Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 2. Abhandlung

Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung

von

W. M. Kutta

Vorgelegt am 8. Januar 1910

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 11₂, 1872 M. —.50
— Pascal's Theorem. A. 11₃, 1874 M. 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 M. —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. A. 14₃, 1883 M. —.50
* — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 14₂, 1883 M. 1.—
* — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
* — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. A. 17₁, 1889 M. —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.

Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 M. —.40

Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1ter O. definirten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
* — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
— Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 M. 1.20
— Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 M. —.20

Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2. Sb. 1887, p. 33—42.
— Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
— Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
— Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 M. 3.—
— Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 M. —.20
— Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 M. —.40
— u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 M. —.40
— Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 M. —.40
— Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 M. —.20

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 2. Abhandlung

Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung

von

W. M. Kutta

Vorgelegt am 8. Januar 1910

München 1910
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

I. Einleitung.

Die Strömungs- und Druckerscheinungen, wie sie in bewegten Flüssigkeiten, insbesondere auch der Luft, an den darein versenkten Körpern beobachtet werden, haben schon seit längerer Zeit der hydrodynamischen Theorie einen viel bearbeiteten, nicht ganz einfachen Gegenstand geboten. Seit Otto Lilienthals Errungenschaften, und der neueren Entwicklung und Lösung des Flugproblems haben diese Fragen auch große praktische Bedeutung erlangt. Von besonderer Wichtigkeit ist Erklärung und Berechnung der auftretenden Auftriebskräfte und ihres Angriffspunktes, sowie des zur Erhaltung einer Bewegung des Körpers erforderlichen Arbeitsbedarfs. Die Entstehung des dynamischen Auftriebs bei gleichförmiger Bewegung des Körpers setzt das Auftreten einer Strömung in der Umgebung desselben voraus, die als die Übereinanderlagerung der Geschwindigkeiten zweier Bewegungen aufgefaßt werden kann, von denen die eine dem Körper auf einfachste Weise ausweicht, während ihn die andere umkreist.[1]) Notwendigkeit einer Arbeitsleistung folgt erst bei Berücksichtigung der äußeren oder inneren Flüssigkeitsreibung. Es ist möglich, nach Ausschließen eines linearen wirbelnden Gebietes der Flüssigkeit die Strömung im verbleibenden Teile durch ein mehrdeutiges Geschwindigkeitspotential darzustellen. Dieser Teil wird durch den Ausschluß

[1]) Vergleiche hiezu Lanchester: Aërial Flight, Bd. I sowie Finsterwalder: Die Aërodynamik als Grundlage der Luftschiffahrt. Verhandlungen der Schweizer Naturforschenden Gesellschaft. 92. Jahresversammlung, Lausanne, Bd. 1 S. 12 1909.

der Wirbelachsen zu einem mehrfach zusammenhängenden Raume und die Auftriebskräfte stehen in nächster Beziehung zu der Zirkulation der Flüssigkeit oder den Perioden des Geschwindigkeitspotentials in diesem Raume. Die daraus resultierende indirekte Wirkung der entstehenden Wirbel kann den wesentlichen Betrag des Auftriebes schon ergeben und wird jedenfalls gegenüber der sehr rasch im Einzelnen veränderlichen Wirbelerscheinung selbst einen weit mehr stationären Charakter zeigen.

Die in Bezug auf dynamische Auftriebswirkung wichtigsten Typen eines in die strömende Flüssigkeit versenkten Körpers sind die lange, ebene, schief gegen die Strömung gestellte Platte, und die lange, schwach gewölbte zylindrische Schale, die auch wenn die Sehne ihres Querschnitts parallel zur Strömung liegt, Auftriebskräfte erfährt. Das letztgenannte spezielle Problem habe ich neben anderen auf Anregung meines verehrten Lehrers, Herrn Professors Dr. Finsterwalder, 1902 in meiner Habilitationsschrift behandelt, indem ich die Abstraktion einer quer zur Strömung unendlich langen zylindrischen Schale vom Querschnitt eines Kreisbogens vom Winkel 2α zu Grunde legte. Hiedurch wird das Strömungsproblem ein zweidimensionales und es fällt die ausdrückliche Betrachtung der an die (unendlich entfernt gedachten) Schmalseiten der Schale sich anschließenden Wirbel aus der mathematischen Analyse heraus. Das gewonnene Zahlenresultat stimmte (für kleine Winkel α) ziemlich mit den von Lilienthal durch Versuche erhaltenen Zahlen überein; ein allgemeiner, damals aufgestellter, seitdem von N. Joukowsky[1]) neu gefundener Satz besagte, daß der Auftrieb für jeden zylindrischen Körpers senkrecht zur Strömungsrichtung steht und seine Größe proportional zu der im Unendlichen neben der konstanten Geschwindigkeit vorhandenen Komponente der Geschwindigkeit senkrecht vom Radius (sie ist klein von erster Ordnung), also proportional zu der heute als Zirkulation bezeichneten Größe ist. Dieser aus dem Prin-

[1]) Bulletin de l'institut aërodynamique de Koutschino, Fascicule I, Petersburg 1906.

zipe der lebendigen Kraft folgende Satz schließt bei reibungsloser Strömung im wirbelfreien, wenn auch mehrfach zusammenhängenden Gebiete eine Arbeitsleistung aus.

Die Abhandlung wurde nicht in extenso veröffentlicht, nur ein Teil der Hauptresultate in den Aëronautischen Mitteilungen 1902, S. 133 kurz angegeben. Einer erneuten Anregung des Herrn Prof. Finsterwalder folgend habe ich in den letzten Monaten die Untersuchung wieder aufgenommen und dabei Strömungsbilder auch für die schiefe Strömung gegen Platte und Schale gefunden, die in wesentlichen Zügen, und auch Zahlenresultaten, mit dem nach den Versuchen zu Erwartenden übereinstimmen. Zugleich erlaubt die Methode auch Strömungen um noch andere praktisch interessante Zylinderformen zu berechnen.

Das Hilfsmittel zur Lösung des im Typus zweidimensionalen Strömungsproblems ist jetzt, wie damals, die konforme Abbildung von Flächenstücken, sei es auf die Halbebene, sei es auf das durch Ausschneiden eines Kreises erhaltene Flächengebiet der Ebene. Das Zweite erlaubt sofort, wie im Paragraphen II ausgeführt ist, die allgemeinste gesuchte Strömung mit Geschwindigkeitspotential um Platte oder Schale aus der bekannten allgemeinsten Strömung um einen Vollkreiszylinder zu gewinnen. Wie diese, so ist auch jene wegen der noch beliebigen Zirkulation unbestimmt, indem eben eine willkürliche Konstante in die Lösung hineintritt. Die spezielle Lösung wird dann in den vorgelegten Problemen durch die physikalische Forderung bestimmt, daß keine unendlich großen Flüssigkeitsgeschwindigkeiten auftreten sollen, wie sie doch die allgemeine Lösung an den hier vorhandenen scharfen Kanten resp. Ecken liefert. In den 1902 behandelten Problemen, insbesondere der Strömung gegen die Schale mit im Unendlichen der Sehne paralleler Geschwindigkeit, gelang es auf Grund der Symmetrieeigenschaft des Problems durch eine geeignete Wahl der Zirkulationskonstante eindeutig eine Lösung aufzustellen, die jene Forderung an Vorder- wie Hinterkante befriedigt. Ebenso wird bei Zylinderformen mit nur einer

scharfen Kante (etwa Hinterkante) sich eine solche Lösung angeben lassen.

Dagegen kann im Probleme der schiefen Strömung gegen Platte oder Schale nur an einer Kante — wir nennen sie die Hinterkante — die unendlich geschwinde Strömung um die Kante vermieden und durch ein Abströmen mit endlicher Geschwindigkeit ersetzt werden; die Lösung ist eindeutig. Dabei ergibt sich eine Auftriebskraft, die sich in zwei Teile zerlegt. Der eine Teil resultiert aus den gesamten Drucken der Flüssigkeit auf die Elemente der Schale; er ist nach dem Schalenzentrum gerichtet. Der zweite Teil stellt eine Saugwirkung der Kante (Vorderkante) dar, die mit unendlicher Geschwindigkeit umflossen wird, und daher einen für die Flächeneinheit unendlichen negativen Druck in Richtung der Schalentangente, wenn auch nur an einer unendlich schmalen Schneide, erfährt. Eine äußerst geringfügige Abrundung der Kante, welche den ersten Teil des Auftriebs nicht wesentlich ändert, genügt, um die physikalisch unzulässigen negativen Drucke und übergroßen Geschwindigkeiten zu beseitigen, ohne daß zunächst dadurch die Saugkraft der Kante besonders beeinflußt wird. Dagegen zeigt sich, daß das an der Kante oder der Abrundung auftretende Geschwindigkeitsgefälle, wenn die Abrundung nicht weit bedeutendere Dimensionen aufweist, übergroße Beträge erreicht. Dann dürfen wir aber die Wirkung der inneren Flüssigkeitsreibung an dieser Stelle nicht mehr außer Acht lassen. Diese Wirkung, wie sie sich im Einzelnen noch äußern mag, wird an der gefährlichen Kante die Geschwindigkeiten und damit die Saugwirkung beträchtlich verringern, ja leicht die Saugwirkung so gut wie ganz zum Erlöschen bringen. Ist dies der Fall, so finden wir außer dem durch äußere Reibung an der Schale erforderten Arbeitsbetrag für die Bewegung der Schale noch einen weiteren in der angedeuteten Weise durch die innere Reibung veranlaßten. Diesen möglichst zu verringern und die Saugwirkung möglichst ungeschädigt zu erhalten, das betrachten wir als den eigentlichen Zweck der Verdickungen, die die Vogelflügel, sowie Lilienthals Tragflächen, an der Vorderseite aufweisen.

