Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 12. Abhandlung

Über
einige spezielle Biegungsgruppen

von

E. Stübler

Vorgelegt am 5. November 1910

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(mathematisch-physikalische Klasse).

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Bauernfeind, C. M. v. Beobachtungen und Untersuchungen über Naudet'sche Aneroïdbarometer. 1874 — 1 ℳ 80 ₰.

— Gedächtnissrede auf Jos. v. Fraunhofer. 1887 — 80 ₰.

Beetz, W. Antheil der bayer. Akademie der Wissenschaften an der Entwicklung der Electricitätslehre. Rede. 1873 — 90 ₰.

Cranz, C. und K. R. Koch. Untersuchungen über die Vibrationen des Gewehrlaufs. Abh. XIX,3 1899 I. — 2 ℳ

— — — Fortsetzung XX,3 1900 I. — 1 ℳ 60 ₰.

— — — — Abh. XXI,3 1901 II. — 80 ₰.

*Ebert, Herm. Unsichtbare Vorgänge bei electrischen Entladungen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 4.

* — Zur Mechanik der Glimmlichtphänomene. Sitzb. 1899 XXIX. Bd. Heft 1.

— Periodische Seespiegelschwankungen (Seiches) am Starnberger See. Sitzb. 1900 Heft 3.

— Messungen der elektrischen Zerstreuung im Freiballon. Sitzb. 1900 Heft 3.

— Weitere Beobachtungen der Luftelektrizität in grösseren Höhen. Sitzb. 1901 Heft 1.

— Ueber die Möglichkeit radioaktivirende Emanationen in flüssiger Luft anzureichern. Sitzb. 1903 Heft 1.

Ebert, Herm. und Hoffmann, B. Versuche mit flüssiger Luft. Sitzb. 1900 XXX. Bd. — 20 ₰.

— Ueber Pultationen von geringer Periodendauer in der erdmagnetischen Feldkraft. 1906, 3 — 40 ₰.

Elster, J. und Geitel, H. Ueber die radioaktive Emanation in der atmosphärischen Luft. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.

— Ueber Methoden zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit der atmosphärischen Luft an der Erdoberfläche sowie ihres Gehalts an radioaktiver Emanation und die nächsten Ziele dieser Untersuchungen. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.

Endrös, A. Die Seeschwankungen (Seiches) des Chiemsees mit 2 Tafeln. 1906, 2 — 1 ℳ

Exner, F. Potentialmessungen. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.

— Bericht über die Thätigkeit der luftelektrischen Stationen der Wiener Akademie im abgelaufenen Jahre. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.

Finsterwalder, S. Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Mit 3 Tafeln. Abh. XVII,3 1891 — 3 ℳ

— Ueber die Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen (mit 1 Tafel). Sitzb. 1900 Heft 2.

— Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abh. 1903.

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 12. Abhandlung

Über
einige spezielle Biegungsgruppen

von

E. Stübler

Vorgelegt am 5. November 1910

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

I.

1. L. Bianchi nennt zwei Flächen zueinander assoziiert, wenn sie sich so punktweise zuordnen lassen, daß in entsprechenden Punkten die Normalen parallel sind und den Haupttangentenkurven der einen ein konjugiertes System der andern entspricht. Sind die Gleichungen der einen Fläche auf die Haupttangentenkurven ($u =$ const, $v =$ const) als Parameterlinien bezogen, dann ergibt sich eine assoziierte Fläche als Hüllfläche der Ebene:

$$X x + Y y + Z z = \frac{\vartheta}{\sqrt{\varrho}}$$

(vgl. L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 1. Aufl., § 155 und § 158), wo $X\,Y\,Z$ die Richtungskosinus der Normale, $-\varrho^2$ das Produkt der Hauptkrümmungsradien der gegebenen Fläche bedeutet und ϑ eine Funktion ist, welche der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial v} = \left(\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\, \frac{\partial^2 \sqrt{\varrho}}{\partial u\, \partial v} - f\right) \vartheta$$

genügt, unter f die Fundamentalgröße

$$\frac{\partial X}{\partial u}\,\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\,\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\,\frac{\partial Z}{\partial v}$$

verstanden.

