Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 19. Abhandlung

Über Kurvenpaare im Raume

von

A. Voss

Vorgetragen am 6. Februar 1909

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 11,2, 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. A. 11,3, 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. A. 14,3, 1883 ℳ —.50
* — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 14,2, 1883 ℳ 1.—
* — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
* — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. A. 17,1, 1889 ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.

Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 ℳ —.40

Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1ter O. definirten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
* — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
— Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 ℳ 1.20
— Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 ℳ —.20

Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2. Sb. 1887, p. 33—42.
— Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
— Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
— Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 ℳ 3.—
— Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 ℳ —.20
— Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 ℳ —.40
— u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 ℳ —.40
— Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 ℳ —.40
— Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 ℳ —.20

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1909, 19. Abhandlung

Über Kurvenpaare im Raume

von

A. Voss

Vorgetragen am 6. Februar 1909

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Zwei reelle Kurven C, C_1 im Raume[1]) stehen in einer reziproken Beziehung, wenn ihre Punkte P, P_1 derart einander zugeordnet sind, daß die Verbindungslinien PP_1 von unveränderlicher Länge k sind, und die Tangenten der Kurven in P, P_1 einen konstanten Winkel γ mit PP_1 bilden.

Es besteht aber ein wesentlicher Unterschied, je nachdem dieser Winkel $\frac{\pi}{2}$ beträgt oder nicht. Im ersten Falle findet keine Relation zwischen den zugehörigen Bogenelementen ds, ds_1 statt, und wenn der Winkel für die Kurve C gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, gilt wegen der Unveränderlichkeit von PP_1 dasselbe für C_1. Im zweiten Falle aber muß die Gleichung $ds \cos \gamma = ds_1 \cos \gamma_1$, also $ds = ds_1$ bestehen: dann ist aber bei gegebenem $\cos \gamma$ die Lage der Linie PP_1 gegen das charakteristische Triëder von C, wie sich leicht zeigt, durch eine Differentialgleichung erster Ordnung bestimmt, welche nur von der Krümmung und Torsion der Kurve C und den Konstanten k und γ abhängt. Es besitzt daher der Fall $\gamma = \frac{\pi}{2}$ — abgesehen von seiner Symmetrie —, wenn man von der Unveränderlichkeit von γ nicht abgehen will, einen größeren Spiel-

[1]) Es ist vielleicht nicht unzweckmäßig, „Kurven im Raume" und „Raumkurven" zu unterscheiden. Die meisten der in der Literatur behandelten Fragen handeln allgemein von Kurven im Raume, während man die Bezeichnung „Raumkurve" nur da verwenden sollte, wo die betreffende Kurve einen von ∞ verschiedenen Torsionsradius hat, wie dies in der Theorie der algebraischen Kurven längst üblich ist.

raum für weitere Untersuchungen, und daher soll nur diese Beziehung hier verfolgt werden.

Unter einem Kurvenpaar im Raume verstehen wir daher zwei reelle Kurven C, C_1, welche durch gemeinsame Normalen von konstanter Länge punktweise aufeinander bezogen sind. Dieselben scheinen sich von jedem Punkte dieser Normalen aus betrachtet unter dem Winkel der korrespondierenden Tangenten zu schneiden, sie „schneiden sich unter diesem Winkel“.

Es handelt sich hier also um die kinematische Frage nach den Beziehungen zwischen den Bahnen irgend zweier Punkte einer starren Geraden, welche beständig „senkrecht zu sich selbst“ bewegt wird. Indessen scheint es nicht zweckmäßig, die Gesichtspunkte der Bewegungslehre in den Vordergrund zu stellen. Schon die Untersuchung der Bertrandschen Kurvenpaare, welche einen ganz speziellen Fall des hier behandelten Gegenstandes bilden, zeigt, daß eine andere, an die Beziehungen zur natürlichen Geometrie anknüpfende Behandlung einfacher ausfällt. Eine zweite Betrachtungsweise könnte an die Regelflächen anschließen, auf denen die Kurven C, C_1 orthogonale Trajektorien der Erzeugenden bilden. Ich habe auch diesen an die Flächentheorie anknüpfenden Weg, der übrigens zu manchen für diese letztere interessanten Resultaten führt,[1]) hier nicht verfolgt, weil mir ein anderer, dessen Grundlagen in den § 1, § 12 entwickelt sind, angemessener erschien.

Da das Beispiel der Bertrandschen Kurven — abgesehen von den schönen Eigenschaften der Fokalellipsen und Hyperbeln — fast das einzige ist, in dem man sich mit den gegenseitigen Beziehungen von Kurven im Raume beschäftigt hat, so dürften die folgenden Untersuchungen vielleicht geeignet sein, das Interesse auf dieses bisher, wie es scheint, weniger betretene Gebiet zu lenken.

[1]) Auf den zu den Bertrandschen Kurven gehörigen Normalen-Regelflächen bilden diese selbst zwei orthogonale Trajektorien der Erzeugenden, die zugleich Haupttangentenkurven der Flächen sind.

Eine große Zahl von weiteren Problemen, die im folgenden teils angedeutet, teils sich unmittelbar an dasselbe anschließen, wird sich jedem leicht darbieten.

Werden übrigens Kurven im Raume durch ihre natürlichen Gleichungen charakterisiert, so entzieht sich freilich in denjenigen Fällen, wo man die zugehörige Riccatische Gleichung nicht durch verhältnismäßig einfache Quadraturen zu lösen im stande ist, die Gestalt der Kurven einer näheren Diskussion. Es sind daher vorzugsweise solche Fälle besprochen, die auch der Anschauung zugänglich sind; man wird erkennen, daß auch diese in mannigfaltiger Weise einer weiteren Ausdehnung fähig sind.

§ 1.

Kurvenpaare im Raume.

Es seien x, y, z die Koordinaten der Punkte P einer reellen Kurve C im Raum, der Bogen s die unabhängige Variabele. Die Richtungscosinus ihrer Tangente, Hauptnormale und Binormale seien, wie üblich, durch das Schema

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \xi, & \eta, & \zeta \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{matrix}$$

bezeichnet, dessen Determinante gleich $+1$ ist. Alsdann gelten die Formeln von Frenet

$$1)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \alpha \\ \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\xi}{r} \\ \frac{d\xi}{ds} &= -\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{T}\right) \\ \frac{d\lambda}{ds} &= \frac{\xi}{T} \end{aligned}$$

nebst den entsprechenden für y, β, η, μ; z, γ, ζ, ν; r und T sind die Radien der Krümmung und Torsion.

Wird nun auf derjenigen Normalen der Kurve C, welche unter dem Winkel σ gegen die Hauptnormale geneigt ist, — wobei ein positives σ demjenigen Drehungssinn entspricht, durch den, vermöge der Rotation $\frac{\pi}{2}$ um die Tangente, die Hauptnormale in die Binormale übergeführt wird — eine konstante Strecke k abgetragen, so bilden die Endpunkte P_1 eine zweite Kurve C_1, deren Koordinaten x_1, y_1, z_1 sind. Die entsprechenden Richtungscosinus des charakteristischen Triëders von C_1 seien

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1 \\ \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \end{matrix}$$

die beiden Krümmungsradien r_1 und T_1, der Winkel, den die von P_1 nach P gerichtete Normale von C_1 mit der Hauptnormale von C_1 bildet, sei σ_1, das Bogenelement von C_1 endlich ds_1, so gelten die Formeln

$$2)\qquad \begin{aligned} x_1 &= x + k(\xi\cos\sigma + \lambda\sin\sigma) \\ x &= x_1 + k(\xi_1\cos\sigma_1 + \lambda_1\sin\sigma_1) \end{aligned}$$

nebst den entsprechenden Vertauschungen für y_1, z_1 u. s. w.

Solche Kurven C, C_1 bilden ein Paar, welches durch gemeinsame Normalen von konstanter Länge k verbunden ist, es soll kurz als ein Kurvenpaar bezeichnet werden.

Es handelt sich nun zunächst um die Beziehungen, welche zwischen den beiden Triëdern stattfinden. Differentiiert man die erste der Gleichungen 2) nach s und bezeichnet den Differentialquotienten $\frac{ds_1}{ds}$ mit S, wobei S als eine positive Zahl anzusehen ist, so folgt nach den Formeln 1)

$$3)\qquad \alpha_1 S = \alpha p + q(\xi\sin\sigma - \lambda\cos\sigma),$$

wenn

$$p = 1 - \frac{k}{r} \cos \sigma$$

4) $$q = k \left(\frac{1}{T} - \sigma' \right)$$

$$\sigma' = \frac{d\sigma}{ds}$$

gesetzt wird. Es ist daher

5) $$S^2 = p^2 + q^2.$$

Aus 3) folgt

6) $$\begin{aligned} S(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) &= p \\ S(\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta) &= q \sin\sigma \\ S(\alpha_1\lambda + \beta_1\mu + \gamma_1\nu) &= -q\cos\sigma. \end{aligned}$$

Verfährt man ebenso mit der zweiten der Gleichungen 2), so entsteht

$$p_1 = 1 - \frac{k}{r_1} \cos \sigma_1$$

4[a]) $$q_1 = k \left(\frac{1}{T_1} - \sigma_1' \right)$$

$$\sigma_1' = \frac{d\sigma_1}{ds_1}$$

und es wird

3[a]) $$\frac{\alpha}{S} = \alpha_1 p_1 + q_1 (\xi_1 \sin\sigma_1 - \lambda_1 \cos\sigma_1),$$

wobei

6[a]) $$\begin{aligned} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 &= p_1 S \\ \alpha\xi_1 + \beta\eta_1 + \gamma\zeta_1 &= q_1 S \sin\sigma_1 \\ \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1 + \gamma\nu_1 &= -q_1 S \cos\sigma_1. \end{aligned}$$

Da nach 6) und 6[a])

I[a] $$S^2 p_1 = p$$

und nach 3[a])

$$\frac{1}{S^2} = p_1^2 + q_1^2$$

ist, so folgt $$S^4 q_1^2 = q^2;$$

es läßt sich aber zeigen, daß unter den angenommenen Voraussetzungen über die Lage der beiden Triëder

I^b $$S^2 q_1 = q \qquad \text{ist.}$$

Durch nochmalige Differentiation von 3) nach s folgt unter Benutzung von 1)

$$\begin{aligned}\frac{\xi_1}{r_1} S^2 + \alpha_1 S' = \frac{\xi}{r} p + \alpha \left(\frac{dp}{ds} - q\frac{\sin\sigma}{r}\right) \\ - \frac{q^2}{k}(\xi\cos\sigma + \lambda\sin\sigma) \\ + (\xi\sin\sigma - \lambda\cos\sigma)\frac{dq}{ds},\end{aligned}$$

wobei $S' = \dfrac{dS}{ds}$ gesetzt ist.

Setzt man in diese Gleichung den aus 3) folgenden Wert von α_1, α ein, so hat man

$$\begin{aligned}\frac{\xi_1}{r_1} S^2 = \alpha\left(\frac{dp}{ds} - \frac{S'}{S} p - \frac{q}{r}\sin\sigma\right) \\ + \xi\left(\sin\sigma\left(\frac{dq}{ds} - \frac{S'}{S} q\right) + \left(\frac{p}{r} - \frac{q^2\cos\sigma}{k}\right)\right. \\ \left. - \lambda\left(\cos\sigma\left(\frac{dq}{ds} - \frac{S'}{S} q\right) + \frac{q^2}{k}\sin\sigma\right)\right.\end{aligned}$$

Nun ist nach 5)

$$\frac{dp}{ds} - p\frac{S'}{S} = \frac{q}{S^2}\left(q\frac{dp}{ds} - p\frac{dq}{ds}\right) = q\,\Omega$$

$$\frac{dq}{ds} - q\frac{S'}{S} = \frac{-p}{S^2}\left(q\frac{dp}{ds} - p\frac{dq}{ds}\right) = -p\,\Omega,$$

falls

II $$\Omega = \frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\left(\frac{p}{q}\right)$$

gesetzt wird. Die vorstehende Gleichung für ξ_1, η_1, ζ_1 geht daher in die folgende über

$$7)\quad \begin{aligned} \frac{\xi_1}{r_1} S^2 &= \alpha q \left(\Omega - \frac{\sin\sigma}{r}\right) \\ &+ \xi \left(\frac{p}{r} - \frac{q^2}{k} \cos\sigma - p\,\Omega \sin\sigma\right) \\ &+ \lambda \left(p\,\Omega \cos\sigma - \frac{q^2}{k} \sin\sigma\right), \end{aligned}$$

die man auch in die Form

$$7^{a})\quad \begin{aligned} \frac{\xi_1}{r_1} S^2 &= \left(\Omega - \frac{\sin\sigma}{r}\right) [\alpha q - p(\xi \sin\sigma - \lambda \cos\sigma)] \\ &+ \left(\xi \frac{\cos\sigma + \lambda \sin\sigma}{k}\right) (p - S^2) \end{aligned}$$

bringen kann.

Aus 7) folgt nun durch Multiplikation mit den Richtungscosinus des Triëders von C und Summation

$$\mathrm{III}^{a}\quad (\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1) \frac{S^2}{r_1} = \frac{p}{r} - \frac{q^2}{k} \cos\sigma - p\,\Omega \sin\sigma$$

$$\mathrm{III}^{b}\quad (\alpha\xi_1 + \beta\eta_1 + \gamma\zeta_1) \frac{S^2}{r_1} = q\left(\Omega - \frac{\sin\sigma}{r}\right)$$

$$\mathrm{III}^{c}\quad (\lambda\xi_1 + \mu\eta_1 + \nu\zeta_1) \frac{S^2}{r_1} = p\,\Omega \cos\sigma - q^2 \frac{\sin\sigma}{k},$$

ferner durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen 7)

$$\frac{S^4}{r_1^2} = q^2 \left(\Omega - \frac{\sin\sigma}{r}\right)^2 + \frac{p^2}{r^2} - 2p \frac{q^2 \cos\sigma}{rk} - 2p^2 \frac{\Omega}{r} \sin\sigma + \frac{q^4}{k^2} + \Omega^2 p^2$$

oder, wenn man $\frac{\cos\sigma}{r} = \frac{1-p}{k}$ setzt, und $S^2 = p^2 + q^2$ einführt

$$\mathrm{IV}^{a}\quad \frac{S^4}{r_1^2} = S^2 \left(\Omega - \frac{\sin\sigma}{r}\right)^2 + \frac{(S^2 - p)^2}{k^2}$$

$$\mathrm{IV}^{b}\quad \frac{S^4}{r_1^2} = S^2\,\Omega \left(\Omega - 2\frac{\sin\sigma}{r}\right) + \frac{S^2}{r^2} + \frac{q^2}{k^2}(S^2 - 1).\text{[1]}$$

---

[1]) Für $S = 1$ ist also $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} - \frac{2}{r_1 r} \cos(\sigma + \sigma_1) = \Omega^2$.

Durch diese Gleichungen ist der Krümmungshalbmesser r_1 der Kurve C_1 bestimmt. Setzt man ferner aus 6[a]) den Wert von

$$\alpha \xi_1 + \beta \eta_1 + \gamma \zeta_1 = q_1 S \sin \sigma_1$$

in III[b] ein, so erhält man

$$q_1 \frac{\sin \sigma_1}{r_1} S^3 = q \left(\Omega - \frac{\sin \sigma}{r} \right)$$

oder, wenn nach I[b] q_1 durch q ausgedrückt wird

$$q \left(S \frac{\sin \sigma_1}{r_1} + \frac{\sin \sigma}{r} \right) = \Omega q,$$

so daß — wenigstens so lange nicht $q = 0$ ist —

V $$S \frac{\sin \sigma_1}{r_1} + \frac{\sin \sigma}{r} = \Omega$$

wird. Die Formel V gilt aber auch der Kontinuität zufolge an allen Stellen, wo $q = 0$ ist; daß sie auch dann noch gilt, wenn q durchweg Null ist, wird sich weiter unten zeigen.

Aus den Gleichungen I[b] und V hat man also

8) $$\begin{aligned} \frac{k \cos \sigma_1}{r_1} &= \frac{S^2 - 1 + \dfrac{k \cos \sigma}{r}}{S^2} \\ \frac{k \sin \sigma_1}{r_1} &= \frac{k}{S} \left(\Omega - \frac{\sin \sigma}{r} \right) \\ \operatorname{tg} \sigma_1 &= k \frac{S \left(\Omega - \dfrac{\sin \sigma}{r} \right)}{S^2 - 1 + \dfrac{k \cos \sigma}{r}} \end{aligned}$$

und diese Gleichungen bestimmen eindeutig den Winkel σ_1, da r_1 eine absolute Zahl ist. Die Torsion von C_1 entnimmt man endlich aus der Gleichung

$$\frac{q}{S^2} = q_1 = k \left(\frac{1}{T_1} - \sigma_1' \right);$$

es würde sehr umständlich sein, sie durch Bildung der dritten Differentialquotienten von x_1, y_1, z_1 nach s_1 zu berechnen.

Die Gleichungen I bis V, welche hier noch einmal zusammengestellt werden sollen

$$\text{VI} \qquad \begin{aligned} p &= 1 - \frac{k\cos\sigma}{r}, \qquad q = k\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right) \\ p_1 &= 1 - \frac{k\cos\sigma_1}{r_1}, \qquad q_1 = k\left(\frac{1}{T_1} - \sigma_1'\right) \\ S^2 &= p^2 + q^2, \qquad S^2 q_1 = q, \qquad S^2 p_1 = p \\ S\frac{\sin\sigma_1}{r_1} &+ \frac{\sin\sigma}{r} = \Omega = \frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\left(\frac{p}{q}\right) \end{aligned}$$

enthalten die vollständige Theorie eines Kurvenpaares und sind ganz allgemein gültig. Ist die eine Kurve C_1 etwa eine Gerade, so kann man die Binormale willkürlich festlegen, dabei ist aber zu beachten, daß der Winkel σ_1 hievon abhängig wird. Eine Kurve C kann also nur dann mit einer Geraden ein Paar bilden, wenn nach IV[a]

$$\Omega - \frac{\sin\sigma}{r} = 0, \qquad S^2 - p = 0$$

ist, dies sind Beziehungen, denen alle willkürlichen Kurven auf einem Kreiszylinder genügen.

Nach den Gleichungen VI haben p und p_1 sowie q und q_1 immer das gleiche Zeichen; es ist zugleich

$$pp_1 + qq_1 = 1,$$

mithin auch

$$pp_1 < 1, \qquad qq_1 < 1.$$

§ 2.

Beziehungen zwischen den charakteristischen Triëdern eines Kurvenpaares.

Bezeichnet man die Richtungen der Tangenten von C und C' in entsprechenden Punkten P, P_1 mit t, t_1 und ebenso die der Hauptnormalen und Binormalen mit h, h_1; b, b_1 so folgt nach § 1, 6)

$$\cos(t\,t_1) = \frac{p}{S^2}$$

$$\cos(t_1\,h) = q\,\frac{\sin\sigma}{S^2}$$

$$\cos(t_1\,b) = -\,q\,\frac{\cos\sigma}{S^2}$$

und nach § 1, III):

$$\cos(t\,h_1) = \frac{r_1}{S^2}\,q\left(\Omega - \frac{\sin\sigma}{r}\right)$$

$$\cos(b\,h_1) = \frac{r_1}{S^2}\left(\frac{p}{r} - \frac{q^2}{k}\cos\sigma - p\,\Omega\sin\sigma\right)$$

$$\cos(b\,h_1) = \frac{r_1}{S^2}\left(p\,\Omega\cos\sigma - \frac{q^2}{k}\sin\sigma\right),$$

sowie nach § 1, 6[a]):

$$\cos(t\,h_1) = q_1\sin\sigma_1$$

$$\cos(t\,b_1) = -\,q_1\cos\sigma_1.$$

Zur Berechnung von $\cos(h\,b_1)$ benutzt man die Gleichung:

$$\cos(h\,b_1) = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \end{vmatrix},$$

welche durch Multiplikation mit der in § 1 erwähnten Determinante

$$(\alpha\,\xi\,\lambda)$$

die Formel

$$\cos(h\,b_1) = -\,(\cos t\,t_1)\cos(h_1\,b) - \cos(t_1\,b)\cos(h_1\,t)$$

$$= -\,\frac{r_1}{S^3}\left(S^2\,\Omega\cos\sigma - \frac{\sin\sigma}{k}\,q^2\right)$$

liefert.

Ebenso findet man:

$$\cos(b\,b_1) = \cos(t\,t_1)\cos(h\,h_1) - \cos(t_1\,h)\cos(t\,h)$$

$$= \frac{r_1}{S^3}\left(\frac{S^2}{r} - S^2\,\Omega\sin\sigma - \frac{q^2}{k}\cos\sigma\right)$$

$$\cos(t b_1) = \cos(t_1 h)\cos(b h_1) - \cos(t_1 b)\cos(h h_1)$$
$$= \frac{r_1}{S^3}\frac{q}{k}(p - S^2) = -q\frac{\cos\sigma_1}{S},\text{[1]}$$

wenn man $\cos\sigma_1 = (1 - p_1)\frac{r_1}{k}$ setzt.

Da diese Beziehungen gänzlich von der in § 1, I^b angegebenen Gleichung unabhängig abgeleitet sind, kann man die letztere in der Tat hieraus folgern.

---

[1]) Diese Formeln entsprechen den Formeln der sphärischen Trigonometrie, aus welcher sie unter sorgfältiger Beachtung der Vorzeichen auch durch die Betrachtung der beiden Triëder abgeleitet werden können, sobald man die Beziehungen IV und V des § 1 hinzuzieht. In der Tat erhält man auch durch geeignete Umformung der im Texte angegebenen Werte für die Richtungscosinus

$$\cos(b b_1) = -\sin\sigma\sin\sigma_1 - \frac{p}{S}\cos\sigma\cos\sigma_1$$

$$\cos(h h_1) = -\cos\sigma\cos\sigma_1 - \frac{p}{S}\sin\sigma\sin\sigma_1$$

$$\cos(h b_1) = -\cos\sigma\sin\sigma_1 + \frac{p}{S}\sin\sigma\cos\sigma_1$$

$$\cos(h_1 b) = -\sin\sigma\cos\sigma_1 + \frac{p}{S}\cos\sigma\sin\sigma_1$$

$$\cos(t t') = \frac{p}{S} \quad \text{u. s. w.}$$

Da die Vorzeichen den Voraussetzungen über die beiden Triëder entsprechend gewählt sein müssen, ist es vielleicht nicht überflüssig, diese Gleichungen auch durch die Rechnung zu bestätigen. So hat man z. B. für $\cos(b b_1)$, wenn Ω durch seinen Wert aus § 1, V ersetzt wird

$$\cos(b b_1) = \frac{r_1}{S^3}\left(\frac{S^2}{r} - S^2\left(\frac{\sin\sigma\sin\sigma_1}{r_1}S + \frac{\sin^2\sigma}{r}\right) - \cos\sigma\frac{q^2}{k}\right)$$
$$= -\sin\sigma\sin\sigma_1 + \frac{r_1}{S^3}\left(S^2\frac{\cos\sigma}{r} - \frac{q^2}{k}\right)\cos\sigma,$$

und da

$$\frac{S^2\cos\sigma}{r} - \frac{q^2}{k} = -S^2\frac{p}{r_1}\cos\sigma_1$$

$$\cos(b b_1) = -\sin\sigma\sin\sigma_1 - \frac{p}{S}\cos\sigma\cos\sigma_1$$

wie behauptet wurde.

Überhaupt würde sich der Hauptinhalt des § 1 auch durch geeignete Infinitesimalbetrachtungen rein geometrisch herleiten lassen.

Aus der Vergleichung der beiden Werte von $\cos(t b_1)$ folgt nämlich:

$$q\frac{\cos\sigma_1}{S} = S q_1 \cos\sigma_1.$$

Ist also nicht $\cos\sigma_1 = 0$ so wird $q = q_1 S^2$. Da man aber auf dieselbe Weise auch die Gleichung

$$S q_1 \cos\sigma = q\frac{\cos\sigma}{S}$$

herleiten kann, so würde die in Rede stehende Gleichung § 1, I[b] nur dann nicht bestehen, wenn gleichzeitig $\cos\sigma$ und $\cos\sigma_1$ gleich Null wären. Dies erfordert aber wegen

$$\frac{\cos\sigma}{r} = \frac{(1-p)}{k}, \quad \frac{\cos\sigma_1}{r_1} = \frac{(1-p_1)}{k}$$

daß $p = p_1 = 1$ ist. Damit wird aber auch $S^2 = 1$, also $q = q_1 = 0$, so daß in diesem Falle die Beziehung zwischen q und q_1 nicht in Betracht kommt.

