materialkonstante des umgebenden Mediums (s. u.) bedeutet (im reinen Äther ist $\frac{k}{2\pi}$ die reziproke Wellenlänge der Hertzschen Schwingung). In Gedanken ist bei Π der Zeitfaktor e^{-int} ($n =$ Frequenz der Schwingung) und der Übergang zum reellen Teil zu ergänzen. Aus diesem Π läßt sich das elektromagnetische Feld durch einen einfachen Differentiationsprozeß ableiten; insbesondere wird für die Umgebung der Erregungsstelle ($R = 0$) das elektrische Feld gleich dem Gradienten von $\frac{\partial \Pi}{\partial z}$, wenn z die Achse des Erregers ist, was eben der Differenzwirkung einer punktförmigen positiven und negativen oszillierenden Ladung, d. h. einem Dipol, entspricht.

Die Kraftlinien dieses Feldes stehen auf der Äquatorebene ($z = 0$) des Dipols senkrecht. An ihre Stelle tritt bei der

Abrahamschen Anwendung der Hertzschen Funktion die Erdoberfläche, auf der ja unter der Annahme unendlich guter Leitfähigkeit die Kraftlinien ebenfalls senkrecht endigen müssen. Die Erde würde unter dieser Annahme keine andere Rolle spielen, als daß sie den vom Sender ausgehenden Raumwellen den Eintritt verwehrt.

Übrigens tritt die Hertzsche Lösung in der Optik schon viel früher auf zur Charakterisierung einer einfachsten optischen Punktquelle, von der sich kugelförmige Raumwellen ausbreiten. Wir werden daher Π auch vielfach als Funktion des leuchtenden Punktes bezeichnen.

Die umgekehrte Ansicht, daß es sich bei der drahtlosen Telegraphie um ein Analogon zu den Drahtwellen handle und daß die Erde die Wellenfortpflanzung wesentlich mitbestimme, ist verschiedentlich geäußert worden. Eine quantitative Unterlage erhielt sie durch Arbeiten von Uller[1]) und Zenneck.[2]) Uller untersucht eine bestimmte Art ebener — in der Bezeichnung von Voigt „inhomogener ebener" — Wellen, welche auf die Grenze der beiden Medien Erde und Luft mehr oder minder konzentriert sind. Zenneck zieht unter Voraussetzung dieser Wellenform eine Reihe bemerkenswerter Schlüsse über das Verhalten elektrischer Wellen bei verschiedener Bodenbeschaffenheit und über die Wirkung der Empfänger und Sender für gerichtete Telegraphie.

Als Oberflächenwellen werden diese Wellen namentlich durch den Wert von Fortpflanzung und Dämpfung gekennzeichnet. Sind ε, μ, σ Dielektrizitätskonstante, Permeabilität und Leitfähigkeit des ersten oder zweiten Mediums (Luft und Erde), so kommt es wesentlich auf die Größe

$$k^2 = \frac{\varepsilon \mu n^2 + i \mu \sigma n}{c^2}$$

[1]) K. Uller, Beiträge zur Theorie der elektromagnetischen Strahlung. Dissertation, Rostock 1903.

[2]) J. Zenneck, Ann. der Physik 23, p. 846, 1907, sowie Physik. Zeitschrift 9, p. 50 und 553, 1908.

an, die wir für Luft und Erde als k_1^2 und k_2^2 unterscheiden. Aus beiden Größen baut sich, wenn die Permeabilität von Luft und Erde gleich eins gesetzt wird, (ein Fall, auf den wir uns in dieser Übersicht durchweg beschränken dürfen), diejenige komplexe Größe

$$s = \sqrt{\frac{k_1^2 k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}}$$

auf, welche Fortpflanzung und Dämpfung durch ihren reellen und imaginären Teil bestimmt. Dabei ist die Bezeichnung als Oberflächenwelle nicht so aufzufassen, daß wie bei den Wasserwellen oder den seismischen Störungen der Sitz der Wellen wesentlich das zweite Medium sei. Im Gegenteil findet sich der Hauptteil der Energie im ersten Medium Luft, ebenso wie bei den Drahtwellen. Die Amplitude nimmt von der Erdoberfläche nach oben hin langsam, nach unten hin schnell ab (Skineffekt).