Wendet man dies an auf die Konoidflächen, deren Gleichungen in den besagten Parametern sich ausdrücken lassen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{u}{V} \sin v \\ y &= \frac{u}{V} \cos v \\ z &= \int \frac{dv}{V^2}, \end{aligned}$$

wo unter V eine beliebige Funktion von v zu verstehen ist, so erhält man

$$\varrho = u^2 + \frac{1}{V^2} \qquad f = \frac{u\, V\, V'}{(u^2\, V^2 + 1)^2},$$

also:

$$\frac{\partial^2\, \vartheta}{\partial\, u\, \partial\, v} = 0$$

und daher:

$$\vartheta = U_1 + V_1.$$

Die zu den Konoidflächen assoziierten Flächen sind daher die Hüllflächen der Ebene:

$$x \sin v - y \cos v + u\, V z = V(U_1 + V_1).$$

Man findet, wenn man zuerst nach u differentiiert:

$$x \sin v - y \cos v = V(U_1 + V_1 - u\, U_1')$$
$$z = U_1'.$$

Durch diese Gleichungen wird für einen bestimmten Wert von v eine Zylinderfläche dargestellt, deren Erzeugende $u = \text{const}$ senkrecht zur z-Achse liegen. Ändert sich v, dann bewegt sich die Zylinderfläche senkrecht zur z-Achse und ändert sich zugleich, aber so, daß sie zu sich selbst affin bleibt. Dabei umhüllt sie die Fläche mit den Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= (V' \cos v + V \sin v)\,(U_1 + V_1 - u\, U_1') + V\, V_1' \cos v \\ (2) \qquad y &= (V' \sin v - V \cos v)\,(U_1 + V_1 - u\, U_1') + V\, V_1' \sin v \\ z &= U_1'. \end{aligned}$$

Nun weiß man,[1]) daß immer, wenn ϱ wie hier, die Summe einer Funktion von u und einer Funktion von v ist, die assoziierten Flächen, also hier (2), sich so verbiegen lassen, daß die konjugierten Systeme (u, v) konjugiert bleiben. Zwei besondere Fälle, wo V bzw. V_1 eine Konstante bedeutet, seien hervorgehoben. Ist V konstant, so erhält man die Gesimsflächen, die sich mit Erhaltung der Krümmungslinien verbiegen lassen. Sie sind zur Minimalschraubenregelfläche assoziiert.

---

[1]) L. Bianchi, Annali di Mat. (2), 18 (1890), p. 337. Vgl. Vorles. über Differentialgeom., übers. v. Lukas. 1. Aufl., p. 337, 2. Aufl., p. 343.

Ist V_1 konstant, dann gehen die Ebenen, in welchen die Kurven $v = \text{const}$ liegen, alle durch die z-Achse. Die Berührungsebenen längs der Kurven $u = \text{const}$ werden durch Kegelflächen eingehüllt, während diejenigen längs $v = \text{const}$ wie im allgemeinen Fall von Zylinderflächen umhüllt werden. Sie gehören daher zu den von Peterson betrachteten und nach ihm P-Flächen genannten[1]) Flächen.

2. Die Verbiegungen von (2) sind nun auch wirklich angegeben worden und zwar von Herrn B. Mlodziejowski, Bull. des Sc. Math. (Darboux) 2. Serie, 15, p. 101, ohne daß ihr Zusammenhang mit den Konoidflächen bekannt wäre. Wir schreiben ihre Gleichungen in etwas abgeänderter Form:

$$
\begin{aligned}
x &= (U + V)\sqrt{V_1 + a}\cos\varphi - \int V'\sqrt{V_1 + a}\cos\varphi\, dv \\
y &= (U + V)\sqrt{V_1 + a}\sin\varphi - \int V'\sqrt{V_1 + a}\sin\varphi\, dv \\
z &= \int \sqrt{1 - a\,U'^2}\, du \\
\varphi &= \int \frac{\sqrt{(V_1 + a)V_2 - \frac{1}{4}V_1'^2}}{V_1 + a}\, dv.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Die U und V sind wieder Funktionen von u bzw. v allein, haben aber eine andere Bedeutung als in (2).