Um auch die Formel V des § 1 allgemein zu erweisen, gehe man von der aus § 1, 2) folgenden Identität

$$\xi\cos\sigma + \lambda\sin\sigma + \xi_1\cos\sigma_1 + \lambda_1\sin\sigma_1 = 0$$

aus. Aus derselben folgt durch Multiplikation mit den Richtungscosinus ξ, λ, α und Summation:

$$\begin{aligned}
\cos\sigma + \cos\sigma_1\cos(h h_1) + \sin\sigma_1\cos(h b_1) &= 0\\
\sin\sigma + \cos\sigma_1\cos(h_1 t) + \sin\sigma_1\cos(b_1 t) &= 0\\
\cos(t h_1)\cos\sigma_1 + \cos(t b_1)\sin\sigma_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Setzt man hier die zuvor gefundenen Werte der Cosinus ein, so erhält man aus der letzteren

$$\frac{r_1}{S^2}\, q\cos\sigma_1\left(\Omega - \frac{\sin\sigma}{r} - S\frac{\sin\sigma_1}{r_1}\right) = 0$$

und ebenso:

$$p(S^2 - p)\left(\frac{\sin\sigma}{r} + S\frac{\sin\sigma_1}{r_1} - \Omega\right) = 0$$

$$\left(\Omega - \frac{\sin\sigma}{r}\right)\left(\frac{\sin\sigma}{r} + S\frac{\sin\sigma_1}{r_1} - \Omega\right) = 0.$$

Hieraus ergibt sich aber immer die Gleichung § 1, V. Der Fall $S^2 = 0$ ist natürlich auszuschließen, denn es ist dann $p = 0$, $q = 0$ und die Kurve C_1 reduziert sich auf einem Punkt, und C wird durch eine Kugel vom Radius k, deren Mittelpunkt dieser Punkt M ist, aus einem Kegel mit der Spitze in M ausgeschnitten. Ist also $q = 0$ so kann man immer noch $p \neq 0$ voraussetzen. Wäre nun gleichzeitig $S^2 - p = 0$ und $\Omega - \frac{\sin \sigma}{r} = 0$, so wird die Kurve C_1 wie aus der Formel 7) des § 1 hervorgeht eine Gerade, da $r_1 = \infty$ wird; in diesem Fall verliert die Relation ihre Bedeutung. Ist dagegen $p = 0$ und $\Omega - \frac{\sin \sigma}{r} = 0$ so wird sie noch immer gelten, wenn nur nicht $\cos \sigma_1 = 0$ ist. Dann aber ist $p_1 = 1$, was mit der Gleichung $S^2 p_1 = p$ im Widerspruch steht.

§ 3.

Invarianten des Kurvenpaares.

Unter einer Invariante des Paares verstehen wir hier solche Ausdrücke, welche sich nur um einen von S, dem Verhältniß der Bogenelemente in entsprechenden Punkten des Paares, abhängigen Faktor ändern, je nachdem man sie für die Kurve C oder C_1 bildet.

Solche Invarianten sind den Gleichungen

$$S^2 p_1 = p, \quad S^2 q_1 = q$$

zufolge p und q; ihr Quotient ist eine absolute Invariante.

Ferner ist

$$\Omega = \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \left(\frac{p}{q}\right), \quad \Omega_1 = \frac{d}{ds_1} \operatorname{arctg} \left(\frac{p_1}{q_1}\right)$$

mithin:

$$\Omega_1 S = \Omega;$$

also ist auch Ω eine Invariante. Desgleichen hat man

$$2\Omega = 2\frac{\sin\sigma}{r} + 2S\frac{\sin\sigma_1}{r_1}$$

oder:

$$\Omega - 2\frac{\sin\sigma}{r} = -S\left(\Omega_1 - 2\frac{\sin\sigma_1}{r_1}\right).$$

Die Bedeutung dieser Invariante wird alsbald hervortreten.

Andere Invarianten erhält man aus den Werten von $\cos(hh_1)$ und $\cos(bb_1)$. So findet man die Identitäten

$$\frac{1}{r}\left(\frac{p}{r} - q^2\frac{\cos\sigma}{k} - p\,\Omega\sin\sigma\right)S^2 = \frac{1}{r_1}\left(\frac{p}{r_1} - q_1^2\frac{\cos\sigma_1}{k} - p_1\,\Omega_1\sin\sigma_1\right)$$

und

$$\frac{1}{r}\left(\frac{S^2}{r} - S^2\,\Omega\sin\sigma - \frac{q^2}{k}\cos\sigma\right) = \frac{1}{r_1}\left(\frac{S_1^2}{r_1} - S_1^2\Omega_1\sin\sigma_1 - \frac{q_1^2}{k}\cos\sigma_1\right)S^6$$

wobei $S_1 = \frac{1}{S}$ gesetzt ist.

Das Verschwinden der ersten dieser beiden Invarianten sagt aus, daß die Hauptnormalen der Kurven C, C_1 in entsprechenden Punkten aufeinander senkrecht stehen. Analog dazu drückt das Verschwinden der zweiten aus, daß die Binormalen einen rechten Winkel miteinander bilden.

Der Cosinus des Neigungswinkels ω der Tangenten von C und C_1 in entsprechenden Punkten P, P_1 ist:

$$\cos\omega = \frac{p}{S} = \frac{p}{+\sqrt{p^2+q^2}},$$

mithin:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{q}{p}.$$

Ist nun $\omega = \text{const}$, so ist auch $\Omega = 0$, und dies ist die Bedeutung der Invariante Ω. Wenn sich also die Kurven eines Paares „unter konstantem Winkel" schneiden, d. h. wenn sie von einem Punkte der gemeinsamen Normale sich unter diesem Winkel zu schneiden scheinen, so ist:

$$\frac{\sin\sigma}{r} + S\frac{\sin\sigma_1}{r_1} = 0.$$

Aus $\sigma = 0$ folgt daher auch $\sigma_1 = 0$: Man hat also ein Kurvenpaar mit gemeinsamer Hauptnormale, die Kurven bilden ein Bertrandsches Paar. Dies ist im wesentlichen der von Niewenglowski, Comptes Rendus 85, p. 394, 1877 aufgestellte Satz.[1])

[1]) Ich erwähne dies, weil in der Enzyklopädie der Math., Bd. III, 3, p. 232 dieser Satz in der folgenden Form ausgesprochen ist:

Trägt man auf den Hauptnormalen einer Kurve C eine konstante Strecke k ab und hat die Kurve C_1 der Endpunkte die Eigenschaft, daß die Schmiegungsebenen von C und C_1 einen konstanten Winkel miteinander bilden, so sind beide Kurven Bertrandsche Kurven.

Hier ist statt des Wortes „Schmiegungsebenen" Normalebenen einzusetzen. Daß der Satz in der anderen Fassung unrichtig ist, läßt sich leicht an einem merkwürdigen Beispiel zeigen — man vergleiche übrigens die allgemeine Untersuchung in § 12.

Trägt man auf den Hauptnormalen einer Kurve C, deren Krümmungs- und Torsionsmasse mit ϱ, τ bezeichnet sein mögen, eine konstante Strecke k ab, so ist, wie man aus den Formeln des § 1 oder durch direkte Rechnung ableitet, der Cosinus der Binormalen von C und C_1

$$\cos(b\,b_1') = \frac{r_1}{S^3}(1 - k\varrho)\,V$$

wo

$$V = \varrho(1 - k\varrho) - k\tau^2$$

ist, während

$$\frac{S^4}{r_1^2} = V^2 + \Omega^2 S^2$$

wird, falls zur Abkürzung

$$\Omega = \frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\left(\frac{k\tau}{1 - k\varrho}\right)$$

gesetzt ist. Ist demnach für die Kurve C die Bedingung $V = 0$ erfüllt, so bilden die Binormalen von C und C_1 beständig einen rechten Winkel miteinander, d. h. die Binormale von C_1 ist der Hauptnormale von C parallel. Und so ergibt sich: Trägt man auf den Hauptnormalen der Kurven C, deren Gleichung $\varrho = k(\varrho^2 + \tau^2)$ ist, eine konstante Strecke k ab, so beschreiben die Endpunkte derselben eine Kurve C_1, deren Binormale der Hauptnormale von C parallel ist, und deren Krümmungshalbmesser

$$r_1 = \frac{S}{|\Omega|}$$

§ 4.

Kongruente und symmetrische Kurvenpaare.

Die Kurven eines Paares sind kongruent und mit entsprechenden Punkten aufeinander bezogen (entsprechend kongruent) wenn

$$S^2 = 1, \quad r = r_1, \quad T = + T_1$$

ist; sie sind dagegen symmetrisch, wenn

$$S^2 = 1, \quad r = r_1, \quad T = - T_1.$$

Ist nun zunächst $S^2 = 1$ und $r = r_1$, so folgt aus § 1 I[a]

$$p = p_1 \quad \text{oder} \quad \cos\sigma_1 = \cos\sigma$$

---

ist, während das Torsionsmaß τ_1 durch die Gleichung

$$\tau_1 \tau = \frac{(1 - k\varrho)}{4\,\Omega^2 S^4} \left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2$$

gegeben ist. Die Binormalen resp. Hauptnormalen von C_1 bilden daher mit den Binormalen resp. Hauptnormalen von C rechte Winkel, aber der Cosinus des Winkels der Tangenten von C und C_1 ist nicht konstant, sondern gleich

$$\frac{1 - k\varrho}{S}$$

und die Kurven C, C_1 bilden kein Bertrandsches Paar.

Ist dagegen $\Omega = 0$ oder $1 - \varrho k = \tau$. const, so hat man die Gleichung der Bertrandschen Kurven; auch wird

$$\cos(b\, b_1) = \frac{1 - k\varrho}{S}$$

und dies ist in der Tat eine Konstante. Hierin ist auch der Fall mitinbegriffen, wo $1 - k\varrho = 0$ ist. Die Kurve C ist dann von konstanter Krümmung $\frac{1}{k}$; die Tangente, Hauptnormale und Binormale von C_1 läuft bezüglich der Binormale, Hauptnormale und Tangente von C parallel. Das Krümmungsmaß von C_1 ist ebenfalls konstant und gleich dem von C_1; das Produkt der Torsionsmasse wie immer gleich $\frac{1}{k^2}$.

Die Regelflächen der Normalen derjenigen Kurvenpaare C, C_1, bei denen die Hauptnormale von C und die Binormale von C_1 in die Richtung der Erzeugenden fallen, haben zwei orthogonale Trajektorien der Erzeugenden, von denen die eine Haupttangentenkurve, die andere geodätische Linie ist.

und nach IV^b daselbst:

$$\Omega\left(\Omega - \frac{2\sin\sigma}{r}\right) = 0.$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden. Ist $\Omega = 0$, so folgt aus § 1, V:

$$\sin\sigma_1 = -\sin\sigma;$$

also $\sigma_1 = -\sigma$, und es wird nach § 1, I^b:

1) $$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} - 2\sigma'.$$

Ist dagegen

$$\Omega - \frac{2\sin\sigma}{r} = 0$$

so folgt analog:

$$\sin\sigma_1 = \sin\sigma$$

$$\cos\sigma_1 = \cos\sigma$$

2) $$T = T_1.$$

Das liefert den Satz: **Entsprechen sich die Kurven eines Paares „mit gleichen Bogenelementen" und gleichen Krümmungsradius, so schneiden sie sich entweder unter konstantem Winkel,** sind aber von einander durch die Torsion im allgemeinen verschieden; **oder sie sind kongruent.**

Wird jetzt zuerst angenommen, daß die Kurven des Paares **kongruent** sein sollen, so folgt unter der Annahme $\Omega = 0$, da jetzt $T = T_1$ ist, aus 1):

$$2\sigma' = 0.$$

Demnach ist σ ein konstanter Winkel. Da aber wegen $\Omega = 0$, $q = pc$ ist, wo c eine Konstante, so folgt:

2) $$\left(1 - \frac{k\cos\sigma}{r}\right)^2 (1 + c^2) = 1.$$

Demnach ist r ebenfalls eine Konstante, und da

$$\frac{k}{T} = q = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{k\cos\sigma}{r}\right) \tag{3}$$

so ist auch T konstant.

Unter der Voraussetzung, daß die kongruenten Kurven eines Paares sich unter konstantem Winkel schneiden, sind also beide Kurven gemeine Schraubenlinien.

Dieser Satz erleidet eine Ausnahme, wenn die Konstante c gleich Null ist. Denn als dann liefert die Gleichung 2) nur:

$$\frac{\cos\sigma}{r}\left(\frac{k\cos\sigma}{r} - 2\right) = 0.$$

Ist nun $\sigma = \frac{\pi}{2}$ so braucht r nicht konstant zu sein, nach 3) wird aber $T = 0$. Die beiden Kurven des Paares sind daher eben. Dies ist aber ein ganz trivialer Fall; C und C_1 liegen in parallelen Ebenen und bilden ein durch konstante Binormalen verbundenes kongruentes Paar; C ist dabei völlig willkürlich.

Der Fall $\frac{k\cos\sigma}{r} = 2$ erledigt sich leicht. Jede der Kurven C, C_1 ist ein Kreis mit dem Radius r; beide liegen in parallelen Ebenen und ihre Mittelpunkte haben den senkrechten Abstand $2r\operatorname{tg}\sigma$.

Außer den eben genannten trivialen Fällen und dem der kongruenten gemeinen Schraubenlinien gibt es aber noch unzählig viele andere kongruente durch die Gleichung

$$\Omega = \frac{2\sin\sigma}{r}$$

charakterisierte Kurvenpaare; für diese sind die Winkel der gemeinsamen Normale mit den Hauptnormalen in entsprechenden Punkten gleich.

Sollen dagegen die Kurven ein symmetrisches Paar bilden, so hat man wieder zwei Fälle zu unterscheiden. Ist erstens $\Omega = 0$, so wird $\sigma_1 = -\sigma$, und aus der Gleichung

$$\frac{1}{T} - \sigma' = -\frac{1}{T} + \sigma'$$

folgt nun:

$$\frac{1}{T} - \sigma' = 0 = \frac{q}{k}.$$

Dann bilden, vgl. § 5, die gemeinsamen Normalen eine Developpabele. Da jetzt $p^2 = 1$, so ist $p = \pm 1$. Für $p = +1$ ist

$$\frac{k \cos \sigma}{r} = 0,$$

also $\cos \sigma = 0$. Dann sind aber beide Kurven eben, und der Unterschied zwischen Kongruenz und Symmetrie wird bedeutungslos. Für $p = -1$ ist aber:

$$\frac{k \cos \sigma}{r} = 2.$$

Trägt man nun von P ausgehend auf der Normale die $\frac{k}{2}$ ab, so erhält man einen Punkt P_0, dessen Koordinaten $x_0\, y_0\, z_0$ konstant sind, da ihre Differentiale nach § 1, 3) verschwinden. Das Paar von symmetrischen Kurven wird also aus einer willkürlichen Kurve C auf der Kugel vom Radius $\frac{k}{2}$ gebildet, welcher C_1 diametral gegenüberliegt.

Ist zweitens $\Omega = \frac{2 \sin \sigma}{r}$, so muß $\sigma_1 = \sigma$ sein; dann folgt aber aus:

$$\frac{1}{T} - \sigma' = -\frac{1}{T} - \sigma',$$

daß beide Kurven eben sind. Man wird damit auf den Fall eines Paares von ebenen kongruenten Kurven geführt, der in § 6 vollständig behandelt ist.

§ 5.

Die Fälle $p = 0$; $q = 0$.

Wenn $q = k\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right) = 0$, so existiert auf der Normalen zu C ein Punkt mit den Koordinaten

$$x + l\,(\xi \cos\sigma + \lambda \sin\sigma),$$

deren Änderung beim Fortschreiten auf C gleich Null ist, bestimmt durch die Gleichung:

$$1 - l\,\frac{\cos\sigma}{r} = 0.$$

Die konsekutiven Normalen des Paares schneiden sich daher; C und C_1 sind orthogonale Trajektorien einer Erzeugenden einer Developpabelen.

Aus der Gleichung IV^b des § 1) folgt jetzt, da $\Omega = 0$:

$$\frac{S^2}{r_1^2} = \frac{1}{r^2}$$

oder:

1) $$\frac{S}{r_1} = \frac{1}{r},$$

und nach § 1, VI ist:

$$\sin\sigma_1 + \sin\sigma = 0.$$

Demnach ist entweder

2) $$\sigma_1 = -\sigma$$

oder:

3) $$\sigma_1 = \pi + \sigma.$$

Endlich folgt aus $p p_1 = 1$:

4) $$\left(1 - k\,\frac{\cos\sigma}{r}\right)\left(1 - k\,\frac{\cos\sigma_1}{r_1}\right) = 1.$$

Ist nun der erste Faktor in 4) positiv und $\cos\sigma > 0$, so muß der zweite Faktor > 1, also $\cos\sigma_1 < 0$ sein; ist dagegen der erste Faktor in 4) positiv und $\cos\sigma < 0$ so muß $\cos\sigma_1$ positiv sein. Diesen Bemerkungen entspricht nur die Beziehung 3):

$$\sigma_1 = \pi + \sigma.$$

Dann ist aber

$$\sigma_1' S = \sigma'$$

oder:

$$\frac{S}{T_1} = \frac{1}{T}.$$

Die Kurven C und C_1 sind daher in gleichem Sinne gewunden, wenn

$$p = 1 - k\frac{\cos\sigma}{r} > 0;$$

sie sind in den kleinsten Teilen zu einander direkt ähnlich (vgl. § 11).

Ist aber der erste Faktor in 4) negativ, so ist es auch der zweite; in diesem Fall ist $\cos\sigma > 0$, $\cos\sigma_1 > 0$, und dann folgt nur

$$\sigma_{\prime} = -\sigma$$

oder

$$\frac{S}{T_1} = -\frac{1}{T}.$$

Die beiden Kurven sind jetzt in entgegengesetztem Sinne gewunden; die beiden Fälle unterscheiden sich je nachdem $k \lessgtr l$ ist.

Man bestätigt diese, übrigens bekannten Beziehungen, leicht durch eine direkte Untersuchung. Ist nämlich $q = 0$, so folgt aus § 1 3)

$$S\alpha_1 = p\alpha,$$

mithin

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \alpha_1 = \pm\alpha,$$

je nachdem $S = \pm p$ ist. Differentiiert man diese Gleichung wieder nach s, so folgt

$$S\frac{d^2 x_1}{ds'^2} = \pm\frac{\xi}{r}$$

5)
$$S^2\frac{d^3 x_1}{ds_1^3} + S''\frac{d^2 x_1}{ds'^2} = \mp\frac{1}{r}\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{T}\right) \pm \xi\frac{d\frac{1}{r}}{ds}$$

und durch Determinantenbildung folgt dann

$$\frac{S}{T_1} = \pm\frac{1}{T}.$$

Aus 5) ergibt sich noch, daß die Hauptnormalen aller dieser Trajektorien in den Punkten der nämlichen erzeugenden Normalen zu einander gleichsinnig oder ungleichsinnig parallel sind, je nachdem p das positive oder negative Vorzeichen hat.

Ist $p = 0$, so ist auch $p_1 = 0$; die Kurven des Paares „schneiden sich unter rechten Winkel“.

Schneiden sich überhaupt für irgend ein Paar entsprechender Punkte P, P_1 die Kurven C, C_1 unter rechtem Winkel, so ist die Projektion der gemeinsamen Normale k auf die Hauptnormalen der Kurven C, C_1 gleich dem Krümmungshalbmesser derselben. Gleichzeitig findet zwischen den Torsionsradien die Beziehung

$$\left(\frac{1}{T_1} - \sigma_1'\right)\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right) = \frac{1}{k^2}$$

statt. Ist daher

$$\frac{1}{T_1} - \frac{d\sigma_1}{ds_1} > \frac{1}{k},$$

so ist

$$\frac{1}{T} - \frac{d\sigma}{ds} < \frac{1}{k};$$

findet die Beziehung $p = 0$ durchweg statt, so folgt daraus durch Integration

$$\eta_1 - \sigma_1 > \frac{S'}{k} + \text{const}$$

$$\eta - \sigma < \frac{S}{k} + \text{const}.$$

§ 6.

Kurvenpaare, deren Bogenelemente in konstantem Verhältnisse stehen.

Wir nehmen an, daß $S = \frac{d s_1}{d s}$ eine Konstante sei, und tragen auf der gemeinsamen Normale der Kurven C, C_1 eine konstante Strecke l ab, welche der Gleichung

$$1)\qquad S l = k - l$$

entspricht. Dann ist der Fall $k = l$ ausgeschlossen, da $S \neq 0$ vorausgesetzt wird.

Die Endpunkte P'' von l bilden eine Kurve Γ, welche zur Kurve C_1 in derselben Beziehung steht, wie zur Kurve C. Denn der Punkt P'' ist von P um l, von P' um $l_1 = k - l$ entfernt, und auf eben diesen Wert wird man durch die Gleichung

$$\frac{1}{S} l_1 = k - l_1$$

geführt, welche der Gleichung 1) entspricht.

Die Größen p, q sollen für das Paar C, Γ durch p_0, q_0, und ebenso die übrigen zu $\Omega, S \ldots$ analogen Ausdrücke durch $\Omega_0, S_0 \ldots$ bezeichnet werden.

Dann ist nach § 1)

$$2)\qquad p_0 = 1 - l \frac{\cos\sigma}{r} = \frac{k - l + l q}{k}$$

$$q_0 = l \left(\frac{1}{T} - \sigma'\right) = \frac{l}{k} q$$

also:

$$3)\qquad S_0^2 = p_0^2 + q_0^2 = 2 \left(\frac{k - l}{k^2}\right) (k - l + l p).$$

Aus den Identitäten

$$q \frac{dp}{ds} - p \frac{dq}{ds} = \Omega (p^2 + q^2)$$

$$p \frac{dp}{ds} + q \frac{dq}{ds} = S \frac{dS}{ds}$$

folgt, da S konstant ist

$$\frac{dp}{ds} = q\,\Omega, \quad \frac{dq}{ds} = -p\,\Omega$$

und demnach aus 2):

$$\frac{dp_0}{ds} = \frac{l}{k}\frac{dp}{ds} = \frac{l}{k}\,q\,\Omega, \quad \frac{dq_0}{ds} = \frac{l}{k}\frac{dq}{ds} = -p\,\frac{l}{k}\,\Omega.$$

4)
$$\Omega_0 = q_0\,\frac{\dfrac{dp_0}{ds} - p_0\,\dfrac{dq_0}{ds}}{S_0^2} = \tfrac{1}{2}\,\Omega.$$

Bezeichnet man den Winkel der Hauptnormale von Γ mit der in der Richtung $P''P$ genommenen gemeinsamen Normale durch σ_0, den Krümmungshalbmesser von Γ durch r_0, so ist nach § 1:

$$S_0^2\left(1 - l\,\frac{\cos\sigma_0}{r_0}\right) = p_0$$

oder nach 2) und 3):

5)
$$\frac{\cos\sigma_0}{r_0} = \frac{k-2l}{2l(k-l)}.$$

Die Kurve Γ bildet daher mit jeder der beiden Kurven C, C_1 ein besonderes Paar, nämlich ein solches für das

$$\frac{\cos\sigma_0}{r_0} = \text{const.} \qquad \text{ist.}$$

Aus der Gleichung des § 1, V:

$$\frac{\sin\sigma_0}{r_0}\,S_0 = \Omega_0 - \frac{\sin\sigma}{r} = \frac{1}{2}\left(\Omega - 2\,\frac{\sin\sigma}{r}\right),$$

folgt demnach nach § 1:

6)
$$S_0\,\mathrm{tg}\,\sigma_0 = \left(\Omega - 2\,\frac{\sin\sigma}{r}\right)\frac{l(k-l)}{k-2l}$$

$$\frac{4}{r_0^2} = \frac{\Omega - 2\,\dfrac{\sin\sigma}{r}}{S_0^2} + \left(\frac{k-2l}{l(k-l)}\right)^2.$$

Und umgekehrt erhält man alle Kurvenpaare konstanten Bogenelementverhältnisses, wenn man auf den Normalen einer willkürlichen Kurve Γ, die unter dem Winkel σ_0 gegen ihre Hauptnormale geneigt sind, zwei konstante Strecken l, l_1 aufträgt, falls

$$\cos\sigma_0 = r_0 c$$

gewählt wird, c ist eine gewisse Konstante.

Dies erkennt man unmittelbar. Sind nämlich $\Xi H Z$ die Koordinaten einer willkürlichen Kurve Γ mit den Richtungscosinus der Hauptnormale ξ_0, η_0, ζ_0; der Binormale λ_0, μ_0, ν_0, so sind

$$x = \Xi + l(\xi_0 \cos\sigma_0 + \lambda_0 \sin\sigma_0)$$

die Koordinaten einer aus ihr hervorgegangenen Kurve C. Daraus folgt aber nach § 1

$$\frac{ds}{ds_0} = p\,\alpha_0 + q\,(\xi_0 \sin\sigma_0 - \lambda_0 \sin\sigma_0),$$

wo

$$q = l\left(\frac{1}{T_0} - \sigma_0'\right), \quad p = 1 - l\,c$$

und es wird

$$\left(\frac{ds}{ds_0}\right)^2 = (1 - l\,c)^2 + l^2\left(\frac{1}{T_0} - \sigma_0'\right)^2$$

und ebenso für die der Strecke l_1 entsprechende Kurve C_1

$$\left(\frac{ds_1}{ds_0}\right)^2 = (1 - l_1\,c)^2 + l_1^2\left(\frac{1}{T_0} - \sigma_0'\right)^2.$$

Demnach wird

$$\left(\frac{ds}{ds_0}\right)^2 l_1^2 - \left(\frac{ds_1}{ds_0}\right)^2 l^2 = (l_1 - l)(l + l_1 - 2\,l\,l_1\,c),$$

d. h.

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = S^2 = \left(\frac{l_1}{l}\right)^2,$$

wenn

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l_1} = 2c$$

ist. Dies gilt auch dann, wenn $l = -l_1$ ist, d. h. die Konstante $c = 0$ oder $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$ gewählt ist; die beiden Strecken l und $-l$ sind dann nur auf der Binormalen von Γ aufzutragen.

