Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 5. Abhandlung

Vereinfachte Herleitung unharmonischer trigonometrischer Reihen

von

Ludwig Berwald

Vorgelegt am 1. Mai 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 11 2, 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. A. 11 3, 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. A. 14 3, 1883 ℳ —.50
* — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 14 2, 1883 ℳ 1.—
* — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
* — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. A. 17 1, 1889 ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.

Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 ℳ —.40

Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1ter O. definirten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
* — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
— Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 ℳ 1.20
— Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 ℳ —.20

Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2. Sb. 1887, p. 33—42.
— Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
— Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
— Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 ℳ 3.—
— Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 ℳ —.20
— Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 ℳ —.40
— u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 ℳ —.40
— Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 ℳ —.40
— Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 ℳ —.20

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 5. Abhandlung

Vereinfachte Herleitung unharmonischer trigonometrischer Reihen

von

Ludwig Berwald

Vorgelegt am 1. Mai 1909

München 1909
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Cauchy hat im Jahre 1827 mit Hilfe der von ihm begründeten Residuenrechnung eine Beweismethode für die von Fourier und Poisson aufgestellten Reihenentwicklungen für sogenannte willkürliche Funktionen angegeben, die nicht nur die gewöhnlichen harmonischen trigonometrischen Reihen in sich schließt, sondern auch den allgemeineren Fall der unharmonischen, d. h. solcher trigonometrischer Reihen, bei welchen die Parameter Wurzeln irgend einer vorgeschriebenen transzendenten Gleichung sind.[1]) Sein Beweis, der im einzelnen einige Irrtümer enthält, wurde von A. Harnack,[2]) und namentlich von Herrn É. Picard[3]) entsprechend umgestaltet; beide setzen dabei von der in eine Reihe zu entwickelnden Funktion voraus, daß sie in dem Intervall, welches betrachtet wird, den bekannten Dirichletschen Bedingungen genügt.

Von Herrn Professor H. Burkhardt mündlich darauf aufmerksam gemacht, daß der Picardsche Beweis sich in einzelnen Punkten mittels der Bemerkung vereinfachen lasse, daß nach Herrn C. Jordan jede den Dirichletschen Bedingungen genügende Funktion als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellbar ist, habe ich auf der Grundlage des Cauchyschen Beweisganges einen neuen Beweis für die ganze Klasse von Funktionen, welche eine solche Darstellung gestatten

---

[1]) Cauchy, Sur les résidus des fonctions exprimées par des intégrales définies. Exerc. de math. 1827; Oeuvres (2), 7 (393 - 430).

[2]) Harnack, Über Cauchys zweiten Beweis für die Konvergenz der Fourierschen Reihen und eine damit verwandte ältere Methode von Poisson. (Febr. 1888.) Math. Ann. 32 (175 - 202).

[3]) Picard, Traité d'Analyse II, 1893, Chap. VI, II (167 - 183); 2. éd. 1905 (179 - 195).

(die Funktionen mit beschränkter Schwankung), geführt. Abgesehen von der dadurch erzielten Verallgemeinerung und Vereinfachung erhielt ich so namentlich auch einen Satz über die Summe der unharmonischen trigonometrischen Reihen an den Grenzen ihres Gültigkeitsbereiches, der bisher, wie es scheint, noch nicht bemerkt worden ist.

I. Es sollen die allgemeinen Cauchyschen Betrachtungen[1]) angewendet werden auf den Fall:

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{\varphi(z)}{F(z)} \int_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \qquad (x > x_0), \tag{1}$$

wo

$$z = \varrho(\cos\tau + i\sin\tau)$$

eine komplexe Variable, $\varphi(z)$, $F(z)$ ganze transzendente Funktionen derselben, x ein reeller Parameter, und $f(\mu)$ eine reelle Funktion der reellen Variabeln μ ist. Über diese Funktion soll folgendes vorausgesetzt werden:

$f(\mu)$ soll im Integrationsintervalle $x_0 < \mu < x$ eine Funktion mit beschränkter Schwankung[2]) sein. Eine solche Funktion läßt sich dort stets als Differenz zweier monoton zunehmender Funktionen darstellen; sie besitzt höchstens eine abzählbare Menge von Unstetigkeitspunkten erster Art und ist integrabel.

Insbesondere umfaßt diese Voraussetzung auch den Fall, daß $f(\mu)$ im Integrationsintervalle den Dirichletschen Bedingungen genügt.