Das Quadrat des Linienelements wird

$$ds^2 = (1 + U'^2 V_1)\, du^2 + U' V_1' (U + V)\, du\, dv + V_2 (U + V)^2\, dv^2.$$

Man kann die Biegungsgruppe aus dem besonderen Fall, wo V einen konstanten Wert hat, nach dem von K. Peterson angegebenen Verfahren (vgl. P. Stäckel, Biegungen und konjugierte Systeme, Math. Ann. 49 [1897], p. 256) ableiten. Dieser besondere Fall gehört zu den von Peterson (Über Kurven und Flächen, p. 72) angegebenen Biegungen der Flächenklasse

$$x = UV \quad y = UV_1 \quad z = U_1.$$

Vgl. B. Mlodziejowski, Math. Ann. 63 (1906), p. 82. Nimmt man in (3) V_1 konstant, dann kommt man auf die Biegungsgruppe der Gesimsflächen.

[1]) A. Voss, Math. Ann. 39, S. 205.

Will man rückwärts die zu (3) assoziierten Konoidflächen aufsuchen, so braucht man die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L und N (D und D'' in der Bianchischen Bezeichnung). Bedeuten nämlich $x_0\, y_0\, z_0$ die Koordinaten der assoziierten Fläche, dann wird (Bianchi, Vorl., 1. Aufl., p. 294; 2. Aufl., p. 300)

$$(4) \qquad \frac{\partial x_0}{\partial u} = \frac{M_0}{N}\frac{\partial x}{\partial v} \qquad \frac{\partial x_0}{\partial v} = \frac{M_0}{L}\frac{\partial x}{\partial u}$$

nebst entsprechenden Gleichungen für y_0 und z_0. Aus diesen Gleichungen folgt, wenn $EG - F^2 = D^2$ gesetzt wird, und D_0 die analoge Bedeutung hat,

$$D_0^2 = \frac{M_0^2}{LN} D^2.$$

Für die assoziierte Fläche ist daher das Krümmungsmaß

$$K_0 = -\frac{M_0^2}{D_0^2} = -\frac{L^2 N^2}{M_0^2 D^2}.$$

Setzt man aber $K_0 = -\dfrac{1}{\varrho^2}$, dann läßt sich nach Bianchi, Vorl., 1. Aufl., p. 125; 2. Aufl., p. 126 ϱ also M_0 bestimmen durch die Gleichungen:

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\log\varrho = -2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}' \qquad \frac{\partial}{\partial v}\log\varrho = -2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'.$$

Das Christoffelsche Symbol $\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'$ bezieht sich hier auf das Bogenelement der sphärischen Abbildung; man kann dafür (Bianchi, p. 135 bzw. 134) auch $-\dfrac{N}{L}\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}$ oder nach den Codazzischen Fundamentalgleichungen $\dfrac{\partial}{\partial v}\log L - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}$ schreiben. Entsprechendes gilt von $\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'$.

In unserem Fall ergibt sich

$$\frac{M_0}{L} = \frac{U''}{2(U+V)\sqrt{(1-aU'^2)^3}\,[(V_1+a)\,4\,V_2 - V_1'^2]}$$

$$\frac{M_0}{N} = \frac{V_2 V_1'' - \frac{1}{2} V_1' V_2' - 2 V_2^2}{\sqrt{(1-aU'^2)}\,[(V_1+a)\,4\,V_2 - V_1'^2]^3}$$

und damit $x_0\, y_0\, z_0$. Die Form (1) erhält man, wenn man an Stelle von u und v die neuen Veränderlichen u_1 und v_1 einführt mittels:

$$u_1 = \frac{U'}{2\sqrt{1 - a\, U'^2}}$$

$$tg\,(v_1 - \varphi) = \frac{\sqrt{(V^2 + a)\, 4\, V_2 - V_1'^2}}{V_1'}$$

und man erhält für V in (1):

$$V = \sqrt{\frac{(V_1 + a)\, 4\, V_2 - V_1'^2}{V_2}}.$$

II.