Damit ist die Aufgabe gelöst, alle Kurvenpaare zu konstruieren, deren Bogenelemente in entsprechenden Punkten in konstantem Verhältnisse stehen.[1])

Für den Fall, wo das Kurvenpaar C, C_1 die invariante Beziehung

$$\Omega - 2\frac{\sin\sigma}{r} = 0$$

erfüllen soll, wird nach der zweiten Gleichung 6) die Kurve Γ von konstanter Krümmung; zugleich ist dann $\operatorname{tg}\sigma_0 = 0$, d. h. die Kurve Γ hat die gemeinsame Normale von C, C_1 zur Hauptnormalen, falls nicht $k = 2l$ ist. Man erhält daher alle Kurven eines solchen Paares, wenn man von einer Kurve Γ mit konstanter Krümmung ausgeht, auf deren Hauptnormalen jetzt die Strecken l, l_1 abzutragen sind.[2])

Benutzt man zur Bestimmung der Koordinaten Ξ, H, Z der Kurve Γ, indem man von C ausgeht, die Formel 7[a]) des § 1, so erhält man:

$$S_0^2\frac{d^2\Xi}{ds_0^2} = \frac{1}{2}\left(\Omega - 2\frac{\sin\sigma}{r}\right)\left(\frac{alq}{k} - \frac{(k-l+lp)}{k}(\xi\sin\sigma - \lambda\cos\sigma)\right)$$
$$+ (k - l + lp)\frac{(2l-k)}{lk^2}(\xi\cos\sigma + \lambda\sin\sigma).$$

[1]) Daß man auf die angegebene Weise aus einer Kurve Γ solche Paare erhält, liegt ja auf der Hand, daß aber alle Paare dieser Art aus einer solchen „Mittelkurve" Γ entstehen, scheint eines besonderen Beweises zu bedürfen, der sich natürlich auch auf anderem Wege geben läßt.

[2]) Hierbei ist indessen zu beachten, daß in der Untersuchung dieses Paragraphen $\Omega \neq 0$ stillschweigend angenommen ist; einzelne triviale Ausnahmefälle sind demnach hier noch möglich.

Setzt man nun voraus, daß $l = \frac{1}{2} k$, also $S^2 = 1$ ist, und zugleich $\Omega - 2 \frac{\sin \sigma}{r} = 0$ sein soll, so wird

$$\frac{d^2 \Xi}{d s_0^2} = 0;$$

die Kurve Γ, die man jetzt geradezu als Mittelkurve des Paares bezeichnen kann, wird also jetzt eine gerade Linie (vgl. die zweite Formel 6). Nun war nach § 4 die Bedingung für die Kongruenz der Kurven eines Paares, vorausgesetzt, daß sie nicht gemeine Schraubenlinien sind,

$$S^2 = 1, \quad \Omega - 2 \frac{\sin \sigma}{r} = 0.$$

Umgekehrt ist aber sofort ersichtlich, daß die Kurven eines Paares immer mit entsprechenden Punkten kongruent aufeinander bezogen sind, wenn die Mittelkurve eine Gerade ist, die auf der gemeinsamen Normale von C, C_1 natürlich senkrecht steht.

Abgesehen von dem Falle der Schraubenlinien und den in § 4 besprochenen trivialen Fällen gilt daher der Satz:

Alle Kurvenpaare, die aus zwei kongruenten mit entsprechenden Punkten aufeinander durch gemeinsame Normalen von konstanter Länge k bezogenen Kurven bestehen, ergeben sich, wenn man auf einem Kreiszylinder mit dem Durchmesser k eine willkürliche Kurve C annimmt; die Kurve C_1 wird dann von denjenigen Punkten des Zylinders gebildet, in denen die aus den Punkten von C auf die Achse des Zylinders gezogenen Senkrechten den Zylinder schneiden.[1])

[1]) Ich führe ein einfaches Beispiel an. Die aus kongruenten Kurven bestehenden Paare, deren Hauptnormalen mit der gemeinsamen Normale den konstanten Winkel ω bilden, erhält man, wenn man die Mittelkurve zur z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems macht, durch den Ansatz, in welchem k durch $2k$ ersetzt ist

$$x = k \cos \varphi$$
$$y = k \cos \varphi$$
$$z = F,$$

Damit erhält man zugleich die Lösung der Aufgabe: Alle aus ebenen Kurven gebildete Paare kongruenter Kurven zu bestimmen. Die Kurven eines solchen Paares sind offenbar zwei Ellipsen, deren Ebenen

---

wo F eine zu bestimmende Funktion von φ ist. Alsdann ist

1) $$S^2 = \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = k^2 + F'^2.$$

Daraus folgt

2) $$\frac{S^4}{r^2} = k^2 \left(1 + \frac{F''^2}{F'^2 + k^2}\right)$$

3) $$\frac{S^2}{r} \cos\omega = k,$$

falls man den Winkel ω der Hauptnormale und der gemeinsamen Normale des Paares vom Kurvenpunkte gegen die z-Achse mißt, so daß nun $\cos\omega$ eine positive Konstante

$$-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$$

sein muß. Daraus ergibt sich

4) $$\pm \operatorname{tg}\omega = \sqrt{\frac{F''^2}{F'^2 + k^2}}.$$

Ist also $\pm \operatorname{tg}\omega = c$ nicht Null, — in welchem Falle sich nur eine gemeine Schraubenlinie resp. ein Kreis ergibt, so folgt aus 4) unter Weglassung der unwesentlichen Integrationskonstanten

5) $$F' = \frac{k}{2}\left(e^{c\varphi} - e^{-c\varphi}\right).$$

Demgemäß wird, da

$$F'^2 + k^2 = \frac{1}{4} k^2 \left(e^{c\varphi} + e^{-c\varphi}\right)^2$$

$$F'' = \frac{ck}{2} \left(e^{c\varphi} + e^{-c\varphi}\right)^2$$

$$F''' = \frac{c^2 k}{2} \left(e^{c\varphi} + e^{-c\varphi}\right)^2$$

und

$$F''' + F' = \frac{k}{2\cos^2\omega} \left(e^{c\varphi} - e^{-c\varphi}\right)$$

wird

6) $$\frac{-S^6}{r^2 T} = (F''' + F') k^2,$$

gegen die Achse des Zylinders gleich geneigt sind; auf dieselbe Lösung wird man auch geführt, wenn man die Fundamentalgleichungen des § 1 integriert, wobei sich aber die natürlichen Gleichungen dieser Ellipsen ergeben. Vgl. übrigens § 10.

---

also

7)
$$-\frac{1}{T} = \frac{2}{k}\frac{(e^{c\varphi} - e^{-c\varphi})}{(e^{c\varphi} - e^{-c\varphi})^2}$$
$$\frac{1}{r} = \frac{4}{k\cos\omega\,(e^{c\varphi} + e^{-c\varphi})^2}.$$

Da nach 5)
$$z = F = \frac{k}{2c}(e^{c\varphi} + e^{-c\varphi}),$$
so wird
$$r = \frac{c^2 z^2 \cos\omega}{k},$$
und da das Minimum von z gleich $\frac{k}{c}$ ist, so wird $r > k\cos\omega$.

Da ferner der Bogen s der Kurve durch die Gleichung
$$s = \frac{k}{2c}(e^{c\varphi} - e^{-c\varphi})$$
gegeben ist, so wird
$$-\frac{r}{T\cos\omega} = \frac{ks}{c}, \quad \frac{1}{|T|} = \frac{s}{|c|}\left(\frac{k\cos\omega}{r}\right) < \frac{s}{|c|}$$
und für
$$h = \frac{k}{c}, \quad z = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{k\varphi}{h}} + e^{-\frac{k\varphi}{h}}\right).$$

Das einzige Paar von kongruenten Kurven, deren Hauptnormalen einen konstanten Winkel mit der gemeinsamen Normale bilden, entsteht daher durch Aufwicklung einer gewöhnlichen Kettenlinie auf einem Kreiszylinder.

Ähnlich lassen sich Paare kongruenter Kurven von konstanter Krümmung resp. Torsion untersuchen.

§ 7.

Kurvenpaare, die sich unter konstantem Winkel schneiden und deren Bogenelemente in konstantem Verhältnisse stehen.

Verlangt man, daß $\frac{p}{q}$ und S^2 Konstanten sein sollen, so sind

$$p = 1 - \frac{k \cos \sigma}{r}, \quad q = k\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right)$$

selbst Konstanten, von denen anzunehmen ist, daß sie nicht gleichzeitig verschwinden. Die natürliche Gleichung einer solchen Kurve C ergibt sich durch Elimination von σ in der Form

$$\frac{1}{T} - \frac{d}{ds} \operatorname{arc} \cos \frac{r}{k}(1-p) = \frac{q}{k},$$

oder wenn

$$\frac{ds}{T} = d\eta$$

gesetzt wird, wo η der Kontingenzwinkel der Windung ist,

$$\cos\left(\eta - \frac{q}{k} s + c\right) = r\frac{(1-p)}{k}.$$

Aber hiermit ist so gut wie nichts gewonnen. Man erhält eine viel übersichtlichere Auffassung dieser Paare durch Verwendung einer Kurve Γ_0, welche der in § 6 eingeführten Kurve Γ analog gebildet ist.

Wir tragen, von der Kurve C ausgehend, auf der gemeinsamen Normale des Paares eine Strecke l ab. Dann entsteht eine Kurve Γ_0, die bei geeigneter Wahl von l sich durch besondere Einfachheit auszeichnet. Werden, wie im vorigen § 6, alle Größen, die sich auf das Kurvenpaar C, Γ_0 beziehen, durch den Index Null bezeichnet, so ist

$$p_0 = 1 - \frac{l}{r} \cos \sigma = 1 - \frac{l}{k} + \frac{l}{k} p$$

$$q_0 = l\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right) = \frac{l}{k} q$$

und

$$S_0^2 = p_0^2 + q_0^2 = (p^2 + q^2)\frac{l^2}{k^2} + 2\frac{pl}{k}\left(1 - \frac{l}{k}\right) + \left(1 - \frac{l}{k}\right).$$

Wählt man nun l so, daß

1) $$S_0^2 = p_0$$

wird, so folgt

$$l = \frac{(1-p)k}{q^2 + (p-1)^2}.$$[1]

Dabei wird

$$p_0 = \frac{q^2}{q^2 + (p-1)^2}$$

und p_0 ist nicht Null, wenn q nicht Null ist. In diesem trivialen Falle liegen die Kurven C, C_1 auf einer Develovpabelen, und Γ_0 reduziert sich auf einen Punkt.

Für die so bestimmte Kurve Γ_0, welche mit der Normalen von C den Winkel σ_0 in dem früher angegebenen Sinne bildet, wird nun

$$S_0^2\left(1 - l\frac{\cos\sigma_0}{r_0}\right) = p_0$$[2]

oder nach 1)

$$\frac{\cos\sigma_0}{r_0} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2},$$

falls nicht $r_0 = \infty$ ist. Da aber nach § 1 IV^a

$$\frac{S_0^4}{r_0^2} = \frac{S_0^2}{r^2}\sin\sigma,$$

so könnte dieser Fall nur eintreten, wenn $\sigma = 0, \pi$, d. h. wenn die gemeinsame Normale zugleich Hauptnormale von C ist.

[1] Ist $p = 1$, so ist $\cos\sigma = 0$ und T konstant; die Kurve C fällt mit Γ_0 zusammen.

[2] r_0 ist der Krümmungshalbmesser von Γ_0.

Dann ist aber

$$p = 1 \mp \frac{k}{r},$$

also auch r konstant, und mithin hat auch T einen konstanten Wert. Beide Kurven C, C_1 sind also gemeine Schraubenlinien.

Lassen wir diesen Fall beiseite, so folgt aus

$$S_0^2 \left(\frac{1}{T_0} - \sigma_0'\right) = \frac{1}{T} - \sigma' = q_0 = \frac{l}{k} q,$$

daß T_0 eine Konstante ist. Die Kurve Γ_0 ist daher von konstanter Torsion, und wegen

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$$

fällt ihre Binormale in die Richtung der gemeinsamen Normalen von C und C_1.

Man erhält also das Kurvenpaar C, C_1 dadurch, daß man auf den Binormalen einer Kurve Γ_0 von konstantem Torsionsradius T_0 die Strecken l und $l-k$ aufträgt.

Man hat nun für die beiden Kurven C, C_1, da $\Omega = 0$ ist,

$$S^2 \left(1 - k \frac{\cos \sigma_1}{r_1}\right) = 1 - k \frac{\cos \sigma}{r}$$

$$S^2 \left(\frac{1}{T_1} - \sigma_1'\right) = \frac{1}{T} - \sigma'$$

$$\frac{\sin \sigma_1}{r_1} = -\frac{\sin \sigma}{r}$$

$$\frac{S_0^2}{T_0} = \frac{1}{T} - \sigma'$$

und nach § 1 IV[b]

$$\frac{S^4}{r_1^2} = \frac{S^2}{r^2} + \frac{q^2}{k^2}(S^2 - 1).$$

In dem besonderen Falle, wo $S = 1$, d. h. die Kurven C, C_1 mit gleichen Bogenelementen aufeinander bezogen sind, wird nach der letzten Gleichung

$$r = r_1,$$

d. h. die beiden Kurven C, C_1 haben gleiche Krümmung in den beiden Punkten P, P_1. Damit wird aber auch, wie aus den soeben angeführten Gleichungen hervorgeht,

$$\cos\sigma_1 = \cos\sigma, \qquad \sin\sigma_1 = -\sin\sigma,$$

also $\sigma_1 = -\sigma$. Hieraus folgt

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T} - 2\sigma'$$

$$\frac{S_0^2}{T_0} = \frac{1}{T} - \sigma'$$

oder

$$\frac{1}{T} + \frac{1}{T_1} = 2\frac{S_0^2}{T_0}.$$

Da auch

$$l = \frac{(1-p)k}{1-2p+1} = \frac{k}{2}$$

wird, so ist Γ_0 die Mittelkurve des Paares.

Das heißt also, die Kurven eines Paares, welche sich unter konstantem Winkel zu schneiden scheinen und mit gleichen Bogenelementen aufeinander bezogen sind, haben gleiche Krümmungsradien und ein konstantes arithmetisches Mittel der Torsionsmasse in entsprechenden Punkten.

Man bestätigt diesen Satz durch eine einfache direkte Rechnung. Die Koordinaten eines Punktes, welcher den Endpunkt einer auf der Binormalen der Kurve Γ_0 von konstanter Torsion T_0 abgetragenen Strecke l bildet, sind

$$x = x_0 + l\lambda_0$$

$$S\frac{dx}{ds} = \alpha_0 + \frac{l}{T_0}\xi_0, \qquad S^2 = 1 + \frac{l^2}{T_0^2}.$$

Da S konstant ist, folgt weiter

$$S^2\frac{d^2x}{ds^2} = \xi_0\varrho_0 - \frac{l}{T_0}\left(\alpha_0\varrho_0 + \frac{\lambda_0}{T_0}\right),$$

falls $\frac{1}{r_0}$ durch ϱ_0 ersetzt wird. Daraus ergibt sich

$$\frac{S^4}{r^2} = \varrho_0^2\left(1 + \frac{l^2}{T_0^2}\right) + \frac{l^2}{T_0^4}$$

und weiter

$$S^3\frac{d^3 x}{d s^3} = -\alpha_0\left(\varrho_0^2 + \frac{1}{T}\frac{d\varrho_0}{d s_0}\right) + \xi_0\left[\frac{d\varrho_0}{d s_0} - \frac{l}{T_0}\left(\varrho_0^2 + \frac{1}{T_0'^2}\right)\right]$$
$$-\frac{\lambda_0\varrho_0}{T_0}.$$

Hieraus folgt aber

$$-\frac{S^6}{r^2 T} = -\frac{1}{T_0}\left[\varrho_0^2\left(1 + \frac{l^2}{T_0^2}\right) + \frac{l^2}{T_0^4}\right] + \frac{l}{T_0^2}\left(1 + \frac{l^2}{T_0^2}\right)\frac{d\varrho_0}{d s_0},$$

also unter Benutzung der angegebenen Werte von

$$\frac{S^4}{r^2} \text{ und } S^2$$

$$-\frac{S^4}{r^2 T} = -\frac{1}{T_0}\frac{S^2}{r^2} + \frac{l}{T_0^2}\frac{d\varrho_0}{d s_0}.$$

Vertauscht man jetzt l mit $-l$, so wird für die Kurve C_1

$$r = r_1$$

und zugleich

$$-\frac{S^4}{r^2 T_1} = -\frac{S^2}{T_0 r^2} - \frac{l}{T_0^2}\frac{d\varrho_0}{d s_0},$$

aus welchen beiden Gleichungen, wenn man noch S^2 durch $\frac{1}{S_0^2}$ ersetzt, wie es sein muß, gerade der Ausdruck für das arithmetische Mittel durch Addition hervorgeht.

§ 8.

Kurvenpaare gleicher Krümmung.

Wenn in entsprechenden Punkten die Kurven C, C_1 gleiche Krümmungsradien haben, möge das Paar als „Paar gleicher Krümmung" bezeichnet werden.

Die Bedingung, welche hierfür erfüllt sein muß, ist nach § 1 IV[b]

$$(S^2 - 1)\left(\frac{S^2}{r^2} - \frac{q^2}{k^2}\right) = S^2\,\Omega\left(\Omega - 2\,\frac{\sin\sigma}{r}\right). \tag{1}$$

Man kann sie als eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für σ betrachten, die hier im allgemeinen nicht weiter untersucht werden soll. Sie nimmt in zwei Fällen eine besonders einfache Gestalt an.

Erstens, wenn $\Omega = 0$, d. h. wenn die Kurven des Paares sich zugleich unter konstantem Winkel schneiden. Es muß dann entweder der erste oder der zweite Faktor der linken Seite Null sein. Im ersten Falle aber entsprechen sich die Kurven mit gleichen Bogenelementen, p und q sind Konstanten; dieser Fall ist zu Ende des vorigen § behandelt.

Im zweiten Falle hat man

$$\frac{S^2}{r^2} = \frac{q^2}{k^2},$$

da aber $p = c\,q$ ist, wird

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{k^2\,(1 + c^2)}; \tag{2}$$

d. h. beide Kurven sind von konstanter Krümmung. Vermöge der aus $p = c\,q$ folgenden Differentialgleichung

$$1 - k\,\frac{\cos\sigma}{r} = c\,k\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right) \tag{3}$$

kann man also zu jeder Kurve C, für die r den in 2) angegebenen Wert hat, Kurven C_1 derselben konstanten Krümmung finden, die mit C ein Paar bilden, welches sich unter konstantem Winkel zu schneiden scheint.

Zwischen den Torsionsradien der Kurven C, C_1 besteht die Gleichung

$$q^2\,(1 + c^2)\left(\frac{1}{T_1} - \sigma_1'\right) = \left(\frac{1}{T} - \sigma'\right) \tag{4}$$

oder, da

$$q = k\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right)$$

$$\left(\frac{1}{T_1} - \sigma_1'\right)\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right) = \frac{1}{k^2}(1 + c^2).$$

Außerdem ist nach § 1 V

5) $$\sin\sigma_1 = -\frac{\sin\sigma}{S}$$

und

$$1 - k\frac{\cos\sigma_1}{r} = \frac{\left(1 - k\frac{\cos\sigma}{r}\right)}{p^2(1 + c^2)}c^2 = \frac{c^2}{1 + c^2}\frac{1}{\left(1 - k\frac{\cos\sigma}{r}\right)}.$$

Differentiiert man diese Gleichung nach s, so entsteht, da r konstant ist, unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\sigma_1' = \frac{d\sigma_1}{ds_1} = \frac{d\sigma_1}{ds}\frac{1}{S}$$

$$\frac{k}{r}\sin\sigma_1\sigma_1' S = -\frac{c^2}{c + c^2}\frac{k}{r}\frac{\sin\sigma\sigma'}{p^2}$$

oder nach 5)

$$\sigma_1' = +\frac{c^2}{c + c^2}\frac{\sigma'}{p^2}.$$

Setzt man diesen Wert in 4) ein, so ergibt sich, da

$$S^2 = q^2(1 + c^2) = p^2\left(\frac{1 + c^2}{c^2}\right)$$

6) $$\frac{S^2}{T_1} = \frac{1}{T}.$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen ist daher das Verhältnis der Torsionsradien der Kurven des Paares gleich dem Quadrat des Verhältnisses der Bogenelemente. Beide Kurven sind daher stets in gleichem Sinne gewunden; ist die eine Kurve eben, so ist es auch die andere.

Wir lassen die Integration der Gleichung 3) beiseite und behandeln als Anwendung hier nur den Fall, wo zwei ebene Kurven sich in dieser Beziehung befinden sollen, von gleicher konstanter Krümmung zu sein, und sich unter konstantem Winkel zu schneiden. Sie sind dann notwendig Kreise, und es handelt sich nun um die Integration der Gleichung

$$3^{a})\qquad 1 - \frac{k}{r}\cos\sigma = -ck\sigma',$$

in der r auch gleich 1 genommen werden kann.

Ist nun der Gleichung 2) gemäß

$$1 = k\sqrt{1+c^2},$$

also

$$c = \operatorname{tg}\alpha, \qquad k = \cos\alpha,$$

so hat man aus 3^{a})

$$\frac{d\sigma\sin\alpha}{\cos^2\frac{\sigma}{2} + \sin^2\frac{\sigma}{2} - \cos\alpha\left(\cos^2\frac{\sigma}{2} - \sin^2\frac{\sigma}{2}\right)} = -ds,$$

oder, wenn

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = z$$

gesetzt wird

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\right) = -\frac{s}{2} + c_1,$$

wo c_1 die Integrationskonstante. Nimmt man $c_1 = 0$, was erfordert, daß die Stelle, wo der Winkel σ gleich Null wird, zum Anfang der Bögen auf dem Kreise gewählt wird, so ist demnach

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{s}{2}\right).$$

Hiermit ist aber das Gesetz der Zuordnung für die beiden Kreise vollständig ermittelt. Es ist vielleicht nicht überflüssig, diese eigentümliche Lagenbeziehung zwischen zwei Kreisen durch eine direkte Rechnung zu verifizieren.

Der Kreis mit dem Radius 1, dessen Mittelpunkt der Koordinatenanfang des Systems x, y, z ist, liege in der Ebene x, y und sei zur Kurve C gewählt. Die entsprechende Kurve C_1 hat dann die Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= \cos s\,(1 - k \cos\sigma) \\ y &= \sin s\,(1 - k \cos\sigma) \\ z &= k \sin\sigma. \end{aligned}$$

Man erhält nun für

$$k = \cos\alpha, \quad \operatorname{tg}\frac{s}{2} = \zeta, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \gamma,$$

$$\sin s = \frac{2\zeta}{1+\zeta^2}, \quad \cos s = \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2} = \cos^2\frac{s}{2}\,(1-\zeta^2),$$

$$(1 - k\cos\alpha) = 2\cos^2\frac{\sigma}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\sigma}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{2}{1+\zeta^2\gamma^2}\,\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{s}{2}}.$$

Demnach wird

$$\begin{aligned} x &= 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2\gamma^2} \\ y &= 4\zeta\,\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\zeta^2\gamma^2} \\ z &= \frac{2\cos\alpha\,\gamma\,\zeta}{1+\gamma^2\xi^2}. \end{aligned}$$

Ersetzt man noch $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ durch $\frac{\gamma^2}{1+\gamma^2}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\gamma^2}{2\gamma}\right) x &= \gamma\,\frac{(1-\zeta^2)}{1+\gamma^2\zeta^2} \\ \left(\frac{1+\gamma^2}{2\gamma}\right) y &= \frac{2\zeta\gamma}{1+\gamma^2\zeta^2} \\ \left(\frac{1+\gamma^2}{2\gamma}\right) z &= \zeta\,\frac{(1-\gamma^2)}{1+\gamma^2\zeta^2}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Elimination von ζ

$$(x + \cos\alpha)^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\frac{y}{z} = \frac{2\gamma}{1 - \gamma^2} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Die Kurve C_1 ist daher ein Kreis vom Radius 1, dessen Ebene unter dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ gegen die Ebene des ersten geneigt ist. Die beiden Kreise C und C_1 schneiden sich in der x-Achse, aber der zweite hat seinen Mittelpunkt A an der Stelle $x = -\cos\alpha$, das Quadrat des Verhältnisses der Bogenelemente S^2 findet man gleich

$$\left(\frac{\cos\alpha}{\gamma}\;\frac{1 + \zeta^2}{1 + \gamma^2\zeta^2}\right)^2.$$

Man kann übrigens die Koordinaten des zweiten Kreises auch in die einfachere Form

$$x = \frac{\sin^2\alpha\cos s}{1 + \cos\alpha\cos s}$$

$$y = \frac{\sin^2\alpha\sin s}{1 + \cos\alpha\cos s}$$

$$z = \frac{\sin s}{1 + \cos\alpha\cos s}$$

bringen. Diese beiden Kreise, deren Ebenen den Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ miteinander bilden, und von jedem Punkte ihrer gemeinsamen Normale von der Länge $\cos\alpha$ aus betrachtet sich unter konstantem Winkel α zu schneiden scheinen, bilden das einzige den angegebenen Voraussetzungen entsprechende Paar von ebenen Kurven.

Bei der vorigen Untersuchung ist die Konstante c als von 0 und ∞ verschieden vorausgesetzt. Ist aber $c = \infty$, so wird $q = 0$ zu setzen sein; dies ist ein trivialer Fall, da beide Kurven C, C_1 auf derselben Developpabelen liegen. Ist dagegen

$c = 0$, so ist $p = 0$ und $S^2 = q^2$. Daraus folgt dann, wie unter 2) $r = k$; da nun

$$p = 1 - \frac{k}{r} \cos \sigma = 0$$

ist, so wird $\sigma = 0$, $\sigma_1 = 0$. Da auch

$$q = \frac{k}{T},$$

es folgt aus der unter 4) bemerkten Gleichung

$$T T' = k^2;$$

die Kurven bilden das spezielle Bertrandsche Paar, das schon S. 17, Anmerkung erwähnt wurde.