Dieser interessante Wellentyp war aber bisher durchaus hypothetisch. Daß er sich wirklich aus den vom Sender ausgehenden Wellen in größerer Entfernung vorzugsweise herausbildet, dafür fehlte sozusagen der Existenzbeweis. Es ist eine Hauptaufgabe unserer Untersuchung, diesen Beweis zu liefern und die Frage: Raumwellen oder Oberflächenwellen? zu entscheiden.

Von vornherein ist zu betonen, daß die Antwort nicht unbedingt und für alle Fälle gleich sein wird, wie denn überhaupt unsere vereinfachten Begriffe und Bezeichnungen meist nur gewisse Grenzfälle richtig treffen, ohne der Komplexität der Erscheinungen im allgemeinen gerecht zu werden. So verliert die Bezeichnung des einfallenden und reflektierten Lichtes bei allgemeinen optischen Problemen ihren präzisen Sinn und geht in den allgemeinen Begriff des optischen Feldes der Beugungserscheinungen über. Ähnlich gibt es in unserem Falle Übergänge zwischen Raum- und Oberflächenwellen und wird eine scharfe Sonderung beider im allgemeinen unmöglich. Immerhin treten genau die Uller-Zenneckschen Oberflächenwellen als ein wesentlicher und unter gewissen Umständen überwiegender Bestandteil des elektromagnetischen Feldes hervor, begleitet von Raumwellen, welche unter gewissen anderen Umständen *ihrerseits* überwiegen.

Wir haben zunächst das mathematische Problem zu skizzieren, welches die Grundlage unserer Diskussion bildet. Es handelt sich gewissermaßen darum, den leuchtenden Punkt der Hertzschen Lösung in zwei Teile zu zerspalten, eine dem Medium 1 und eine dem Medium 2 entsprechende Hälfte, und beide vermöge der Grenzbedingungen zwischen 1 und 2 aneinander anzupassen; oder anders ausgedrückt, das Hertzsche Π durch ein Funktionenpaar Π_1, Π_2 zu ersetzen, das durch die Differentialgleichungen

$$\Delta \Pi_1 + k_1^2 \Pi_1 = 0 \text{ für } z > 0, \quad \Delta \Pi_2 + k_2^2 \Pi_2 = 0 \text{ für } z < 0$$

und die Grenzbedingungen an der als eben vorausgesetzten Trennungsfläche

$$\Pi_1 = \Pi_2, \quad \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = \frac{1}{k_2^2} \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} \text{ für } z = 0$$

bestimmt wird und von denen an der Erregungsstelle $R = 0$ sich Π_1 wie eine Hertz'sche Lösung in 1, Π_2 wie eine solche in 2 verhält. Eine so weitgehende Vereinfachung der tatsächlichen Verhältnisse ist natürlich nur für solche Entfernungen zulässig, von denen aus die Antenne als Erregungspunkt erscheint, die also groß gegen die Wellenlänge der Schwingung sind. Wie sich das Feld in der unmittelbaren Umgebung des Senders verhält, kann und will unsere Theorie nicht beschreiben.

Die strenge Lösung dieses Problems, welches durch die soeben genannten und einige ergänzende Bedingungen eindeutig bestimmt ist, lautet, in Polarkoordinaten r, z geschrieben, wobei $R^2 = r^2 + z^2$ wird:

$$\Pi_1 = \int_0^\infty \frac{k_1^2 + k_2^2}{N} J(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, z}\, \lambda\, d\lambda,$$

$$\Pi_2 = \int_0^\infty \frac{k_1^2 + k_2^2}{N} J(\lambda r)\, e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}\, z}\, \lambda\, d\lambda,$$

wo J die Besselsche Funktion vom Index O und N die Abkürzung bedeutet:

