Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 3. Abhandlung

Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze

von

Leopold Fejér

Vorgelegt am 8. Januar 1910

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 11 2, 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. A. 11 3, 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. A. 14 3, 1883 ℳ —.50
* — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 14 2, 1883 ℳ 1.—
* — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
* — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. A. 17 1, 1889 ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.

Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 ℳ —.40

Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1ter O. definirten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
* — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
— Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 ℳ 1.20
— Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 ℳ —.20

Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2. Sb. 1887, p. 33—42.
— Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
— Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
— Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 ℳ 3.—
— Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 ℳ —.20
— Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 ℳ —.40
— u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 ℳ —.40
— Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 ℳ —.40
— Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 ℳ —.20

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 3. Abhandlung

Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze

von

Leopold Fejér

Vorgelegt am 8. Januar 1910

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Einleitung.

In zwei Notizen und im § 3 einer größeren Abhandlung[1]) habe ich verschiedene Beispiele von überall stetigen Funktionen mitgeteilt, deren Fouriersche Reihe an einer Stelle divergiert.

Daß solche überall stetige Funktionen existieren, hat bekanntlich zum erstenmal Paul du Bois-Reymond[2]) im Jahre 1876 bewiesen.

Meine in den zitierten drei Arbeiten auseinandergesetzten Beispiele sind, wie ich glaube, schon sehr einfach und durchsichtig. Diesen Eigenschaften ist es zu verdanken, daß man für meine stetigen Funktionen nicht nur die bloße Tatsache der Divergenz ihrer Fourierschen Reihe leicht nachweisen kann, sondern daß man auch die Art der Divergenz dieser Fourierschen Reihen an der betrachteten Stelle bis in ihre Einzelheiten leicht verfolgen kann.

---

1) „Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe." Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 137, Heft 1, 1909. (Hier kurz als „Note I" zitiert.)

„Eine stetige Funktion, deren Fouriersche Reihe divergiert." Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXVIII, 2⁰ semestre, 1909. (Hier kurz als „Note II" zitiert.)

„Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen", 1909. Erscheint nächstens im Bande 138 des *Crelleschen Journals*. (Hier kurz als „Note III" zitiert.)

2) Paul du Bois-Reymond: „Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln". Abhandlungen der Bayer. Akad., Math.-phys. Klasse, Bd. XII, 1876.

Weiter sind meine Beispiele auch rechnerisch leicht zu behandeln. Eben deswegen kann man diese Beispiele so gestalten, daß nicht nur ihre Fourierschen Reihen an einer Stelle divergent sind, sondern daß sie auch noch weitere, postulierte, Eigenschaften aufweisen. Dies soll in dieser Note hauptsächlich dadurch gezeigt werden, daß ich in § 4 eine Frage beantworte, die Herr Pringsheim in seiner Abhandlung „Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise“ [1]) aufgeworfen hat. § 1, § 2 und § 3 dienen zur Vorbereitung.

§ 1. Über gewisse trigonometrische Polynome.

In meiner Note II habe ich zum erstenmal das trigonometrische Polynom

$$\frac{\cos x}{n}+\frac{\cos 2x}{n-1}+\ldots+\frac{\cos nx}{1}-\frac{\cos(n+1)x}{1}-\ldots-\frac{\cos 2nx}{n}$$

betrachtet, und dort bewiesen, daß

$$\left|\frac{\cos x}{n}+\frac{\cos 2x}{n-1}+\ldots+\frac{\cos nx}{1}-\frac{\cos(n+1)x}{1}-\ldots-\frac{\cos 2nx}{n}\right|<34.$$

Hier bedeutet n eine beliebige positive ganze Zahl, und x eine beliebige reelle Zahl.