Es sei nun zweitens

$$\Omega = 2 \frac{\sin \sigma}{r}.$$

Dann ist nach 1) entweder $S^2 = 1$, die Kurven C und C_1 sind kongruent. Oder es ist

$$\frac{S^2}{r^2} = \frac{q^2}{k^2},$$

also

$$\frac{p}{q} = \sqrt{\frac{r^2}{k^2} - 1}$$

zu setzen. Dies liefert die Gleichung

1) $$\frac{1 - \frac{k}{r} \cos \sigma}{k\left(\frac{1}{T} - \sigma'\right)} = \sqrt{\frac{r^2}{k^2} - 1},$$

in welcher noch

$$2 \frac{\sin \sigma}{r} = \frac{d}{d s} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r^2}{k^2} - 1}$$

zu setzen ist. Durch die Gleichung 1) ist daher die Torsion der Kurve C definiert; der Krümmungshalbmesser r kann willkürlich angenommen werden.

§ 9.

Die Bertrandschen Kurven.

Unter einem Bertrandschen Kurvenpaar verstehen wir hier ein Paar, für das die gemeinsame Normale P_1, P in beiden Kurven des Paares Hauptnormale ist.[1])

Es kann dann zunächst $\sigma = 0$ sein, während $\sigma_1 = 0$ oder $= \pi$ ist. Im ersten Falle hat der Krümmungshalbmesser von C die Richtung von P und P_1, der von C_1 die umgekehrte Richtung; im zweiten liegt der Krümmungshalbmesser von C_1 nach der entgegengesetzten Richtung.

Setzt man nun $\cos\sigma = +1$, $\cos\sigma_1 = \varepsilon$, wo $\varepsilon = \pm 1$ ist, so folgt nach § 1

$$q = \frac{k}{T}, \quad q_1 = \frac{k}{T_1}$$

$$p = 1 - \frac{k}{r}, \quad p_1 = 1 - \frac{\varepsilon k}{r_1}.$$

[1]) Die Hauptnormalen eines Kurvenpaares sind zueinander parallel, wenn nach § 1, 7)

$$q\left(\Omega - \frac{\sin\sigma}{r}\right) = 0$$

$$p\,\Omega\cos\sigma - \frac{q^2}{k}\sin\sigma = 0$$

ist. Es muß also entweder $q = 0$ sein; dann sind beide Kurven orthogonale Trajektorien einer Developpabelen; oder es ist

$$\Omega - \frac{\sin\sigma}{r} = 0.$$

Dann muß aber auch

$$\sin\sigma\left(p\frac{\cos\sigma}{r} - \frac{q^2}{k}\right) = 0$$

sein. Ist $\sin\sigma = 0$, so hat man den Bertrandschen Fall, wo die Hauptnormalen coincidieren. Ist dagegen gleichzeitig

$$\Omega = \frac{\sin\sigma}{r}, \quad p = S^2,$$

so ist nach § 1 IV^a die Kurve C_1 eine gerade Linie, und die Frage verliert ihre Bedeutung.

Aus der Gleichung

$$S\frac{\sin\sigma_1}{r_1} + \frac{\sin\sigma}{r} = \Omega$$

folgt jetzt $\Omega = 0$, oder

1) $$p = c\,q,$$

also

2) $$1 = \frac{k}{r} + \frac{c\,k}{T};$$

auch ist

$$\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

der Cosinus des konstanten Winkels, unter dem C und C_1 sich zu schneiden scheinen.

Demnach wird

3) $$S^2 = q^2(1+c^2) = k^2\frac{(1+c^2)}{T^2} = p^2\frac{(1+c^2)}{c^2}.$$

Aus der Gleichung

$$S^2 q_1 = q$$

folgt nun

4) $$T\,T_1 = k^2(1+c^2).$$

Aus der Gleichung

5) $$S^2 p_1 = p$$

folgt

$$k^2\frac{(1+c^2)}{T^2}\left(1-\frac{\varepsilon k}{r_1}\right) = 1 - \frac{k}{r} = \frac{c\,k}{T}$$

oder

6) $$1 - \frac{\varepsilon k}{r_1} = \frac{c}{1+c^2}\,\frac{T}{k} = \frac{kc}{T_1};$$

2) und 6) sind die bekannten natürlichen Gleichungen der Bertrandschen Kurvenklasse. Aus der Gleichung

$$p\,p_1 = \frac{c^2}{1+c^2}$$

folgt übrigens noch

7) $$\left(1-\frac{\varepsilon k}{r_1}\right)\left(1-\frac{k}{r}\right)=\frac{c^2}{1+c^2}.$$

Schreibt man endlich die Gleichung 5) in der Form

$$-\varepsilon S^2\frac{k}{r_1}=-S^2+1-\frac{k}{r},$$

oder mit Hilfe von 2) und 3)

$$-\varepsilon S^2\frac{k}{r_1}=-\frac{k^2}{T^2}-\left(1-\frac{k}{r}\right)^2+\left(1-\frac{k}{r}\right),$$

so erhält man

8) $$-\varepsilon S^2\frac{k}{r_1}=\frac{k}{r}-k^2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{T^2}\right).$$

Hieraus folgen sofort die schon von Aoust angegebenen Bedingungen.

Ist

$$k<\frac{r\,T^2}{r^2+T^2},$$

so muß ε einen negativen Wert haben, die Krümmungshalbmesser von C und C_1 sind beide nach derselben Seite hin gerichtet. Ist dagegen

$$k>\frac{r\,T^2}{r^2+T^2},$$

so muß ε positiv sein, der Krümmungshalbmesser von C ist nach P_1 der von C_1 nach P hin gerichtet. Für den Fall des Gleichheitszeichens hat C_1 eine Wendung, da $r_1=\infty$ wird.

Man kann die Bedingung

$$k\lessgtr\frac{r\,T^2}{r^2+T^2},$$

je nachdem $\varepsilon\lessgtr 0$ auf eine andere Form bringen, wenn man

$$\frac{ck}{T}=1-\frac{k}{r}$$

setzt. Dann ergibt sich

$$9) \qquad (k-r)\left(1+\frac{k-r}{c^2 k}\right) \lesseqgtr 0, \quad \varepsilon \lesseqgtr 0.$$

Ist dagegen für die erste Kurve C, $\sigma = \pi$, für die zweite C_1, $\cos\sigma = \varepsilon$, so wird analog zu 8)

$$-\varepsilon S^2 \frac{k}{r_1} = -\frac{k}{r} - k^2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{T^2}\right).$$

In diesem Falle besteht keine besondere Bedingung, dagegen muß jetzt ε eine positive Größe sein, d. h. der Krümmungshalbmesser von C_1 ist stets nach derselben Seite gerichtet, wie der von C.

Hieraus ergeben sich nun die folgenden Fälle:

1. ε positiv, $\sigma = 0$. Dann ist nach 9) $k < r$ möglich; dann muß zugleich nach 7) $k > r_1$ sein. Beide Krümmungsmittelpunkte befinden sich auf der Strecke P, P_1. Es ist aber auch $k < r$ möglich, dann muß nach 9) $r > k(1+c^2)$ sein. Zugleich ist nach 7) $k < r_1$. Der Krümmungsmittelpunkt von C liegt über P_1 hinaus; der von C_1 über P hinaus.
2. ε positiv, $\sigma = \pi$. In diesem Falle ist immer $r' > k$; beide Krümmungsmittelpunkte befinden sich auf der Seite von P, welche P_1 nicht enthält.
3. ε negativ, $\sigma = 0$. Der Fall $k > r$ ist nach 9) unmöglich. Daher ist $k < r$ und zugleich $r < k(1+c^2)$; beide Krümmungsmittelpunkte befinden sich auf der Seite von P_1, die P nicht enthält.
4. Der Fall, ε negativ, $\sigma = \pi$, wo beide Krümmungshalbmesser entgegengesetzt nach dem unendlich fernen Punkt von P, P_1 gerichtet sind, ist unmöglich; sind sie überhaupt entgegengesetzt gerichtet, so befinden sich beide Krümmungsmittelpunkte auf der Strecke P, P_1.[1])

[1]) Die hier gemachten Angaben, aus denen man auch unmittelbar die weiteren bekannten Eigenschaften der Bertrandschen Paare ableitet, scheinen mir zur weiteren Erläuterung der eigentümlichen Konfiguration derselben zu dienen.

Da die Bertrandschen Kurven ein so vielfaches Interesse gefunden haben, mag hier noch die folgende Bemerkung gestattet sein.

Sucht man alle Kurven C_1, die mit einer gegebenen Kurve C ein Paar bilden, das sich unter konstantem Winkel schneidet, so ist die Gleichung $p = cq$ oder

$$1 - \frac{k \cos \sigma}{r} = ck \left(\frac{1}{T} - \sigma'\right)$$

zu lösen. Sie verwandelt sich, wenn man $z = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}$ oder

$$\sigma' = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{2 \frac{dz}{ds}}{1 + z^2}$$

setzt, in die Riccatische Gleichung

$$2ck \frac{dz}{ds} = \left(\frac{ck}{T} + k - 1\right) + z^2 \left(\frac{ck}{T} - 1 - \frac{k}{r}\right).$$

Dies liefert den folgenden Satz: Das Doppelverhältnis der Halbierungslinien der Winkel von irgend vier gemeinsamen Normalen von vier Kurven C_1, die mit derselben Kurve C ein Paar mit konstantem k bilden, das sich unter konstantem Winkel zu schneiden scheint, ist unveränderlich längs der Kurve C.

Die Riccatische Gleichung kann bekanntlich durch Quadratur gelöst werden, wenn man ein partikuläres Integral derselben kennt. Zu jeder der gefundenen Kurven C_1, deren Charaktere jedesmal eindeutig bestimmt sind, kann man also unzählig viele neue Kurven durch Quadratur finden, die mit ihr ein Paar bilden, wenn man die Konstante c festhält.[1])

Insbesonders kann man nun immer ein partikuläres Integral angeben, wenn

$$\frac{k}{r} + \frac{ck}{T} - 1 = a \left(\frac{ck}{T} - 1 - \frac{k}{r}\right)$$

[1]) Besonders einfach werden diese Verhältnisse, wenn C selbst eine gemeine Schraubenlinie, also r und T Konstanten sind.

wo a eine Konstante ist, d. h. wenn

$$\frac{k(a+1)}{r(a-1)} = \frac{ck}{T} - 1$$

also die Kurve C selbst eine Bertrandsche Kurve ist.

Nimmt man z. B.

$$\frac{k}{r} + \frac{ck}{T} - 1 = 0,$$

so ist

$$\frac{c}{z} = \int \frac{ds}{r} + \text{const},$$

für

$$\frac{ck}{T} - 1 - \frac{k}{r} = 0$$

wird

$$cz = \int \frac{ds}{r} + \text{const}.$$

Für $a = -1$ ergibt die vorstehende Gleichung

$$\frac{ck}{T} = 1,$$

d. h. die Kurve C hat konstante Torsion. Aber diese Kurven gehören nicht zu den Bertrandschen Kurven.[1])

[1]) Es scheint mir daher nicht zweckmäßig, die Kurven der Gattung

$$\frac{A}{T} + \frac{B}{r} + C = 0,$$

wie mehrere Schriftsteller tun, allgemein als *Bertrandsche Kurven* zu bezeichnen. Ist nämlich $B = 0$, so muß das zugehörige k gleich Null sein, d. h. es entsteht kein Paar, falls man nicht sagen will, daß jede Kurve, insbesondere auch also die Kurve konstanter Torsion mit sich selbst ein Bertrandsches Paar bildet.

Aoust hat (Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace, Paris 1876, p. 369) den einer Verallgemeinerung der Bertrandschen Paare entsprechenden Satz bemerkt:

Sind zwei Kurven so aufeinander bezogen, daß sie in entsprechenden Punkten parallele Hauptnormalen haben, so ist der Winkel ihrer Tangenten, sowie auch der ihrer Binormalen, konstant. Dieser Satz ergibt

§ 10.

Ebene Kurvenpaare.

Die Bestimmung aller ebenen Kurvenpaare ist an sich sehr einfach. Nimmt man in der xy Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems eine Kurve C beliebig an, so sind

sich unmittelbar aus den Frenetschen Formeln. Man hat nämlich, je nachdem die Hauptnormalen gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, für die beiden Kurven C und C_1

1) $$\frac{d\,a}{d\,s} = \frac{\xi}{r}, \qquad \frac{d\,a_1}{d\,s_1} = \pm\frac{\xi}{r_1}$$

2) $$\frac{d\,\xi}{d\,s} = -\left(\frac{a}{r} + \frac{\lambda}{T}\right), \qquad \pm\frac{d\,\xi_1}{d\,s_1} = -\left(\frac{a_1}{r_1} + \frac{\lambda_1}{T_1}\right)$$

3) $$\frac{d\,\lambda}{d\,s} = \frac{\xi}{T}, \qquad \frac{d\,\lambda_1}{d\,s_1} = \pm\frac{\xi}{T_1}.$$

Aus 1) und 3 folgt nun sofort

$$\sum a_1\frac{d\,a}{d\,s} = 0, \qquad \sum a\,\frac{d\,a_1}{d\,s} = 0$$

$$\sum \lambda_1\frac{d\,\lambda}{d\,s} = 0, \qquad \sum \lambda\,\frac{d\,\lambda_1}{d\,s} = 0;$$

diese Gleichungen sagen aber aus, daß

$$\Sigma\, a\, a_1 = \cos(t\,t_1) = \text{const} = \cos\omega$$

ist und gleiches gilt für $\Sigma\lambda\lambda_1 = \cos(b\,b_1)$. Durch eine direkte Betrachtung der beiden Trieder folgt ferner

$$\cos(t\,b_1) = \pm\sin\omega$$
$$\cos(t_1\,b) = -\sin\omega$$
$$\cos(b\,b_1) = \pm\cos\omega$$

je nachdem

$$\cos(h\,h_1) = \pm 1 \quad \text{ist.}$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{1}{r_1}\sum a\,a_1 + \frac{1}{T_1}\sum a\,\lambda_1 = \mp\sum a\,\frac{d\,\xi}{d\,s_1} = \pm\frac{1}{r}\,\frac{d\,s}{d\,s_1},$$

oder

$$\frac{\cos(t\,t_1)}{r_1} + \frac{\cos(t\,b_1)}{T_1} = \pm\frac{1}{r_1}\,\frac{d\,s}{d\,s_1}$$

$$\frac{\cos(t\,t_1)}{r} + \frac{\cos(t_1\,b)}{T} = \pm\frac{1}{r}\,\frac{d\,s}{d\,s_1},$$

$$x_1 = x + k\cos\sigma\cos\alpha$$
$$y_1 = y - k\cos\sigma\sin\alpha$$
$$z_1 = k\sin\sigma,$$

wo $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$ gesetzt ist, die Koordinaten einer zweiten Kurve C_1, die mit ihr ein Paar bildet. Soll diese in einer gegebenen Ebene

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

liegen, so hat man aus der Gleichung

$$Ax + By + Ck\sin\sigma + D + k\cos\sigma(A\cos\alpha - B\sin\alpha) = 0$$

σ zu berechnen. Da sich hier bei gegebenem k im allgemeinen zwei Lösungen für σ ergeben, so kann man zu jeder beliebigen ebenen Kurve C in einer zweiten gegebenen Ebene im allgemeinen — d. h. von der Realität abgesehen — zwei Kurven C_1 finden, die mit ihr ein Paar bilden.

Aber nicht so einfach ist die Frage, sowie noch eine Bedingung, wie z. B. daß das Verhältnis der Bogenelemente S konstant sei, hinzukommt. Zu einer übersichtlichen Behandlung gelangt man auch hier durch die Anwendung der Gleichungen des § 1. Bilden überhaupt zwei Kurven ein Paar, so ist nach § 1

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\left(\frac{1}{T_1} - \sigma_1'\right) = \frac{1}{T} - \sigma',$$

---

welches aus 2) durch Multiplikation mit α, α_1 und Summation folgen, ergeben sich auch die ebenfalls von Aoust herrührenden Gleichungen

$$\frac{1}{r_1} = \pm\frac{ds}{ds_1}\left(\frac{\cos\omega}{r} - \frac{\sin\omega}{T}\right)$$
$$\frac{1}{T_1} = \frac{ds}{ds_1}\left(\frac{\sin\omega}{r} + \frac{\cos\omega}{T}\right)$$
$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{T_1^2} = \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{T^2}\right)$$
$$\pm\frac{T_1}{r_1} = \frac{\cos\omega\,\frac{T}{r} - \sin\omega}{\sin\omega\,\frac{T}{r} + \cos\omega}.$$

oder:

$$1)\qquad \frac{ds_1}{ds}\left(\frac{ds_1}{T_1} - d\sigma_1\right) = \frac{ds}{T} - d\sigma.$$

Wird nun $\frac{ds_1}{ds} = S = a = \text{const}$ vorausgesetzt, so folgt, wenn man die Kontingenzwinkel der Windung

$$\int \frac{ds_1}{T_1} = \eta_1, \quad \int \frac{ds}{T} = \eta$$

einführt, durch Integration aus 1)

$$2)\qquad a(\eta_1 - \sigma_1) = (\eta - \sigma) + \text{const.}$$

Sind insbesondere, wie nun vorausgesetzt werden soll, die beiden Kurven C und C_1 eben, so ist nach 2)

$$3)\qquad a\sigma_1 = \sigma + c,$$

wo c eine Konstante. Und umgekehrt ist die Gleichung 3) auch die Bedingung dafür, daß einer ebenen Kurve C wieder eine ebene Kurve C_1 zugehört. Aus den Gleichungen 3) des § 12 findet man nun

$$4)\qquad k\frac{d\sigma}{ds} = \pm a\cos\lambda, \quad \cos\lambda \neq 0$$

und

$$5)\qquad \sin\lambda\cos\frac{(\sigma + c)}{a}\cos\sigma + \sin\frac{(\sigma + c)}{a}\sin\sigma = C,$$

wo $|C| < 1$ den Cosinus des konstanten Winkels der Ebenen der beiden Kurven bezeichnet.

Hieraus folgt

$$\sin\lambda = \frac{C - \sin\sigma\sin\frac{(\sigma + c)}{a}}{\cos\frac{\sigma + c}{a}\cos\sigma}$$

$$6)\qquad \cos^2\lambda = \frac{\left[\cos\left(\frac{\sigma + c}{a} + \sigma\right) + C\right]\left[\cos\left(\frac{\sigma + c}{a} - \sigma\right) - C\right]}{\cos^2\frac{(\sigma + c)}{a}\cos^2\sigma}$$

$$7)\qquad 1 - a \sin \lambda = \frac{\cos \frac{(\sigma + c)}{a} \cos \sigma - C a + a \sin \sigma \sin \frac{(\sigma + c)}{a}}{\cos \frac{(\sigma + c)}{a} \cos \sigma}$$

$$1 - \frac{\sin \lambda}{a} = \frac{\cos \frac{(\sigma + c)}{a} \cos \sigma - \frac{c}{a} + \frac{1}{a} \sin \sigma \sin \frac{(\sigma + c)}{a}}{\cos \frac{(\sigma + c)}{a} \cos \sigma}.$$

Aus den Gleichungen 3) des § 12 findet man nun vermöge 7)

$$8)\qquad \begin{aligned} \frac{k}{r} &= \frac{1}{\cos \frac{(\sigma + c)}{a} \cos^2 \sigma} \left(\cos \frac{(\sigma + c)}{a} \cos \sigma - C a + a \sin \frac{(\sigma + c)}{a} \sin \sigma \right) \\ \frac{k}{r_1} &= \frac{1}{\cos \sigma \cos^2 \frac{\sigma + c}{a}} \left(\cos \frac{(\sigma + c)}{a} \cos \sigma - \frac{C}{a} + \frac{1}{a} \sin \frac{(\sigma + c)}{a} \sin \sigma \right) \end{aligned}$$

und aus Gleichung 4) und 6)

$$9)\qquad k^2 \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = a^2 \frac{\left[\cos \left(\frac{\sigma + c}{a} + \sigma \right) + c \right] \left[\cos \left(\frac{\sigma + c}{a} - \sigma \right) - C \right]}{\cos^2 \sigma \cos^2 \frac{(\sigma + c)}{a}}.$$

Sollen nun, wie wir überall voraussetzten, die Kurven C und C_1 reell sein, so muß die rechte Seite positiv oder Null sein. Hierdurch kann, wenn die Konstanten C resp. c beliebig gewählt sind, der Verlauf von σ beschränkt werden.[1])

Die Gleichung 9) bestimmt σ durch eine Quadratur, die allerdings bei beliebigem a nicht zu den einfachen gehört.

---

[1]) Setzt man z. B. voraus, daß der Cosinus der Binormalen gleich ± 1 sei, so werden die Ebenen der Kurven des Paares parallel sein. Dann aber ist die rechte Seite der Gleichung 9) immer negativ, es sei denn, daß man σ einen der konstanten Werte erteilt, für welche sie verschwindet. Dann aber werden r und r_1 konstant, es entsteht eine ganz triviale Lösung, beide Kurven werden Kreise in parallelen Ebenen.

Man kann also durch Quadratur die natürlichen Gleichungen aller Paare von ebenen Kurven bestimmen, deren Bogenelemente für entsprechende Punkte in konstantem Verhältnis stehen. Damit sind aber auch die Gleichungen dieser Kurven selbst in rechtwinkligen Koordinaten durch zwei weitere Quadraturen vermöge der Gleichungen 8) vollständig gegeben.

Die unter 8), 9) gegebene Lösung enthält noch zwei willkürliche Konstanten. Ist insbesondere $a = 1$, so erhält man aus 8)

$$8^{a})\quad \begin{aligned} \frac{k}{r} &= \frac{\cos c - C}{\cos(\sigma + c)\cos^2\sigma} \\ \frac{k}{r_1} &= \frac{\cos c - C}{\cos^2(\sigma + c)\cos\sigma}. \end{aligned}$$

Wird hier noch $c = 0$ angenommen, so werden die beiden Kurven C und C_1 kongruent. Es läßt sich leicht zeigen, daß in diesem schon oben behandelten Falle zwei kongruente Ellipsen entstehen.

Setzt man

$$c_1^3 = \frac{1 - C}{k},$$

wobei c_1 eine positive Konstante ist, so wird

$$r^{1/3} c_1 = \cos\sigma;$$

wird dies in die mit 9) äquivalente Gleichung

$$1 = k^2\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 + \left(1 - \frac{k\cos\sigma}{r}\right)^2$$

eingesetzt, so ergibt sich wegen

$$\frac{1}{3}\frac{dr}{ds} r^{-2/3} c_1 = -\sin\sigma\frac{d\sigma}{ds}, \quad \sin^2\sigma = 1 - c_1^2 r^{2/3}$$

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 9(c_1^2 r^{2/3} - 1)\left(1 - \frac{2}{kc_1} r^{2/3}\right).$$

Setzt man jetzt

$$c_1^2 = \left(\frac{b^2}{a^4}\right)^{1/3}, \quad \frac{2}{k\,c_1} = \left(\frac{a^2}{b^4}\right)^{1/3}, \tag{10}$$

so erhält man die bekannte natürliche Gleichung der Ellipse mit den Achsen a und b:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 9\left[1 - \left(\frac{b^2}{a^4}\right)^{1/3} r^{2/3}\right]\left[\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{1/3} r^{2/3} - 1\right].$$

Da nach 10) $k = 2\,b$ wird, und

$$c_1^3 = \frac{b}{a^2},$$

so wird

$$1 - C = \frac{2\,b^2}{a^2}.$$

Ist

$$\frac{2\,b^2}{a^2} < 1,$$

so ist C positiv und < 1; ist dagegen

$$\frac{2\,b^2}{a^2} > 1,$$

so ist

$$-C = \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} - 1,$$

also $|-C| < 1$.

Um nicht zu weitläufig zu werden, soll nur der Fall $a = 1$ für die Gleichung 9) noch etwas weiter ausgeführt werden. Setzt man

$$\cos c - C = \frac{k}{c_1},$$

so erhält man nach einigen Umformungen die Gleichung

$$c_1 \frac{\sqrt{k}\, d\sigma \cos\sigma \cos(\sigma + c)}{\sqrt{2\,c_1 \cos\sigma(\cos\sigma + c) - k}} = ds.$$

Setzt man wie gebräuchlich

$$\sin\sigma = \frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}, \quad \cos\sigma = \frac{2\zeta}{1+\zeta^2}, \quad d\sigma = -2\frac{d\zeta}{1+\zeta^2},$$

so entsteht für s ein elliptisches Integral. Ich gehe auf die Behandlung desselben, welches sich unter geeigneten Voraussetzungen über die Konstanten c_1 und c auch auf ein logarithmisches reduzieren läßt, nicht weiter ein, obwohl diese merkwürdigen Kurvenpaare wohl eine ausführlichere Behandlung zu verdienen scheinen.

Es ergibt sich nun die weitere Aufgabe, das in diesem § gestellte Problem auch bei der Verwendung von rechtwinkligen Koordinaten auf Quadraturen zurückzuführen. Für den Fall, wo die Ebenen der beiden Kurven aufeinander rechtwinklig stehen, läßt sich dies leicht ausführen; nur dieser Fall soll hier noch zur Behandlung kommen.

Wir wählen zu diesen Ebenen die xy und yz-Ebene, dann sind die Bedingungen des Problems durch die Gleichungen

$$\begin{gathered} x^2 + (y-y_1)^2 + z_1^2 = k^2 \\ dy_1^2 + dz_1^2 = a^2(dx^2+dy^2) \\ -x\,dx + (y_1-y)\,dy = 0 \end{gathered} \tag{10}$$

ausgesprochen, von denen die letzte ausdrückt, daß die Verbindungslinie der korrespondierenden Punkte $x, y, 0; 0, y_1, z_1$ zu einer der Kurven senkrecht steht.