$$N = k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}.$$

Die Quadratwurzeln sind hier und im folgenden stets mit positiv reellem Teil zu nehmen. Für $k_2 = \infty$ (vollkommen leitende Erde) ergibt sich, wie es sein muß, der Abrahamsche Grenzfall:

$$\Pi_1 = \frac{e^{i k_1 R}}{R}, \quad \Pi_2 = 0.$$

Gehen wir zu rechtwinkligen Koordinaten x, y, z über, so daß $r^2 = x^2 + y^2$, und nehmen k_1 als reell an, was dem Falle ungedämpfter Wellen in Luft hinreichend genau entspricht, so läßt sich Π_1 deuten als Superposition eines Bündels gewöhnlicher ebener homogener Wellen Π_h und eines solchen inhomogener Wellen Π_i; ersteres gegeben durch die Integration $0 < \lambda < k_1$, letzteres durch $k_1 < \lambda < \infty$. Wir ersetzen zu dem Zwecke die Besselsche Funktion durch ihre Integraldarstellung

$$J(\lambda r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}\, d\alpha$$

und führen in dem Teile $0 < \lambda < k_1$ die neue Integrationsvariable β durch die Beziehungen

$$\lambda = k_1 \sin\beta, \quad \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} = i k_1 \cos\beta$$

ein. Dann wird

$$\Pi_h = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta\, A\, e^{i k_1 (x\cos\alpha\sin\beta + y\sin\alpha\sin\beta - z\cos\beta)}$$

mit der Abkürzung:

$$A = \frac{k_1^2}{2\pi} \frac{k_1^2 + k_2^2}{N} \sin\beta\cos\beta.$$

Hier erscheint Π_h als ein System gewöhnlicher ebener Wellen, die unter dem Winkel β gegen die Normale zur Erdoberfläche einfallen, wobei β variiert zwischen senkrechter Inzidenz

$$(\lambda = 0,\ \beta = 0)$$

und streifender Inzidenz:

$$\left(\lambda = k_1,\ \beta = \frac{\pi}{2}\right).$$

Die Einfallsebene wird durch das Azimut α gegeben, welches alle Werte zwischen 0 und 2π annimmt; die Amplitude A hängt in bestimmter Weise von dem Einfallswinkel β ab und ist aus Symmetriegründen von dem Azimut α unabhängig.

In ähnlicher Weise schreibt sich der zweite Bestandteil Π_i unserer Lösung (unter Beibehaltung der ursprünglichen Integrationsvariabeln λ):

$$\Pi_i = \int\limits_0^{2\pi} d\alpha \int\limits_{k_1}^{\infty} \lambda\, d\lambda\, \frac{k_1^2 + k_2^2}{2\pi N}\, e^{i\lambda(x\cos\alpha + y\sin\alpha) - \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\, z}.$$

Auch hier handelt es sich um ein System ebener Wellen, aber nicht gewöhnlicher homogener, sondern inhomogener Wellen: Die Ebenen konstanter Phase sind, da jetzt $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ reell ist:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = \text{const},$$

stehen also auf der Erdoberfläche senkrecht, die Ebenen konstanter Amplitude werden:

$$z = \text{const},$$

sind also zur Erdoberfläche parallel. Definieren wir die Inzidenz durch die Normale zu den Ebenen konstanter Phase, so kommt allen diesen inhomogenen Wellen „streifende Inzidenz“ zu, so daß sich dieses inhomogene Wellensystem stetig an das vorige homogene anschließt. Unsere inhomogenen Wellen sind durchaus vom Charakter derjenigen Wellen, die sich bei der Totalreflexion im optisch dünneren Medium parallel der Trennungsfläche fortpflanzen. Es liegt daher nahe, das erste Bündel der oberen, im Medium 1 gelegenen „Hälfte unseres leuchtenden Punktes“, das zweite der unteren, im optisch dichteren Medium 2 enthaltenen „Hälfte“ zuzuschreiben. Indessen muß zu dieser Ausdrucksweise bemerkt werden, daß eine solche Trennung des im Grunde einheitlichen und untrennbaren Vorganges physikalisch nicht zu realisieren ist.