Damit die allgemeinen Betrachtungen von Cauchy hier anwendbar sind, muß folgendes gezeigt werden:

---

[1]) Vgl. z. B. Picard, Traité d'Analyse II, Chap. VI, II, Art. 9.

[2]) Diese Funktionen sind behandelt in:

C. Jordan, Sur la série de Fourier. C. R. Ac. sc. Paris 92, 1881 (228–230); Cours d'Analyse I, 1893 (54–61); — und sehr ausführlich in:

E. Study, Über eine besondere Klasse von Funktionen einer reellen Veränderlichen. Math. Ann. 47, 1896 (298—316).

Wächst die komplexe Variable $z = \varrho e^{i\tau}$ so ins Unendliche, daß ihr Modul ϱ in der (passend gewählten) Reihe

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots \qquad (\varrho_{\nu+1} > \varrho_\nu)$$

bleibt, so konvergiert der Ausdruck

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} z\,\frac{\mathfrak{F}(z) - \mathfrak{F}(-z)}{2} &= \frac{1}{2}\frac{\varphi(z)}{F(z)}\, z \int_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\varphi(-z)}{F(-z)}\, z \int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \\ &= \frac{1}{2}\frac{\varphi(z)}{F(z)}\, e^{z(x-x_0)} \cdot z \int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu - x_0)} f(\mu)\, d\mu \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\varphi(-z)}{F(-z)} \cdot z \int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \end{aligned} \right.$$

gleichmäßig gegen einen von τ unabhängigen Grenzwert in jedem Bereiche der Variabeln τ, für welches

$$-\frac{\pi}{2} < \tau < +\frac{\pi}{2}$$

ist, und welches die Bereiche

$$\tau_0^{(\varkappa)} - \varepsilon < \tau < \tau_0^{(\varkappa)} + \varepsilon \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots m)$$

(wo ε eine positive Größe bedeutet, die beliebig klein angenommen werden kann), nicht enthält. Dabei ist unter den $\tau_0^{(\varkappa)}$ eine endliche Anzahl von Richtungen verstanden, in welchen jener Grenzwert nicht zu existieren braucht, falls nur der Ausdruck (2) in den ausgeschlossenen Bereichen überall endlich bleibt.

Für das eben beschriebene Verhalten gebrauche ich (in Übereinstimmung mit Herrn Picard) folgende Abkürzung: der Ausdruck (2) muß „im allgemeinen" gegen einen von τ unabhängigen Grenzwert konvergieren, wenn z (immer in der angegebenen Weise) ins Unendliche wächst.

Den Beweis hierfür will ich in zwei Schritten führen. Zunächst beweise ich folgendes:

1. a) Der Ausdruck

$$(3) \qquad z\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \qquad (x > x_0)$$

konvergiert gleichmäßig gegen den Grenzwert $f(x-0)$,[1] wenn z sich so ins Unendliche bewegt, daß sein Argument τ der Ungleichung

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \tau < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

genügt, wo ε eine beliebig klein angenommene positive Größe bedeutet. Ich will dafür im folgenden die abgekürzte Ausdrucksweise gebrauchen: Der Ausdruck (3) konvergiert für wachsende z gegen den Grenzwert $f(x-0)$, wenn z sich nicht gerade auf der imaginären Achse ins Unendliche bewegt.

b) Der Ausdruck

$$(4) \qquad z\int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu)\, d\mu \qquad (x > x_0)$$

konvergiert für wachsende z gegen den Grenzwert $f(x_0+0)$, falls nicht gerade z sich auf der imaginären Achse ins Unendliche bewegt.[2]

2. Die beiden Ausdrücke (3) und (4) bleiben für jedes der Ungleichung

$$-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$$

genügende τ, also auch in der Umgebung der imaginären Achse und auf derselben endlich.

---

[1] Falls der Punkt x eine Stetigkeitsstelle der Funktion f ist, ist hierfür einfach $f(x)$ zu schreiben. Analoges gilt weiterhin für $f(x_0+0)$.

[2] Dieser Teil des Beweises, der bei Picard fehlt, ist wesentlich, wenn man Schlüsse auf das Verhalten der unharmonischen trigonometrischen Reihen an den Gültigkeitsgrenzen ziehen will.