Setzt man nun

$$y_1 - y = px = \xi, \tag{11}$$

wo

$$p = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

so ist $dy_1 = dy + d\xi$, oder nach der letzten der Gleichungen 10)

$$dy_1 = \frac{x\,dx + \xi\,d\xi}{\xi} = \frac{1}{2}\frac{d(x^2+\xi^2)}{\xi}$$

und

$$z_1\,dz_1 = -x\,dx + (y_1 - y)\,d\xi = -(x\,dx + \xi\,d\xi),$$

also

$$dz_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{d\,(x^2+\xi^2)}{\sqrt{k^2-(x^2+\xi^2)}}.$$

Hieraus folgt durch Einsetzen in die zweite der Gleichungen 10)

$$a^2(dx^2+dy^2) = a^2\,dx^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{4}\,[d\,(x^2+\xi^2)]^2\left[\frac{1}{\xi^2}+\frac{k^2-(x^2+\xi^2)}{1}\right]$$

oder, wenn man p durch diesen Wert nach 11) ersetzt

$$4\,a^2\,dx^2\,\frac{\xi^2+x^2}{\xi^2} = \frac{(k^2-x^2)\,[d\,(x^2+\xi^2)]^2}{\xi^2\,[k^2-(x^2+\xi^2)]}.$$

Wird noch

$$\zeta^2 = (x^2+\xi^2)$$

eingeführt, so entsteht die einfache Differentialgleichung

12) $$\frac{a\,dx}{\sqrt{k^2-x^2}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{k^2-\zeta^2}}.$$

Setzt man

$$x = k\sin\varphi, \qquad \zeta = k\sin\psi,$$

so wird

$$a\,d\psi = d\varphi, \qquad a\,\psi = \varphi + c.$$

Demnach ist

$$x^2+\xi^2 = k^2\sin^2\frac{\varphi+c}{a}$$

oder

$$\xi^2 = k^2\left(\sin^2\frac{\varphi+c}{a} - \sin^2\varphi\right).$$

Da andererseits

$$\xi = x\,p = x\,\frac{dx}{dy},$$

so wird

$$dy = \frac{x\,dx}{\xi} = k\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\sin\frac{\varphi+c}{a} - \sin^2\varphi}};$$

die Kurve C ist also in Parameterform durch die Gleichungen

$$13)\qquad \begin{aligned} x &= k \sin\varphi \\ y &= k \int \frac{\sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi + c}{a} - \sin^2\varphi}} + \text{const.} \\ z &= 0 \end{aligned}$$

gegeben und die zugehörige Kurve C_1 in der YZ-Ebene durch

$$13')\qquad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ y_1 &= y + k\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi + c}{a} - \sin^2\varphi} \\ z_1 &= \pm k \cos \frac{\varphi + c}{a}. \end{aligned}$$

In dem besonderen Falle, wo $c = 0$, und $a = 1$ ist, ist diese Darstellung nicht mehr gültig, weil dann $\xi = 0$ wird. Man erhält dann aber aus 12)

$$x = \text{const}, \qquad \zeta = \text{const}$$

eine ganz triviale Lösung, welche zwei zur Y-Achse im Abstande k parallele Gerade vorstellt, von denen die eine in der XY-Ebene, die andere in der YZ-Ebene liegt.

Auch hier seien in Bezug auf die Gleichungen 13), 13') nur ein paar ganz spezielle einfache Fälle hervorgehoben.

Wählt man

$$c = \frac{\pi}{2}, \qquad a = 1,$$

so wird

$$\begin{aligned} x &= k \sin\varphi & x_1 &= 0 \\ y &= -\frac{k}{2}\sqrt{\cos 2\varphi} & y_1 &= +\frac{k}{2}\sqrt{\cos 2\varphi} \\ z &= 0 & z_1 &= \mp k \sin\varphi = \mp x. \end{aligned}$$

Da $4y^2 + 2x^2 = k^2$, so hat man zwei kongruente Ellipsen, d. h. den schon wiederholt erwähnten Fall.

Wählt man $a = \frac{1}{2}$, $c = 0$, so wird

$$x = k \sin \varphi$$

$$y = \frac{k}{2} \operatorname{arc} \sin 2 \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}}$$

oder

$$y = \frac{k}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{2x}{k\sqrt{3}};$$

mithin eine Sinuskurve. Zugleich wird

$$z_1 = \pm k \cos 2\varphi, \quad y_1 = y + k \sin \varphi \sqrt{4 \cos^2 \varphi - 1}.$$

§ 11.

Ähnliche Kurvenpaare.

Nimmt man an, daß für zwei Kurven $S = \frac{r_1}{r}$, $S = \frac{T_1}{T}$ ist, so sind die beiden Kurven mit entsprechenden Punkten so auf einander bezogen, daß

$$\frac{ds}{r} = \frac{ds_1}{r_1}, \quad \frac{ds}{T} = \frac{ds_1}{T_1}$$

ist, d. h. die Kurven sind in den kleinsten Teilen zu einander ähnlich. Bezeichnet man die Koordinaten derselben durch x, y, z; x_1, y_1, z_1 so ist

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \gamma,$$

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \alpha_1, \quad \frac{dy_1}{ds_1} = \beta_1, \quad \frac{dz_1}{ds_1} = \gamma_1,$$

während die α, ξ, λ; $\alpha_1, \xi_1, \lambda_1$ und entsprechend die β, η, μ; β_1, η_1, μ_1 etc. dem System der Frenetschen Formeln

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{r}, \qquad \frac{d\alpha_1}{ds_1} = \frac{\xi_1}{r_1}$$

$$\frac{d\xi}{ds} = -\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{T}\right), \qquad \frac{d\xi_1}{ds_1} = -\left(\frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\lambda_1}{T_1}\right)$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\xi}{T}, \qquad \frac{d\lambda_1}{ds_1} = \frac{\xi_1}{T_1}$$

genügen, von denen die zweite Reihe durch Multiplikation mit S auf die Form

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = \frac{\xi_1}{r}$$

$$\frac{d\xi_1}{ds} = -\left(\frac{\alpha_1}{r} + \frac{\lambda_1}{T}\right)$$

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = \frac{\xi_1}{T}$$

gebracht wird. Denkt man sich nun diese Gleichungen so nitegriert, daß zu Anfang das System der Werte α, ξ, λ . . . mit dem der α_1, ξ_1, λ_1 . . . coincidiert, so folgt

$$\alpha = \alpha_1, \quad \xi = \xi_1, \quad \lambda = \lambda_1 \quad \text{etc.} \ldots$$

und man erhält

$$x = \int \alpha\, ds, \quad x_1 = \int \alpha S\, ds$$

nebst den analogen Formeln für y, y_1; z, z_1.

Mit Benutzung eines von Herrn Bianchi eingeführten Ausdruckes kann man sagen:

Zwei in den kleinsten Teilen ähnliche Kurven entspringen durch die Transformation von Combescure aus einander.

Die Kurven sind in dem eben besprochenen Falle direkt ähnlich. Setzt man dagegen

$$\frac{S}{r_1} = \frac{1}{r} \quad \frac{S}{T_1} = -\frac{1}{T},$$

so sind sie invers in den kleinsten Teilen ähnlich. Die Frenetschen Formeln werden hier

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{r}, \qquad \frac{d\alpha_1}{ds} = \frac{\xi_1}{r}$$

$$\frac{d\xi}{ds} = -\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{T}\right), \qquad \frac{d\xi_1}{ds} = -\left(\frac{\alpha_1}{r} - \frac{\lambda_1}{T}\right)$$

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\xi}{T}, \qquad \frac{d\lambda_1}{ds} = -\frac{\xi_1}{T}.$$

Kehrt man in der zweiten Reihe gleichzeitig die Vorzeichen von α_1 und ξ_1 um, wobei die Determinante $(\alpha_1\ \xi_1\ \lambda_1)$ ihr Vorzeichen $+1$ nicht ändert, so erkennt man, daß die Gleichungen

$$x = \int \alpha\, ds, \qquad x_1 = -\int \alpha S\, ds, \quad \text{u. s. w.}$$

bestehen; es handelt sich hier einfach um Symmetrie in Bezug auf einen Punkt.

Das Problem, alle in den kleinsten Teilen ähnlichen Kurvenpaare zu bestimmen, läßt sich mit Hilfe der Gleichungen der § 1 ansetzen; näherliegend ist übrigens eine andere Behandlungsweise, welche direkt die Funktion S zu bestimmen sucht. Hier soll nur die wirkliche Ähnlichkeit, d. h. der Fall wo S eine positive Konstante ist, weiter untersucht werden.

Bezeichnet man die Krümmungs- und Torsionsradien der Kurven wie früher mit r, r_1; T, T_1 so sind die Bedingungen

$$a^2 = \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2, \quad \frac{T_1}{T} = a,$$

wo a eine positive oder negative Konstante bedeutet, je nachdem die Ähnlichkeit direkt oder invers sein soll. Die Gleichungen des § 1, wobei a jetzt eine positive Konstante bedeuten möge, nehmen die Form an

$$r(a^2 - 1) = k(a \cos \sigma_1 - \cos \sigma)$$

$$\frac{\pm a - 1}{T} = a \frac{d\sigma_1}{as} - \frac{d\sigma}{as}$$

$$\sin \sigma_1 + \sin \sigma = r\,\Omega$$

$$\left(1 - k \frac{\cos \sigma}{r}\right)^2 + k^2 \left(\frac{1}{T} - \frac{d\sigma}{as}\right)^2 = a^2,$$

wo wieder das obere Vorzeichen der direkten Ähnlichkeit entspricht; sie scheinen aber für die Untersuchung weniger geeignet, da die Elimination von σ und σ_1, durch welche r und T als Funktionen von s und damit die natürlichen Gleichungen der Kurve C, welche mit C_1 ein Paar bildet, gefunden werden, nicht bequem zu sein scheint.

Wir benutzen daher den Satz des § 6, wonach die Kurven eines Paares mit konstantem Bogenelementverhältnis aus einer Mittelkurve x, y, z erzeugt werden, deren Krümmungs- und Torsionsradius mit r, τ sowie das Bogenelement mit ds bezeichnet werden sollen; die Kurven C_1 und C_2 des Paares werden durch die Indices 1, 2 unterschieden, der sich dann ebenso auf r_1, T_1, ds_1, ... r_2, T_2, ds_2 ... zu erstrecken hat. Die Koordinaten x_1, y_1, z_1 eines Punktes der Kurve C_1 sind nun, von der „Mittelkurve" ausgehend

$$x_1 = x + l_1 (\xi \cos \theta + \lambda \sin \theta), \tag{2)}$$

wobei

$$\cos \theta = r c$$

ist. Setzt man

$$l_1 \left(\frac{1}{\tau} - \frac{d\theta}{ds}\right) = q,$$

so wird

$$\frac{d s_1}{d s} \frac{d x_1}{d s_1} = a (1 - l_1 c) + q (\xi \sin \theta - \lambda \cos \theta) \tag{3)}$$

$$\left(\frac{d s_1}{ds}\right)^2 = (1 - l_1 c)^2 + q^2.$$

Aus 3) folgt durch Differentiation nach s

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 \frac{d^2 x_1}{ds_1} = - a \left(\frac{\sin \theta}{r} q + q \frac{dq}{ds} \frac{1 - l_1 c}{h}\right) \tag{4)}$$

$$+ \xi \left(\frac{1 - l_1 c}{r} - \frac{q^2}{l_1} \cos \theta + \frac{dq}{ds} \sin \theta \frac{(1 - l_1 c)^2}{h}\right)$$

$$+ \lambda \left(- \sin \theta \frac{q}{l} - \frac{dq}{ds} \cos \theta \frac{(1 - l_1 c)^2}{h}\right.,$$

wo h zur Abkürzung für $\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2$ gesetzt ist. Durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen 4) folgt, wenn noch $q = l_1 t$, also

5) $$t = \frac{1}{\tau} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\tau} - \theta'$$

gesetzt wird,

6) $$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^4 \frac{1}{r_1^2} = l_1^2 \sin^2\theta \frac{t^2}{r^2} + l_1^2 t^4 + \frac{(1-l_1 c)^2}{r^2} + 2 l_1 \frac{(1-l_1 c)}{r} t' \sin\theta$$
$$- 2 l_1 (1-l_1 c) \frac{t^2}{r} \cos\theta + l_1^2 t'^2 \frac{(1-l_1 c)^2}{(1-l_1 c)^2 + l_1^2 t^2}.$$

Soll nun für die Kurve C_2, bei der die Gleichungen 2)–6) gelten, wenn man den Index 1 durch 2 ersetzt,

a) $$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 l_2^2 - \left(\frac{ds_2}{ds}\right)^2 l_1^2 = 0$$

das Verhältnis der Bogenelemente von C_1 und C_2 also absolut genommen gleich $l_1 : l_2$ sein, so hat man nach

3) $$l_2^2 (1-l_1 c)^2 - l_1^2 (1-l_2 c)^2 = 0$$

oder

I $$l_1 + l_2 - 2 l_1 l_2 c = 0, \quad l_1 l_2 = - \frac{l_1^2}{1-2 l_1 c};$$

d. h. l_1 und l_2 haben gleiches oder ungleiches Zeichen je nachdem $1-2 l_1 c \lessgtr 0$ ist.[1] Es ist ferner, wenn

$$k_1 = 1 - l_1 c, \quad k_2 = 1 - l_2 c$$

gesetzt wird

7) $$\begin{aligned} l_2 k_1 + l_1 k_2 &= 0 \\ l_2^2 k_1^3 + l_1^2 k_2^3 &= 0 \\ l_2^2 k_1^2 - l_1^2 k_2^2 &= 0 \\ l_2 k_1 - l_1 k_2 &= l_2 - l_1 \end{aligned}$$
$$\frac{k_1^2}{k_1^2 + l_1^2 t^2} - \frac{k_2^2}{k_2^2 + l_2^2 t^2} = 0.$$

---

[1]) Der Fall $1 - 2 l_1 c = 0$, wo l_2 unendlich wird, hat hier keinen Sinn. Auch von dem trivialen Falle

$$l_1 + l_2 = 0, \quad \text{wo } c = 0, \quad \sigma = \frac{\pi}{2},$$

wird im folgenden abgesehen.

Sollen die Krümmungsradien r_1, r_2 ebenfalls im absoluten Verhältnisse $l_1 : l_2$ stehen, so ist zu setzen

$$\beta)\qquad \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^4 \frac{l_2^2}{r_1^2} - \left(\frac{ds_2}{ds}\right)^4 \frac{l_1^2}{r_2^2} = 0.$$

Wird diese Differenz nun nach 6) gebildet, so bleibt vermöge der Identitäten 7) nur das vierte und fünfte Glied übrig. Es ergibt sich so die Bedingung

$$2\, l_1 l_2 \left(\frac{l_2 - l_1}{r}\right) (\sin\theta\, t' - \cos\theta\, t^2) = 0$$

oder, da $l_1 l_2$, $l_2 - l_1$ nicht verschwinden sollen, und auch (wegen $\cos\theta = r c$) r einen endlichen Wert hat,

$$\mathrm{II}\qquad \frac{dt}{ds}\sin\theta = t^2 \cos\theta.$$

Durch die Gleichung II ist die Aufgabe gelöst, sämtliche Paare C_1, C_2 zu finden, für die in korrespondierenden Punkten P_1, P_2 die Krümmungshalbmesser in demselben konstanten Verhältnis stehen wie die Bogenelemente. r bleibt dabei willkürlich, während t aus II, τ aus 5) gefunden wird, so daß die natürlichen Gleichungen der Mittelkurve bekannt sind.

Die weitere Bedingung, daß die Torsionsradien T_1, T_2 der Kurven C_1 und C_2 ebenfalls im Verhältnis $l_1 : l_2$ stehen sollen, wird jetzt durch die Gleichung

$$\gamma)\qquad \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^6 \frac{l_2^3}{r_1^2 T_1} \pm \left(\frac{ds_2}{ds}\right)^6 \frac{l_1^3}{r_2^2 T_2} = \left(\frac{ds_2}{ds}\right)^6 \frac{l_1^5}{l_2^3 r_1^2}\left(\frac{l_1}{T_1} \pm \frac{l_2}{T_2}\right) = 0$$

ausgedrückt, und liefert, je nachdem dabei l_1, l_2 von gleichem oder ungleichem Zeichen sind, den einen oder anderen Fall der Ähnlichkeit von C_1 und C_2.

Setzt man nun nach 3)

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 \frac{d^2 x_1}{ds^2} + \frac{d^2 s_1}{ds^2}\frac{dx_1}{ds} = -\alpha\frac{l_1 t}{r}\sin\theta$$

$$+ \xi\left(\frac{(1 - l_1 c)}{r} - l_1 t^2 \cos\theta + l_1 t' \sin\theta\right) - \lambda\,(l_1 t^2 \sin\theta + l_1 t' \cos\theta),$$

und führt den Wert von t' aus II ein, so folgt

$$8)\quad \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 \frac{d^2 x_1}{ds^2} + \frac{d^2 s_1}{ds^2}\frac{dx_1}{ds} = -\alpha l_1 t \frac{\sin\theta}{r} + \xi \frac{(1-l_1 c)}{r} - \lambda \frac{l_1 t^2}{\sin\theta}.$$ [1])

Ich setze nun zur Abkürzung

$$A = \frac{t}{r}\sin\theta$$

$$B = \frac{1}{r}$$

$$C = \frac{t^2}{\sin\theta},$$

dann liefert die Differentiation nach s von 8)

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^3 \frac{d^3 x_1}{ds^3} + 3\frac{ds_1}{ds}\frac{d^2 s_1}{ds^2}\frac{d^2 x_1}{ds^2} + \frac{d^3 s_1}{ds^3}\frac{dx_1}{ds}$$

$$= -\xi l_1 A - \alpha l A' - \left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{\tau}\right) B(1-l_1 c) + B'\xi(1-l_1 c) - \xi\frac{l_1 C}{\tau} - \lambda l_1 C'.$$

Aus diesen Gleichungen findet man T_1 vermöge der folgenden Gleichung

$$9)\quad \frac{-\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^6}{r_1^2 T_1} = \begin{vmatrix} 1-l_1 c & l_1 t\sin\theta & -l_1 t\cos\theta \\ -A l_1 & (1-l_1 c)B & -l_1 C \\ -l_1 A' - \frac{B}{r}(1-l_1 c) & -l_1 A + B'(1-l_1 c) - \frac{lC}{\tau} & -B\frac{1-l_1 c}{\tau} - lC' \end{vmatrix}.$$

Die Ausführung der Determinante ergibt, wenn für $1-l_1 c$ wieder k_1 gesetzt wird, für die rechte Seite von 9)

$$-k_1^3 \frac{B^2}{\tau} + l_1^3\left(A' t C\sin\theta - t A C'\sin\theta - A^2 B t\cos\theta - t\frac{CA}{\tau}\cos\theta\right)$$
$$+ l_1 k_1^2(-C'B - B^3 t\cos\theta + cB')$$
$$+ l_1^2 k_1\left(-BA\frac{t}{\tau}\sin\theta - A'Bt\cos\theta + B^2 C t\sin\theta - ABC\right.$$
$$\left. + tB'A\cos\theta - \frac{C^2}{\tau}\right).$$

---

[1]) Hier ist $\theta \neq 0$ vorausgesetzt. Ist $\theta = 0$, so ist nach II auch $t = 0$, was auf einen trivialen Fall führt.

Unter Benutzung des **unteren** Zeichens in der Bedingung γ) verschwinden nun alle Glieder der zu bildenden Differenz nach 7) bis auf das erste und letzte, und zufolge der Identitäten

$$l_2^3 k_1^2 - l_1^3 k_2^3 = (l_2 - l_1)\, l_2^2 k_1^2$$

$$l_1^2 l_2^3 k_1 - l_1^3 l_2^2 k_2 = (l_2 - l_1)\, l_1^2 l_2^2$$

bleibt die Bedingung

$$\text{III} \qquad -k_1^2 \frac{B^2}{\tau} + l_1^2 \Big(- B A t \frac{\sin\theta}{\tau} - A' B t \cos\theta + B^2 C t \sin\theta - ABC + t B' A \cos\theta - \frac{C^2}{\tau}\Big) = 0.$$

Der Koeffizient von l_1^2 läßt sich auf eine einfachere Form bringen, wenn man die Differentiationen nach s in Bezug auf A, B, C ausführt und die Gleichungen 5) und II beachtet; er nimmt dann die Form

$$-\frac{t^2}{\tau}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{t^2}{\sin^2\theta}\right)$$

an, wodurch die Bedingung III in

$$-\left[\frac{k_1^2}{r^2} + t^2 l_1^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{t^2}{\sin^2\theta}\right)\right]\frac{1}{\tau} = 0$$

übergeht. Diese Gleichung ist, da der Fall $r = \infty$, $t = 0$, wo die Mittelkurve eine gerade Linie sein muß, bereits oben als trivial ausgeschlossen wurde,[1]) für **reelle** Werte nur lösbar durch die Annahme $\tau = \infty$. Es ergibt sich also:

Wird die Bedingung der Ähnlichkeit für das untere Zeichen in der Gleichung γ gestellt, so muß die Mittelkurve Γ eine ebene Kurve sein.

Aus den Bedingungen

$$\frac{t'}{t^2} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \quad \cos\theta = r c, \quad t = -\theta' = -\frac{d\theta}{ds}$$

folgt jetzt

[1]) In diesem Falle ist übrigens nur direkte Kongruenz möglich.

$$\theta'' \sin\theta + \theta'^2 \cos\theta = 0$$

oder

$$\sin\theta\,\theta' = \mathrm{const} = -c_1$$

$$\cos\theta = c_1 s + c_2 .$$

Die Mittelkurve hat daher die Gleichung

$$r = \frac{1}{C}(c_1 s + c_2).$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen über die Gleichung γ) gilt daher der Satz:

Ist die Mittelkurve eines Paares ähnlicher Kurven eben, so ist sie eine logarithmische Spirale.[1])

Damit sind auch die Kurven C und C_1 selbst gefunden; da die Lösung von l_1 und l_2 ganz unabhängig ist, erhält man ∞^1 solcher Paare. Ganz andere Resultate ergeben sich, wenn man in der Bedingung γ) das obere Zeichen nimmt. Hier verschwinden in der mit Benutzung von 9) zu bildenden Summe das erste und letzte Glied.

Setzt man

$$Q = -C'B - B^3 t\cos\theta + CB'$$
$$P = CA't\sin\theta - tAC'\sin\theta - A^2Bt\cos\theta - \frac{tCA}{r}\cos\theta,$$

so ist die Bedingung

$$2\,l_1^3\,l_2^3\,P + l_1\,l_2\,(l_2^2 k_1^2 + l_1^2 k_2^2)\,Q = 0$$

oder

$$l_1^2\,P + k_1^2\,Q = 0$$

zu erfüllen.

Führt man die Differentiationen in Q, P aus und beachtet die Gleichung II, so ergibt sich nach einiger Rechnung

---

[1]) Selbstverständlich kann hier, wie auch in anderen ähnlichen Fällen die logarithmische Spirale nicht in ihrer ganzen Ausdehnung in Betracht kommen, da $|rc| < 1$ sein muß. Andererseits ist auch der Spezialfall von Kreisen in parallelen Ebenen, p. 52 Anm. hierin mitenthalten.

$$P = t^2 \sin^2\theta \left(- \frac{C'}{r} + \frac{t^2}{\sin\theta} \frac{d\frac{1}{r}}{ds} - \cos\theta \frac{t}{r^3} \right)$$

$$Q = - \frac{C'}{r} - t \frac{\cos\theta}{r^3} + \frac{t^2}{\sin\theta} \frac{d\frac{1}{r}}{ds}.$$

Demnach erhält man

$$(k_1^2 + l_1^2 \sin^2\theta\, t^2) \left(\frac{C'}{r} + t \frac{\cos\theta}{r^3} - \frac{t^2}{\sin\theta} \frac{d\frac{1}{r}}{ds} \right) = 0.$$

Hieraus folgt, da der erste Faktor unter den bereits angegebenen Voraussetzungen nicht verschwindet,

$$- \frac{C'}{r} - \cos\theta \frac{t}{r^3} + \frac{t^2}{\sin\theta} \frac{d\frac{1}{r}}{ds} = 0.$$

Da nun

$$C' = 2 \frac{t t'}{\sin\theta} - t^2 \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \left(\frac{1}{\tau} - t \right),$$

so wird nach II)

$$C' = 3 t^3 \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - \frac{t^2}{\tau} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

und man erhält die Bedingung

$$\text{IV} \qquad - 3 \frac{t^3}{r} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{t^2}{r\tau} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - t \frac{\cos\theta}{r^3} + \frac{t^2}{\sin\theta} \frac{d\frac{1}{r}}{ds} = 0.$$

Diese Gleichung ist zugleich mit den Bedingungen

$$t' \sin\theta = t^2 \cos\theta, \qquad \cos\theta = r c,$$

$$t = \frac{1}{\tau} - \theta',$$

zu integrieren; man hat also vier Gleichungen für θ, t, τ, r.