Schwieriger als die Aufstellung der allgemeinen Formeln erweist sich hier wie so häufig, ihre spezielle Diskussion und zahlenmäßige Berechnung. Bei dieser tritt ein besonders wichtiges Element unserer Theorie hervor, das wir die numerische Entfernung des Aufpunktes vom Sender nennen. Es zeigt sich nämlich, daß Größe und Charakter der übertragenen Wirkung nicht so sehr von der absoluten Entfernung r (diese etwa gemessen gedacht in Einheiten der Wellenlänge) abhängt, als vielmehr von einer reinen Zahl ϱ — eben unserer numerischen Entfernung —, die sich aus r und den Materialkonstanten k_1, k_2 berechnet. In dem Auftreten dieser Größe haben wir eine Art Ähnlichkeitsgesetz der drahtlosen Telegraphie zu sehen, welches sich aber hier nicht direkt aus den Differentialgleichungen des Problems, sondern erst aus seinen Integralen entnehmen läßt, wie schon daraus hervorgeht, daß es nicht in Strenge und allgemein, sondern nur mit Annäherung in der Nähe der Erdoberfläche gilt.

Wir definieren:

a) $$\varrho = \left| \frac{k_1^4}{k_2^4} \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2} \frac{k_1 r}{2} \right|.$$

In dem besonderen Falle, wo k_1 reell (ungedämpfte Schwingungen in Luft), k_2^2 rein imaginär (εn zu vernachlässigen gegen σ) und k_1^2 klein gegen k_2^2 (Luft gegen Seewasser) ist, kann man für ϱ einfacher schreiben:

b) $$\varrho = \frac{k_1^2}{(-i k_2^2)} \frac{k_1 r}{2}.$$

Die numerische Entfernung ϱ wächst also mit der absoluten Entfernung r, ist aber bei gleichem r über Seewasser

$$\left(\left| \frac{k_2^2}{k_1^2} \right| \text{groß} \right)$$

viel kleiner als über Land und Süßwasser.

Wir berichten zunächst kurz über den mathematischen Gedankengang unserer Diskussion der allgemeinen Lösung. Diese wird zum Teil in der komplexen Ebene der Integrationsvariabeln λ, zum Teil durch Reihenentwickelung bewerkstelligt.

In der λ-Ebene gibt es einen ausgezeichneten Punkt, wo der Nenner N verschwindet. Dieser „Pol" liegt genau bei dem oben angegebenen Werte $\lambda = s$. Das zugehörige mit $2\pi i$ multiplizierte Residuum des Integranden, welches nach dem Cauchyschen Satz den Wert des Integrals bei einem Umgang um den Pol bestimmt, lautet bei großem r:

$$P = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{isr - \sqrt{s^2 - k_1^2}\, z} \ldots z > 0,$$

$$P = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{isr + \sqrt{s^2 - k_2^2}\, z} \ldots z < 0,$$

wobei:

$$A = \frac{k_1 k_2}{k_1^2 - k_2^2} \sqrt{2\pi s}\, e^{\frac{-i\pi}{4}},$$

und liefert bei unbegrenzt wachsendem r eine ebene Welle, welche sich genau mit der von Uller und Zenneck postulierten Oberflächenwelle deckt. Das Vorhandensein jenes Poles in dem der Integration zugänglichen Blatte der λ-Ebene und daher das Auftreten dieser Wellen ist an eine Ungleichung zwischen den Materialkonstanten beider Medien geknüpft. Indem gezeigt wird, daß diese Ungleichung unter den Verhältnissen der drahtlosen Telegraphie stets erfüllt ist, wird der verlangte E x i s t e n z b e w e i s für die O b e r f l ä c h e n w e l l e n erbracht. Zwei weitere Bestandteile Q_1, Q_2 unserer allgemeinen Lösung ergeben sich als Umgänge um zwei in der λ-Ebene wegen des Auftretens der Quadratwurzeln $\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ und $\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$ anzubringende Verzweigungsschnitte und haben den Charakter von Raumwellen des Mediums 1 und 2, da ihre Fortpflanzung in 1 oder 2 allein durch die Materialkonstanten dieses Mediums bestimmt wird. Mit wachsendem r nimmt ihre Amplitude wie $\frac{1}{r^2}$ ab. Übrigens kann Q_2 gegen Q_1 praktisch vernachlässigt werden.