II. Allgemeiner Ansatz.

Schneidet man aus der komplexen Ebene $\zeta = \xi + i\eta$ die Fläche des um Punkt $\zeta = 0$ geschlagenen Einheitskreises aus, so ist das übrig bleibende unendliche Flächenstück im Sinne der Funktionentheorie einfach zusammenhängend, da ja der unendlich ferne Punkt nicht als Grenze anzusehen ist. Die Abbildung des Flächenstückes auf die positive komplexe Halbebene t erfolgt im Inneren singularitätenlos durch

$$t = i\,\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}; \quad \zeta = \frac{t + i}{t - i}$$

ζ und t sind die komplexen Variabeln; dem unendlich fernen Punkte der Ebene ζ entspricht in der Ebene t Punkt $t = i$.

Für die Behandlung des zweidimensionalen, wirbellosen Strömungsproblems im betrachteten Flächenstücke ist dagegen dieses als zweifach zusammenhängend anzusehen, insofern für das Unendliche eine Strömungsbedingung gegeben sein wird, also — da diese als Grenzbedingung aufzufassen ist — der unendlich ferne Punkt als Grenze erscheint. Dementsprechend ergibt die Lösung des Strömungsproblem ein periodisches Geschwindigkeitspotential, und es tritt dabei diese Periode, die „Zirkulation" als willkürliche Konstante auf. Die Lösung ist durch die Geschwindigkeit im Unendlichen noch nicht bestimmt, wie sich im zugehörigen dreidimensionalen Problem denn auch im Kreiszylinder Wirbelfäden von beliebiger Gesamtwirbelstärke fingieren ließen. Geschlossene Stromlinien können vorhanden sein, aber es ist das im allgemeinen nicht nötig; in den später behandelten Problemen ist es nicht der Fall.

Die Strömungsfunktion sei $W = U + iV$, wo $V = \text{const.}$ das System der Stromlinien, U der Geschwindigkeitspotential ist. Sind u und v die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung im Punkte ζ der Fläche, in ξ und η Richtung gemessen, so ist bekanntlich

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + i\,\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi} - i\,\frac{\partial U}{\partial \eta} = u - iv.$$

Die allgemeinste Strömung ist gegeben durch

$$W = c_1 \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - i \cdot c_2 \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) + i \cdot c \lg \text{nat}\, \zeta,$$

c_1, c_2, c sind als reelle Konstante vorausgesetzt.

Der erste Term für sich allein stellt eine Strömung mit der Geschwindigkeit c_1 in der positiven ξ Richtung im Unendlichen dar; die Stromlinie der Achse ξ spaltet sich im Punkte $\zeta = -1$, folgt beiderseits dem Halbkreis und vereinigt sich wieder im Punkte $\zeta = +1$. Es ist Symmetrie des Strömungsbildes zu den ξ und η Achsen vorhanden.

Der zweite Term allein stellt eine Strömung dar, die im Unendlichen die Geschwindigkeit c_2 in der positiven η Richtung besitzt; die Stromlinie der η Achse spaltet sich in $\zeta = -i$ vereinigt sich wieder in $\zeta = +i$.

Endlich der dritte Term allein gibt eine Strömung in Kreisen um $\zeta = 0$; die Geschwindigkeit im Unendlichen ist Null, $2\pi c$ ist der Betrag der Zirkulation; c wird also die willkürliche Konstante werden.

Wir gehen nun zu einer anderen Ebene, in komplexer Darstellung durch $z = x + iy$ gegeben, über. Aus ihr soll ein beliebiges geschlossenes Flächenstück — das sich auch auf ein doppelt gerechnetes Kurvenstück zusammenziehen kann — ausgeschnitten und entfernt werden; gesucht ist im übrigen Flächenstück die allgemeinste Strömung. Man hat dazu nur das neue Flächenstück auf das vorher betrachtete im Inneren singularitätenfrei abzubilden und dabei dafür zu sorgen, daß dem unendlich fernen Punkte von z der unendlich ferne Punkt von ζ entspricht. Zu diesem Zwecke wird man das Flächenstück z auf die früher eingeführte positive Halbebene t abzubilden haben. Dabei sei $z = \infty$ in $t = t_0$ abgebildet. Die Abbildung enthält drei reelle Konstante; zwei von diesen verwendet man, um $t_0 = i$ zu machen, wodurch das Entsprechen von $z = \infty$ und $\zeta = \infty$ hergestellt ist; die dritte ist nicht von wesentlicher Bedeutung; sie ergäbe in ζ bloß eine ganz gleichgiltige Rotation der Figur um den Punkt $\zeta = 0$.

Ist $z = F(t)$ die gesuchte Abbildungsfunktion, so ergibt sich die gesuchte allgemeinste Strömungsfunktion für das Flächenstück z durch Elimination (— die natürlich tatsächlich nicht vollzogen zu werden braucht —) von t und ζ aus

$$t = i\,\frac{\zeta+1}{\zeta-1}$$

$$W = c_1\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right) - i\,c_2\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right) + i\cdot c\,\lg\,\mathrm{nat}\,\zeta$$

$$z = F(t) \text{ oder, was dasselbe } t = \Phi(z).$$

Die Geschwindigkeit der Strömung im Unendlichen von z findet sich durch

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\dfrac{dW}{dt}}{\dfrac{dz}{dt}} = \frac{dW}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dt}\cdot\frac{dt}{dz} \quad \text{für } z=\infty,\ \zeta=\infty,\ t=i$$

$$= (c_1 - i\,c_2)\left[\frac{(\zeta-1)^2}{-2\,i}\cdot\frac{d\Phi}{dz}\right]_{\substack{\zeta=\infty\\ z=\infty}} = (c_1 - i\,c_2)\cdot k$$

wo der letzte Faktor, abgekürzt als k geschrieben und gleich $\left(\dfrac{d\zeta}{dz}\right)_{z=\infty}$, obwohl von der Form $[\infty\cdot 0]$, doch im allgemeinen endlich werden wird.

Ist im Unendlichen von z die Geschwindigkeit V in der Richtung β gegen die x Achse vorgeschrieben, also deren Komponenten in x und y Richtung $V_1 = V\cdot\cos\beta$, $V_2 = V\cdot\sin\beta$, so ist nun c_1 und c_2 aus $V_1 - i\,V_2 = (c_1 - i\,c_2)\,k$ zu bestimmen. Die willkürliche Zirkulationskonstante c dagegen steht noch beliebig zur Verfügung; es gibt noch unendlich viele Lösungen.

Nun werden wir freilich erwarten, daß unter den so gefundenen möglichen stationären Strömungen sich einzelne durch eine größere Stabilität des Strömungsbildes auszeichnen werden, also bei Störungen die Tendenz besteht, gerade diese herzustellen. Welche speziellen Lösungen das sind, das hängt von der speziellen Form der Grenzkurve ab; im Falle des Kreises ζ werden wir geneigt sein, die Symmetrielösung, also $c = 0$ zu

erwarten. Immerhin werden wir im allgemeinen uns nicht wundern, ein Schwanken des Strömungsbildes um jenes spezielle stabilere Bild herum leicht zu erhalten — sofern eben nicht die spezielle Form der Grenzkurve eine Lösung ganz besonders vor allen anderen bevorzugt, und zwar nicht nur in Bezug auf mehr geometrische Verhältnisse, wie die Symmetrie, sondern in Bezug auf eigentlich physikalische Strömungsverhältnisse.