Diese Bedingungen sind zunächst erfüllt für $t = 0$. Dann aber bilden die durch die Kurve Γ hindurchgehenden Normalen eine Developpabele, und da aus

$$-\theta' \sin\theta = \frac{dr}{ds}$$

folgt

$$\frac{1}{\tau} + \frac{dr}{ds}\,\frac{c}{\sqrt{1-r^2c^2}} = 0,$$

so ist Γ eine sphärische Kurve, wie übrigens auch schon daraus hervorgeht, daß durch Abtragen der Strecke $\frac{1}{c}$ auf den Normalen von Γ die Koordinaten des Endpunktes einen konstanten Wert erhalten, wie aus 3) unmittelbar hervorgeht, wenn man

$$l_1 = \frac{1}{c}, \qquad q = l_1 t = 0$$

setzt. Es handelt sich also jetzt um ein Kurvenpaar C, C_1 mit einem Ähnlichkeitspunkte, der mit dem oben angegebenen Punkte zusammenfällt.

Die von dem Faktor t befreite Gleichung IV

$$\text{IV}^{\text{a}} \qquad -3\frac{t^2\cos\theta}{r\sin^2\theta} + \frac{t\cos\theta}{r\tau\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{r^3} + \frac{t}{\sin\theta}\,\frac{d\frac{1}{r}}{ds} = 0$$

bleibt daher noch zu untersuchen. Wir suchen zunächst eine Gleichung für t zu bilden. Setzt man

$$\cos\theta = rc, \quad t = \frac{1}{\tau} - \theta', \quad t^2 r c = t'\sqrt{1-r^2c^2}$$

$$\theta' = \frac{d\theta}{ds} = -\frac{dr}{ds}\,\frac{c}{\sqrt{1-r^2c^2}},$$

und führt diese Gleichungen in IV$^{\text{a}}$ ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$-\frac{2ct^2}{1-r^2c^2} - \frac{c}{r^2} - \frac{t}{r^2\sqrt{1-r^2c^2}}\,\frac{dr}{ds}\,\frac{1}{1-r^2c^2} = 0$$

oder, da $1 = r^2c^2$ wieder nur auf einen trivialen Fall zurückführt,

$$10)\qquad 2\,c\,t^2 + \frac{c}{r^2}(1 - r^2 c^2) + \frac{t}{2\,r^3}\,\frac{d\,r^2}{d\,s}\,\frac{1}{\sqrt{1 - r^2 c^2}} = 0.$$

Nun ist nach II

$$t^2 \cos\theta = t' \sin\theta$$

$$t^4 r^2 c^2 = t'^2 (1 - r^2 c^2).$$

Hieraus folgt

$$r^2 c^2 = \frac{t'^2}{t^4 + t'^2},\quad 1 - r^2 c^2 = \frac{t^4}{t^4 + t'^2},\quad \frac{r}{\sqrt{1 - r^2 c^2}} = \pm\frac{t'}{c\,t^2}$$

$$\frac{c^2}{2}\,\frac{d\,r^2}{d\,s} = \frac{t' t^3 (t\,t'' - 2\,t'^2)}{(t^4 + t'^2)^2},$$

somit wird aus 10)

$$2\,c\,t^2 + c^3\,\frac{t^4}{t'^2} \pm \frac{c\,t^2}{t'^2}(t\,t'' - 2\,t'^2) = 0.$$

Nimmt man das obere Vorzeichen, so folgt, wenn man wieder von $c = 0$ absieht,

$$11)\qquad c^2 t + t'' = 0.$$

Für das untere Vorzeichen folgt dagegen

$$12)\qquad 4\,t^2 + c^2\,\frac{t^4}{t'^2} - \frac{t\,t''}{t'^2} = 0.$$

Die Integration von 11) ist bekannt. Um auch die Gleichung 12) zu integrieren, setze man

$$\frac{t'}{t} = z,\quad \frac{t''}{t} - \frac{t'^2}{t^2} = \frac{d\,z}{d\,s},$$

so daß 12) übergeht in

$$\frac{d\,z}{d\,s} = 3\,z^2 + c^2.$$

Hieraus folgt

$$z = \frac{c}{\sqrt{3}}\,\mathrm{tg}\,(s\,c\sqrt{3} + c_1)$$

oder

$$t = \frac{\text{const.}}{(\cos s\,c\sqrt{3} + c_1)^{1/3}}.$$

Wie man sieht, gehören auch hier zu jeder Kurve Γ dieser Arten, die nun durch ihre von s abhängigen Krümmungs- und Torsionsradien völlig definiert sind, da l_1 und l_2 dabei nicht auftreten, ∞^1 viele zueinander ähnliche Kurvenpaare.

Welcher Art nun diese Kurven Γ sind, würde noch einer näheren Untersuchung bedürfen, auf die ich nicht eingehe. Sie sind übrigens wirkliche Raumkurven. Dies würde sich schon aus dem Umstande folgen lassen, daß r, θ, t sonst vier Gleichungen genügen müssen; übrigens auch durch die Bemerkung, daß für $\tau = \infty$ die Gleichung IV[a]

$$\frac{3\cos\theta}{r\sin^2\theta}t^2 + \frac{\cos\theta}{r^3} + \frac{t}{r^2\sin\theta}\,\frac{dr}{ds} = 0,$$

wenn man zugleich

$$t = -\theta', \quad c\frac{dr}{ds} = -\sin\theta\,\theta' = t\sin\theta$$

setzt, übergeht in

$$c^2\left(\frac{3t^2}{\sin^2\theta} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{t^2}{r^2} = 0,$$

die für reelle Werte nicht erfüllt werden kann, wenn man von $t = 0$, $c = 0$ absieht.

Der im vorigen ausgeschlossene Fall

$$c = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

läßt sich leichter direkt behandeln. Dann ist

$$l_1 + l_2 = 0, \quad \frac{ds_1}{ds} \text{ und } \frac{ds_2}{ds}$$

werden einander gleich. Es folgt zunächst, daß τ eine konstante sein muß, wenn auch die Krümmungsradien von C_1 und C_2 gleich sein sollen. Soll dasselbe auch für die Torsionsradien gelten, so muß auch r eine Konstante sein; Γ wird eine gemeine Schraubenlinie, und C_1, C_2 werden selbst kongruente gemeine Schraubenlinien. Sollen dagegen die Torsionsradien entgegengesetzt gleich sein, so muß entweder $\tau = \infty$ sein, — dies ist ein trivialer Fall, denn c_1, c_2 sind dann kongruente Kurven in parallelen Ebenen — oder Γ muß eine imaginäre gemeine Schraubenlinie sein.

Als Resultat ergibt sich also:

Es gibt ähnliche nicht kongruente Kurvenpaare C_1, C_2 — abgesehen von trivialen Fällen — nur unter den folgenden wesentlich verschiedenen Umständen.

Erstens: Die Kurven C_1, C_2 sind perspektiv ähnliche sphärische Kurven; sie werden durch Kugeln, deren Mittelpunkt die Spitze eines willkürlichen Kegels ist, ausgeschnitten. Sie sind Kreise, wenn sie eben sind.

Zweitens: Die „Mittelkurve" Γ ist eine logarithmische Spirale; C_1 und C_2 sind Raumkurven.

Drittens: Die „Mittelkurve" ist eine Raumkurve, deren Krümmung und Torsion in komplizierterer Weise von der Bogenlänge abhängt.

In allen diesen Fällen aber gibt es zu ein und derselben Bewegung der gemeinsamen Normalen unendlich viele Paare ähnlicher Kurven.

Die einzigen ebenen zu einander ähnlichen Kurvenpaare C, C_1 lassen sich übrigens auch aus den Gleichungen des § 1 ermitteln.

Aus den Gleichungen

$$a^2 = \left(1 - \frac{k\cos\sigma}{r}\right)^2 + k^2\sigma'^2, \tag{13}$$

$$\sin\sigma + \sin\sigma_1 = r\,\Omega, \tag{14}$$

$$a\frac{d\sigma_1}{ds} = \frac{d\sigma}{ds}, \tag{15}$$

$$r(a^2 - 1) = (a\cos\sigma_1 - \cos\sigma)k, \tag{16}$$

in denen a eine positive Konstante bedeuten mag, da der Charakter der Windung nicht in Betracht kommt.

Ist nun $q = -k\sigma'$ nicht Null, so wird

17) $$\Omega = \frac{1}{q}\frac{dp}{ds} = -\left(\frac{\sin\sigma}{r} - \frac{\cos\sigma}{\sigma'}\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\right).$$

Durch Differentiation von 16) nach σ aber folgt

$$\frac{dr}{ds}(a^2-1) = k\left(\sin\sigma - a\sin\sigma_1\frac{d\sigma_1}{ds}\right)$$

oder wenn man aus 15) den Wert von $\frac{d\theta}{ds}$ einsetzt

18) $$\frac{dr}{ds}(a^2-1) = \sigma' k(\sin\sigma - \sin\sigma_1).$$

Dagegen folgt aus 14) und 17)

$$2\sin\sigma + \sin\sigma_1 = -\frac{\cos\sigma}{\sigma' r}\frac{dr}{ds}.$$

Setzt man hier aus 18) den Wert von $\frac{dr}{ds}$ und aus 16) den Wert von r ein, so folgt

$$(\sin\sigma_1 + 2\sin\sigma)(a\cos\sigma_1 - \cos\sigma) + \cos\sigma(\sin\sigma - \sin\sigma_1 = 0$$

oder

$$a\cos\sigma_1(\sin\sigma_1 + 2\sin\sigma) = \cos\sigma(\sin\sigma + 2\sin\sigma_1).$$

In dieser Gleichung ist nach 15) noch

$$\sigma_1 = \frac{\sigma + c}{a}$$

zu setzen, so daß schließlich entsteht

$$a\cos\frac{(\sigma+c)}{a}\left(\sin\frac{(\sigma+c)}{a} + 2\sin\sigma\right) = \cos\sigma\left(\sin\sigma + 2\sin\frac{(\sigma+c)}{a}\right).$$

Aber diese Gleichung liefert, wie man durch Reihenentwicklung erkennt, so lange a einen willkürlichen Wert hat, einen konstanten Wert für σ, so daß die Annahme $\sigma' \neq 0$ nicht zulässig ist, ausgenommen in dem Falle $a = 1$, wo zugleich $c = 0$ zu nehmen ist. Dann entsteht aber nur Kongruenz.

Setzt man aber $\sigma' = 0$ voraus, so wird nach 13) r konstant. Die einzigen ebenen Paare ähnlicher Kurven $a \neq 1$ werden daher von Kreisen in parallelen Ebenen gebildet, während es für $a = 1$, wie in § 6 gezeigt, unendlich viele Paare kongruenter ebener Kurven gibt; der Fall der Kongruenz nimmt eine ausgezeichnete Stellung der Ähnlichkeit gegenüber ein.

§ 12.

Umformung der Gleichungen des § 1.

Die Gleichungen des § 1 sind in ihrer ursprünglichen Form zu einer weiteren Verwendung oft weniger geeignet. Man kann sie in eine übersichtlichere Gestalt durch die folgende Transformation bringen, die weiterhin mehrfach benutzt werden soll.

Da $S^2 = p^2 + q^2$ ist, so kann man

$$p = S \sin\lambda$$
$$q = S \cos\lambda$$

setzen, so daß, falls $\sin\lambda$ verschwindet, die Kurven des Paares sich unter rechtem Winkel zu schneiden scheinen, während für $\cos\lambda = 0$ ihre gemeinsamen Normalen eine Developpabele bilden.

Man hat nun nach § 1, II

$$\Omega = \frac{d\lambda}{ds}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen

$$k\frac{\cos\sigma_1}{r_1} = 1 - \frac{\sin\lambda}{S}, \qquad k\frac{\cos\sigma}{r} = 1 - S\sin\lambda$$

geht die Gleichung § 1, IV

1) $$S\frac{\sin\sigma_1}{r_1} + \frac{\sin\sigma}{r} = \frac{d\lambda}{ds}$$

über in

2) $$\operatorname{tg}\sigma_1 (S - \sin\lambda) + \operatorname{tg}\sigma (1 - S\sin\lambda) = k\frac{d\lambda}{ds}.$$

Führt man also s als unabhängige Variabele ein, so hat man das folgende System von Gleichungen, welches mit 2) die Kurven eines Paares völlig charakterisiert:

$$\begin{aligned} \frac{k\cos\sigma}{r} &= 1 - S\sin\lambda \\ \frac{k}{T} &= S\cos\lambda + k\frac{d\sigma}{ds} \\ \frac{k\cos\sigma_1}{r_1} &= 1 - \frac{\sin\lambda}{S} \\ \frac{k}{T_1} &= \frac{\cos\lambda + k\frac{d\sigma_1}{ds}}{S}. \end{aligned} \tag{3}$$

Nimmt man σ, σ_1, S als Funktionen von s willkürlich an, so führt 2) auf eine Riccatische Gleichung für λ; die zugehörigen Werte von r, r_1, T, T_1 findet man dann aus den Gleichungen 3); doch ist zu beachten, daß S, r, r_1 als positive Größen definiert sind.

Nimmt man dagegen σ, σ_1, λ als Funktionen von s an, so bestimmt 2) die Funktion S, so daß nun alle Größen durch bloße Elimination bestimmt werden können, und — soweit r, r_1, S positiv ausfallen — die natürlichen Gleichungen der Kurven C und C_1 liefern.

Die Gleichung 2) läßt sich in der folgenden Weise transformieren. Setzt man nach 3)

$$\begin{aligned} \frac{k}{T} - k\frac{d\sigma}{ds} &= S\cos\lambda \\ \frac{Sk}{T} - k\frac{d\sigma_1}{ds} &= \cos\lambda, \end{aligned}$$

multipliziert man 2) mit $\cos\lambda$ und ersetzt $S\cos\lambda$, $\cos\lambda$ durch die eben angegebenen Ausdrücke, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{d\sin\lambda}{ds} - \sin\lambda\left(\operatorname{tg}\sigma_1\frac{d\sigma_1}{ds} + \operatorname{tg}\sigma\frac{d\sigma}{ds}\right) + \operatorname{tg}\sigma_1\frac{d\sigma}{ds} + \operatorname{tg}\sigma\frac{d\sigma_1}{ds} \\ + (\operatorname{tg}\sigma_1 - \sin\lambda\operatorname{tg}\sigma)\frac{1}{T} + (\operatorname{tg}\sigma - \sin\lambda\operatorname{tg}\sigma_1)\frac{1}{T_1} = 0; \end{aligned}$$

multipliziert man diese Gleichung mit $\cos\sigma$, $\cos\sigma_1$, so folgt

$$d(\sin\lambda\cos\sigma\cos\sigma_1 + \sin\sigma\sin\sigma_1)$$
$$+\cos\sigma\cos\sigma_1\left(ds\frac{(\operatorname{tg}\sigma_1 - \sin\lambda\operatorname{tg}\sigma)}{T} + \frac{ds_1}{T_1}(\operatorname{tg}\sigma - \sin\lambda\operatorname{tg}\sigma_1)\right) = 0$$

oder durch Integration nach s, da nach § 2 S. 13

$$\sin\lambda\cos\sigma\cos\sigma_1 + \sin\sigma\sin\sigma_1 = -\cos(bb_1)$$
$$(\operatorname{tg}\sigma_1 - \sin\lambda\operatorname{tg}\sigma)\cos\sigma_1\cos\sigma = -\cos(hb_1)$$
$$(\operatorname{tg}\sigma - \sin\lambda\operatorname{tg}\sigma_1)\cos\sigma_1\cos\sigma = -\cos(h_1 b)$$

4) $$\cos(bb_1) + \int\frac{ds}{T}\cos(hb_1) + \int\frac{ds_1}{T_1}\cos(h_1 b) = \text{const.}$$

Sind die beiden Kurven C, C_1 eben, so entsteht der selbstverständliche Satz $\cos(bb_1) = \text{const.}$ Aber $\cos(bb_1)$, d. h. der Winkel zwischen den Binormalen des Paares, ist auch dann eine Konstante, wenn

5) $$\frac{1}{T}(\operatorname{tg}\sigma_1 - \sin\lambda\operatorname{tg}\sigma) + \frac{S}{T_1}\operatorname{tg}\sigma - \sin\lambda\operatorname{tg}\sigma_1) = 0.$$

Damit dieser Fall eintrete, müssen die Gleichungen 3), 5) und

6) $$\sin\lambda\cos\sigma\cos\sigma_1 + \sin\sigma\sin\theta = c$$

bestehen; an die Stelle von 5) kann natürlich auch 1) oder 2) treten. Man hat demnach 6 Gleichungen zwischen S, λ, r, r_1, σ, σ_1, T, T_1; vorausgesetzt ist dabei, daß $\cos\lambda$, $\cos\sigma$, $\cos\sigma_1$ nicht Null sind, und r, r_1, S positive Werte erhalten. Nimmt man z. B. σ, σ_1 willkürlich an, so kann man aus 6) λ entnehmen, aus den Gleichungen 2) und 3) ergeben sich die übrigen Größen. Damit ist im allgemeinen die Aufgabe gelöst:

Die Charaktere derjenigen Paare zu bestimmen, bei denen die Schmiegungsebenen einen konstanten (gegebenen) Winkel miteinander bilden.

Fügt man jetzt die Annahme hinzu, daß $\sigma = 0$, π, d. h. daß die gemeinsame Normale Hauptnormale von C sei, so hat man aus 3)

$$\pm\frac{k}{r} = 1 - S\sin\lambda, \qquad \frac{\cos\sigma_1}{r_1} = \frac{S - \sin\lambda}{S}$$

$$0 = \frac{1}{T} - \frac{S\cos\lambda}{k}, \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{S}{T_1} - \frac{\cos\lambda}{k}$$

und aus 5), 6)

$$\operatorname{tg}\theta\left(\frac{1}{T} - S\frac{\sin\lambda}{T_1}\right) = 0$$

$$\sin\lambda\cos\theta = c.$$

Es ist daher entweder auch $\operatorname{tg}\theta = 0$, d. h. die Kurven bilden ein Bertrandsches Paar; wie man aus der letzten Gleichung sieht, wird dann auch λ eine Konstante.

Oder es muß

$$\frac{1}{\tau} - \frac{\sin\lambda}{\tau_1} = 0$$

sein, und man kann θ noch willkürlich annehmen. Die Annahme von $\sigma = 0$ nebst der Bedingung eines konstanten Winkels der Schmiegungsebenen charakterisiert daher keineswegs die Bertrandschen Kurven, sondern führt außerdem auf die soeben angegebene, von einer willkürlichen Funktion abhängige Klasse von Kurvenpaaren.

Wir machen jetzt die Annahme, daß λ und $\cos(bb_1)$ konstant sei, d. h. daß sich die Kurven des Paares unter konstantem Winkel schneiden, und ihre Schmiegungsebenen ebenfalls einen konstanten Winkel miteinander bilden.

Differentiiert man jetzt die Gleichung 6), so folgt

$$0 = \sin\lambda\left(-\sin\sigma\cos\sigma_1\frac{d\sigma}{ds} - \cos\sigma\sin\sigma_1\frac{d\sigma_1}{ds}\right)$$
$$+ \cos\sigma\sin\sigma_1\frac{d\sigma}{ds} + \sin\sigma\cos\sigma_1\frac{d\sigma_1}{ds}.$$

Ersetzt man hier $\cos\sigma$, $\cos\sigma_1$ durch ihre Werte aus den Gleichungen 3), dividiert durch r, r_1, beachtet man ferner die Gleichung 1)

$$\frac{\sin\sigma_1}{r_1} = -\frac{\sin\sigma}{r}\frac{1}{S},$$

so ergibt sich nach einigen Reduktionen

$$\cos^2\lambda\frac{\sin\sigma}{r}\left(\frac{d\sigma}{ds}\frac{1}{S} - \frac{d\sigma_1}{ds}\right) = 0.$$

Sieht man von der trivialen, schon vorhin ausgeschlossenen Möglichkeit $\cos\lambda = 0$ ab, so muß entweder $\sin\sigma = 0$, $\sin\sigma_1 = 0$ sein; man hat also wieder ein Bertrandsches Paar.

Oder es muß

7) $$\frac{d\sigma}{ds} - \frac{d\sigma_1}{ds}S = 0$$

sein. Diese Gleichung liefert aber nach 3)

7′) $$S^2 = \frac{T_1}{T};$$

d. h. die Torsionsradien stehen im Verhältnisse des Quadrats der Bogenelemente, die Kurven sind in gleichem Sinne gewunden.

Die Gleichung 6) ist aber, wenn man die Konstante c nicht als gegeben ansieht, eine Folge der vier Gleichungen 3) der Gleichungen 7′) und der Gleichung 1) oder

8) $$\operatorname{tg}\sigma_1(S - \sin\lambda) + \operatorname{tg}\sigma(1 - S\sin\lambda) = 0,$$

so daß wieder nur sechs Gleichungen zur Bestimmung der 7 Unbekannten σ, σ_1, r, r_1, T, T_1, S vorhanden sind.

Das heißt:

Die Annahme, daß die Kurven eines Paares sich unter konstantem Winkel schneiden und zugleich ihre Schmiegungsebenen einen konstanten Winkel miteinander bilden, ergibt außer den Bertrandschen Paaren noch eine weitere von einer willkürlichen Funktion abhängige Klasse von Paaren.

Wird hier endlich die Bedingung hinzugefügt, daß σ konstant sei, so ist auch σ_1 nach 7) eine Konstante. Damit wird aber nach 8) auch S konstant, und aus 3) folgen nun noch für r, r_1, T, T_1 konstante Werte; man erhält also nur gemeine Schraubenlinien. Der Ausdruck für S

$$S = \frac{\operatorname{tg}\sigma_1 \sin\lambda - \operatorname{tg}\sigma}{\operatorname{tg}\sigma_1 - \operatorname{tg}\sigma\sin\lambda}$$

ist z. B. sicher positiv für

$$0 < \sigma_1 < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \lambda < \pi,$$

wenn σ negativ, aber seinem absoluten Werte nach $< \frac{\pi}{2}$ ist.

Alsdann werden

$$1 - S\sin\lambda = \frac{\operatorname{tg}\sigma_1 \cos^2\lambda}{\operatorname{tg}\sigma_1 - \operatorname{tg}\sigma\sin\lambda}$$

$$1 - \frac{\sin\lambda}{S} = -\frac{\operatorname{tg}\sigma\cos\lambda}{\operatorname{tg}\sigma_1\sin\lambda - \operatorname{tg}\sigma},$$

positiv, so daß auch r, r_1 positive Werte erhalten. Wie man sieht, sind noch zahlreiche weitere Annahmen möglich. Ich erwähne, um nicht zu weitläufig zu werden, nur noch den Fall $S = 1$, wo

$$\frac{k\,\dfrac{d\lambda}{ds}}{1 - \sin\lambda} = \operatorname{tg}\sigma + \operatorname{tg}\sigma_1,$$

also λ durch eine einfache Quadratur aus den angenommenen Werten von σ und σ_1 bestimmt wird. Es ist dann

$$\frac{\cos\sigma}{r} = \frac{\cos\sigma_1}{r_1} = \frac{1 - \sin\lambda}{k}$$

$$\frac{k}{T} = \cos\lambda + k\frac{d\sigma}{ds}, \quad \frac{k}{T_1} = \cos\lambda + k\frac{d\sigma_1}{ds}.$$

Wählt man hier $\sigma = \sigma_1$, so erhält man alle Paare kongruenter Kurven, bei denen λ nicht konstant ist (vgl. § 6 S. 29). Wählt man dagegen $\sigma = -\sigma_1$, so entstehen Kurvenpaare, welche für entsprechende Punkte sich unter konstantem Winkel zu schneiden scheinen, gleiche Krümmungshalbmesser haben, und für die (vgl. übrigens § 7)

$$\frac{1}{T} + \frac{1}{T_1} = \frac{2\cos\lambda}{k}$$

also das arithmetische Mittel der Torsionen konstant ist.

Unter dieser letzten Annahme kann auch die eine Kurve, etwa C, eben sein. Setzt man dementsprechend

$$k\frac{d\sigma}{ds} + \cos\lambda = 0,$$

so folgt

$$\sigma = -\left(\frac{\cos\lambda}{k}s + c_1\right).$$

Daraus ergibt sich

$$r = \frac{k}{1 - \sin\lambda}\cos\left(\frac{s\cos\lambda}{k} + c_1\right),$$

eine vielfach betrachtete Kurvengattung, mit welcher also eine Raumkurve gleichen Bogenelements, gleichen Krümmungshalbmessers und konstanter Torsion ein sich unter konstantem Winkel schneidendes Paar bildet.

§ 13.

Kurvenpaare, die sich unter konstantem Winkel schneiden.

Ist $\lambda =$ const, so folgt aus den Gleichungen des § 12

$$S = -\frac{\operatorname{tg}\sigma - \operatorname{tg}\sigma_1\sin\lambda}{\operatorname{tg}\sigma_1 - \operatorname{tg}\sigma\sin\lambda}\ {}^{1)}$$

$$\frac{k\cos\sigma}{r} = \frac{\operatorname{tg}\sigma_1\cos^2\lambda}{\operatorname{tg}\sigma_1 - \operatorname{tg}\sigma\sin\lambda}$$

$$\frac{k\cos\sigma_1}{r_1} = \frac{\operatorname{tg}\sigma\cos^2\lambda}{\operatorname{tg}\sigma - \operatorname{tg}\sigma_1\sin\lambda}$$

$$\frac{k}{T} = S\cos\lambda + k\frac{d\sigma}{ds}$$

$$S\frac{k}{T_1} = \cos\lambda + k\frac{d\sigma_1}{ds}.$$

---

[1]) Ist $\operatorname{tg}\sigma = 0$, $\operatorname{tg}\sigma_1 = 0$, so erscheint S unter der Form $\frac{0}{0}$. Man erhält dann z. B. für

$$\sigma = 0,\quad \sigma_1 = 0,\quad T\,T_1\cos^2\lambda = k^2,\quad \frac{k}{r} + \frac{k}{T}\operatorname{tg}\lambda = 1,\quad \frac{k}{r_1} + \frac{k}{T_1}\operatorname{tg}\lambda = 1,$$

also die Bertrandschen Paare.