Der auf diesem Wege gefundene Ausdruck für Q_1 ist nur als erste Näherung bei unendlich wachsendem r anzusehen. Indem man in der strengen Lösung

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \sum_0^\infty \left(-\frac{k_2^2}{k_1^2} \sqrt{\frac{\lambda^2 - k_1^2}{\lambda^2 - k_2^2}} \right)^\nu$$

entwickelt, fügt man eine unendliche Serie weiterer Glieder hinzu, deren jedes sich bei geeigneten Vernachlässigungen auffassen läßt als Wirkung einer an der Erregungsstelle supponierten höheren Singularität, entstanden durch das Zusammenwirken von zwei oder mehreren Dipolen. Wir schreiben die fragliche Reihe nur für die Erdoberfläche ($z = 0$, $R = r$) und unter den der Formel b) für die numerische Entfernung zu Grunde liegenden Voraussetzungen an:

$$\text{A)} \quad Q_1 = -\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\varrho} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{\varrho^3} + \cdots \right) \frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Die Reihe schreitet also nach *negativen Potenzen der numerischen Entfernung* fort und ist nur brauchbar (semikonvergent) für *große Werte* dieser Größe.

Wichtiger ist eine zweite Reihenentwickelung, welche die beiden Bestandteile P und Q_1 gleichzeitig wiedergibt und bei Vernachlässigung von Q_2 (s. o.) zur Darstellung des vollständigen Wertes von Π im ersten Medium dient. Man erhält sie, wenn man in der strengen Lösung die zu der vorigen reziproke Entwickelung

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \sum_0^\infty \left(-\frac{k_1^2}{k_2^2} \sqrt{\frac{\lambda^2 - k_2^2}{\lambda^2 - k_1^2}} \right)^\nu$$

vornimmt. Dadurch entsteht eine Reihe, deren aufeinanderfolgende Glieder sich bei geeigneten Vernachlässigungen deuten lassen als Wirkung eines „leuchtenden Punktes", einer an der Erregungsstelle endigenden „leuchtenden Linie" von gleichmäßiger, von Dreiecks-, Parabel-Belegung u. s. f. Für die Erdoberfläche und die der Formel b) zu Grunde liegenden Voraussetzungen spezialisiert, lautet sie:

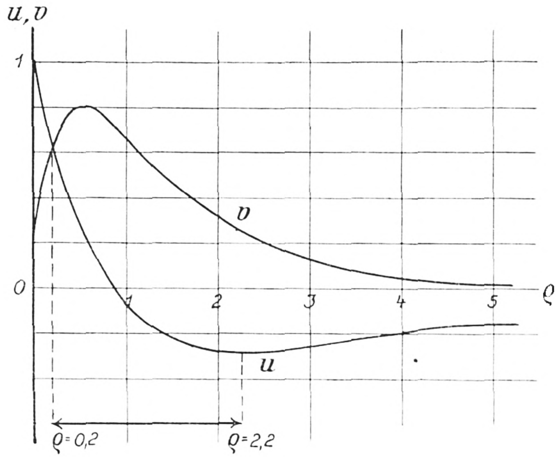
$$\text{B)}\quad \begin{cases} \Pi_1 = (u - i v)\dfrac{e^{i k_1 r}}{r} \\[2ex] u = 1 - \dfrac{2}{1}\varrho + \dfrac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3}\varrho^2 - \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 3 \cdot 5}\varrho^3 + \cdots \\[2ex] v = \sqrt{\pi\varrho}\left(1 - \dfrac{\varrho}{1!} + \dfrac{\varrho^2}{2!} - \dfrac{\varrho^3}{3!} + \cdots\right). \end{cases}$$

Diese Reihe schreitet also nach *positiven Potenzen der numerischen Entfernung* fort und ist für alle Werte von ϱ konvergent, jedoch nur für *kleine numerische Entfernungen zweckmäßig*. (Die absolute Entfernung r wird natürlich auch hier als groß vorausgesetzt.) Insbesondere dient sie dazu, den *Abrahamschen Grenzfall des vollkommenen Leiters* ($k_2 = \infty$, $\varrho = 0$) in unsere Theorie einzuordnen.