3. Während durch das Petersonsche Verfahren nur eine gegebene Biegungsgruppe, bei der ein konjugiertes System erhalten bleibt, sich verallgemeinern läßt, gestattet eine von Herrn J. Weingarten in den Göttinger Nachrichten 1878, p. 28 zum erstenmal verwendete Methode Biegungsgruppen zu finden, sobald man eine Flächenschar kennt, für welche das Produkt und die Summe der Krümmungshalbmesser durch eine lineare Beziehung verbunden ist, in welcher noch die Entfernung eines Flächenpunkts und der Abstand seiner Tangentialebene vom Anfangspunkt auftritt. Kennt man alle Flächen, welche einer solchen Beziehung genügen, dann erhält man eine vollständige Flächenklasse (Weingarten und E. Goursat, Comptes rendues 112 (1891), p. 607 und 707; Darboux, Leçons 4, p. 308); aber auch partikuläre Lösungen können zu beachtenswerten Ergebnissen führen.

Aus den Gleichungen:

$$(6)\qquad \begin{aligned} dx + \varrho\, dX &= 0 \\ dy + \varrho\, dY &= 0 \\ dz + \varrho\, dZ &= 0, \end{aligned}$$

wo X, Y, Z die Richtungskosinus der Flächennormale bedeuten, leitet man ab:

$$(7)\qquad dq + \varrho\, dp = 0,$$

wenn

$$p = Xx + Yy + Zz$$
$$q = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

ist. Sieht man $x\ y\ z$ als Funktionen von p und q an, so liefert die erste Gleichung von (6) und (7):

$$\frac{\partial x}{\partial p} - \varrho\left(\frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial X}{\partial p}\right) - \varrho^2 \frac{\partial X}{\partial q} = 0.$$

Deshalb ist:

$$(8\,\mathrm{a})\quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial p} &= -\varrho_1\varrho_2\frac{\partial X}{\partial q} \\ \frac{\partial y}{\partial p} &= -\varrho_1\varrho_2\frac{\partial Y}{\partial q} \\ \frac{dz}{\partial p} &= -\varrho_1\varrho_2\frac{\partial Z}{\partial q} \end{aligned} \qquad (8\,\mathrm{b})\quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial q} &= \frac{\partial X}{\partial p} - (\varrho_1 + \varrho_2)\frac{\partial X}{\partial q} \\ \frac{\partial y}{\partial q} &= \frac{\partial Y}{\partial p} - (\varrho_1 + \varrho_2)\frac{\partial Y}{\partial q} \\ \frac{\partial z}{\partial q} &= \frac{\partial Z}{\partial p} - (\varrho_1 + \varrho_2)\frac{\partial Z}{\partial q}, \end{aligned}$$

wo ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Hauptkrümmungsradien bedeuten.

Diese Formeln sind von Weingarten und nach ihm von Goursat und Darboux zur Herstellung von Biegungsgruppen verwendet worden.

So liefern die auf der linken Seite stehenden Formeln, sobald man das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\varrho_1\varrho_2 = -\frac{P}{Q}$$

kennt, wo P eine beliebige Funktion von p, Q eine solche von q sein soll, die vollständigen Differentiale:

$$d\xi = PX\,dp + Qx\,dq$$
$$d\eta = PY\,dp + Qy\,dq$$
$$d\zeta = PZ\,dp + Qz\,dq$$

und damit alle Flächen, für welche das Quadrat des Linienelements:

$$d\sigma^2 = P^2\,dp^2 + 2\,PQp\,dp\,dq + 2\,Q^2 q\,dq^2.$$

Dies soll angewendet werden auf die Differentialgleichung:

$$(9)\qquad \varrho_1\varrho_2 = \frac{C}{p^4},$$

von der ein partikuläres Integral wohl bekannt ist. Für die Mittelpunktsfläche zweiten Grads mit der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \tag{10}$$

ist nämlich:

$$\varrho_1 \varrho_2 = \frac{a\,b\,c}{p^4} \tag{11}$$

und (10) ist daher ein Integral von (9), wenn $a\,b\,c = C$ ist.