Ein solcher Fall spezieller Bevorzugung tritt ein, wenn die Grenzkurve des Flächenstückes z in einem ihrer Punkte einen überstumpfen Winkel α nach aussen (praktisch statt dessen auch schon eine sehr kleine Krümmung nach dem Inneren der geschlossenen Kurve hin) aufweist. Ist dies der Punkt z_1 und für ihn $W = W_1$, so gibt bekanntlich die Entwicklung von W am Punkte z_1

$$(z - z_1) = (W - W_1)^{\frac{\alpha}{\pi}} \left[C_0 + \text{Potenzreihe in } (W - W_1)^{\frac{\alpha}{\pi}} \right], \text{ somit}$$

$$\left(\frac{dW}{dz}\right) = \frac{1}{(W - W_1)^{\frac{\alpha - \pi}{\pi}}} [D_0 + \text{Potenzreihe}],$$

wo $\alpha > \pi$ gedacht ist.

Es wird daher im allgemeinen die Strömungsgeschwindigkeit in jenem Punkte unendlich groß. Aber es kann, indem die Konstante D_0 zu Null gemacht wird, dieser störende Umstand aufgehoben werden. Dann gibt es also einen Wert der Zirkulation c, der, indem er D_0 zu Null macht, eine derartig physikalisch ausgezeichnete Lösung repräsentiert und zwar ist diese Lösung eindeutig bestimmt. Dabei wird z_1 im allgemeinen Spaltungspunkt einer Stromlinie werden.

Auf solche Fälle werde ich im letzten Paragraphen aufmerksam machen.

Sind aber mehrere solche überstumpfe Grenzstellen vorhanden, so wird es im allgemeinen nicht mehr möglich sein, überall das Unendlichwerden der Geschwindigkeit durch Wahl der einen Zirkulationskonstanten zu verhüten; vielmehr wird das nur an einer Stelle möglich sein. Wir werden sehen (im Paragraphen V), daß es nur äußerst geringer, praktisch von

selbst nicht zu vermeidender Abrundungen bedarf, um an den übrigen Stellen zu verhindern, daß die Geschwindigkeiten über ein physikalisch zulässiges Maß steigen, und die durch sie erzeugte Druckverminderung auf die unzulässigen negativen Drucke führt. Dagegen werden größere Abrundungen nötig sein, um das an den kritischen Punkte auftretende sehr große Geschwindigkeitsgefälle möglichst unschädlich zu machen und damit die Wirkungen der sonst beträchtlichen und nicht mehr zu vernachlässigender inneren Reibung der Flüssigkeit auf ein geringeres Maß zu reduzieren.

Natürlich können in einzelnen speziellen Fällen, z. B. Symmetriefällen, auch ausnahmsweise gleichzeitig mehrere derartig singuläre Randstellen durch geeignete Wahl der einen Konstanten c unschädlich gemacht werden.

III. Die kreisförmig gewölbte Schale.

Das Beispiel, das ich behandeln will, betrifft den Fall einer in die strömende Flüssigkeit versenkten, zylindrischen unendlich langen Schale, deren Querschnitt ein Kreisbogen vom Zentriwinkel 2α ist. Die Grenzkurve z soll also ein Kreisbogen vom Radius r sein, dessen Bogenmittelpunkt O im Punkte $z = 0$ liegen soll; der Bogen soll dort die x Achse berühren. Der Kreismittelpunkt heiße M. Alsdann haben die Endpunkte A und B des Bogens die Coordinaten:

$$A\colon x_1 = -r\cdot\sin\alpha \qquad B\colon x_2 = +r\cdot\sin\alpha$$
$$y_1 = -r\cdot(1-\cos\alpha) \qquad y_2 = -r\cdot(1-\cos\alpha)$$

also: $z_1 = -2r\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ $\quad z_2 = 2r\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

Die Abbildung auf die positive Halbebene t erfolgt durch Vermittlung von z' als $z = \frac{1}{z'}$, so daß die A und B entsprechenden Punkte in z' sind:

$$A'\colon z' = \frac{1}{2r}\left(i-\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right); \qquad B'\colon z' = \frac{1}{2r}\left(i+\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)$$

Dem Punkte $z = \infty$ entspricht $z' = 0$; $z = 0$ $z' = \infty$.

Dann hat man weiter die bekannte Christoffel-Schwarzsche Formel für die Abbildung geradlinig begrenzter Polygone anzuwenden und erhält hier:

$$\frac{dz'}{dt} = C\frac{(t-a)\,(t-b)}{t^2}$$

wo C, a, b reelle Konstante sind. Daraus folgt

$$z' = C\left[t-(a+b)\lg\text{nat}\,t - \frac{ab}{t}\right] + C'.$$

Es sollen sich entsprechen:

$$t = a \quad \text{und} \quad z' = \frac{1}{2r}\left(i + \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$t = b \qquad z' = \frac{1}{2r}\left(i - \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$t = i \qquad z' = 0.$$

Das liefert $b = -a$; $a = \operatorname{cotg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{4}\right) = \operatorname{cotg}\delta$, wenn abkürzend $45^0 - \frac{\alpha}{4} = \delta$ gesetzt wird, und schließlich:

$$z' = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{4r}\left[t\cdot\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{4}\right) + \frac{1}{t\cdot\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{4}\right)}\right] + \frac{i}{2r}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} 2\,\delta}{4r}\left[t\cdot\operatorname{tg}\delta + \frac{1}{t\cdot\operatorname{tg}\delta}\right] + \frac{i}{2r}.$$

Fügen wir die Formel für W, in der ζ durch t ausgedrückt ist, hinzu, so kommt:

$$W = 2c_1\frac{t^2-1}{t^2+1} + 4c_2\frac{t}{t^2+1} + 2c\,\text{arctg}\,t.$$

Diese Formeln enthalten die gesuchte allgemeine Strömung.

Für manche Rechnungen empfiehlt es sich, statt t eine neue Hilfsvariable ψ durch $t = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ einzuführen. Dadurch wird

$$W = -2c_1 \cos\psi + 2c_2 \sin\psi + c \cdot \psi$$

$$z' = \frac{\operatorname{tg} 2\delta}{4r}\left[\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} \cdot \operatorname{tg}\delta + \operatorname{cotg}\frac{\psi}{2} \cdot \operatorname{cotg}\delta\right] + \frac{i}{2r}; \quad z = \frac{1}{z'}.$$

Die Strömungsgeschwindigkeit im Punkte z ergibt sich durch

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\frac{dW}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{\frac{dW}{dt}}{\frac{dz'}{dt}} \cdot (-z'^2) = \frac{\frac{dW}{d\psi}}{\frac{dz}{d\psi}} = \frac{\frac{dW}{d\psi}}{\frac{dz'}{d\psi}} \cdot (-z'^2).$$

Es ist

$$\frac{dW}{dt} = 8c_1 \frac{t}{(1+t^2)^2} + 4c_2 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{2c}{1+t^2}; \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{\operatorname{tg} 2\delta}{4r}\left[\operatorname{tg}\delta - \frac{1}{t^2 \operatorname{tg}\delta}\right]$$

$$\frac{dW}{d\psi} = 2c_1 \sin\psi + 2c_2 \cos\psi + c \quad ; \quad \frac{dz'}{d\psi} = \frac{\operatorname{tg} 2\delta}{8r}\left[\frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos^2\frac{\psi}{2}} - \frac{\operatorname{cotg}\delta}{\sin^2\frac{\psi}{2}}\right]$$

Die aufgestellten Formeln verwenden wir zunächst, um c_1 und c_2 durch die gegebene Strömungsgeschwindigkeit $V_1 - iV_2 = V(\cos\beta - i\sin\beta)$ im Unendlichen, also für $t = i$), oder $\psi = i \cdot \infty$, auszudrücken. Es wird für $t = i + \varepsilon$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\varepsilon^2}[-2ic_1 - 2c_2 - c \cdot i\varepsilon + \text{Glieder in } \varepsilon^2 \ldots]$$

$$z = \frac{2r\cos 2\delta}{\varepsilon}[1 + i \cdot \varepsilon \cos^2\delta + \text{Glieder in } \varepsilon^2 \ldots]$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2r\cos 2\delta}{\varepsilon^2}[1 + \text{Glieder in } \varepsilon^2 \ldots].$$

Demnach schließlich

$$\frac{dW}{dz} = \frac{ic_1 + c_2 + \frac{ci}{2}\varepsilon}{r\cos 2\delta} + \text{Glieder in } \varepsilon^2 \ldots$$

$$= \frac{ic_1 + c_2}{r\cos 2\delta} + \frac{ci}{z} + \text{Glieder in } \frac{1}{z^2} \ldots$$

Da dies für $z = \infty$ $V_1 - iV_2$ geben soll, erhalten wir

$$c_1 = -V_2 \cdot r\cos 2\delta = -V \cdot r\cos 2\delta \sin\beta$$
$$c_2 = +V_1 \cdot r\cos 2\delta = +V \cdot r\cos 2\delta \cos\beta.$$

Wir bemerken noch, daß bei der Entwicklung von $\frac{dW}{dz}$ im Unendlichen nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ der Koeffizient von $\frac{1}{z}$ gleich $c \cdot i$ ist.