Für die zahlenmäßige Berechnung und graphische Darstellung ist eine geschlossene Form der letzten Ausdrücke bequem, welche unter denselben Voraussetzungen und Vernachlässigungen gilt und auf welche man auch durch Summation der Reihe A) geführt wird, nämlich:

$$\Pi_1 = \left(1 - 2\sqrt{\varrho}\, e^{-\varrho}\int_{-i\infty}^{\sqrt{\varrho}} e^{\beta^2}\, d\beta\right)\frac{e^{i k_1 r}}{r}.$$

Unsere Figur 1 stellt die reellen Größen u, v der Formel B) dar, welche mit dem reellen und imaginären Teil der Klammer in dem vorstehenden geschlossenen Ausdruck identisch sind. Mit dem Faktor $\dfrac{e^{i k_1 r}}{r}$ multipliziert, erweisen sie sich im wesentlichen gleich den obengenannten Bestandteilen Q_1 und P,



Figur 1.

liefern also die Trennung des Vorganges in eine Raum- und Oberflächenwelle.

Nach dieser allgemeinen Übersicht heben wir einige praktische Konsequenzen unserer Theorie hervor.

1. Die Eindeutigkeit unseres Problems bei vorgegebener axial-symmetrischer Erregung läßt einen allgemeinen Schluß auf den Einfluß zu, den die besondere Anordnung des Senders, seine mehr oder minder innige Erdung, seine Ausbildung als einfaches oder gekoppeltes System etc. haben kann. In unserer Lösung bleibt unbestimmt nur die (bei Dämpfung komplexe) Frequenz n und eine allen unseren Formeln hinzuzufügende multiplikative Konstante C, die die Intensität des Vorganges mißt; ihrem Quadrat ist die aufzuwendende Energie proportional. Nur diese beiden Konstanten n und C können durch die Besonderheiten des Senders beeinflußt werden, während der Ausbreitungsvorgang als solcher davon unabhängig verläuft. Es ist bekannt, daß Frequenz und Dämpfung (also unsere Konstante n) durch Selbstinduktion, Kapazität und Widerstand der Stromkreise des Senders bestimmt werden. Dasselbe gilt von dem Wirkungsgrade der im Sender aufge-

wendeten Energie (also unserer Konstanten C). Was die *Erdung* betrifft, so fällt die Frage, wie sie Frequenz und Dämpfung, Stromverteilung und Stromamplitude auf der Antenne beeinflußt, außerhalb des Rahmens unseres Problems. Einen Einfluß auf die *Form des Wellenvorganges*, seine *Abnahme mit der Entfernung* etc. dagegen müssen wir, eben wegen der Eindeutigkeit unseres Problems, für ausgeschlossen erklären. Insbesondere kann die Erdung nicht, wie man etwa denken könnte, die flächenhafte Ausbreitung der elektrischen Störung auf Kosten der räumlichen Ausbreitung begünstigen. Vielmehr ist das Verhältnis zwischen Oberflächen- und Raumwellenanteil von der Erdung und überhaupt von der Anordnung des Senders unabhängig.

Bei diesen Schlüssen ist allerdings nur die Rede von solchen Antennen, deren Wirkung sich mit einem einfachen, allseitig symmetrischen Dipol identifizieren läßt. Es sind dies höchst wahrscheinlich alle heute gebrauchten symmetrischen Antennen, deren Höhe stets sehr klein gegen die Wellenlänge der Schwingung ist. Bei den früheren Einfach-Antennen, die gleich ein Viertel Wellenlänge oder damit vergleichbar waren, sowie bei den unsymmetrischen geknickten Sendern (vgl. Nr. 8) treten Abweichungen von der Symmetrie des Dipols auf und bedarf unsere Theorie der Ergänzung.