In meiner Note III (§ 2, Art. 8) habe ich nun diese Ungleichung verallgemeinert (und auch noch verschärft). Ich habe nämlich dort bewiesen, daß

$$\left|\frac{\cos(r+1)x}{n}+\frac{\cos(r+2)x}{n-1}+\ldots+\frac{\cos(r+n)x}{1}\right.$$
$$\left.-\frac{\cos(r+n+1)x}{1}-\ldots-\frac{\cos(r+2n)x}{n}\right|<25{\cdot}6. \qquad (1)$$

[1]) Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften, 1900, Heft 1. Der § 4 hat die Überschrift: „Zusammenhang zwischen dem reellen und imaginären Teile der Randfunktion“. Die zu beantwortende Frage ist auf pag. 98 dieses Paragraphen gestellt. Herr Pringsheim bespricht zum zweitenmale diese Frage in Art. 3 (pag. 513) seiner Arbeit: „Über die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Konvergenzgrenze“, Sitzb. der K. B. Akad. Bd. XXXI, 1901, Heft IV.

Hier bedeutet n wieder eine beliebige positive ganze Zahl, r bedeutet eine beliebige nicht negative ganze Zahl[1]), und x bedeutet eine beliebige reelle Zahl.

Der einfache Beweis dafür lautet in den Hauptzügen: Es ist

$$\frac{\cos(r+1)x}{n}+\frac{\cos(r+2)x}{n-1}+\ldots+\frac{\cos(r+n)x}{1}$$

$$-\frac{\cos(r+n+1)x}{1}-\ldots-\frac{\cos(r+2n)x}{n}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos(r+n-\nu+1)x}{\nu}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos(r+n+\nu)x}{\nu}=$$

$$=2\sin\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x\cdot\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin(2\nu-1)\frac{x}{2}}{\nu}.$$

Da aber[2])

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin(2\nu-1)t}{\nu}\right|<12{\cdot}8, \tag{2}$$

[1]) Solche Werte von r kommen hier in Betracht. Die Ungleichung (1) ist aber richtig für jeden reellen Wert von r.

[2]) *Dies folgt aus der bekannten wichtigen Tatsache, daß*

$$\left|\frac{\sin t}{1}+\frac{\sin 2t}{2}+\ldots+\frac{\sin nt}{n}\right|<M, \tag{2'}$$

wo n eine beliebige positive ganze Zahl, und t eine beliebige reelle Zahl bedeutet. M bezeichnet eine positive Konstante. Ich habe a. a. O. bewiesen, daß man

$$M=3{\cdot}6$$

setzen kann. Ich vermute aber, daß das Maximum von

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\nu t}{\nu}\right|$$

mit wachsendem n fortwährend wächst, und für $\lim n=\infty$ zu

$$\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}\,dx=1{\cdot}8519\ldots$$

konvergiert, so daß also $M=1{\cdot}8519\ldots$ die „richtige Konstante“ für und zwar für jeden positiven ganzzahligen Wert von n, und für jeden reellen Wert von t, also ist die Ungleichung (1) erwiesen.

Ich will jetzt zeigen, daß auch

$$\left|\frac{\sin(r+1)x}{n}+\frac{\sin(r+2)x}{n-1}+\ldots+\frac{\sin(r+n)x}{1}\right.$$
$$\left.-\frac{\sin(r+n+1)x}{1}-\ldots-\frac{\sin(r+2n)x}{n}\right|<25{\cdot}6. \qquad (3)$$

In der Tat ist

$$\frac{\sin(r+1)x}{n}+\frac{\sin(r+2)x}{n-1}+\ldots+\frac{\sin(r+n)x}{1}$$
$$-\frac{\sin(r+n+1)x}{1}-\ldots-\frac{\sin(r+2n)x}{n}=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin(r+n-\nu+1)x}{\nu}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin(r+n+\nu)x}{\nu}=$$
$$=-2\cos\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x\cdot\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin(2\nu-1)\frac{x}{2}}{\nu}.$$

Wenn ich also wieder die Ungleichung (2) in Betracht ziehe, so erhalte ich die zu beweisende Ungleichung (3).