II. Durchführung des Beweises.

1. a) Nach Voraussetzung ist:

$$f(\mu) = f_1(\mu) - f_2(\mu),$$

wo f_1 und f_2 im Integrationsintervall

$$x_0 \leqq \mu \leqq x$$

monoton wachsende Funktionen sind. Dieselben können immer so gewählt gedacht werden, daß sie in diesem Intervalle beständig größer als Null sind.

Dann ist:

$$z\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu = z\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f_1(\mu)\, d\mu - z\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f_2(\mu)\, d\mu;$$

und wenn

$$z\, e^{-z(x-\mu)} = P + Q\, i$$

gesetzt wird, so hat man:

$$z\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f_\varkappa(\mu)\, d\mu = \int_{x_0}^{x} P f_\varkappa(\mu)\, d\mu + i\int_{x_0}^{x} Q f_\varkappa(\mu)\, d\mu \quad (\varkappa = 1, 2).$$

Da im Integrationsintervalle $f_\varkappa(\mu)$ integrabel, monoton zunehmend und größer als Null ist, kann man auf jedes der beiden reellen Integrale rechts den zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung[1]) in seiner einfachsten Gestalt anwenden, und erhält:

$$\text{(a)} \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{x_0}^{x} P f_\varkappa(\mu)\, d\mu &= f_\varkappa(x-0) \int_{\xi_{1,\varkappa}}^{x} P\, d\mu, \\ \int_{x_0}^{x} Q f_\varkappa(\mu)\, d\mu &= f_\varkappa(x-0) \int_{\xi_{2,\varkappa}}^{x} Q\, d\mu, \end{aligned} \right. \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

---

[1]) Cauchy wendet in seinem Beweise an der entsprechenden Stelle den ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung an, was unzulässig ist, da die bei ihm unter dem Integralzeichen verbleibende Funktion innerhalb des Integrationsintervalles ihr Vorzeichen wechselt. Infolgedessen macht er über die Funktion $f(\mu)$ keinerlei Voraussetzungen, während in Wirklichkeit die Resultate, zu denen er gelangt, nur dann gelten, wenn man über die Funktion $f(\mu)$ beschränkende Annahmen macht.

wenn mit $\xi_{1,\varkappa}$ und $\xi_{2,\varkappa}$ Mittelwerte der Variabeln im Integrationsintervalle bezeichnet werden.

Nun sind die Integrale $\int P\,d\mu$, $\int Q\,d\mu$ bezüglich der reelle Teil und der Koeffizient von i im Integrale $\int z\,e^{-z(x-\mu)}\,d\mu$; ferner ist:

$$\int_{\xi_{\lambda,\varkappa}}^{x} z\,e^{-z(x-\mu)}\,d\mu = 1 - e^{-z(x-\xi_{\lambda,\varkappa})} \qquad (\lambda = 1, 2;\ \varkappa = 1, 2).$$

Setzt man also, wie bisher

$$z = \varrho\,(\cos\tau + i\sin\tau)$$

und trennt Reelles und Imaginäres, so folgt:

$$\text{(b)}\ \begin{cases} \displaystyle\int_{\xi_{\lambda,\varkappa}}^{x} P\,d\mu = 1 - e^{-\varrho(x-\xi_{\lambda,\varkappa})\cos\tau}\cos\left[\varrho\,(x-\xi_{\lambda,\varkappa})\sin\tau\right], \\ \displaystyle\int_{\xi_{\lambda,\varkappa}}^{x} Q\,d\mu = \qquad e^{-\varrho(x-\xi_{\lambda,\varkappa})\cos\tau}\sin\left[\varrho\,(x-\xi_{\lambda,\varkappa})\sin\tau\right], \end{cases}$$
$$(\lambda = 1, 2;\ \varkappa = 1, 2).$$

Macht man nun die Voraussetzung, daß z sich nicht auf der imaginären Achse ins Unendliche bewegen soll, daß also

$$|\cos\tau| > 0$$

ist, so hat man:

$$\lim_{\varrho=\infty}\int_{\xi_{\lambda,\varkappa}}^{x} P\,d\mu = 1; \quad \lim_{\varrho=\infty}\int_{\xi_{\lambda,\varkappa}}^{x} Q\,d\mu = 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2),$$

wobei die Limiten in dem unter I besprochenen Sinn zu verstehen sind.