2. Die Größe der *numerischen Entfernung* und damit zugleich der Charakter der Wellen wird sehr wesentlich bestimmt durch die Bodenbeschaffenheit. Nimmt man beispielsweise die absolute Entfernung gleich $\frac{1}{4}$ Erdquadrant (entsprechend etwa der Marconischen transatlantischen Station) und die Wellenlänge der Schwingung gleich 2 km (entsprechend der deutschen Station Nauen), so ergibt sich nach gewissen runden Angaben von Zenneck über Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante:

Für	Seewasser	Süßwasser	Nassen Boden	Trockenen Boden
	$\varrho = \frac{1}{30}$	$\varrho = 30$	$\varrho = 6{,}5$	$\varrho = 300$

Entsprechend der ganz verschiedenen Größenordnung dieser Zahlen haben wir in diesen Fällen auch eine durchaus verschiedene Größenordnung der telegraphischen Wirkung und ein ganz verschiedenes Bild des Wellenvorgangs zu erwarten.

3. Durch Vergrößerung der Wellenlänge l (Verkleinerung der Frequenz) wird der Wert von ϱ verkleinert, in dem Sonderfalle der Formel b) sogar quadratisch, weil sich k_1 wie $\frac{1}{l}$ und $(-i k_2^2)$ ebenfalls wie $\frac{1}{l}$ verhält. Durch Verkleinerung von ϱ nähern wir uns aber dem idealen Falle des vollkommenen Leiters ($\varrho = 0$). Wir schließen daraus, daß eine Vergrößerung der Wellenlänge für die Überwindung großer Entfernungen günstig sein wird, wie die Praxis längst erkannt hat. Übrigens würde die früher von Marconi angegebene Regel, nach der man bei vertikaler Einfach-Antenne ihre Höhe und damit die Wellenlänge mit der Quadratwurzel aus der zu überwindenden Entfernung wachsen lassen soll, gerade der Forderung entsprechen, trotz wachsender absoluter Entfernung die numerische Entfernung festzuhalten.

4. Auch die Frage nach dem Gültigkeitsbereich der Annahme eines vollkommen leitenden Erdbodens erweist sich im Grunde als eine Frage nach der Größe der numerischen Entfernung, indem sich ja auch aus unserer Theorie für hinreichend kleine numerische Entfernung der Abrahamsche Grenzfall des vollkommenen Leiters ergibt. Behalten wir von der Reihe B) außer jenem Grenzgliede nur noch das nächstfolgende Glied als Korrektion bei, so lautet sie:

$$\Pi_1 = (1 - i\sqrt{\varrho\pi})\frac{e^{ik_1 r}}{r}.$$

Lassen wir beispielsweise $10\,\%$ Abweichung vom Grenzfall des vollkommenen Leiters zu, so ist zu verlangen:

$$\sqrt{\varrho\pi} < \frac{1}{10}.$$

Hieraus ergibt sich bei Seewasser und

$$l = 2 \text{ km bzw. } l = \frac{1}{3} \text{ km}$$

als absolute Entfernung, in der die Annahme vollkommener Leitfähigkeit hinreichend genau ist:

$$r = 240 \text{ km bzw. } r = 8 \text{ km},$$

während die entsprechende Entfernung bei anderer Bodenbeschaffenheit unterhalb einer Wellenlänge liegt. Die Annahme vollkommener Leitfähigkeit ist also nur bei Seewasser innerhalb eines sehr engen Bereiches erlaubt.