Bemerkung. Setze ich in die Ungleichungen (1) und (3) statt x das Produkt sx, wo s eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, so erhalte ich die Ungleichungen:

$$\left|\frac{\cos(r+1)sx}{n}+\frac{\cos(r+2)sx}{n-1}+\ldots-\frac{\cos(r+2n)sx}{n}\right|<25{\cdot}6, \qquad (4)$$

$$\left|\frac{\sin(r+1)sx}{n}+\frac{\sin(r+2)sx}{n-1}+\ldots-\frac{\sin(r+2n)sx}{n}\right|<25{\cdot}6. \qquad (5)$$

die Ungleichung (2') wäre. Eine geeignete Modifikation der Betrachtungen, die Herr Bôcher im § 9 seiner Arbeit „Introduction to the theory of Fouriers series" (Annals of Mathematics, second series, vol. 7, 1906) gibt, dürfte wohl diese Vermutung bestätigen. — Ich bemerke noch, daß es wünschenswert wäre für die Ungleichung (2') einen elementaren (d. h. die Integralrechnung nicht benützenden) Beweis zu geben.

§ 2. Beispiel einer überall stetigen Funktion, deren Fourierreihe an einer einzigen Stelle des Intervalles $(0, 2\pi)$ divergiert.

Man betrachte die Gruppe von $2n$ Zahlen

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}, -\ldots -\frac{1}{n}.$$

Man bilde diese Zahlengruppe der Reihe nach für die folgenden Werte der ganzen Zahl n:

$$n = 2^{1^3}, 2^{2^3}, 2^{3^3}, 2^{4^3}, \ldots, 2^{\nu^3}, \ldots$$

Man schreibe diese Zahlengruppen der Reihe nach alle nebeneinander, nachdem man aber die Zahlen der ν-ten Gruppe ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) mit ν^2 dividiert hat. So entsteht eine ganz bestimmte unendliche Zahlenfolge

$$\frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4.256}, \frac{1}{4.255}, \frac{1}{4.254}, \ldots. \tag{a}$$

Es bezeichne $a_\varkappa$ die $\varkappa$-te Zahl dieser Zahlenfolge. Dann ist die unendliche Reihe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa \cos \varkappa x \tag{6}$$

die Fouriersche Reihe einer überall stetigen, nach 2π periodischen Funktion, und diese Fouriersche Reihe (6) ist an der Stelle $x = 0$ divergent.[1])

Der Beweis dafür ist sehr einfach. Ich will aber vorher eine bequeme Bezeichnungsweise einführen.

Es sei

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} u_\varkappa \tag{7}$$

[1]) Die Reihe (6) habe ich zum erstenmal im § 3 meiner Note III gegeben. Sie ist aus der Reihe (1) meiner Note II durch eine leichte Modifikation entstanden. Ich kam auf diese Abänderung, indem ich eine Frage zu beantworten suchte, die Herr Lebesgue brieflich an mich richtete.

eine beliebige unendliche Reihe, und es sei

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad \ldots, \quad g_\nu, \ldots \tag{8}$$

eine beliebige Folge von positiven ganzen Zahlen. Diese Folge sei kurz mit g bezeichnet.

Dann verstehe ich unter

$$\left(\sum_{\varkappa=1}^{\infty} u_\varkappa\right)_g \tag{9}$$

diejenige unendliche Reihe, die aus der Reihe (7) dadurch entsteht, daß ich in ihr die ersten g_1 Glieder, dann die folgenden g_2 Glieder, dann die folgenden g_3 Glieder, ..., dann die folgenden g_ν Glieder, ..., zusammenziehe. In Formeln:

$$\left(\sum_{\varkappa=1}^{\infty} u_\varkappa\right)_g = \sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu, \tag{11}$$

wo

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + \ldots + u_{g_1}, \\ v_2 &= u_{g_1+1} + \ldots + u_{g_1+g_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ v_\nu &= u_{g_1+\ldots+g_{\nu-1}+1} + \ldots + u_{g_1+\ldots+g_\nu}, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{12}$$

Nach der Erklärung dieser Bezeichnungsweise lautet nun der Beweis des obigen Satzes für die Reihe (6) einfach folgenderweise.