Die Konstante c bleibt, wie vorausgesehen, beliebig zur Verfügung.

Die Einführung der erhaltenen Werte für c_1 und c_2 in W ergibt, unter Fortlassung einer gleichgiltigen additiven Konstante

$$W = 4rV\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin\beta + t\cos\beta}{1+t^2} + 2c\,\operatorname{arctg} t$$

$$= 2rV\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin(\psi+\beta) + c\cdot\psi.$$

Nun berechnen wir weiter die Geschwindigkeiten $\frac{dW}{dz}$ in der Nähe der Kanten A und B, d. h. für

$$t = -a + \varepsilon = -\operatorname{cotg}\delta + \varepsilon; \quad \psi = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) + k$$

und $t = +a + \varepsilon = +\operatorname{cotg}\delta + \varepsilon$: $\quad \psi = +\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) + k.$

Für die Umgebung von Punkt B folgt:

$$\frac{dW}{d\psi} = 2rV\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\psi+\beta) + c$$

$$= -2rV\sin\frac{\alpha}{2}\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) + k\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) - \frac{k^2}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\ldots\right] + c$$

$$z' = \frac{i+\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{2r} + \frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{4r}\left[\frac{k^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{k^3\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^3\frac{\alpha}{2}}\ldots\right]$$

$$z = r[\sin\alpha - i(1-\cos\alpha)] - r\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha - i\sin\alpha)\left[k^2 + k^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \ldots\right]$$

$$\frac{dz}{d\psi} = -r\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha - i\sin\alpha)\left[2k + 3k^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ldots\right]$$

Man erkennt, daß $\frac{dW}{dz}$ nur dann für $k = 0$, also im Punkte B, endlich bleibt, wenn das von k unabhängige Glied in $\frac{dW}{d\psi}$ verschwindet, also

$$-2rV\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)+c=0 \quad \text{ist.}$$

Daraus bestimmt sich, wie vorausgesehen, eindeutig c und die Zirkulation $2\pi c$.

Die Endformel für W lautet:

$$W = 4rV\sin\frac{\alpha}{2}\left[\frac{t\cos\beta+\sin\beta}{1+t^2}+\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cdot\operatorname{arctg} t\right]$$

oder

$$W = 2rV\sin\frac{\alpha}{2}\left[\sin(\psi+\beta)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cdot\psi\right].$$

Nochmals zum Punkte B zurückkehrend, führen wir die Bogenentfernung Δ des in der Hilfsvariabeln ψ um k von B verschiedenen Punktes ein und erhalten

$$-\frac{\Delta}{r}(\cos\alpha - i\sin\alpha)+\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{r^2}(-\sin\alpha - i\cos\alpha)+\ldots =$$

$$= -\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha - i\sin\alpha)\left[k^2+k^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\ldots\right]$$

Daraus

$$k=\sqrt{\frac{\Delta}{r}\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}-\frac{1}{2}\frac{\Delta}{r}+\text{Glieder in }\left(\frac{\Delta}{r}\right)^{\frac{3}{2}}\ldots$$

und endlich

$$\frac{dW}{dz}=V\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\left[1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{r}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}\left(3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\right)\right.$$

$$\left.+\text{Glieder in }\frac{\Delta}{r}\ldots\right]\cdot[\cos\alpha+i\sin\alpha].$$

Die letzte Klammer ist nur Richtungsfaktor.

Die Formel liefert speziell für Punkt B selbst ($\Delta = 0$) die endliche Geschwindigkeit $V\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$ in Richtung des Kreisbogens in B; sie stellt, wenn positiv, also für $\beta \lessgtr \frac{\pi-\alpha}{2}$ ein Abströmen von der Schale, wenn negativ, ein Anströmen an sie dar. V ist dabei positiv gedacht. Die Formel erlaubt auch, die Änderung der Geschwindigkeit (das Gefälle) in der Nähe von B zu verfolgen; für Punkte der oberen Schalengrenze ist $\sqrt{\frac{\Delta}{r}}$ negativ, für Punkte der unteren Schalengrenze $\sqrt{\frac{\Delta}{r}}$ positiv in Rechnung zu setzen.

Die Entwicklung der Geschwindigkeit in einem um den Bogen Δ von der Kante A entfernt liegenden Schalenpunkte ergibt durch analoge Rechnung:

$$\frac{dW}{dz} = -V(\cos\alpha - i\sin\alpha)\left[\frac{A}{\sqrt{\frac{\Delta}{r}}} + B + (C + iD)\sqrt{\frac{\Delta}{r}} + \text{Glieder in } \frac{\Delta}{r} + \ldots\right]$$

Dabei ist

$$A = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta\cdot\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

$$B = -\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta + 3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta\right)$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}\left(\sin\alpha\cos\beta - \frac{5}{4}\cos\alpha\sin\beta\right)$$

$$D = -2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta\cdot\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Für Punkte der oberen Schalengrenze ist wieder $\sqrt{\frac{A}{r}}$ negativ, für Punkte der unteren Schalengrenze $\sqrt{\frac{A}{r}}$ positiv zu nehmen. Der absolute Betrag der Geschwindigkeit ist

$$V\left[\frac{A}{\sqrt{\frac{A}{r}}}+B+C\sqrt{\frac{A}{r}}\right].$$

Die Formeln zeigen, in welcher Art die Strömungsgeschwindigkeit im Punkte A unendlich wird; sie geben natürlich für alle Nachbarpunkte von A, nicht nur die auf der Schale gelegenen, also auch für komplexe A die Geschwindigkeit richtig, und, wenn für das komplexe A sein absoluter Betrag, die Entfernung des betrachteten Punktes von A, gesetzt wird, den Betrag der Geschwindigkeit wenigstens im ersten Gliede richtig.

Weiter seien noch die Geschwindigkeiten für die Mittelpunkte O_+ und O_- des oberen und unteren Schalenbogens berechnet, sowie für ihre Umgebung. Sie sind für $t=\varepsilon$ (bei O_+, $t=o$ in O_+), also kleine z:

$$4\,V\cos^3\delta\cdot\cos(\delta-\beta)\cdot\left[1+\frac{z}{r}\left(i-\frac{\sin\beta\cdot\operatorname{tg}2\delta}{4\cos(\delta-\beta)\cdot\sin\delta}\right)\cdots\right]$$

für $t=T$ sehr groß (bei O_-, $t=\infty$ in O_-), also auch kleine z:

$$4\,V\sin^3\delta\cdot\sin(\delta-\beta)\cdot\left[1+\frac{z}{r}\left(i+\frac{\sin\beta\cdot\operatorname{tg}2\delta}{4\sin(\delta-\beta)\cdot\cos\delta}\right)\cdots\right].$$

Zum Schlusse bestimmen wir noch den zweiten (anschaulicher ersten) Spaltungspunkt der Stromlinie, die die Schale umfließt; der eine liegt ja im Punkte B. Da im gesuchten Punkte als einem Stagnationspunkte die Geschwindigkeit $\frac{dW}{dz}=o$ ist, ergibt sich sofort für das zugehörige ψ als Bestimmungsgleichung:

$$\cos(\psi+\beta)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)=0.$$

Die eine Lösung derselben $\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$ führt auf B, der Punkt ist schon genauer untersucht, und natürlich kein wirklicher Stagnationspunkt, da auch der Nenner $\frac{dz}{d\psi}$ verschwindet. Die andere Lösung

$$\psi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - 2\beta$$

ist die gesuchte. Wird die Lage eines Schalenpunktes durch den Zentriwinkel φ dargestellt, den der Kreisradius nach ihm mit dem Kreisradius MO nach der Bogenmitte bildet, so ergibt sich die Lage des Spaltungspunktes aus

$$\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{2}\cdot \operatorname{tg} 2\delta \left[\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}(\delta-\beta)} + \frac{\operatorname{tg}(\delta-\beta)}{\operatorname{tg}\delta}\right].$$

Er liegt auf der unteren, resp. oberen Schalenseite, je nachdem β zwischen $-\frac{\pi+\alpha}{2}$ und $\frac{\pi-\alpha}{2}$ liegt, oder nicht.

IV. Der Auftrieb der Schale.

Der Gesamtauftrieb, den die Schale für die Breite b erfährt, berechnet sich aus der Zirkulation

$$2\pi c = 4\pi r V \sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$$

als

$$4\pi\varrho V^2 \cdot r b \sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right);$$

wo ϱ die Dichte der strömenden Flüssigkeit, etwa der Luft, bedeutet. Ist z. B. als Einheitslänge 1 m, als Zeiteinheit 1 sec gewählt, also r und b in m, V in $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ gemessen, so ist für Luft

$$\varrho = \frac{1{,}293\,(1-\alpha t)\,\frac{p \quad \text{mm Hg}}{760 \text{ mm Hg}}}{\text{m}^3 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{sec}^2}{\text{m}}} \cdot \text{Gewichtskilogramm einzusetzen,}$$

und wird dann der Auftrieb in Gewichtskilogramm erhalten. Hierbei ist für einen Augenblick unter t die Temperatur in Celsiusgraden, unter $\alpha = \frac{1}{273}$ der Ausdehnungskoeffizient der Luft, unter p der Luftdruck in Millimetern Quecksilber verstanden.