5. Dem Charakter der Oberflächenwellen entspricht es, daß der Bestandteil P unserer Lösung nur wie $\frac{1}{\sqrt{r}}$ mit wachsendem r abnimmt (wenn man von der hinzukommenden radialen Dämpfung absieht). In der Tat wird bei flächenhafter Ausbreitung der Energie diese wie $\frac{1}{r}$ abnehmen, da durch Kreise (oder zugehörige Zylinder), die um den Erregungspunkt mit verschiedenem Radius geschlagen sind, stets dieselbe Energie hindurchgeht. Daraus folgt aber, daß die Amplitude des Feldes sich wie $\frac{1}{\sqrt{r}}$ verhält. Andererseits wird bei räumlicher Energiestrahlung im einfachsten Falle diese wie $\frac{1}{r^2}$, die Amplitude des Feldes also wie $\frac{1}{r}$ abnehmen, wie es u. a. die Abrahamsche Behandlung des vollkommenen Leiters zeigt. Daß unsere Raumwellen Q_1 (s. o.) wie $\frac{1}{r^2}$ abnehmen, hat seinen Grund wohl darin, daß sie nur im Verein mit den Oberflächenwellen P auftreten können, denen sie fortgesetzt Energie nachzuliefern haben.

Offenbar ist die geringe Abnahme der Oberflächenwellen mit r für die Praxis der Zeichenübertragung bedeutsam. Nur ist zu beachten, daß die mit den Oberflächenwellen notwendig verknüpfte Absorption im zweiten Medium (in der obigen Formel für P bedingt durch die komplexe Natur von s) eine radiale Dämpfung bewirkt, welche exponentiell fortschreitet und die Oberflächenwellen schließlich stärker zu Null gehen läßt, als selbst die Raumwellen.

6. Über die relative Bedeutung des Raum- und Oberflächenwellen-Bestandteils unserer Lösung orientiert die vorstehende Figur, wo in dem oben angegebenen Sinne u die Raumwelle, v die Oberflächenwelle darstellt. Sie zeigt, daß für sehr kleine numerische Entfernungen $\varrho < 0{,}2$ der Raumwellentypus überwiegt (entsprechend Nr. 4), daß für wachsende ϱ der Oberflächentypus vorherrscht (entsprechend Nr. 5 erster Abs.), während von einem gewissen ϱ ab ($\varrho > 2{,}2$) diese wieder hinter jenen zurücktreten (entsprechend Nr. 5 zweiter Abs.).

7. Unsere Theorie setzt eine ebene Trennungsfläche voraus. Es würde nicht schwer sein, unsere strenge Lösung auf den Fall der gekrümmten Erdoberfläche zu erweitern; nur die Diskussion der so entstehenden Reihe nach Kugel- und Zylinderfunktionen würde Weiterungen verursachen. Aber auch ohne Kenntnis dieser Lösung läßt sich wohl so viel sagen, daß durch die Erdkrümmung die Verhältnisse zu Gunsten der Oberflächenwelle verschoben werden, da durch die Erdkrümmung die Raumwellen abgeschirmt werden, soweit sie dieselbe nicht durch einen Beugungsvorgang überwinden, die Oberflächenwellen aber nicht nennenswert behindert werden. Es ist sehr wohl möglich, daß das schließliche Überwiegen der Raumwellen durch die Erdkrümmung aufgehoben und diese nur mehr für sehr kleine numerische Entfernungen vor den Oberflächenwellen vorherrschen.

In den populären Schriften über drahtlose Telegraphie (z. B. Poincaré) scheint übrigens der Einfluß der Beugung sehr überschätzt zu werden. Wenn dort auf die Größe der Wellenlänge hingewiesen wird, mit der die Stärke der Beugung zunimmt, so ist andererseits daran zu erinnern, daß es immer nur auf das Verhältnis der Wellenlänge zum Krümmungsradius des zu überwindenden Hindernisses ankommt und daß dieses

Verhältnis für die Wellen der drahtlosen Telegraphie und die Erdkrümmung nicht günstiger liegt wie für sichtbares Licht und eine mäßig abgerundete Kante.

8. Auch die Möglichkeit der gerichteten Telegraphie im Sinne Marconis (durch einen geknickten Sender) wird sich durch eine Erweiterung unserer Theorie unschwer erklären lassen. Es ist nur nötig, die symmetrische Erregung, die der skalaren Hertzschen Funktion Π entspricht, zu ersetzen durch eine einseitige unsymmetrische, die durch ein vektorielles Potential, einen „Hertzschen Vektor“ in der Bezeichnung von Abraham, gegeben wird.