Es folgt also unmittelbar aus dem zweiten Mittelwertsatz:

$$\lim_{\varrho=\infty}\int_{x_0}^{x} P f_\varkappa(\mu)\,d\mu = f_\varkappa(x-0); \qquad \lim_{\varrho=\infty}\int_{x_0}^{x} Q f_\varkappa(\mu)\,d\mu = 0$$
$$(\varkappa = 1, 2;\ |\cos\tau| > 0)$$

und daraus:

$$\lim_{\varrho=\infty} z\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu = f_1(x-0) - f_2(x-0) = f(x-0)$$
$$(|\cos\tau| > 0).$$

b) Seien die Funktionen $f_1(\mu)$ und $f_2(\mu)$ so beschaffen, daß im Integrationsintervall $(x_0 x)$

$$0 < f_1(\mu) < G_1; \quad 0 < f_2(\mu) < G_2$$

(G_1, G_2 feste positive Zahlen) ist; bezeichne ferner G die größere der beiden Zahlen G_1, G_2; endlich sei:

$$f_{\mathrm{I}}(\mu) = f_1(\mu) - G; \quad f_{\mathrm{II}}(\mu) = f_2(\mu) - G.$$

Dann ist auch:

$$f(\mu) = f_{\mathrm{I}}(\mu) - f_{\mathrm{II}}(\mu),$$

wo jetzt die Funktionen $f_{\mathrm{I}}(\mu)$ und $f_{\mathrm{II}}(\mu)$ im Integrationsintervall $(x_0 x)$ monoton wachsend und beständig kleiner als Null sind.

Eine Anwendung der dieser Voraussetzung entsprechenden Form des zweiten Mittelwertsatzes und eine analoge Rechnung, wie die unter a.) durchgeführte, führt unschwer zu dem Resultate:

$$\lim_{\varrho = \infty} z \int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu - x_0)} f(\mu)\, d\mu = f(x_0 + 0), \qquad (|\cos\tau| > 0).$$

2. Aus den Formeln (b) folgt sofort, daß sicher

$$\left|\int_{\xi_{\lambda,\varkappa}}^{x} P\, d\mu\right| < 2, \quad \left|\int_{\xi_{\lambda,\varkappa}}^{x} Q\, d\mu\right| < 2 \qquad (\lambda, \varkappa = 1, 2)$$

ist, für jeden Wert von $\cos\tau\,(\geqq 0)$ und jeden Wert von ϱ, also für jedes z, dessen reeller Teil positiv ist.

Demnach folgt aus (a):

$$\left.\begin{aligned} \left|\int_{x_0}^{x} P f_\varkappa(\mu)\, d\mu\right| &< 2 f_\varkappa(x - 0), \\ \left|\int_{x_0}^{x} Q f_\varkappa(\mu)\, d\mu\right| &< 2 f_\varkappa(x - 0), \end{aligned}\right\} \qquad (\varkappa = 1, 2)$$

und daher ist:

$$\left| z \int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f_\varkappa(\mu)\, d\mu\right| < 2\, |\sqrt{2}|\, f_\varkappa(x - 0),$$

somit schließlich:

$$\left| z \int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \right| < 2 \left| \sqrt{2} \right| (f_1(x-0) + f_2(x-0)),$$

also endlich.

Analog führt man den entsprechenden Beweis für den Ausdruck:

$$z \int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu - x_0)} f(\mu)\, d\mu.$$

III. Nun mache ich außer den bereits in I aufgestellten Voraussetzungen noch folgende weitere Annahmen:

Wenn z (in der unter I angegebenen Weise) ins Unendliche wächst, soll:

A) der Ausdruck

$$\frac{\varphi(z)}{F(z)} e^{z(x-x_0)}$$

im allgemeinen gegen einen konstanten Grenzwert c' konvergieren,[1])

B) der Ausdruck

$$\frac{\varphi(-z)}{F(-z)}$$

im allgemeinen gegen einen konstanten Grenzwert c konvergieren.