Nimmt man σ und σ_1 willkürlich als Funktionen von s an, so sind r, r_1, S, T, T_1 also die natürlichen Gleichungen der Kurven des Paares völlig bestimmt. Bezeichnet man die Kontingenzwinkel der Schmiegungsebenen der Kurven mit $d\eta$, $d\eta_1$, so geben die beiden letzten Gleichungen durch Integration

1) $$k(\eta - \sigma) = s_1 \cos\lambda + \text{const}$$

2) $$k(\eta_1 - \sigma_1) = s \cos\lambda + \text{const},$$

so daß die Winkeldifferenz $\eta - \sigma$ für die Kurve C eine lineare ganze Funktion der Bogenlänge der Kurve C_1 wird.

Verlangt man insbesondere, daß C und C_1 ebene Kurven sind, so tritt zu den Gleichungen noch hinzu

3) $$\sin\sigma \sin\sigma_1 + \sin\lambda \cos\sigma \cos\sigma_1 = \text{const} = c_1.$$

Man findet dann aus 2), wo $\eta_1 = 0$ zu setzen ist, σ_1 als Funktion von s, aus 3) σ als Funktion von s, womit denn auch r und r_1 als Funktionen von s bekannt sind. Hierdurch ist im allgemeinen die Aufgabe gelöst, alle ebenen Paare zu bestimmen, die sich unter konstantem Winkel schneiden.

Man erhält für $\sin\lambda = 0$, wo sich die ebenen Kurven unter rechtem Winkel zu schneiden scheinen, besonders einfache Beziehungen. So findet man z. B. aus 3) unmittelbar die folgende Beziehung zwischen den Krümmungshalbmessern in korrespondierenden Punkten aus 3)

$$c_1^2 = 1 - \frac{r^2 + r_1^2}{k^2} + \frac{r_1^2 r^2}{k^4}.$$

Zu einer vollständigen Behandlung dieses besonders interessanten Falls, die sich übrigens leicht an die vorigen Gleichungen anschließen läßt, kann man auch die Gleichungen des § 1 verwenden. Man hat nämlich, da $p = 0$,

$$\cos\sigma = \frac{r}{k}, \quad \cos\sigma_1 = \frac{r_1}{k}, \quad \Omega = 0, \quad S^2 = q^2 = k^2\sigma'^2,$$

4) $$S\frac{d\sigma_1}{ds} = \frac{d\sigma}{ds}, \quad \frac{\sin\sigma_1}{r_1} = -\frac{\sin\sigma}{rS}, \quad \frac{dS}{S\,ds} = \frac{\frac{d^2\sigma}{ds^2}}{\frac{d\sigma}{ds}}.$$

Deutet man die Differentiationen nach der Variabeln s durch einen oben angefügten Index an, so daß

$$\frac{d\sigma}{ds} = \sigma', \quad \frac{d^2\sigma}{ds^2} = \sigma'', \quad \frac{dr}{ds} = r',$$

so folgt wegen

$$5)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tg}\sigma_1 &= -\frac{\operatorname{tg}\sigma}{S}, \quad \frac{1}{\cos^2\sigma_1} = \frac{k^2\sigma'^2 + \operatorname{tg}^2\sigma}{k^2\sigma'^2} \\ \frac{\sigma_1'}{\cos^2\sigma_1} &= -\frac{1}{\cos^2\sigma}\frac{\sigma'}{S} + \operatorname{tg}\sigma\frac{S'}{S^2} \end{aligned}$$

nach 4) und 5)

$$6)\qquad \sigma'^2\left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right) = \sigma''\operatorname{tg}\sigma - \frac{\operatorname{tg}^2\sigma}{k^2}.$$

Da nun nach 4) $-\sin\sigma\,\sigma' = \frac{r'}{k}$, so wird aus 6)

$$7)\qquad \frac{r'^2}{k^2}\left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right) = \sigma''\frac{\sin^3\sigma}{\cos\sigma} - \frac{\sin^4\sigma}{k^2\cos^2\sigma};$$

führt man hier vermöge der Gleichung

$$\sigma''\sin\sigma = -\frac{r''}{k} - \frac{rr'^2}{k^3\left(1 - \frac{r^2}{k^2}\right)}$$

den Wert von σ'' ein, und ersetzt $\sin^2\sigma$, $\cos^2\sigma$ durch ihre Werte

$$1 - \frac{r^2}{k^2}, \quad \frac{r^2}{k^2},$$

so ergibt sich die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung für r:

$$8)\qquad r'^2\frac{\left(1 + 2\frac{r^2}{k^2}\right)}{1 - \frac{r^2}{k^2}} + rr'' + 1 - \frac{r^2}{k^2} = 0.$$

Setzt man

$$\frac{d(rr')}{ds} = rr'' + r'^2,$$

so geht sie über in

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 r^2}{d s^2} + 1 - \frac{r^2}{k^2} + 3 r'^2 \frac{\frac{r^2}{k^2}}{1 - \frac{r^2}{k^2}} = 0,$$

oder für

$$r^2 = \varrho, \quad r r' = \frac{1}{2}\frac{d \varrho}{d s},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 \varrho}{d s^2} + \frac{3}{4 k^2}\frac{\left(\frac{d \varrho}{d s}\right)^2}{1 - \frac{\varrho}{k^2}} + 1 - \frac{\varrho}{k^2} = 0.$$

Man integriert diese Gleichung durch Vertauschung der Variabeln. Setzt man

$$\frac{d \varrho}{d s} = \frac{1}{\frac{d s}{d \varrho}}, \quad \frac{d^2 \varrho}{d s^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{d \varrho}\left(\frac{1}{\left(\frac{d s}{d \varrho}\right)^2}\right),$$

so folgt

$$\frac{\frac{3}{4 k^2}\frac{1}{\left(\frac{d s}{d \varrho}\right)^2}}{1 - \frac{\varrho}{k^2}} + 1 - \frac{\varrho}{k^2} + \frac{1}{4}\frac{d}{d \varrho}\frac{1}{\left(\frac{d s}{d \varrho}\right)^2} = 0;$$

für

$$\left(\frac{d s}{d \varrho}\right)^2 = \frac{1}{\lambda}$$

ergibt sich also die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d \lambda}{d \varrho} + 4\left(1 - \frac{\varrho}{k}\right) + \frac{3}{k^2}\frac{\lambda}{1 - \frac{\varrho}{k^2}} = 0,$$

deren Lösung

$$\lambda = C\left(1 - \frac{\varrho}{k^2}\right)^3 - 4 k^2 \left(1 - \frac{\varrho}{k^2}\right)^2$$

mit der Integrationskonstanten C ist.

Demnach wird

$$8^{a})\qquad ds = \frac{d\varrho}{\sqrt{C\left(1-\frac{\varrho}{k^2}\right)^3 - 4k^2\left(1-\frac{\varrho}{k^2}\right)^2}},$$

und dies ist die natürliche Gleichung der Kurve C, wenn man noch ϱ durch r^2 ersetzt. Setzt man

$$C\left(1-\frac{\varrho}{k^2}\right) - 4k^2 = \zeta^2,$$

so erhält man

$$s + c_1 = -k \operatorname{arctg} \frac{\zeta}{2k},$$

also

$$9)\qquad \frac{r^2}{k^2} = 1 - \frac{4k^2}{C} - \frac{4k^2}{C} \operatorname{tg}^2 \frac{(s+c_1)}{k}.$$

Ist nun C eine negative Konstante, so kann man

$$1 - \frac{4k^2}{C} = \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon < 1$$

setzen. Dann erhält man aus 9)

$$9^{a})\qquad r = \frac{k}{\varepsilon}\sqrt{1 + (1-\varepsilon^2)\operatorname{tg}^2 \frac{(s+c_1)}{k}};$$

ist dagegen C positiv, so muß die nach 9) positive Zahl

$$1 - \frac{4k^2}{C} = \varepsilon^2 < 1$$

sein, und man erhält

$$9^{b})\qquad r = \frac{k}{\varepsilon}\sqrt{1 + (1-\varepsilon^2)\operatorname{tg}^2 \frac{(s+c_1)}{k}}.$$

Aber nur der Fall $9^{b})$ kommt hier in Betracht. Denn nach § 2 ist der Cosinus des Winkels der Binormalen für $p = 0$ durch

$$\cos(b b_1) = \frac{r_1}{S}\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos\sigma}{k}\right) = \frac{r_1}{rS}\sin^2\sigma$$

gegeben, wo r_1 den Krümmungshalbmesser der Kurve C_1 bedeutet, der nach § 1 IV[b] durch die Gleichung

$$\frac{S^2}{r_1^2} = \frac{S^2}{k^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{k^2}$$

gegeben ist. Setzt man nun in die Gleichung

$$\cos^2(b\,b') = \frac{\sin^4\sigma}{r^2\left(\frac{S^2}{k^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{k^2}\right)}$$

die Werte von $\sin\sigma$,

$$S^2 = k^2\sigma'^2 = \frac{r'^2}{k^2\,1 - \frac{r^2}{k^2}},$$

entnimmt man ferner aus 8[a]) den Wert von r', so ergibt sich

$$\cos^2(b\,b_1) = \frac{4\,k^2}{C}.$$

Es ist demnach C eine positive Konstante, welche $\geqq 4\,k^2$ sein muß, so daß die unter 9[b]) gemachte Annahme allein zulässig ist, wenn nur reelle Verhältnisse betrachtet werden. Es ist selbstverständlich, daß die zweite Kurve C_1 derselben Differentialgleichung 8) genügt; daß aber auch die Integrationskonstante in beiden Fällen denselben Wert haben muß, geht aus der soeben entwickelten Bedeutung von C hervor. Übrigens kann man auch direkt zeigen, daß die Gleichung für ϱ sich in die nämliche Gleichung für ϱ_1 transformiert. Für den Fall, daß $C = \infty$, stehen die Ebenen der beiden Kurven aufeinander senkrecht. In diesem Grenzfalle aber wird $r = k = r_1$, jede der Kurven C, C_1 wird ein Kreis.

Die Gleichung 9[b]) ist aber, wie bekannt, die natürliche Gleichung von gewissen Meridiankurven der Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung.

Man hat also den Satz:

Das einzige System von zwei ebenen Kurven im Raume, die ein Paar bilden und sich unter rechtem

Winkel schneiden, wird durch zwei kongruente — aber nicht mit kongruenten Teilen aufeinander bezogene — Kurven gebildet, welche zu den Meridiankurven der Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung gehören.

§ 14.

Fortsetzung, die Kurven C und C_1 in rechtwinkligen Koordinaten.

Mun kann das Resultat des vorigen § durch eine direkte Untersuchung bestätigen. Ordnet man der in der xy-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems xyz liegenden Kurve C mit dem Krümmungshalbmesser r die Kurve C_1, welche mit ihr ein Paar bildet, in der Ebene

1) $$x_1 - c z_1 = 0$$

zu, so sind die Koordinaten von C_1

2) $$\begin{aligned} x_1 &= x - k\cos\sigma \frac{dy}{ds} \\ y_1 &= y + k\cos\sigma \frac{dx}{ds} \\ z_1 &= k\sin\sigma \end{aligned}$$

mit der aus 1) folgenden Bedingung

3) $$-ck\sin\sigma + x - k\cos\sigma \frac{dy}{ds} = 0.$$

Sollen die Richtungen korrespondierender Tangenten von C und C_1 überdies aufeinander senkrecht stehen, so muß

4) $$1 - k\cos\sigma\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right) = 0$$

sein. Setzt man jetzt

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{\sin\alpha}{r}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\cos\alpha}{r},$$

so geht 4) über in die aus § 1 bekannte Gleichung

4′) $$1 - \frac{k}{r}\cos\sigma = 0, \quad k\sin\sigma = \sqrt{k^2 - r^2}.$$

Demnach wird aus 3)

$$-c\sqrt{k^2 - r^2} = r\frac{dy}{ds} - x.$$

Differentiiert man diese Gleichung nach s, so entsteht

$$\frac{cr\dfrac{dr}{ds}}{\sqrt{k^2 - r^2}} = \frac{dr}{ds}\,\frac{dy}{ds},$$

oder, wenn $\dfrac{dr}{ds} \neq 0$ vorausgesetzt wird,

5) $$\frac{dy}{ds} = \frac{cr}{\sqrt{k^2 - r^2}}.$$

Setzt man diesen Wert in 3) ein, so folgt nach 4′)

6) $$x = \frac{ck^2}{\sqrt{k^2 - r^2}},$$

7) $$\frac{dx}{ds} = \frac{rck^2}{(\sqrt{k^2 - r^2})^3}\,\frac{dr}{ds},$$

und aus 5), 7) folgt durch Quadrieren und Addieren

$$1 = \frac{c^2r^2}{k^2 - r^2} + \frac{r^2c^2k^4}{(k^2 - r^2)^3}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2$$

oder

8) $$(k^2 - r^2)^3(1 + c^2) - c^2k^2(k^2 - r^2)^2 = r^2c^2k^4\left(\frac{dr}{ds}\right)^2.$$

Setzt man hier $c = \operatorname{cotg}\delta$, so entsteht

$$\left(1 - \frac{r^2}{k^2}\right)^3 - \left(1 - \frac{r^2}{k^2}\right)^2\cos^2\delta = \frac{1}{4k^2}\left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2\cos^2\delta,$$

welche Gleichung, wenn man

$$\cos^2\delta = \frac{4k^2}{C}$$

setzt, in die mit der früheren übereinstimmende

$$\left(1-\frac{r^2}{k^2}\right)^3-\frac{4\,k^2}{c}\left(1-\frac{r^2}{k^2}\right)^2=\left(\frac{d\,r^2}{d\,s}\right)^2\frac{1}{c}$$

übergeht. Es ist ferner die Länge der Normalen N der Kurve C, d. h. derjenige Abschnitt derselben, der vom Kurvenpunkte und der y-Achse begrenzt wird

$$N=\frac{x}{\frac{d\,y}{d\,s}}.$$

Demnach ist nach 5), 6)

9) $$N\,r=k^2.$$

Und endlich ergibt sich für x_1 der Wert

$$x_1=x-k\cos\sigma\frac{d\,y}{d\,s}=\frac{c^2\,k^2}{x},$$

oder

10) $$x\,x_1=c^2\,k^2.$$

Diese Gleichung gibt den Zusammenhang zwischen den Koordinaten entsprechender Punkte auf den beiden Kurven C, C_1 an. Nach 9) ist die Kurve C Meridiankurve einer Rotationsfläche konstanter positiver Krümmung $\frac{1}{k^2}$, wobei die y-Achse die Rotationsachse ist. Die Kurve C_1 ist selbstverständlich zu der Kurve C kongruent, aber die beiden Kurven sind nicht mit kongruent entsprechenden Punkten aufeinander bezogen.

Man erhält nun eine neue Definition dieser Kurven, welche von Interesse zu sein scheint. Soll der Endpunkt der Strecke k, welche auf der gegen ihre Hauptnormale unter dem Winkel σ geneigten Normale aufgetragen ist, überhaupt eine ebene Kurve beschreiben, so ist nach 2)

$$c^2\,k^2\sin^2\sigma=x^2-2\,k\,x\cos\sigma\frac{d\,y}{d\,s}+k^2\cos^2\sigma\left(\frac{d\,y}{d\,s}\right)^2$$

oder

$$k^2 \cos^2 \sigma \left[c^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right] - 2kx \cos\sigma \frac{dy}{ds} + x^2 - c^2 k^2 = 0.$$

Im allgemeinen ergeben sich daraus zwei Werte von $\cos\sigma$. Dieselben fallen zusammen, wenn

$$11) \qquad \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \frac{x^2 - k^2 c^2}{k^2}$$

ist. Dies ist aber gerade die Differentialgleichung zwischen x und y, welche aus 5) und 6) hervorgeht.

Diese Gleichung stellt aber nicht alle Meridiankurven der Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung vor.

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung dieser Kurven ist bekanntlich

$$x \frac{\left|1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right|^{3/2}}{\dfrac{d^2 y}{dx^2} \dfrac{dy}{dx}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = k^2$$

oder

$$-\frac{1}{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{x^2}{k^2} - c_1,$$

wo c_1 eine positive Konstante, wenn reelle Werte von y, x vorhanden sein sollen. Hieraus folgt

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \frac{x^2}{k^2} - (c_1 - 1).$$

Setzt man, um diese Gleichung mit der vorhergehenden zu identifizieren,

$$c_1 - 1 = c^2,$$

so erkennt man, daß der kleinste Wert, den x annehmen kann, $x = kc$ ist. Man erhält also nur die zu den Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung vom ringförmigen Typus gehörigen Meridiankurven, während die vom spindelförmigen ausgeschlossen bleiben.

Hieraus geht nun eine weitere Beziehung zwischen den Kurven C und C_1 hervor. C liegt in der xy-Ebene, C_1 in einer unter dem Winkel δ gegen diese geneigten Ebene E durch die Y-Achse, aus welcher die Normalebene von C eine Gerade g ausscheidet. Im allgemeinen würden auf einer Geraden zwei Punkte von C_1 liegen, deren Normalabstand von C gleich k ist. Da aber diese im vorliegenden Falle stets zusammenfallen, muß die Linie g mit der Normalen k einen rechten Winkel bilden. Die beiden Kurven C, C_1 liegen daher so gegen einander, daß die Tangente der Kurve C mit der Normalen der Kurve C_1 im korrespondierenden Punkte sich in demselben Punkte der Y-Achse schneiden und umgekehrt.

Der im vorigen unberücksichtigt gebliebene Fall

$$\frac{dr}{ds} = 0$$

ist nur ein trivialer. Denn alsdann ist $r = \text{const}$, mithin die Kurve C ein Kreis, und wegen

$$\cos\sigma = \frac{r}{k}$$

reduziert sich die Kurve C_1 in kinematischem Sinne auf den senkrecht über dem Mittelpunkt von C gelegenen Punkt im Abstande $\sqrt{k^2 - r^2}$.

Auch der Fall $z_1 = \text{const}$ oder $k \sin\sigma = \gamma$ ist in der obigen Darstellung nicht enthalten. Dann ist aber nach 4') $r = \sqrt{k^2 - \gamma^2}$, die Kurve C also wieder ein Kreis, und C_1 reduziert sich auf den zuvor erwähnten Punkt.

Ist endlich $c = 0$, so ist $x_1 = 0$ oder

$$x - r\frac{dy}{ds} = 0.$$

Daraus folgt aber

$$\frac{dr}{ds}\sin\alpha = 0.$$

Wäre nun $\sin\alpha = 0$, so ist $y = \text{const}$, $x = s + \text{const}$, was mit der Bedingung $x_1 = 0$ unverträglich ist. Ist aber

$$\frac{dr}{ds} = 0,$$

so wird man wieder auf den angegebenen Punkt geführt, der von der Kurve C_1 allein in Betracht kommt.

Von diesen Fällen abgesehen, die man übrigens als Grenzfälle ansehen kann, findet ein gegenseitiges Entsprechen zwischen den Kurven C, C_1 statt. Setzt man

$$x_1^2 + z_1^2 = x_1^2 \frac{1+c^2}{c^2} = \xi^2,$$

so sind y_1 und ξ die Koordinaten der Kurve C_1 in ihrer Ebene.

Es wird also, da

$$x_1 = x - \frac{c\,r^2}{\sqrt{k^2 - r^2}} = c\sqrt{k^2 - r^2}$$

$$y_1 = y + \frac{r^2 c\,k^2}{(\sqrt{k^2 - r^2})^3} \frac{dr}{ds}$$

$$\xi^2 = (1 + c^2)(k^2 - r^2).$$

Nun ist der **kleinste** Wert, den x annehmen kann, kc, der **größte** $k\sqrt{1+c^2}$; diesen Werten entsprechen die Krümmungshalbmesser $r = 0$,

$$r = \frac{k}{\sqrt{1 + c^2}}$$

von C. Es kann daher für $c^2 \neq 0$, r niemals gleich k werden, und dem Werte $r = 0$ entsprechen die Koordinaten $y_1 = y$,[1] $\xi = k\sqrt{1+c^2}$; dem Werte

$$r = \frac{k}{\sqrt{1 + c^2}}$$

dagegen entspricht $\xi = kc$, $y_1 = y$.

[1]) Dies zeigt die Betrachtung der Gleichung 8), nach der $r\dfrac{dr}{ds}$ für r einen endlichen Wert erhält.

Das Verhältnis der Quadrate der Bogenelemente der Kurven c und c_1 ist nach § 1

$$\left(\frac{d s_1}{d s}\right)^2 = k^2 \sigma'^2 ;$$

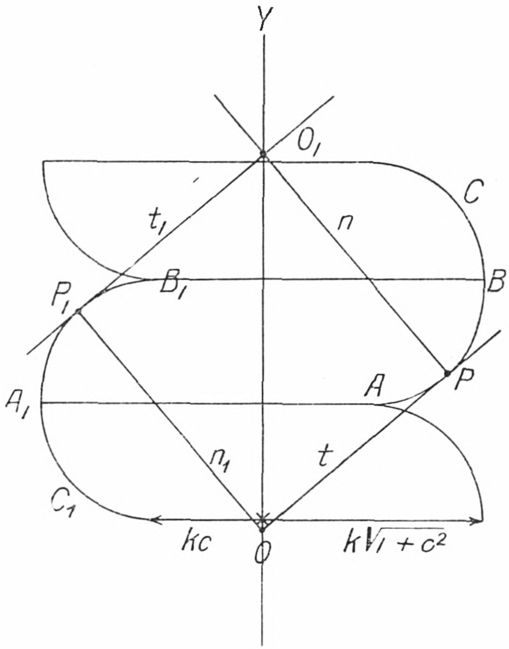
hieraus folgt

$$\left(\frac{d s_1}{d s}\right)^2 = \frac{(k^2 - r^2)\,[k^2 - r^2 (1 + c^2)]}{r^2 c^2 k^2} .$$

Für $r = 0$ ist daher

$$\frac{d s_1}{d s} = \infty ; \text{ für } r = \frac{k}{\sqrt{1 + c^2}} \text{ wird } \frac{d s_1}{d s} = 0 .$$

Die Kurven C und C_1 haben daher, wenn man C_1 durch Drehung um die Y-Achse in die Ebene $x\, y$ verlegt, die in der folgenden Figur angedeutete Lage.



In derselben sind korrespondierende Punkte mit gleichen Buchstaben bezeichnet. Dreht man die Figur A, P, B so lange um die Y-Achse, bis sie mit der Ebene von A, P, B den durch $\operatorname{cotg} \delta = c$ bestimmten Winkel bildet, so wird in der Tat die Entfernung der beiden Punkte BB_1 gleich k, wie es sein muß.

Je mehr sich nun c dem Werte 0 nähert, um so mehr wird $r = k$, das Verhältnis der Bogenelemente nähert sich der Null. In der Tat findet man auch aus 11)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 - c^2 k^2}}{\sqrt{(1 + c^2) k^2 - x^2}}.$$

Für $c = 0$ entspringt daraus die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = k^2.$$

Die beiden Kreise C und C_1 haben dann die Y-Achse zum gemeinsamen Durchmesser, aber der Mittelpunkt des einen fällt mit dem Diametralpunkte des andern zusammen, wie auch aus der Figur für $c = 0$ hervorgeht.

§ 15.

Über eine gewisse Berührungstransformation in der Ebene.

Die im vorigen § nachgewiesene Lage der beiden Kurven C, C_1 legt nun die folgende Aufgabe nahe:

Alle ebenen Kurvenpaare C, C_1 in derselben Ebene von derjenigen Eigenschaft zu bestimmen, daß sich die Normale des Punktes $P(xy)$ von C mit der Tangente im korrespondierenden Punkte $P_1(\xi, \eta)$ von C_1 und auch umgekehrt die Tangente von C in P mit der Normale von C_1 in P_1 je in zwei Punkten der y-Achse schneiden. Solche Kurvenpaare müssen den beiden Gleichungen

$$1) \qquad y - x\frac{dy}{dx} = \eta + \xi\frac{d\xi}{d\eta},$$

$$2) \qquad y + x\frac{dx}{dy} = \eta - \xi\frac{d\eta}{d\xi},$$

genügen, aus denen die invariante Beziehung

3)
$$\xi\left(\frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}}+\frac{d\eta}{d\xi}\right)=-x\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}+\frac{dy}{dx}\right)$$

hervorgeht; sie drückt zugleich aus, daß Normale und Tangente von C und C_1 in korrespondierenden Punkten zwei Dreiecke gleicher Hypotenuse auf der Y-Achse bilden.

Man kann das simultane System 1, 2 in folgender Weise lösen. Durch Elimination von $\frac{d\eta}{d\xi}$ entsteht aus 1), 2)

4) $$y^2-x^2-2\eta y+x(y-\eta)\left(\frac{1}{y'}-y'\right)=-(\eta^2+\xi^2),$$

oder, wenn man nach 1)

$$(y-xy')\frac{d\eta}{dx}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\xi^2+\eta^2)$$

setzt — für $\frac{dy}{dx}$ ist dabei y' geschrieben — und nun 4) nach x differentiiert, eine Differentialgleichung für η, die nach Befreiung von dem unwesentlichen Faktor $1+y'^2$ [1]) die integrabele Form

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\eta x}{y'}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{yx}{y'}-x^2+C\right)$$

mit der willkürlichen Konstanten C annimmt, so daß

5) $$\eta=y-xy'+C\frac{y'}{x}$$

und nach 4)

6) $$\xi^2=C\left[1-y'^2\left(\frac{C}{x^2}-1\right)\right]$$

wird.