Die Richtung des Auftriebs ist senkrecht zur Strömungsrichtung, und zwar wird im Falle, daß die oben gegebene Formel einen positiven Zahlenwert liefert, die Auftriebsrichtung aus der Strömungsrichtung durch Drehung um 90^0 im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers erhalten; im Falle eines negativen Zahlenwertes ist die wirkliche Auftriebsrichtung natürlich die umgekehrte.

Die Angriffslinie des Auftriebs scheint zunächst durch den Kreismittelpunkt M des Schalenbogens gehen zu müssen; wir werden aber sogleich sehen, daß dies ein unrichtiger Schluß wäre.

Den Beweis für die obigen Größen- und Richtungsangaben gebe ich rekapitulierend (wie schon 1902 für den allgemeinen Fall eines beliebigen Zylinders abgeleitet wurde) aus dem Prinzipe der Erhaltung der Energie in der folgenden Art:

Die Geschwindigkeit im Unendlichen wird durch

$$V_1 + i V_2 - \frac{c\,i\,x - c\,y}{x^2 + y^2} +$$

Glieder höherer Ordnung dargestellt; die Energie des Volumelements $d\tau$ also durch

$$\frac{\varrho}{2}\left[\left(V_1 + \frac{c\,y}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(V_2 - \frac{c\,x}{x^2+y^2}\right)^2\right] d\tau.$$

Eine Schicht von der Dicke Δx und der Breite b, zwischen dem großen positiven x und $x + \Delta x$ gelegen, enthält demnach den Energiebetrag

$$b\,\Delta x \frac{\varrho}{2} \int dy \left[V^2 + \frac{2\,c\,y\,V\cos\beta}{x^2+y^2} - \frac{2\,c\,x\,V\sin\beta}{x^2+y^2}\right] d\tau,$$

also gegenüber dem Normalbetrag an Energie einen Fehlbetrag von

$$b\,\Delta x \frac{\varrho}{2} \cdot 2\,c\,V\sin\beta \left[\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right]_{x\,\text{positiv}\ y=-\infty}^{y=+\infty} = b \cdot \Delta x \cdot \pi\,\varrho\,c\,V\sin\beta.$$

Für eine Schicht auf der Seite der negativen x ist ebenso ein Überschuß von Energie vom gleichen Betrage in Rechnung zu setzen.

Eine Verschiebung der Schale um Δx von links nach rechts erfordert, wenn die Komponente des Gesamtauftriebs in der $+x$ Richtung X ist, eine Arbeitsleistung der Flüssigkeit vom Betrage $X \cdot \Delta x$. Der Energiebesitz der Flüssigkeit hat aber, da der Vorgang als Ausschaltung einer Schicht Δx im positiven unendlichen x, und Einschaltung einer gleichen Schicht im Negativ unendlichen x aufgefaßt werden kann (wenigstens was den Energievorrat der Flüssigkeit betrifft), um $2b\Delta x \cdot \pi \varrho c V \cdot \sin\beta$ zugenommen.

Es folgt daraus

$$X = -2\pi\varrho b \cdot c V \sin\beta = -4\pi\varrho V^2 \sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cdot\sin\beta\cdot b\cdot r.$$

Analog ist die Y Komponente des Gesamtauftriebs

$$Y = +2\pi\varrho c V\cos\beta\cdot b = 4\pi\varrho V^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cdot\cos\beta\cdot br.$$

Der analoge Beweis für den allgemeinen Zylinder wird noch etwas kürzer; der spezielle hier ist nur zugefügt, um die Sache für das vorliegende Problem noch etwas anschaulicher zu machen.

Der Gesamtauftrieb pro Flächeneinheit ist durchschnittlich demnach gleich

$$\pi\varrho V^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{arc}\frac{\alpha}{2}}$$

zu setzen. Er hängt, wie man sieht, bei gegebenem ϱ und V, also gegebener Strömung im Unendlichen, nicht von r, sondern nur von α und β, d. h. nicht von der Größe der Schale, sondern nur von ihrer Form und dem Luftstoßwinkel ab.

Man wird geneigt sein, den Auftrieb noch auf eine zweite Art, nämlich direkt durch Ausführung der Integration über die Drucke zu berechnen, die auf die Schale wirken; es ist

dies für die Schalenbreite $b = 1$ geschehen. Zunächst läßt sich sofort erkennen, daß trotz den unendlich großen Geschwindigkeiten bei A, und den deshalb dort auftretenden unendlich großen negativen Drucken, ja sogar unendlich groß werdenden Druckdifferenzen, d. h. Auftriebskräften auf die Flächeneinheit, doch der Beitrag der bei A gelegenen Flächenelemente der Schale, also der Umgebung von A, zum Auftrieb ein endlicher, ja sogar innerhalb einer nahen Umgebung berechnet ein kleiner sein wird. Denn für die Geschwindigkeiten im selben nahe bei A gelegenen Schalenpunkte, wenn er als oberer und als unterer Schalenpunkt aufgefaßt wird, ist dem Betrage nach anzusetzen:

$$V\left[+\frac{A}{\sqrt{\frac{\Delta}{r}}} - B + C\sqrt{\frac{\Delta}{r}}\right] \quad \text{resp.} \quad V\left[\frac{A}{\sqrt{\frac{\Delta}{r}}} + B + C\sqrt{\frac{\Delta}{r}}\right].$$

(Man erinnere sich, daß B gewöhnlich eine negative Zahl sein wird.)

Daher ist für das Element $d\Delta$ mit der Breite 1 als der nach oben wirkende Überdruck oder Auftrieb

$$\frac{1}{2}\varrho V^2\left[-\frac{4AB}{\sqrt{\frac{\Delta}{r}}}\right]$$

und als Beitrag der Zone von A bis zur Bogenentfernung Δ zum Auftrieb innerhalb derselben Genauigkeit

$$\frac{1}{2}\varrho V^2(-4AB)\int_0^{\Delta}\frac{d\Delta}{\sqrt{\frac{\Delta}{r}}} = \varrho V^2(-4AB)r\cdot\sqrt{\frac{\Delta}{r}}$$

in Rechnung zu setzen. Der Beitrag wirkt beiläufig natürlich senkrecht zur Bogentangente in A.

Im Beispiele des Paragraphen V wurden solche Berechnungen mehrfach, hauptsächlich zu Kontrollzwecken, ausgeführt.

Die wirkliche Berechnung der Differenz der auf die untere und die obere Schalenseite wirkenden Druckkräfte hat in

Komponenten nach der x und der y Richtung zerlegt zu geschehen. Die so erhaltenen Auftriebskomponenten stellen sich als die Integrale

$$-\frac{\varrho}{2}\int \operatorname{mod}\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 \cdot dy \quad \text{und} \quad -\frac{\varrho}{2}\int \operatorname{mod}\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 \cdot dx$$

dar, erstreckt über die Oberseite und die Unterseite der Schale. Dabei ist, wenn t als Integrationsvariable eingeführt wird, die Integration für die Oberseite reell von $t = -a$ über $t = 0$ bis $t = +a$ zu erstrecken, dann weiter für die Unterseite von $t = +a$ über $t = \infty$ bis $t = -a$ fortzusetzen.