Dann bleibt der Ausdruck (1) in der betrachteten komplexen Halbebene endlich und es ist im allgemeinen:

$$\lim_{\varrho = \infty} z \frac{\mathfrak{F}(z) - \mathfrak{F}(-z)}{2} = \frac{1}{2} c' f(x_0 + 0) - \frac{1}{2} c f(x-0).$$

Die allgemeine Theorie von Cauchy ergibt infolgedessen die Gleichung:

$$(a)\ \frac{1}{2} c' f(x_0 + 0) - \frac{1}{2} c f(x-0) = \sum_{\lambda} \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu,\ (x > x_0),$$

---

[1]) Diese Voraussetzung ist etwas allgemeiner als die bisher von allen Autoren gemachte, daß dieser Grenzwert gerade Null sein muß.

wo sich die Summation auf der rechten Seite über alle Wurzeln λ der Gleichung

$$F(z) = 0$$

in der Weise erstreckt, daß immer alle diejenigen Wurzeln zusammengenommen werden, deren absoluter Betrag zwischen zwei aufeinanderfolgenden Termen der Reihe $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$ liegt, und vorausgesetzt ist, daß diese Gleichung lauter einfache Wurzeln λ hat,[1] und die Kreise (ϱ_ν) so gewählt sind, daß sie nicht durch die Punkte λ gehen.

Ganz analog wie dieser Satz ergibt sich auch der folgende: Ist:

$$(5) \qquad \mathfrak{F}(z) = \frac{\chi(z)}{F(z)} \int_x^{x_1} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \qquad (x_1 > x),$$

wo $z, F(z), \mu, f(\mu)$ dieselbe Bedeutung besitzen, wie bisher, und $\chi(z)$ eine ganze transzendente Funktion von z ist; und setzt man voraus, daß im allgemeinen

$$\text{C)} \qquad \lim_{\varrho = \infty} \frac{\chi(z)}{F(z)} = C,$$

$$\text{D)} \qquad \lim_{\varrho = \infty} \frac{\chi(-z)}{F(-z)} e^{z(x_1 - x)} = C'$$ [2]

ist, so gilt die Gleichung:

$$(\beta) \qquad \frac{1}{2} C f(x+0) - \frac{1}{2} C' f(x_1 - 0) = \sum_\lambda \frac{\chi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_x^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$
$$(x_1 > x),$$

in welcher die Summation auf der rechten Seite wieder über

---

[1] Diese Beschränkung ist unwesentlich. Die Cauchysche Residuenrechnung würde eine, obgleich nicht so einfache Darstellung auch für den Fall gestatten, daß $F(z)$ u. a. auch mehrfache Nullstellen besitzt. Doch kommt dieser Fall bei den Problemen, die auf derartige Entwicklungen führen, kaum jemals vor.

[2] Hier setzten gleichfalls bisher alle Autoren $C' = 0$ voraus.

alle (als einfach vorausgesetzten) Wurzeln λ von $F(z) = 0$ zu erstrecken ist.

IV. Seien nun die Funktionen $\varphi(z)$ und $\chi(z)$ so gewählt, daß außer den Bedingungen B) und C) auch noch die weitere

$$\text{E)} \qquad \varphi(z) + \chi(z) = F(z)$$

erfüllt ist, und sei das Intervall $(x_0 x_1)$ derart angenommen, daß für alle Werte der Variabeln x innerhalb desselben[1]) die Bedingungen A) und D) zugleich bestehen.

Dann folgt aus E):

$$\lim_{\varrho=\infty}\left(\frac{\varphi(z)}{F(z)} + \frac{\chi(z)}{F(z)}\right) = 1; \quad \lim_{\varrho=\infty}\left(\frac{\varphi(-z)}{F(-z)} + \frac{\chi(-z)}{F(-z)}\right) = 1;$$

da die Grenzwerte

$$\lim_{\varrho=\infty}\frac{\chi(z)}{F(z)} \quad \text{und} \quad \lim_{\varrho=\infty}\frac{\varphi(-z)}{F(-z)}$$

nach B) und C) existieren (höchstens gewisse Richtungen ausgenommen), gilt das gleiche auch von den Grenzwerten:

$$\lim_{\varrho=\infty}\frac{\varphi(z)}{F(z)} \quad \text{und} \quad \lim_{\varrho=\infty}\frac{\chi(-z)}{F(-z)};$$

wegen A) und D) sind diese letzten Grenzwerte aber im allgemeinen Null,[2]) also die beiden ersten gleich 1; d. h. die Konstanten c und C sind im vorliegenden Falle gleich 1.