Für $C=0$ entsteht hieraus nur die triviale Lösung $\xi=0$, $\eta=y-xy'$.

---

[1]) Diese Lösung gibt aber nur die Minimalgeraden der Ebene, denen wieder Minimalgerade entsprechen; in der Tat bildet jede solche Gerade mit sich selbst ein solches Paar.

Aus den Gleichungen 5), 6) geht hervor, daß man zu jeder Kurve, $y = f(x)$, ∞^1 Kurven C_1, $\eta = \varphi(\xi)$, finden kann, je nachdem man der Konstanten C verschiedene Werte erteilt.

Die Gleichungen 5), 6) stellen eine Berührungstransformation vor. Differentiiert man nämlich beide nach x, so folgt

$$\xi \frac{d\xi}{dx} = -Cy'\left[y''\left(\frac{C}{x^2}-1\right) - y'\frac{C}{x^3}\right]$$

$$\frac{d\eta}{dx} = x\left[y''\left(\frac{C}{x^2}-1\right) - y'\frac{C}{x^3}\right].$$

Genügt nun die Kurve C der Differentialgleichung[1])

$$y''\left(\frac{C}{x^2}-1\right) - y'\frac{C}{x^3} = 0,$$

so werden ξ und η Konstanten. Abgesehen von diesem besonderen Fall, wo die Kurve C_1, welche der C entspricht, in einem Punkt degeneriert, ist daher

$$7) \qquad -C\frac{d\eta}{d\xi}\frac{dy}{dx} = x\xi$$

und die Aequatio Directrix dieser Berührungstransformation, welche sich durch Elimination von y' aus 5), 6) ergibt, erhält die in x, y; ξ, η symmetrische Form

$$\Omega = (\xi^2 - C)(x^2 - C) - C(\eta - y)^2 = 0$$

---

[1]) Der Fall

$$y''\left(\frac{C}{x^2}-1\right) - y'\frac{C}{x^3} = 0$$

ist übrigens ein ganz trivialer. Denn es wird jetzt

$$y^2 + kx^2 = Ck,$$

wo k die wesentliche Integrationskonstante ist, und man hat damit nur die bekannte Eigenschaft der Mittelpunktskegelschnitte, daß Normale und Tangente eines Punktes dieser Kurven der ersten Hauptachse in zwei Punkten begegnen, welche mit den auf der zweiten Hauptachse gelegenen Brennpunkten auf einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt sich auf der ersten Hauptachse befindet.

vermöge der jedem Punkte x, y ein Mittelpunktskegelschnitt ξ, η entspricht.

Mit Hilfe der Gleichung 7) findet man leicht die Umkehrung der Gleichungen 5), 6) in der Form

5a) $$y = \eta + C\frac{\eta'}{\xi} - \xi\eta',$$

6a) $$x^2 = C\left[1 - \eta'^2\left(\frac{C}{\xi^2} - 1\right)\right],$$

in welcher C dieselbe Konstante, wie in 5), 6) bedeutet. Man hat dazu nur aus 7) den Wert y' mittelst

$$\eta' = \frac{d\eta}{d\xi}$$

in 5), 6) einzuführen; damit ergibt sich x^2 rational und somit auch y.

Der im § 14 besprochene Fall der Meridiankurven der Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung ist unter den Gleichungen 5), 6) enthalten, aber dadurch von Interesse, daß hier C und C_1 kongruent sind. Indessen ist diese Eigenschaft für jene Kurven nicht charakteristisch.

Schon die Parabel bietet einen solchen Fall dar. Setzt man

$$y = q x^2,$$

so wird

$$\eta = q(2C - x^2)$$
$$\xi^2 = C[1 - 4q^2C + 4q^2x^2];$$

der Parabel C oder $y = qx^2$ entspricht also die Parabel C_1

$$\eta = \frac{1 + 4q^2C}{4q} - \frac{\xi^2 q}{4q^2C}.$$

Setzt man $4q^2C = +1$, so wird

$$\eta = \frac{1}{2q} - q\xi^2;$$

die Kurve C_1 ist also eine Parabel mit demselben Parameter, welche zu C confocal ist, aber entgegengesetzte Achsenrichtung hat. Setzt man dagegen $4q^2 C = -1$, so fallen C und C_1 zusammen; die Beziehung zwischen den korrespondierenden Punkten wird aber imaginär, wie aus der Gleichung

$$\xi^2 = -\frac{1}{4q^2}(2 + 4q^2 x^2)$$

folgt.

Es ist übrigens leicht, unzählig viele kongruente Paare dieser Art zu finden. Man kann sich die allgemeine Aufgabe stellen, alle Paare zu finden, bei denen die Kurven C, C_1 durch Verschiebung, Drehung und Symmetrie auseinander hervorgehen. Beschränkt man sich indessen auf den einfacheren Fall, daß die Kurven C, C_1 durch Translation längs der Y-Achse, eventuell unter Hinzufügung einer symmetrischen Umformung in Bezug auf die X-Achse auseinander entspringen sollen, so läßt sich diese Frage mit Hilfe der Invarianten der Transformation beantworten.

Ich verstehe dabei unter einer Invariante der Berührungstransformation jede Funktion, für die

$$F(x, y, y', y'' \ldots) = F(\xi, \eta, \eta', \eta'' \ldots)$$

ist.

Eine solche Invariante ist nun, wenn man η mit $-\eta$ vertauscht, nach 3)

$$J_1 = x\left(\frac{1 + y'^2}{y'}\right).$$

Eine zweite erhält man aus 7), da nach dieser Gleichung

$$C\frac{\eta'}{\xi} = -\frac{x}{y'}$$

$$\frac{\xi}{\eta'} = -C\frac{y'}{x};$$

mithin nach Vertauschung von η mit $-\eta$ ebenfalls

$$J_2 = \frac{x}{y'} + C\frac{y'}{x}$$

eine Invariante wird. Diese beiden Invarianten sind von einander unabhängig; eine dritte von ihnen unabhängige kann nicht vorhanden sein, wie man unmittelbar sieht.[1])

Hienach ergibt sich der Satz:

Die Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(J_1, J_2) = 0$$

liefert, da in ihr nur y' vorkommt, kongruente Kurvenpaare, welche Funktion auch F bedeutet. An Stelle der Invariante J_2 kann man auch

$$J_3 = J_2 - J_1 = y' x \left(\frac{C}{x^2} - 1\right)$$

nehmen; es ist daher auch

$$J_1 J_3 = (C - x^2)(1 + y'^2)$$

eine Invariante.[2])

Setzt man demgemäß

$$J_1 J_3 = a,$$

wo a eine Konstante, so folgt

8) $$1 + y'^2 = \frac{a}{c - x^2}.$$

Nun ist die Differentialgleichung der Meridiankurven der Rotationsflächen konstanter (von 0 verschiedener) Krümmung

9) $$1 + y'^2 = \frac{-k^2}{x^2 \varepsilon + c_1},$$

wo c_1 eine willkürliche Konstante, und k^2 der absolute Wert des reziproken Krümmungsmaßes ist.

Ist nun $\varepsilon = +1$, was den positiv gekrümmten Flächen entspricht, so fallen die Gleichungen 8), 9) zusammen, wenn

---

[1]) Auch $$C\frac{\eta'}{\xi} - \frac{\xi}{\eta'} = C\frac{y'}{x} - \frac{x}{y'} = J_4$$

ist eine Invariante; daher gehört auch $J_4^2 = J_2^2 - 4C$ zu diesen Invarianten.

[2]) Bei der Verwendung dieser Invariante ist die Vertauschung von η mit $-\eta$ nicht erforderlich.

man $a = k^2$ und $c_1 = -C$ setzt; da C, falls überhaupt eine reelle Beziehung entstehen soll, einen positiven Wert haben muß,[1]) so hat man die Formel

$$1 + y'^2 = \frac{k^2}{C - x^2}; \tag{10}$$

es wird dann

$$\eta = y + \frac{1}{x} \sqrt{(C - x^2)(k^2 - C + x^2)}$$

$$\xi^2 = C \frac{(C - k^2)}{x^2}.$$

Soll die Beziehung reell sein, so muß $C > k^2$ sein, dann findet aber wegen

$$\sqrt{C - k^2} < x < \sqrt{C},$$

abgesehen vom Grenzfalle $\xi = 0$, nur der ringförmige Typus statt.

Ist dagegen $\varepsilon = -1$, so wird man $a = -k^2$, $c_1 = +C$ zu setzen haben. Es wird dann

$$1 + y'^2 = \frac{k^2}{x^2 - C}$$

$$\xi^2 = C \frac{(C + k^2)}{x^2}, \quad y'^2 = \frac{k^2 + C - x^2}{x^2 - C},$$

also

$$C < x^2 < C + k^2;$$

daher entsteht hier nur der hyperbolische Typus, so daß der Fall der Tractrix und der Kegeltypus ausgeschlossen ist. In Bezug auf die gegenseitige Lage der Kurven C, C_1 gelten hier ganz analoge Bemerkungen, wie zu der Figur in § 14.

---

[1]) Aus der „im allgemeinen" giltigen Gleichung 7) erhält man

$$1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 = \frac{x^2}{y'^2} \frac{(1 + y'^2)}{C},$$

aus der hervorgeht, daß C einen positiven Wert haben muß, wenn die Beziehung reell sein soll; selbstverständlich ist dies nicht hinreichend.

Wir heben noch einige weitere Fälle hervor. Setzt man

$$J_1 = a\, J_3,$$

so ergibt sich die Differentialgleichung

$$a \frac{(C - x^2)}{x^2} = \frac{1 + y'^2}{y'^2},$$

deren Lösung unter Weglassung der willkürlichen Konstanten der Mittelpunktskegelschnitt

$$(a+1)^2 y^2 + x^2 (a+1) = a\, C, \quad -(a+1)\, y = \sqrt{a\, C - (a+1)\, x^2}$$

ist. Hieraus folgt dann

$$\xi^2 = C + \frac{C\,(x^2 - C)}{a\, C - (a+1)\, x^2}$$

$$\eta = \frac{C}{a + 1 \sqrt{a\, C - x^2 (a+1)}},$$

und durch Elimination von x

$$(a+1)\, \xi^2 + \eta^2 (a+1)^2 = a\, C,$$

falls nicht $\xi^2 - C = 0$ und somit auch $x^2 - C = 0$ ist.[1])

Das eben angeführte Beispiel ist dadurch ausgezeichnet, daß eine und dieselbe Kurve durch die Berührungstransformation auf sich bezogen wird, was demnach bei allen Kegelschnitten stattfindet, deren eine Achse die Y-Achse ist, übrigens auf dem früher erwähnten Satze beruht.

Diese Möglichkeit ist indessen nicht auf die Kegelschnitte beschränkt. Als einfaches Beispiel kann man die Differentialgleichung

---

[1]) In diesem Falle wird

$$\xi = \pm \sqrt{C}, \quad x = \pm \sqrt{C}, \quad y = \eta = \frac{\sqrt{C}}{(1+a)^2}.$$

Bei geeignetem Werte von a kann dies jeder reelle Punkt sein; in der Tat bilden auch zwei Nullkreise, deren Zentra zusammenfallen oder symmetrisch zur Y-Achse liegen, ein reelles Kurvenpaar C, C_1.

$$J_3 = y' \frac{(x^2 - C)}{x} = a$$

anführen, deren Integral

$$y = \frac{a}{2} \lg (x^2 - C) + \text{const ist.}$$

Es wird dann

$$-\eta = y - \frac{a x^2}{x^2 - C} + \frac{C a}{x^2 - C} + \text{const} = y - a + \text{const},$$

$$\xi^2 - C = \frac{a^2 C}{x^2 - C},$$

mithin

$$\eta = \frac{a}{2} \lg (\xi^2 - C) + a \left(1 - \frac{1}{2} \lg a^2 C\right) - c.$$

Wählt man daher z. B. $2 = \lg (a^2 C)$ und setzt die konstante c gleich Null, so hat man eine Kurve, die mit sich selbst ein Paar bildet.

Man erhält durch eine einfache Rechnung ferner

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{C^2} \left(\frac{C y' - x y'' (C - x^2)}{x y'' - (1 + y'^2) y'}\right).$$

Das identische Verschwinden des Zählers ist dabei, wie schon oben bemerkt, auszuschließen. Verschwindet dagegen der Nenner oder $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$, so ergibt sich durch Integration eine Kreislinie, der vermöge der Berührungstransformation eine durch ihren Mittelpunkt gehende Gerade entspricht. In der Tat bildet auch ein Kreis mit jeder durch seinen Mittelpunkt gehenden Geraden ein Paar von Kurven C, C_1 in Bezug auf jede durch seinen Mittelpunkt gehende Y-Achse, wie unmittelbar ersichtlich ist.

Es lassen sich noch eine große Zahl hierher gehöriger Fragen stellen. Man kann z. B. verlangen, daß die Krümmungshalbmesser der Kurven C, C_1 in entsprechenden Punkten zueinander proportional sind, oder daß die Tangentenrichtungen von C und C_1 in korrespondierenden Punkten einen konstanten Winkel miteinander bilden sollen, u. s. w.; u. s. w.

Nur auf die einfache Gestalt, welche die Transformationsgleichungen 5), 6) für den Fall der Meridiankurven der Rotationsflächen konstanter Krümmung annehmen, soll hier noch hingewiesen werden; der Einfachheit halber führen wir dieselbe nur für den Fall positiver Krümmung aus.

Aus der Gleichung 10)

$$1 + y_1^2 = \frac{k^2}{C - x^2}$$

folgt

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\varepsilon}{k}\sqrt{C - x^2}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\varepsilon_1}{k}\sqrt{k^2 - C + x^2},$$

wo $|\varepsilon|$, $|\varepsilon_1|$ gleich $+1$ sind. Daraus folgt

$$y' = \varepsilon\varepsilon_1 \frac{\sqrt{k^2 - C + x^2}}{\sqrt{C - x^2}}, \tag{11}$$

und aus der Definition des Krümmungshalbmessers, der hier mit seinem Vorzeichen einzuführen ist,

$$\frac{1}{r} = \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{dy'}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2. \tag{12}$$

oder

$$\frac{1}{r} = \varepsilon\varepsilon_1 \frac{dx}{ds}\frac{x}{\sqrt{C - x^2}}\sqrt{k^2 - C + x^2}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{x^2}{k^2(k^2 - C + x^2)}.$$

Es wird daher

$$\eta = y + \frac{y'}{x}(C - x^2) = y + \varepsilon\varepsilon_1\sqrt{C - x^2}\sqrt{k^2 - C + x^2}.$$

also:

5') $$\eta = y + r\frac{dx}{ds},$$

6') $$\xi = \frac{\lambda}{x^2}\sqrt{C}\sqrt{C-k^2}, \quad |\lambda| = 1,$$

so daß die positive Größe $C > k^2$ ist.

Aus 5') kann man wegen der Reziprozität der Transformation schließen, daß

13) $$r_1\frac{d\xi}{ds_1} = -r\frac{dx}{ds};$$

dies läßt sich in der Tat durch die folgende Rechnung bestätigen. Man hat nach 12)

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d}{ds_1}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)\left(\frac{d\xi}{ds_1}\right)^2.$$

Wird hier nach 7) $\frac{d\eta}{d\xi}$ durch seinen Wert $-\frac{x\xi}{Cy'}$, und $x\xi$ nach 6') ersetzt, so folgt

$$r\frac{dx}{ds} = \lambda r_1\frac{d\xi}{ds_1}\frac{\sqrt{C-k^2}}{\sqrt{C}\,y'^2}\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\frac{d\xi}{ds},$$

oder wegen

$$\frac{d\xi}{ds} = -\lambda\frac{\sqrt{C}}{x^2}\sqrt{C-k^2}\frac{dx}{ds}$$

$$-r\frac{dx}{ds} = r_1\frac{d\xi}{ds_1}\frac{C-k^2}{x^2}\left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2\frac{1}{y'^2}.$$

Aus der Gleichung S. 98, Anmerkung,

$$1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 = \frac{x^2(1+y'^2)}{Cy'^2},$$

erhält man aber

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = \frac{C-k^2}{x^2y'^2},$$

so daß in der Tat die Gleichung 13) auch dem Vorzeichen nach richtig ist. Sie zeigt, daß die Projektion des Krümmungshalbmessers auf die Y-Achse in korrespondierenden Punkten für beide Kurven C und C_1 den nämlichen Wert hat.

Man erhält endlich aus der Gleichung 13)

$$r_1^2 \frac{C}{C - x^2} = k^2.$$

Eliminiert man nun aus dieser und der unter 12) angeführten Gleichung für r^2 die Größe x^2, so folgt endlich

$$\frac{k^6}{C} + r^2 r_1^2 - k^2 (r^2 + r_1^2) = 0$$

als Beziehung zwischen den Krümmungshalbmessern in korrespondierenden Punkten von C und C_1; wie man sieht, ist dieselbe von der Lage der Punkte völlig unabhängig.

§ 16.

Über eine zweite Berührungstransformation.

Mit der im vorigen § betrachteten Berührungstransformation steht in engstem Zusammenhange eine zweite, bei der zwei Kurven C, C_1 sich so entsprechen, daß sowohl die Tangenten von C und C_1 in entsprechenden Punkten x, y; ξ, η, als auch die zugehörigen Normalen sich jedesmal in zwei auf der Y-Achse gelegenen Punkten schneiden.

Aus den beiden Gleichungen

$$y - x \frac{dy}{dx} = \eta - \xi \frac{d\eta}{d\xi}$$

$$y + \frac{x}{\frac{dy}{dx}} = \eta + \frac{\xi}{\frac{d\eta}{d\xi}}$$

erhält man, abgesehen von der imaginären trivialen Lösung,

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

durch Integration

$$1)\qquad \begin{aligned} \eta &= y + \frac{Cx}{y'} \\ \xi^2 &= (1 - C)\, x^2 \left(1 + \frac{C}{y'^2}\right). \end{aligned}$$

Dies ist eine Berührungstransformation mit der aequatio directrix

$$\Omega = (C - 1)(\eta - y)^2 + C(C - 1)\, x^2 + C\,\xi^2 = 0.$$

Sie reduziert sich für $C = 0$ auf die identische, resp. symmetrische Transformation $\eta = y$, $\xi = \pm x$; in der Tat befinden sich auch zwei in Bezug auf die Y-Achse symmetrische Kurven in der geforderten Beziehung. Dagegen wird für $C = 1$, $\xi = 0$, während

$$\eta = y + \frac{x}{y'}$$

wird. Die Gleichungen 1) lassen mit Hülfe der Gleichung

$$2)\qquad (1 - C)\frac{\eta'}{\xi} = \frac{y'}{x}$$

die Umkehrung

$$\begin{aligned} y &= \eta + \frac{C}{C - 1}\,\frac{\xi}{\eta'} \\ x^2 &= \frac{\xi^2}{1 - C}\left(1 + \frac{C}{(C - 1)\,\eta'^2}\right) \end{aligned}$$

zu. Da ferner nach 2)

$$1 + \eta'^2 = + \frac{(1 + y'^2)}{1 - C},$$

so muß bei reeller Beziehung notwendig $C < 1$ sein. Einer Geraden entspricht dabei wieder eine Gerade, welche die

Y-Achse in demselben Punkte trifft, wie die erste, einem Kreise jeder konzentrische Kreis, einem Kegelschnitte, welcher die Y-Achse zur Hauptachse hat, ein confocaler Kegelschnitt. Wir gehen nicht weiter auf diese Verhältnisse ein, da sie in einfacher Art sich aus dem elementaren Satze:

Die Berührungspunkte des von einem Punkte der Hauptachse eines confocalen Systems von Kegelschnitten an dieselben gezogenere Tangenten liegen auf einem Kreise der durch diesen Punkt und die beiden auf der anderen Hauptachse gelegenen, imaginären oder reellen Brennpunkte geht. Dieser Satz, der auch für confocale Parabeln gilt (die imaginären Brennpunkte sind hier die Kreispunkte), kommt auch namentlich für das ausgezeichnete Verhalten confocaler Kegelschnitte bei der im vorigen § behandelten Berührungstransformation in Betracht.

Auch hier ist eine Invariante

$$J_1 = x\frac{(1+y'^2)}{y'} = \xi\frac{(1+\eta'^2)}{\eta'}$$

vorhanden. Eine zweite Invariante würde sich aus der Gleichung

$$(1-C)^2\left(\frac{\eta'}{\xi}\right)^2 = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$$

für $C = 2$ ergeben; dies führt indeß nur zu einer imaginären Beziehung.

Die Gleichung

$$x\frac{(1+y'^2)}{y'} = 2a$$

definiert daher Kurven, welche durch die Berührungstransformation längs der Y-Achse in Translation versetzt werden. Diese Kurven, für die also das von der Normalen und der Tangente auf der Y-Achse begrenzte Stück eine konstante Länge hat, und die auch bei der im vorigen § behandelten Transformation auftreten, sind in ihrem Verlauf der Tractrix nicht unähnlich, weisen aber eine unter dem Winkel von 45°

gegen die Y-Achse gerichtete Spitze auf, von der ein weiterer die Y-Achse rechtwinklig schneidender Zweig ausgeht. Versetzt man diese Kurven in Translation längs der Y-Achse, so liegen die Berührpunkte der von irgend einem Punkte der Y-Achse gezogenen Tangenten auf einem Kreise, der durch diesen Punkt geht und dessen Mittelpunkt auf der Y-Achse liegt; bei der im vorigen § behandelten Transformation muß nach der Translation das Kurvensystem an der X-Achse gespiegelt werden.

Finsterwalder, S. Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abh. II. Kl. XXII, 2. 1903 ℳ 1.20
— Der gefährliche Ort beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel. 1905, 1 ℳ —.20
Föppl, A. Absol. u. relat. Bewegung. Sb. 1904, p. 383—395 ℳ —.40
— Kreiselversuch zur Messung zur Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. 1904, 1 ℳ —.40
— Ueber die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. 1905, 2 ℳ —.40
Günther, S. Pothenot'sches Problem auf d. Kugel. Sb. 1904, p. 115—123 ℳ —.20
Gordan, P. Discriminante einer ternären Form. Sb. 1887, p. 477—478.
*Klein, F. Elliptische Modulfunctionen. Sb. 1880, p. 89—100.
* — Unendl. viele Normalf. des ellipt. Integr. 1. Gtg. Sb. 1880, p. 533—541.
Königsberger, L. Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des Abel'schen. Sb. 1885, p. 462—468.
— Algebraische Bez. zw. Fund.-Integralen etc. Sb. 1887, p. 423—431.
— Irreducibilität der algebr. part. Diff.-Gl.-Syst. Sb. 1891, p. 275—279.
Lindemann, F. Conforme Abbild. d. Halbebene auf ein einf. zusammenh., von algebr. Curve begrenztes Flächenst. Sb. 1894, p. 403—422.
— Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird. Sb. 1895, p. 219—237.
— Lineare Transf. einer quadrat. Mannigf. in sich. Sb. 1896, p. 31—66.
* — Analyt. Forts. derj. Funktionen, welche das Innere eines Kegelschn. conform auf die Halbebene abbilden. Sb. 1896, p. 401—424.
— Zur Gesch. d. Polyeder u. Zahlzeichen. Sb. 1896, p. 625—756.
— Gedächtnissrede auf Phil Ludw. von Seidel. März 1897 ℳ 3.—
— Umkehrprobleme aus d. Theorie der ellipt. Integrale. Sb. 1898, p. 37—54.
* — Drehung eines Körpers um d. Schwerpunkt. Sb. 1898, p. 181—202.
* — Prähistorische Gewichte. I. Sb. 1899, p. 71—136.
* — Zur Theorie der automorphen Funktionen. I. Sb. 1899, p. 423—454. II. Desgl. p. 493—510.
— Fermat'scher Satz betr. d. Gl. $x^n = y^n + z^n$. Sb. 1901, p. 185—202 und p. 495 ℳ —.40
— Zur Theorie der Spectrallinien. I. Sb. 1901, p. 451—491 ℳ —.80 II. Sb. 1903, p. 27—100 ℳ 1.—
— Das Pascal'sche Sechseck. Sb. 1902, p. 153—161 ℳ —.20
— Das d'Alembert'sche Prinzip. Sb. 1904, p. 77—101 ℳ —.60
Lüroth, J. Kanon. Perioden d. Abel'schen Integrale. I. A. 152, 1885 ℳ 1.20. II. A. 161, 1887 ℳ 1.30
— Bestimmung einer Fläche durch geod. Messungen. Sb. 1892, p. 27—52.
Nöther, M. Berührungscurven der C_4. A. 171, 1889, p. 103—150 ℳ 1.50
— Die sieben Systeme von Kegelschnitten durch die Berührpunkte der Doppeltangenten einer ebenen C_4. Sb. 1895, p. 93—100.
Pringsheim, A. Zur Theorie d. Taylor'schen Reihe. Sb. 1892, p. 211—245.
— Ueber den Cauchy'schen Integralsatz. Sb. 1895, p. 39—72.
— Entwickelung eind. analyt. Funkt. in Potenzreihen. Sb. 1895, p. 75—92.
— Zum Cauchy'schen Integralsatz. Sb. 1895, p. 295—304.
— Potenzreihen a. Conv.-Kr. u. Fourier'sche Reihen. Sb. 1895, p. 337—364.
— Zur Theorie der synektischen Funktionen. Sb. 1896, p. 167—182.
— Sog. Grenze u. Grenzgebiete zw. Conv. u. Div. Sb. 1896, p. 605—624.
— Elementare Theorie d. unendl. Doppelreihen. Sb. 1897, p. 101—152.
— Du Bois-Reymond'sche Conv.-Grenze etc. Sb. 1897, p. 303—344 und 356—358.