Da $\dfrac{dW}{dz} = \dfrac{\dfrac{dW}{dt}}{\dfrac{dz'}{dt}} \cdot (-z'^2)$, ist, und $\dfrac{dW}{dt}$ sowie $\dfrac{dz'}{dt}$ auf dem

Integrationswege rein reell sind, so sind die Integrale

$$-\frac{\varrho}{2}\int \frac{\left(\dfrac{dW}{dt}\right)^2}{\left(\dfrac{dz'}{dt}\right)^2} \operatorname{mod}(z'^4)\, dy \quad \text{und} \quad -\frac{\varrho}{2}\int \frac{\left(\dfrac{dW}{dt}\right)^2}{\left(\dfrac{dz'}{dt}\right)^2} \operatorname{mod}(z'^4)\, dx.$$

Andrerseits ist, da $dz = \dfrac{dz'}{-z'^2}$,

$$dx + i\,dy = \frac{dz' \,[\text{Reeller Teil von } z'^2 - i \text{ Imaginärer Coeff in } z'^2]}{\operatorname{mod} z'^4},$$

oder, da ja bei unserer Integration dz' reell ist, und

$$z' = \frac{\operatorname{tg} 2\delta}{4r}\left(\operatorname{tg}\delta \cdot t + \frac{1}{t \cdot \operatorname{tg}\delta}\right) + \frac{i}{2r}, \qquad \text{endlich } t \text{ reell ist,}$$

erhalten wir:

$$\operatorname{mod} z'^4 \cdot dx = dz' \left\{\left[\frac{\operatorname{tg} 2\delta}{4r}\left(t \cdot \operatorname{tg}\delta + \frac{1}{t \operatorname{tg}\delta}\right)\right]^2 - \left(\frac{1}{2r}\right)^2\right\}$$

$$\operatorname{mod} z'^4 \cdot dy = dz' \left\{-2 \cdot \frac{1}{2r} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2\delta}{4r}\left(t \operatorname{tg}\delta + \frac{1}{t \cdot \operatorname{tg}\delta}\right)\right\}.$$

Die Einführung dieser Werte und der durch t ausgedrückten Werte von $\frac{dW}{dt}$ und $\frac{dz'}{dt}$ bringt die Integrale auf die Form rationaler Integrale in t. Führt man weiter noch als Integrationsvariable $\tau = \frac{t}{a} = t \cdot \operatorname{tg} \delta$ ein, so gehören wegen $z' = \frac{\operatorname{tg} 2\delta}{4r}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)$ zu demselben Schalenpunkte als oberem und unterem zwei reziprok reelle Werte τ. Die Integration für die obere Schale ist von $\tau = -1$ über $\tau = 0$ bis $\tau = +1$ zu erstrecken; die Integration für die untere Schale, eigentlich von $\tau = +1$ über $\tau = \infty$ bis $\tau = -1$ zu erstrecken, kann durch Einführung der reziproken Integrationsvariabeln $\frac{1}{\tau}$ auf denselben Weg und dieselben Grenzen, wie bei der oberen Schale zurückgeführt werden. Beide Integrale, für die obere und die untere Schalenseite, lassen sich nun zusammenfassen; dabei entsprechen demselben Werte der Integrationsvariabeln gerade die zwei Punkte desselben Schalenpunktes als oberer und unterer aufgefaßt. Mit anderen Worten, die Integration summiert in dieser Form direkt die Überdrucke unten gegen oben oder Auftriebe an den verschiedenen Schalenpunkten. Dadurch fällt die logarithmische Unendlichkeit bei A von selbst heraus, ganz wie vorhin, als nur die Umgebung von A betrachtet wurde.

Auch die Integrationen über die linke und die rechte Schalenhälfte lassen sich zusammenfassen, so daß die Auftriebskomponenten schließlich durch Integration über zwei rationale Funktionen von τ, $R_x(\tau)$ und $R_y(\tau)$ als

$$\frac{\varrho}{2} V^2 \int_{\tau=0}^{\tau=1} R_x(\tau)\, d\tau \quad \text{und} \quad \frac{\varrho}{2} V^2 \int_{\tau=0}^{\tau=1} R_y(\tau)\, d\tau$$

erhalten werden. Der Integrationsweg ist reell. Die Ausführung der natürlich prinzipiell ganz einfachen Integrationen

ist ziemlich umständlich, das Resultat einfach. Es kommt nämlich für die x Komponente des Auftriebs:

$$-4\pi\varrho V^2 \cdot r \sin\frac{\alpha}{2}\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cdot\sin\beta - \cos^3\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta\cos\alpha\right]$$

und für die y Komponente des Auftriebs:

$$+4\pi\varrho V^2 \cdot r \sin\frac{\alpha}{2}\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cdot\cos\beta + \cos^3\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta\cdot\sin\alpha\right].$$

Das heißt: Es muß zu dem so berechneten Auftrieb noch ein weiterer Auftrieb mit der x Komponente

$$-4\pi\varrho V^2 \cdot r \sin\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta\cdot\cos\alpha$$

und mit der y Komponente

$$-4\pi\varrho V^2 \cdot r \sin\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta\cdot\sin\alpha$$

hinzukommen, damit der vorher auf Grund des Satzes von der lebendigen Kraft berechnete Auftrieb sich wirklich ergibt. Diese Zusatzkraft vom Betrage

$$4\pi\varrho V^2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta$$

besitzt eine mit der Richtung der Endtangente des Schalenbogens in A, und zwar der Verlängerungsrichtung vom Bogen fort, übereinstimmende Richtung. Für die Flächeneinheit gibt sie durchschnittlich den Betrag

$$\pi\varrho V^2 \cos^3\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{arc}\frac{\alpha}{2}}.$$

In der Tat, das Vorhandensein dieser Kraft kann uns nicht überraschen. Denn obwohl die Kante A der Flüssigkeit nur eine Schneide bietet, kann doch wohl wegen der unendlichen Geschwindigkeiten, also des unendlichen negativen Druckes in A eine Saugwirkung der Kante in ihrer eigenen

Richtung von endlichem Betrage zu Stande kommen. Bisher haben wir ja bloß die senkrecht zu den Linien- (oder Flächen-) elementen der Schale wirkenden Druckkräfte bis zur Kante berechnet, nicht aber die an der Kante in der Bogentangentenrichtung wirkende Saugkraft. Diese Erklärung wird durch die folgende Überlegung bestätigt und veranschaulicht.

Die Stromlinien in der Nähe von A sind angenähert Parabeln; ihr Brennpunkt ist A, ihre Achsenrichtung die der Bogentangente in A. Ihre Gleichung in Polarkoordinaten läßt sich, wenn ε ihr Parameter ist und Δ wie früher die Entfernung eines diesmal freilich nicht auf der Schale liegenden Punktes von A ist, schreiben als

$$\Delta = \frac{\varepsilon}{2\cos^2\frac{\vartheta}{2}}.$$

Sind p und q die auf Brennpunkt und Achse bezogenen rechtwinkligen Koordinaten eines Parabelpunktes, also

$$p = \Delta\cos\vartheta; \quad q = \Delta\sin\vartheta = \varepsilon\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}$$

so ist, da hier die Geschwindigkeit genau genug als

$$\frac{A}{\sqrt{\frac{\Delta}{r}}}\cdot V$$

angenommen werden kann, die entlang der Stromlinie sich ergebende Gesamtkomponente der Saugwirkung in der Richtung der Parabelachse, d. h. Bogentangente:

$$\frac{\varrho}{2}V^2\cdot\int\frac{A^2}{\frac{\Delta}{r}}\,dq = \frac{\varrho}{2}V^2\int\frac{A^2}{\frac{\Delta}{r}}\,d\Delta\sin\varphi = \frac{\varrho}{2}V^2A^2r\int_{\vartheta=+\pi}^{\vartheta=+\pi}\frac{\varepsilon\cdot d\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}}{\varepsilon\cdot\frac{1}{2\cos^2\frac{\vartheta}{2}}}$$

$$= \pi\varrho V^2A^2r.$$

Das ist, wenn für A sein Wert eingesetzt wird, wirklich

$$4\pi\varrho V^2\cdot r\sin\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta;$$

also jene oben gefundene fehlende Saugkraft. Der gefundene Wert hängt von ε nicht ab, behält demnach seinen Betrag, wenn die betrachtete Stromlinie nach $\varepsilon = 0$, d. h. in die Grenzkurve bei A, konvergiert, wobei dann auch der Umstand, daß wir nur die Entwicklung von V bis zum ersten Gliede benutzten, unschädlich wird.

Bemerkt sei ausdrücklich, daß, um diese Übereinstimmung zu erzielen, eben die Rechnung mit den nach der Grenzstromlinie $\varepsilon = 0$ konvergierenden Stromlinien durchgeführt werden muß; nicht etwa mit beliebigen Kurven, die nach der Grenzkurve konvergieren. Den Grund dazu werden wir im nächsten Paragraphen andeuten. Ebenso soll die Berechnung der Angriffslinie des Gesamtauftriebs dort bei Gelegenheit der Durchführung eines Beispiels auch für den allgemeinen Fall angegeben werden. Es genügt hier die Bemerkung, daß der erst berechnete Teilauftrieb durch den Kreismittelpunkt M, die als zweiter Teil berechnete Saugkraft durch Punkt A geht, und so die Resultierende leicht gefunden werden kann.

V. Ein Zahlenbeispiel. Die Abrundung der Vorderkante.

Es soll nun die Rechnung für ein Beispiel durchgeführt werden. Wir wählen im Anschluß an eine von Lilienthal experimentell untersuchte Form einen Kreisbogen, dessen Pfeil $^1/_{12}$ der Sehne ist. Der Luftstoßwinkel β soll gleich $\frac{\alpha}{2}$ gewählt sein, also die Richtung der Strömung im Unendlichen die der Sehne AO des Halbbogens, die zum Zentriwinkel α gehört. Dann wird

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{6}; \quad \frac{\alpha}{2} = \beta = 9^0\,27',74; \quad \alpha = 18^0\,55',_{48}.$$

Der gesamte Winkel der Schale ist $2\alpha = 37^0\,50',_{96}$.