Berücksichtigt man noch, daß (bei gleicher Bezeichnungsweise wie oben)

$$\varphi(\lambda) + \chi(\lambda) = F(\lambda) = 0$$

ist, so erhält man aus den Gleichungen (α) und (β):

$$(\alpha_1) \qquad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2} c' f(x_0 + 0) - \tfrac{1}{2} f(x - 0) \\ &= \sum_\lambda \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \qquad (x > x_0); \end{aligned}$$

---

[1]) An den Grenzen x_0, x_1 braucht das nicht mehr der Fall zu sein.

[2]) Die Richtungen $\tau = \pm \frac{\pi}{2}$ sind dabei den auszuschließenden zuzuzählen.

$$(\beta_1) \qquad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\, C' f(x_1 - 0) - \tfrac{1}{2} f(x+0) \\ &= \sum_\lambda \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_x^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \qquad (x_1 > x). \end{aligned}$$

Addition ergibt das Resultat:

$$(\gamma) \qquad \begin{aligned} \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} &= \frac{c'}{2} f(x_0+0) \\ &+ \frac{C'}{2} f(x_1 - 0) - \sum_\lambda \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \quad (x_1 > x_0), \end{aligned}$$

wo sich die Summation auf der rechten Seite in der unter III angegebenen Weise über alle (als einfach vorausgesetzten) Wurzeln λ der Gleichung

$$F(z) = 0$$

zu erstrecken hat.

Ist x insbesondere eine Stetigkeitsstelle der Funktion f, so ist in (α_1), (β_1), (γ) statt $f(x-0)$ und $f(x+0)$ einfach $f(x)$ zu setzen; ebenso, wenn x_0 resp. x_1 Stetigkeitsstellen von f sind, statt $f(x_0+0)$ und $f(x_1-0)$ bezüglich $f(x_0)$ und $f(x_1)$.

In dem speziellen Falle, daß f an der Stelle x stetig, und $c' = C' = 0$ ist, erhält man die bei Picard[1]) gegebene Formel:

$$(\gamma_1) \qquad f(x) = -\sum_\lambda \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \qquad (x_1 > x_0).$$

Die Formeln (γ) und (γ_1) gelten, ihrer Herleitung gemäß, nur für alle x, welche der Ungleichung

$$x_0 < x < x_1$$

genügen.

V. Es ist jetzt auf Grund der gegebenen Darstellung leicht, die Werte zu finden, welche die in (γ) rechts stehende Summe

$$\sum_\lambda \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \qquad (x_1 > x_0)$$

---

[1]) A. a. O., p. 175. 2. éd. p. 187, Formel (γ).

an den Integrationsgrenzen x_0 und x_1 selbst annimmt, falls nur die Voraussetzungen B), C), E) und zwei den Voraussetzungen A) und D) analoge erfüllt sind.

Ich will dazu zunächst zwei allgemeinere Formeln ableiten, als deren Spezialfälle jene Werte sich ergeben.

1. Für $x = x_0$ reduziert sich die Formel (α) (wie sich auch unschwer aus ihrer Herleitung verifizieren läßt), auf die Identität

$$0 = \sum_\lambda \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_0} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$

und Formel (β) ergibt den Satz:

Hat man zwei ganze transzendente Funktionen χ und F der komplexen Variabeln $z = \varrho\, e^{i\tau}$ so gewählt, daß F lauter einfache Nullstellen hat, und daß im allgemeinen

$$\text{C)} \qquad \lim_{\varrho = \infty} \frac{\chi(z)}{F(z)} = C,$$

$$\text{D}_1\text{)} \qquad \lim_{\varrho = \infty} \frac{\chi(-z)}{F(-z)} e^{z(x_1 - x_0)} = C''$$

(C, C'' Konstante) ist, und stellt $f(x)$ im Intervall

$$x_0 \leqq x \leqq x_1$$

eine Funktion mit beschränkter Schwankung dar, so ist

$$(\delta) \quad \sum_\lambda \frac{\chi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x_0-\mu)} f(\mu) d\mu = \frac{1}{2}\, C f(x_0 + 0) - \frac{1}{2}\, C'' f(x_1 - 0)$$

($x_1 > x_0$), wo die Summe links nach den (wieder als einfach vorausgesetzten) Wurzeln λ von $F(z) = 0$ in der oben ausgeführten Weise fortschreitet.