Es sei

$$g_1 = 2.2^{1^3}, \quad g_2 = 2.2^{2^3}, \quad \ldots, \quad g_\nu = 2.2^{\nu^3}, \ldots. \tag{13}$$

Dann ist die unendliche Reihe

$$\varphi(x) = \left(\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa \cos \varkappa x\right)_g \tag{14}$$

eine in jedem Intervalle gleichmäßig und absolut konvergente unendliche Reihe. In der Tat ist, mit Rücksicht auf die Ungleichung (1), das ν-te Glied dieser Reihe dem absoluten Betrage nach für jedes x kleiner als

$$\frac{25 \cdot 6}{\nu^2}.$$

und da

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{25 \cdot 6}{\nu^2}$$

konvergiert, daher ist die Reihe (14) in der Tat in jedem Intervalle gleichmäßig und absolut konvergent.

Also ist die Funktion $\varphi(x)$ unter (14) überall stetig und nach 2π periodisch. Es ist weiter klar, daß die Fouriersche Reihe der stetigen Funktion (14) gerade die Reihe (6) ist. [Um dies einzusehen, muß man nur die Reihe an der rechten Seite der Gleichung (14) mit $\cos \varkappa x$ multiplizieren und dann zwischen den Grenzen 0 und π gliedweise integrieren.]

Ich muß also nur noch beweisen, daß

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa$$

divergent ist. Das ist aber evident.

Da nämlich die $\left(g_1 + \ldots + g_{\nu-1} + \frac{g_\nu}{2}\right)$-te Partialsumme dieser Reihe gleich

$$\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{2^{\nu^3}} + \frac{1}{2^{\nu^3}-1} + \ldots + \frac{1}{2} + 1\right)$$

ist, und also größer ist als

$$\frac{1}{\nu^2} \cdot \log 2^{\nu^3} = \nu \cdot \log 2,$$

daher wächst die betrachtete Partialsumme der Reihe $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa$ mit wachsendem ν ins Unendliche.

Ich will noch hier eine Bemerkung hinzufügen, die für den § 4 dieser Note von Wichtigkeit ist. Ich will nämlich beweisen, daß auch die Reihe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa \sin \varkappa x \tag{15}$$

die Fouriersche Reihe einer überall stetigen, und nach 2π periodischen Funktion darstellt.

Beweis. Es bedeute g wieder die Folge (13). Dann stellt die Reihe

$$\varphi(x) = \left(\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa \sin \varkappa x\right)_g \tag{16}$$

mit Rücksicht auf die Ungleichung (3) eine überall stetige und nach 2π periodische Funktion dar. Weiter ist klar, daß die Fouriersche Reihe der überall stetigen Funktion (16) gerade die Reihe (15) ist. Damit ist der Beweis erbracht.

Wie Herr Pringsheim hervorhebt, folgt im allgemeinen aus der Voraussetzung, daß die Reihe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} c_\varkappa \cos \varkappa x \tag{17}$$

die Fouriersche Reihe einer überall stetigen und nach 2π periodischen Funktion ist, noch keineswegs, daß auch die „konjugierte" trigonometrische Reihe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} c_\varkappa \sin \varkappa x \tag{18}$$

die Fouriersche Reihe einer überall stetigen und nach 2π periodischen Funktion repräsentiert.

Man betrachte z. B. die Reihe

$$\begin{aligned}\frac{\cos 3x}{3\cdot\log 3} - \frac{\cos 5x}{5\cdot\log 5} + \frac{\cos 7x}{7\cdot\log 7} - \dots &= \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)\log(2n+1)}&.\end{aligned} \tag{19}$$

Diese Reihe ist in jedem Intervalle gleichmäßig konvergent und stellt also die Fouriersche Reihe einer überall stetigen und nach 2π periodischen Funktion dar.

Um die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (19) nachzuweisen, setzte man in (19) statt x

$$x = \frac{\pi}{2} + t.$$

Dann erhält man die Reihe

$$\frac{\sin 3t}{3 \cdot \log 3} + \frac{\sin 5t}{5 \cdot \log 5} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)\log(2n+1)}, \tag{19'}$$

und es genügt offenbar zu zeigen, daß diese Reihe (19') in jedem Intervalle gleichmäßig konvergiert.