Zunächst liegt der Spaltungspunkt auf der unteren Schalenseite nahe bei A, so daß der von MO gerechnete Zentriwinkel $\varphi = -17^0\,50',_0$ ist. Es sind die Geschwindigkeiten für die

Punkte der oberen und der unteren Schalenseite mit den Zentriwinkeln $-18^3/_4{}^0$, $-18^1/_2{}^0$, -18^0, -17^0, -15^0; dann um je 3^0 fortschreitend bis $+15^0$, endlich für $+17^0$, $+18^0$, $+18^1/_2{}^0$, $+18^3/_4{}^0$ und für Randpunkt B berechnet worden. Dann weiter deren Quadrate, denen die Druckverminderung proportional ist, endlich die Differenz dieser Druckverminderungen, der die Auftriebskraft pro Flächeneinheit proportional ist. Die nachstehende Tabelle gibt die Übersicht. Eine negative Zahl für eine Geschwindigkeit bedeutet ein Rückströmen entlang der Schale.

Tabelle 1.

	Zentriwinkel	Betrag der Geschwindigkeit		Geschwindigkeitsquadrate		Deren Differenz prop. dem Auftrieb pro Flächeneinheit
		obere Schale	untere Schale	obere Schale	untere Schale	
A	$-18^0\,55{,}48'$	$+\infty$	$-\infty$	∞	∞	∞
	$-18^3/_4{}^0$	$+3{,}445\,V$	$-1{,}365\,V$	$11{,}867\,V^2$	$1{,}862\,V^2$	$10{,}005\,V^2$
	$-18^1/_2{}^0$	$+2{,}618$	$-0{,}537$	$6{,}853$	$0{,}288$	$6{,}565$
	-18^0	$+2{,}159$	$-0{,}075$	$4{,}662$	$0{,}006$	$4{,}656$
	$-17^0\,50{,}0'$		Null		Null	
	-17^0	$+1{,}883$	$+0{,}206$	$3{,}547$	$0{,}042$	$3{,}505$
	-15^0	$+1{,}725$	$+0{,}376$	$2{,}977$	$0{,}141$	$2{,}836$
	-12^0	$+1{,}646$	$+0{,}458$	$2{,}710$	$0{,}210$	$2{,}500$
	-9^0	$+1{,}612$	$+0{,}495$	$2{,}599$	$0{,}244$	$2{,}355$
	-6^0	$+1{,}586$	$+0{,}517$	$2{,}516$	$0{,}268$	$2{,}248$
	-3^0	$+1{,}559$	$+0{,}536$	$2{,}430$	$0{,}287$	$2{,}143$
O	0^0	$+1{,}526$	$+0{,}553$	$2{,}329$	$0{,}306$	$2{,}023$
	$+3^0$	$+1{,}487$	$+0{,}573$	$2{,}211$	$0{,}328$	$1{,}883$
	$+6^0$	$+1{,}439$	$+0{,}596$	$2{,}070$	$0{,}355$	$1{,}715$
	$+9^0$	$+1{,}380$	$+0{,}624$	$1{,}903$	$0{,}390$	$1{,}513$
	$+12^0$	$+1{,}306$	$+0{,}662$	$1{,}705$	$0{,}439$	$1{,}266$
	$+15^0$	$+1{,}210$	$+0{,}717$	$1{,}464$	$0{,}514$	$0{,}950$
	$+17^0$	$+1{,}123$	$+0{,}774$	$1{,}262$	$0{,}599$	$0{,}663$
	$+18^0$	$+1{,}062$	$+0{,}819$	$1{,}129$	$0{,}671$	$0{,}458$
	$+18^1/_2{}^0$	$+1{,}020$	$+0{,}854$	$1{,}041$	$0{,}729$	$0{,}325$
	$+18^3/_4{}^0$	$+0{,}988$	$+0{,}881$	$0{,}976$	$0{,}777$	$0{,}199$
B	$+18^0\,55{,}48'$	$+0{,}933$	$+0{,}933$	$0{,}871$	$0{,}871$	$0{,}000$

Eine grobe Abschätzung gibt für den Betrag der durchschnittlichen Differenz der Geschwindigkeitsquadrate aus diesen Zahlen etwa $2{,}1 \cdot V^2$, demnach wenn Luft von 0^0 Celsius, 760 mm Druck und $V = 10$ m/sec als die strömende Flüssigkeit angenommen wird, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}293}{9{,}81} \cdot 2{,}1 \cdot 100$ kg als Auftrieb pro Flächeneinheit. Das gäbe etwa 13,8 kg für den Auftrieb pro Flächeneinheit, $13{,}8 \cdot r \cdot \operatorname{arc} 2\alpha = 9{,}1 \cdot r$ kg Auftrieb für die Schale pro Breite 1 m. Die Richtung des so gefundenen Auftrieb erhält man aus den Zahlen durch rohe Abschätzung also etwa 5^0 gegen die y Achse nach links oben gedreht. Die Angriffslinie der Kraft geht natürlich durch den Kreismittelpunkt M.

Die genaue Rechnung auf Grund der aufgestellten Formeln gibt für den ersten Teil des Auftriebes — kurz im Folgenden Druckauftrieb genannt — und dieser ist es ja, der eben roh abgeschätzt wurde

	für die Flächeneinheit	für die Schale pro Breite 1 m
als x Komponente	$-1{,}1863$ kg	$-0{,}7837 \cdot r$ kg
als y Komponente	$+13{,}5336$ „	$+8{,}9402 \cdot r$ „
als Betrag	13,5855 „	$+8{,}9745 \cdot r$ „
als Richtungswinkel γ gegen die y Achse	$\gamma = -5^0\,0',6$	$-5^0\,0',6$.

In Komponenten in der Strömungsrichtung und senkrecht zu ihr zerlegt, ergibt dieser, von der Saugwirkung in A absehende Druckauftrieb:

	für die Flächeneinheit	für die Schale pro Breite 1 m
in Strömungsrichtung	$+\ 1{,}0547$ kg	$+\ 0{,}6967 \cdot r$ kg
senkrecht dazu	$+13{,}5445$ „	$+8{,}9474 \cdot r$ kg.

Die grobe Abschätzung hat demnach ein ganz gutes Resultat ergeben.

Der Gesamtauftrieb mit Einschluß der Saugkraft an der Kante berechnet sich

	für die Flächeneinheit	für die Schale pro Breite 1 m
als x Komponente	$-2{,}1978$ kg	$-1{,}4518 \cdot r$ kg
als y Komponente	$+13{,}1867$ „	$+8{,}7111 \cdot r$ „
als Gesamtbetrag	13,3685 „	$8{,}8311 \cdot r$ „

Die in A ansaugend wirkende Kraft als Differenz der beiden berechneten, besitzt die Größe

	für die Flächeneinheit	für die Schale pro Breite 1 m
als x Komponente	$-1{,}0114$ kg	$-0{,}6681\, r$ kg
als y Komponente	$-0{,}3468$ „	$-0{,}2291\, r$ „
als Betrag	$1{,}0692$ „	$0{,}7063\, r$ „
als Richtungswinkel gegen die x Achse	$18^0\,55',6$ (statt $18^0\,55',48$)	$18^0\,55',6$.

Die Richtung der Gesamtkraft ist senkrecht zur Strömungsrichtung, die Lage ihrer Angriffslinie durch den Schnittpunkt der Tangente in A mit der unter Winkel γ gegen die y Achse durch den Kreismittelpunkt M gezogenen Geraden bestimmt. Dieser Punkt hat allgemein die Koordinaten:

$$x = -\frac{\sin\gamma}{\cos(\alpha-\gamma)}\cdot r; \quad y = \left(-1+\frac{\cos\gamma}{\cos(\alpha-\gamma)}\right) r.$$

Die Zahlenrechnung liefert hier

$$x = -0{,}0900\, r; \quad y = +0{,}0263\, r.$$

Die Schnittpunkte der Angriffslinie mit den Koordinatenachsen sind $x_1 = -0{,}0856\, r$; $y_2 = -0{,}5135\, r$. Ihr Schnittpunkt mit dem Schalenbogen besitzt die Abszisse $x_3 = -0{,}0852\, r$, also den Zentriwinkel $\varphi = -4^0\,53'$; er ist etwa um $^1/_4$ der Bogenlänge der Halbschale OA von O entfernt, statt um $^1/_2$ der Bogenlänge, was einer Angriffslinie durch M entspräche. Es ist also hier der Ballast, der den Auftrieb äquilibrieren soll, in der Entfernung von $^3/_8$ der gesamten Bogenlänge AB von der vorderen Kante anzubringen. Bei größerem Luftstoßwinkel β würde der Ballast immer mehr nach vorn rücken müssen, da die Saugkraft mit $\sin^2\beta$, der Gesamtauftrieb nur mit $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$ wächst. Doch erfolgt die Wanderung nach vorn nicht so rasch, wie wenn die Angriffslinie durch den Kreismittelpunkt M ginge. Es geht vielmehr ja die Angriffslinie oberhalb M vorbei.