2. Ebenso folgt:

Haben F, f und z dieselbe Bedeutung wie im letzten Satz und ist $\varphi(z)$ eine ganze transzendente Funktion von z, die so gewählt ist, daß im allgemeinen

A$_1$) $$\lim_{\varrho=\infty} \frac{\varphi(z)}{F(z)} e^{z(x_1-x_0)} = c'',$$

B) $$\lim_{\varrho=\infty} \frac{\varphi(-z)}{F(-z)} = c$$

ist, so gilt die Gleichung:

$$(\varepsilon) \qquad \sum_\lambda \frac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)} \int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x_1-\mu)} f(\mu)\, d\mu = \frac{1}{2} c'' f(x_0+0) - \frac{1}{2} c f(x_1-0)$$

$(x_1 > x_0)$, die Summe links ebenso verstanden wie im vorigen Satz.

3. Wählt man also jetzt die Funktionen φ und χ so, daß die Bedingungen A$_1$), B), C), D$_1$) und E) zu gleicher Zeit erfüllt sind,[1]) so ist wieder $c = C = 1$, und man erhält die beiden Formeln:

$$\left.\begin{array}{l} (\delta_1) \; -\sum_\lambda \dfrac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)} \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x_0-\mu)} f(\mu)\, d\mu = \frac{1}{2} f(x_0+0) - \frac{1}{2} C'' f(x_1-0) \\ (\varepsilon_1) \; -\sum_\lambda \dfrac{\varphi(\lambda)}{F'(\lambda)} \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} e^{\lambda(x_1-\mu)} f(\mu)\, d\mu = \frac{1}{2} f(x_1-0) - \frac{1}{2} c'' f(x_0+0) \end{array}\right\} (x_1 > x_0),$$

welche die Werte der in (γ) auftretenden Summe an den Integrationsgrenzen x_0 und x_1 geben. Diese Werte hängen also im allgemeinen von $f(x_1-0)$ und $f(x_0+0)$ zugleich ab.

---

[1]) Es ist zu bemerken, daß die Konstante C'' der Formel D$_1$) von der Konstanten C' der Formel D), und ebenso die Konstante c'' der Formel A$_1$) von der Konstanten c' der Formel A) im allgemeinen verschieden sein wird, da man doch als Intervall $(x_0\, x_1)$ das größte Intervall wählt, innerhalb dessen noch die Bedingungen D) und A) zugleich erfüllt sind.

VI. Beispiele.

Zur Erläuterung der letzten Entwicklungen sollen schließlich noch zwei Beispiele angegeben werden: der Fall der gewöhnlichen Fourierschen Reihe, und eine in der Theorie der Wärmeleitung mehrfach auftretende Reihenentwicklung.

1. Bei der nach den Sinus und Cosinus der ganzzahligen Vielfachen des Argumentes fortschreitenden Fourierschen Reihe sind die Parameter die Wurzeln der transzendenten Gleichung:

$$\sin \pi y = 0, \tag{6}$$

welche durch die Substitution

$$y i = z \qquad (z = \varrho e^{i\tau})$$

in die determinierende Gleichung

$$F(z) = e^{2\pi z} - 1 = 0 \tag{6*}$$

übergeht. Durch die Annahme

$$\varphi(z) = -1, \quad \chi(z) = e^{2\pi z}$$

erfüllt man die Bedingung E) und erhält, wenn f im Intervalle $(x_0, x_0 + 2\pi)$ eine Funktion mit beschränkter Schwankung ist, aus (γ) unschwer die Entwicklung:

$$\begin{aligned} &\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(\mu)\, d\mu + \frac{1}{\pi} \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(\mu) \cos \nu (x - \mu)\, d\mu, \end{aligned} \tag{7}$$

welche für alle

$$x_0 < x < x_0 + 2\pi$$

gültig ist.

Da die Konstanten c'' und C'' in diesem Fall durch

$$c'' = C'' = \lim_{\varrho = \infty} \frac{e^{z(x_0 + 2\pi - x_0 - 2\pi)}}{e^{-2\pi z} - 1} = -1 \qquad (|\cos \tau| > 0)$$

gegeben sind, und der unter dem Limes stehende Ausdruck für alle

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \tau < +\frac{\pi}{2}$$

endlich bleibt, so erhält man nach (δ_1) und (ε_1) als Wert der Fourierschen Reihe an den beiden Gültigkeitsgrenzen x_0 und $x_0 + 2\pi$:

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0+2\pi-0)}{2}, \tag{8}$$

übrigens ein bekanntes Resultat.