Aus der Ungleichung (2') (s. § 1, zweite Fußnote) folgt, wenn ich $M = 3{\cdot}6$ nehme, daß

$$\left| \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\sin(2\nu-1)t}{2\nu-1} \right| < 5{\cdot}4,$$

und zwar für jeden positiven ganzzahligen Wert von k, und für jeden reellen Wert von t. Daher ist

$$\left| \sum_{\nu=n}^{m} \frac{\sin(2n+1)t}{2\nu+1} \right| < 10{\cdot}8,$$

und zwar für jedes positive ganzzahlige Wertepaar n, m (wo $n < m$), und für jeden reellen Wert von t.

Daraus folgt, mit Rücksicht auf ein bekanntes Abelsches Lemma, daß

$$\left| \sum_{\nu=n}^{m} \frac{1}{\log(2\nu+1)} \frac{\sin(2\nu+1)t}{2\nu+1} \right| < \frac{10{\cdot}8}{\log(2n+1)}.$$

Also ist die Reihe (19') und daher auch die Reihe (19) in jedem Intervalle gleichmäßig konvergent.

Nun lautet die zur Reihe (19) konjugierte Reihe

$$\frac{\sin 3x}{3 \cdot \log 3} - \frac{\sin 5x}{5 \cdot \log 5} + \frac{\sin 7x}{7 \cdot \log 7} - \ldots \tag{20}$$

Diese Reihe (20) kann aber nicht die Fouriersche Reihe einer überall stetigen, nach 2π periodischen Funktion sein. Die Reihe (20) geht nämlich für

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

in die Reihe

$$\frac{1}{3 \cdot \log 3} + \frac{1}{5 \cdot \log 5} + \frac{1}{7 \cdot \log 7} + \ldots$$

über, und diese ist eigentlich divergent. Die Fouriersche Reihe einer überall stetigen Funktion kann aber an keiner Stelle x eigentlich divergent sein, weil die arithmetischen Mittel ihrer Partialsummen zu $f(x)$ konvergieren.

§ 3. Beispiel einer überall stetigen Funktion, deren Fourier'sche Reihe an überall dicht liegenden Stellen divergiert.

Ich nehme die Reihe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa \cos \varkappa x \tag{6}$$

wo also die $a_\varkappa$ die im § 2 unter (a) definierten Zahlen bedeuten. Die Zahlen

$$g_1, \quad g_2, \quad \ldots, \quad g_\nu, \quad \ldots$$

sollen wieder die unter (13) definierten positiven ganzen Zahlen bezeichnen.

Ich nenne die ersten g_1 Glieder der Reihe (6) „die erste Gruppe von Glieder“, die folgenden g_2 Glieder der Reihe (6) „die zweite Gruppe von Glieder“, etc.

Ich setze nun in die erste Gruppe von Glieder der Reihe (6) statt x das Produkt $1!x$, in die zweite Gruppe von Glieder statt x das Produkt $2!x$, ..., in die ν-te Gruppe von Glieder statt x das Produkt $\nu!x$, ... In solcher Weise entsteht eine neue, ganz bestimmte unendliche Reihe:

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa \cos \lambda_\varkappa x\,, \\
\text{wo} \\
\lambda_\varkappa = 1!\varkappa, \ \text{wenn} \ 1 \leq \varkappa \leq g_1, \\
\lambda_\varkappa = 2!\varkappa, \ \text{wenn} \ g_1 + 1 \leq \varkappa \leq g_1 + g_2, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\lambda_\varkappa = \nu!\varkappa, \ \text{wenn} \ g_1 + \ldots + g_{\nu-1} + 1 \leq \varkappa \leq g_1 + \ldots + g_\nu. \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}\right\} \tag{21}$$

Diese Reihe (21) ist die Fourier'sche Reihe einer überall stetigen, nach 2π periodischen Funktion, und ist divergent für sämtliche Werte

$$x = \frac{m}{n}\pi, \tag{22}$$

wo

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$$
$$n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Der Beweis läßt sich mit einigen Worten erledigen.