Nun ist für die Fläche (10):

$$X = \frac{p\,x}{a}$$

und:

$$x = a \sqrt{\frac{\frac{bc}{p^2} + 2q - b - c}{(a-b)(a-c)}}\,. \tag{12}$$

Tatsächlich wird $-\frac{C}{p^4} X\,d\,p + x\,d\,q$ damit ein vollständiges Differential und man erhält durch Integration

$$\xi = \frac{a}{3} \sqrt{\frac{\left(\frac{b\,c}{p^2} + 2q - b - c\right)^3}{(a-b)(a-c)}}\,.$$

Oder man hat das Ergebnis:

Durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= a \sqrt{\frac{(b\,c\,u + v - b - c)^3}{(a-b)(a-c)}} \\ y &= b \sqrt{\frac{(c\,a\,u + v - c - a)^3}{(b-c)(b-a)}} \\ z &= c \sqrt{\frac{(a\,b\,u + v - a - b)^3}{(c-a)(c-b)}} \end{aligned} \tag{13}$$

werden tetraedrale Flächen dargestellt, für welche das Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = \tfrac{9}{4}(C^2 u\, du^2 + 2\, C\, du\, dv + v\, dv^2)$$

gemeinschaftlich ist, wenn die Biegungsparameter $a\, b\, c$ an die Bedingung gebunden sind, daß ihr Produkt konstant gleich C ist.

4. Für die Summe der Hauptkrümmungsradien der Mittelpunktsfläche zweiten Grads mit der Gleichung (10) findet man:

$$p(\varrho_1 + \varrho_2) + 2\, q - a - b - c = 0. \tag{14}$$

Nun sind (vgl. Weingarten, Paris, Comptes Rendus 112 (1891), p. 607)

$$d\xi = X d\frac{\partial \varphi}{\partial p} + x\, d\frac{\partial \varphi}{\partial q} \tag{15}$$

und die entsprechenden Ausdrücke in y und z vollständige Differentiale nach (8), wenn φ eine Funktion von p und q ist, welche der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + (\varrho_1 + \varrho_2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q} + \varrho_1 \varrho_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0. \tag{16}$$

Für die durch (15) bestimmten Flächen ist dann:

$$\begin{aligned} & d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = d\sigma^2 \\ & = d\frac{\partial \varphi^2}{\partial p} + 2\, p\, d\frac{\partial \varphi}{\partial p}\, d\frac{\partial \varphi}{\partial q} + 2\, q\, d\frac{\partial \varphi^2}{\partial q}. \end{aligned} \tag{17}$$

Setzt man nun $a + b + c = C_1$ und

$$\varphi = p^3 (q - \tfrac{1}{2} C_1),$$

so geht (16) in (14) über und man findet nach (15):

$$\xi = \sqrt{\frac{p^2(2\, q - b - c) + b\, c}{(a - b)(a - c)}}.$$

Die Substitution

$$p^2 = v$$

$$2\, q - C_1 = \frac{u}{v} - \tfrac{1}{2} v$$

führt schließlich zu dem Ergebnis:

Die Flächen, welche durch die Gleichungen

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
x &= \sqrt{\frac{(b\,c + u + a\,v - \frac{1}{2}\,v^2)^3}{(a-b)\,(a-c)}}\\
y &= \sqrt{\frac{(c\,a + u + b\,v - \frac{1}{2}\,v^2)^3}{(b-c)\,(b-a)}}\\
z &= \sqrt{\frac{(a\,b + u + c\,v - \frac{1}{2}\,v^2)^3}{(c-a)\,(c-b)}}
\end{aligned}
$$

dargestellt werden, haben das folgende Quadrat des Linienelements gemeinsam:

$$
d\,s^2 = \tfrac{9}{4}\left[d\,u^2 + (u + C_1\,v - \tfrac{3}{2}\,v^2)\,d\,v^2\right],
$$

wenn die Biegungsparameter $a\,b\,c$ an die Bedingung gebunden sind, daß ihre Summe konstant gleich C_1 ist.