2. In der Theorie der Wärmeleitung tritt mehrfach diejenige unharmonische trigonometrische Reihe auf, deren Parameter die Wurzeln der Gleichung

$$(\omega\,\omega_1 - y^2)\sin a y + (\omega + \omega_1)\, y \cos a y = 0 \tag{9}$$

sind. Die Substitution

$$y i = z$$

führt diese Gleichung in die folgende über:

$$F(z) = e^{az}(z+\omega)(z+\omega_1) - e^{-az}(z-\omega)(z-\omega_1) = 0, \tag{9*}$$

und die Annahme

$$\varphi(z) = -e^{-az}(z-\omega)(z-\omega_1), \quad \chi(z) = e^{az}(z+\omega)(z+\omega_1)$$

erfüllt die Bedingung E). Bedeutet f im Intervalle $(x_0, x_0 + 2a)$ eine Funktion mit beschränkter Schwankung, so ergibt sich aus (γ) nach längerer, jedoch leichter Rechnung die Entwicklung:

$$\begin{aligned}\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} &= \frac{\omega\,\omega_1}{2(a\,\omega\,\omega_1+\omega+\omega_1)}\int_{x_0}^{x_0+2a} f(\mu)\,d\mu \\ &\quad - \sum_\nu \frac{2(\omega+\omega_1)\nu}{(\omega+\omega_1)\sin 2a\nu - 2(\omega+\omega_1)a\nu - 4\nu\sin^2 a\nu} \\ &\quad \cdot \int_{x_0}^{x_0+2a} f(\mu)\cos\nu(x-\mu)\,d\mu,\end{aligned} \tag{10}$$

in welcher sich die Summation über alle positiven Wurzeln ν der transzendenten Gleichung (9) erstreckt, und die für alle

$$x_0 < x < x_0 + 2a$$

gültig ist.

Die Konstanten c'' und C'' sind in diesem Falle durch

$$c'' = C'' = \lim_{\varrho = \infty} \frac{1}{e^{-2az} - \dfrac{(z+\omega)(z+\omega_1)}{(z-\omega)(z-\omega_1)}} = -1 \qquad (|\cos\tau| > 0)$$

gegeben, und der unter dem Limes stehende Ausdruck bleibt wieder für alle

$$-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$$

endlich; die erhaltene Reihenentwicklung stellt also nach (δ_1) und (ε_1) an den beiden Gültigkeitsgrenzen x_0 und $x_0 + 2a$ die Funktion

$$(11) \qquad \frac{f(x_0+0) + f(x_0 + 2a - 0)}{2}$$

dar, wie die Fouriersche Reihe, welche man aus ihr durch Grenzübergang zu $\omega = \omega_1 = \infty$ und die Spezialisierung $a = \pi$ erhält.

Dieses Resultat gilt aber nicht mehr für den Grenzfall:

$$\omega_1 = \infty, \quad \omega \text{ endliche Zahl},$$

in welchem die gegebene transzendente Gleichung

$$(12) \qquad \omega \sin a y + y \cos a y = 0$$

und die entsprechende Reihe

$$(13) \quad \frac{\omega}{2(1+a\omega)} \int_{x_0}^{x_0+2a} f(\mu)\, d\mu + \sum_\nu \frac{2\nu}{2a\nu - \sin 2a\nu} \int_{x_0}^{x_0+2a} f(\mu) \cos\nu(x-\mu)\, d\mu\,[1])$$

lautet.

[1]) Die Summation ist hier wieder bloß über die positiven Wurzeln ν der transzendenten Gleichung (12) zu erstrecken.

In diesem Fall hat man nämlich:

$$c'' = C'' = \lim_{\varrho=\infty}\left\{\lim_{\omega_1=\infty}\frac{1}{e^{-2az}\dfrac{(z+\omega)(z+\omega_1)}{(z-\omega)(z-\omega_1)}}\right\} = +1$$

$$(|\cos\tau| > 0);$$

die Reihe (13) stellt daher an der unteren Grenze x_0 die Funktion:

(14) $$\frac{f(x_0+0)-f(x_0+2a-0)}{2},$$

an der oberen Grenze x_0+2a die Funktion

(15) $$-\frac{f(x_0+0)-f(x_0+2a-0)}{2}$$

dar.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1909

Band/Volume: 1909

Autor(en)/Author(s): Berwald Ludwig

Artikel/Article: Vereinfachte Herleitung unharmonischer trigonometrischer Reihen 1-21