Mit Rücksicht auf die Ungleichung (4) des § 1 ist die Reihe

$$\Phi(x) = \left(\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa \cos \lambda_\varkappa x\right)_{\!\prime\prime} \tag{23}$$

in jedem Intervalle gleichmäßig und absolut konvergent, stellt also eine überall stetige, und nach 2π periodische Funktion $\Phi(x)$ dar. Es ist weiter klar, daß die Reihe (21) die Fouriersche Reihe dieser Funktion $\Phi(x)$ ist. Schließlich ist diese Fouriersche Reihe (21) an sämtliche Stellen (22) divergent, weil für $x = \frac{m}{n}\pi$

$$\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{2^{\nu^3}} + \ldots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right)$$

eine Partialsumme dieser Fourierschen Reihe darstellt, wenn nur ν gehörig groß ist.

Ich bemerke noch, daß auch die Reihe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa \sin \lambda_\varkappa x \tag{24}$$

die Fouriersche Reihe einer überall stetigen und nach 2π periodischen Funktion darstellt. Diese Funktion ist durch die Reihe

$$\Psi(x) = \left(\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa \sin \lambda_\varkappa x\right)_{\!\prime\prime} \tag{25}$$

definiert, eine Reihe, die in jedem Intervalle gleichmäßig und absolut konvergiert, und die aus der Reihe (24) wieder einfach durch die schon früher angewendete Art der Gliederzusammenziehung entsteht.

§ 4. Eine Potenzreihe, deren Randfunktion für den Konvergenzkreis überall stetig ist, und die an einzelnen Stellen des Konvergenzkreises divergiert.

Herr Pringsheim hat die folgende Frage gestellt (s. die Einleitung dieser Note):

Es sei

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \tag{26}$$

eine Potenzreihe der komplexen Variabel z, deren Konvergenzradius gleich 1 ist. Weiter sei $f(z)$ für

$$|z| < 1$$

stetig.[1]) Ist es möglich, daß die Potenzreihe (26) an einer Stelle des Konvergenzkreises $|z| = 1$ (etwa an der Stelle $z = 1$) divergiert?

Wie Herr Pringsheim hervorhebt, ist diese Frage durch die du Bois-Reymondsche Entdeckung (nach welcher es solche überall stetige Funktionen von θ gibt, deren Fouriersche Reihe für $\theta = 0$ divergiert) noch nicht erledigt. Bedeutet nämlich

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_\varkappa \cos \varkappa\theta \tag{27}$$

die Fouriersche Reihe einer solchen (geraden, überall stetigen, nach 2π periodischen) du Bois-Reymondschen Funktion, so ist diese für unserem Zwecke nur dann brauchbar, wenn auch die konjugierte Reihe

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_\varkappa \sin \varkappa\theta \tag{28}$$

die Fouriersche Reihe einer überall stetigen und nach 2π periodischen Funktion repräsentiert.

---

[1]) D. h. es konvergiere $f(\varrho e^{i\theta})$, (wo $0 < \varrho < 1$), für $\lim \varrho = 1$ zu einem bestimmten Grenzwert, und zwar gleichmäßig für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. Die „Randfunktion", die eben durch diesen Grenzübergang definiert ist, ist dann notwendigerweise eine überall stetige und nach 2π periodische Funktion von θ.

Ich behaupte nun:

Die Potenzreihe

$$F(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_\varkappa z^\varkappa + \ldots = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa z^\varkappa, \quad (29)$$

wo die Koeffizienten $a_\varkappa$ die im § 2 unter (a) definierten Zahlen bedeuten, ist für $|z| < 1$ konvergent, und ihre Summe ist für $|z| \leq 1$ stetig. Sie divergiert an der Stelle $z = 1$ des Einheitskreises.

Beweis. Da $\lim\limits_{\varkappa=\infty} a_\varkappa = 0$ ist, also konvergiert die Reihe (29) für $|z| < 1$. Weiter geht die Reihe (29) für $z = 1$ in die Reihe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa$$

über, und wir haben im § 2 gesehen, daß diese Reihe divergiert. Es bleibt also nur noch übrig zu zeigen, daß $F(z)$ für $|z| < 1$ stetig ist.