5. In Comptes rendus t. 112, p. 707 hat M. Goursat Flächen verwendet, für welche $\varrho_1 + \varrho_2 + \lambda\,p = 0$ ist und stößt dabei auf Biegungsgruppen, deren Linienelement für $\lambda = 4$ mit dem obigen übereinstimmt. Umgekehrt muß man also aus der Biegungsgruppe (18) Integralflächen der Differentialgleichung

$$
\varrho_1 + \varrho_2 + 4\,p = 0,
$$

deren allgemeines Integral nach der Goursatschen Methode sich nicht angeben läßt, finden können. Man kommt so auf Flächen, für welche

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
x &= (a-p)\,X\\
y &= (b-p)\,Y\\
z &= (c-p)\,Z
\end{aligned}
$$

ist (die Werte von $a\,b\,c$ in (18) sind hier durch

$$
\frac{a}{\sqrt{2}}\;\frac{b}{\sqrt{2}}\;\frac{c}{\sqrt{2}}
$$

ersetzt). Die Abschnitte der Flächenornamente zwischen den Koordinatenebenen sind konstant. (Vgl. auch Darboux, Leçons I, 159) und man findet leicht für die Koordinaten eines Flächenpunkts:

$$
(20) \qquad
\begin{aligned}
x &= (a-p)\sqrt{\frac{bc-2p(b+c)+3p^2+2q}{(a-b)(a-c)}}\\
y &= (b-p)\sqrt{\frac{ca-2p(c+a)+3p^2+2q}{(b-c)(b-a)}}\\
z &= (c-p)\sqrt{\frac{ab-2p(a+b)+3p^2+2q}{(c-a)(c-b)}}.
\end{aligned}
$$

Tatsächlich wird nach (8 b)

$$
(21) \qquad \varrho_1 + \varrho_2 + 4p - a - b - c = 0
$$

und ferner nach (8 a):

$$
\varrho_1 \varrho_2 = bc + ca + ab - 3p(a+b+c) + 6p^2 + 2q.
$$

Nimmt man also $bc + ca + ab$ konstant gleich C_2, so muß sich aus der Beziehung

$$
(22) \qquad C_2 - 6p^2 + 2q - 3p(\varrho_1 + \varrho_2) - \varrho_1 \varrho_2 = 0
$$

eine neue Biegungsgruppe ableiten lassen. Durch Division mit $(C_2 + 3p^2 + 2q)^{\frac{5}{2}}$ läßt sich die letzte Gleichung auf die Form (16) bringen und man findet nach derselben Methode wie früher

$$
\xi = -\frac{1}{3(b+c)(\sqrt{(a-b)(a-c)}}\sqrt{\left[\frac{bc-2p(b+c)+3p^2+2q}{C_2+2q+3p^2}\right]^3}
$$

oder wenn man geeignete Parameter einführt:

Die Flächen

$$
(23) \qquad
\begin{aligned}
x &= \sqrt{\frac{[1-(b+c)(u+av)]^3}{(b+c)^2(a-b)(a-c)}}\\
y &= \sqrt{\frac{[1-(c+a)(u+bv)]^3}{(c+a)^2(b-a)(b-c)}}\\
z &= \sqrt{\frac{[1-(a+b)(u+cv)]^3}{(a+b)^2(c-a)(c-b)}}
\end{aligned}
$$

haben das Linienelement gemeinsam, wenn $ab + bc + ca$ konstant bleibt. Es wird:

$$
ds^2 = \tfrac{9}{4}[-v\,du^2 - 2u\,du\,dv + [1 - C_2 v)\,dv^2].
$$

Irgend welche Kombinationen der Gleichungen (11) und (14) oder (21) und (22) liefern nur besondere Fälle der von Th. Egorow, Comptes rendus 132, 1901, p. 302 angegebenen Biegungsgruppe:

$$\frac{\partial x}{d u} = A \sqrt{(u-a)(v-a)^3}\,\frac{\partial \vartheta}{\partial u} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = A \sqrt{(u-a)^3 (v-a)}\,\frac{\partial \vartheta}{\partial v}.$$

Analog sind die Differentialquotienten von y und z gebildet. ϑ erfüllt die Differentialgleichung

$$(u-v)\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial \vartheta}{d u} - \frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right) = 0$$

und es gilt:

$$A^2 a^i + B^2 b^i + C^2 c^i = m_i; \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Die Parameterlinien bilden konjugierte Systeme, und die Flächen sind im Bianchischen Sinne assoziiert zu der Fläche, für welche

$$x = \frac{A\,[2 u v - (b+c)(u+v) + b c]}{(b-c)^2 \sqrt{(u-b)(u-c)(v-b)(v-c)}}$$

und entsprechend y und z gebildet ist. (Nach den Gleichungen (4) und (5)).