Für $|z| < 1$ ist

$$F(z) = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa z^\varkappa.$$

Da aber für $|z| < 1$ gewiß

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa z^\varkappa = \left(\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa z^\varkappa\right)_g,$$

daher ist für $|z| < 1$ sicher

$$F(z) = \left(\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa z^\varkappa\right)_g. \quad (30)$$

Die rechtsstehende unendliche Reihe konvergiert aber nicht nur für $|z| < 1$, sondern sie konvergiert auch, und zwar gleichmäßig und absolut, im Bereiche

$$|z| < 1.$$

In der Tat. Die an der rechten Seite der Gleichung (30) stehende Reihe ist eine Reihe, deren allgemeines Glied ein

Polynom in $z = x + yi$ ist, d. h. deren allgemeines Glied von der Form $u_\nu(x, y) + i v_\nu(x, y)$ ist, wo $u_\nu(x, y)$, $v_\nu(x, y)$ harmonische Polynome in x, y bedeuten. Daher ist (mit Rücksicht auf die Ungleichungen (1), (3) des § 1)

$$|u_\nu(x, y)| < \frac{25 \cdot 6}{\nu^2}, \quad |v_\nu(x, y)| < \frac{25 \cdot 6}{\nu^2} \quad \text{für } x^2 + y^2 < 1,$$

womit die gleichmäßige (und absolute) Konvergenz der Reihe (30) für $|z| < 1$ erwiesen ist. Also ist, mit Rücksicht auf die Gleichung (30), die Funktion $F(z)$ für $|z| < 1$ stetig.[1])

Es seien $a_\varkappa$ dieselben Zahlen wie vorher, und es seien $\lambda_\varkappa$ diejenigen positiven ganzen Zahlen, die unter (21) definiert sind. Dann gilt folgendes:

Die Potenzreihe

$$F_1(z) = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa z^{\lambda_\varkappa} \tag{31}$$

ist für $|z| < 1$ konvergent, und ihre Summe ist für $|z| < 1$ stetig. Sie divergiert an den Stellen

$$z = e^{\frac{m}{n}\pi i} \quad \begin{pmatrix} m = 0, & \pm 1, & \pm 2, & \ldots \\ n = \pm 1, & \pm 2, & & \ldots \end{pmatrix}$$

des Einheitskreises, welche den Einheitskreis überall dicht erfüllen.[2])

[1]) Daß die Summe der Potenzreihe (29) für $|z| = 1$ gleichmäßig stetig in stetige Randwerte übergeht, folgt auch daraus, daß, für $|z| = 1$, die arithmetischen Mittel dieser Potenzreihe gleichmäßig zu $\varphi(\theta) + i\psi(\theta)$ konvergieren. S. Math. Annalen, Bd. 58, pag. 60: „Zusatz zum Hauptsatze", und pag. 65, 66: „Zusatz" etc.

[2]) Ich bemerke beiläufig, daß der Einheitskreis für die Potenzreihe (31) eine natürliche Grenze ist. Wäre nämlich auf dem Konvergenzkreise ein noch so kleiner regulärer Bogen vorhanden (wo also $F_1(z)$ überall regulär wäre) so müßte, wegen $\lim_{\varkappa=\infty} a_\varkappa = 0$, nach dem Satze des Herrn Fatou die Potenzreihe (31) auf diesem Bogen überall konvergieren. Dies ist aber, wie eben ausgesprochen, nicht der Fall.

Der Beweis dieser Behauptung ist wieder sehr einfach. Man muß sich nur jetzt auf die Resultate des § 3 stützen, und im übrigen den früheren Gedankengang wiederholen.

Man sieht aus diesem § 4, daß die Potenzreihe einer analytischen Funktion selbst dann noch auf ihrem Konvergenzkreise divergieren kann, wenn sie, für diesen Kreis, gleichmäßig stetig in eine überall stetige Randfunktion übergeht; die Divergenz der Potenzreihe kann in einem solchen Falle sogar an überall-dicht liegenden Stellen des Konvergenzkreises stattfinden.

Die Potenzreihen (29) und (31) sind die ersten Beispiele, bei welchen diese Erscheinung nachweisbar auftritt.

Die Frage nach solchen Potenzreihen wurde durch Herrn Pringsheim gestellt.