Wir kommen zur Untersuchung der Verteilung der Geschwindigkeiten und Drucke, sowie des Geschwindigkeits- und Druckgefälles in der Umgebung des singulären Punktes A. Bei Voraussetzung von Atmosphärendruck für die ruhende Luft herrscht negativer Druck nur innerhalb eines Kreises um A vom Radius Δ_0, der durch

$$\frac{\varrho}{2} V^2 \left(\frac{A^2}{\frac{\Delta_0}{r}} + \frac{2AB}{\sqrt{\frac{\Delta_0}{r}}} + B^2 + 2AC + \dots \right) = 10330 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

bestimmt ist. Dabei ist der Sicherheit halber $\sqrt{\frac{\Delta_0}{r}}$ negativ (oder B mit seinem positiven Zahlenwerte) zu nehmen; A, B, C sind die auf Seite 16 gegebenen Ausdrücke.

Unter Beschränkung auf das erste Glied erhalten wir

$$\frac{\Delta_0}{r} = \varrho V^2 \cdot \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta}{10330};$$

für $V = 10$ m/sec. im Zahlenbeispiel $\Delta_0 = 0{,}000\ 010\ 88\, r$.

Durch genauere Rechnung unter Berücksichtigung der weiteren Terme erhalten wir

$$\Delta_0 = 0{,}000\ 011\ 47\, r.$$

Ist also die Bogensehne gleich 2 m angenommen, somit r aus $\left(2r - \frac{1}{6}\right)\frac{1}{6} = 1$ als $r = 3\frac{1}{12}$ m $= 3{,}083$ m berechnet, so erhalten wir

$$\Delta_0 = 0{,}035\ 36 \text{ mm}.$$

Die Maximalgeschwindigkeit außerhalb des Kreises Δ_0, genau genug durch

$$V\left(\frac{A}{\sqrt{\frac{\Delta_0}{r}}} + B \right)$$

dargestellt, ergibt sich dabei als

$$(385{,}63 + 10{,}41) \text{ m/sec} = 396{,}04 \text{ m/sec}.$$

Das maximale Geschwindigkeitsgefälle außerhalb des Kreises Δ_0, genau genug als $V\frac{A}{2r\left(\sqrt{\frac{\Delta_0}{r}}\right)^3}$ angenommen, wird hier $10^6.5{,}452$ m/sec pro m, oder $10^3.5{,}452$ m/sec für einen mm. Freilich gilt diese Zahl nur für das Gefälle in unmittelbarster Nähe des Kreises Δ_0, und behält diesen Betrag wirklich nur $^1/_{100}$ mm weit bei. Jedenfalls konstatieren wir, daß die auftretenden Geschwindigkeitsgefälle auch außerhalb des Kreises Δ_0 enorme Beträge erreichen.

Wollen wir nur die negativen, physikalisch unzulässigen Drucke vermeiden, und gleichzeitig das Strömungsbild, und damit die Druckverhältnisse in der Nähe des gefährlichen Punktes A möglichst wenig ändern, damit die früheren Formeln noch verwendbar bleiben, so werden wir die Kante parabolisch, nämlich so wie die Strömungslinien bei A verlaufen, abrunden. (s. Fig. 1). Also durch eine Parabel vom Parameter $\varepsilon = 2\Delta_0$, A als Brennpunkt, die Bogentangente als Achse. Der Zwischenraum zwischen dieser und dem innerhalb gelegenen Kreisbogen ist beiderseits mit Material auszufüllen. Wir haben dabei die Parabel so weit zu erstrecken, daß in der wegen der hohen Geschwindigkeiten und Druckverluste für Änderungen sehr empfindlichen Nähe von A wirklich die Strömungslinie verfolgt, also die Strömung durchaus nicht gestört wird. Die Saugwirkung bei A bleibt dann gemäß der Betrachtung in Paragraph IV erhalten. Sind wir aus der gefährlichen Nähe von A herausgekommen, so können wir die Parabel — die ja zudem weiterhin gar nicht mehr die genaue Stromlinie ist, vielmehr entfernt sich letztere weniger vom Kreisbogen — allmählig verlassen, und die neue Grenzlinie sich wieder an den Kreisbogen anschmiegen lassen, nach einer weiteren Strecke sogar durch den Kreisbogen ersetzen. Diese kleine Änderung ist dann sicherlich für die Verteilung von Geschwindigkeiten und Drucken von ganz unwesentlicher Bedeutung; sie würde bedenklich nur nahe am Punkte A. Fraglich freilich bleibt, wie weit die Parabel wirklich genau zu verfolgen ist, und wie groß

weiterhin die Maximaldicke der Anschwellung zu wählen ist. Mir scheint vollste Sicherheit gegeben zu sein, wenn man die Parabel exakt bis zur Ordinate gleich dem doppelten Parameter $= 4\,\Delta_0$, also zur Abszisse (vom Scheitel) $4\,\Delta_0$ verfolgt, und dann allmählig ablenkend die Ausgleichungskurve noch bis zu einer doppelt so großen Ordinate $= 8\,\Delta_0$ als Maximalhöhe ansteigen läßt (s. Fig. 2). Die größte Dicke der Anschwellung betrüge dann $16\,\Delta_0$. Praktisch aber glaube ich, daß es vollständig genügt, die Parabel bis zur Ordinate des Brennpunktes A, deren Größe $2\,\Delta_0$ ist, also bis zur Abszisse (vom Scheitel) Δ_0 genau zu verfolgen, und dann durch allmähliges Ablenken etwa als Maximalordinate, $4\,\Delta_0$, erreichend (vielleicht bei der Abszisse $8—10\,\Delta_0$) die Berührung und das Verschmelzen der Ausgleichungskurve mit dem Kreisbogen etwa bei der Abszisse $25—30\,\Delta_0$ erfolgen zu lassen. In diesem, durch die Figur dargestellten Falle wäre die Maximaldicke der Anschwellung $8\,\Delta_0$. Mehr als eine Schätzung stellen freilich diese Dickenannahmen $16\,\Delta_0$ und $8\,\Delta_0$ nicht vor; doch möchten sie wohl praktisch einen natürlichen Spielraum charakterisieren.

Für doppelte Geschwindigkeit, $V = 20$ m/sec würde natürlich Δ_0 zu vervierfachen sein.

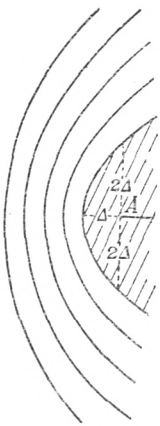

Fig. 1.

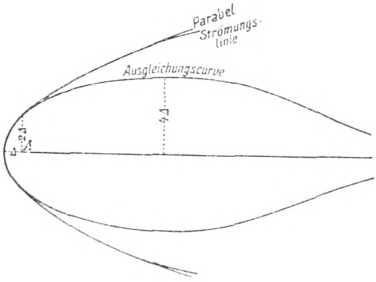

Fig. 2.

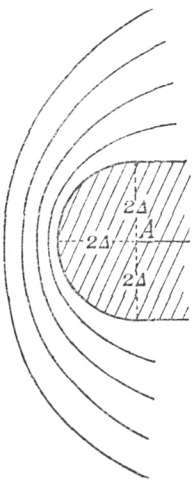

Fig. 3.

Wir setzten die Abstumpfung, um die Saugwirkung nach Verfestigung der neuen Grenze gemäß Paragraph IV berechnen zu können, parabolisch in Stromlinienform voraus. Ganz anders wird dem Anschein nach die Sache, wenn wir die Form der Abrundung anders, z. B. als Halbkreis um A mit den Tangenten in seinen Endpunkten parallel zur Bogentangente voraussetzen. In diesem Falle werden (s. Fig. 3) die Stromlinien, die ja eigentlich parabolisch verlaufen, durch den um das Doppelte zu weit ausspringenden Kreis (verglichen mit der Parabel von gleicher Ordinate in A) vorn zusammengepreßt; dadurch wird vorn eine bedeutend größere Geschwindigkeit — also auch bedeutend größere Möglichkeit einer Saugwirkung, wie es scheint — zu erwarten sein. Dennoch braucht jetzt aus der größeren Geschwindigkeit keine größere Gesamtsaugwirkung in Richtung der Bogentangente zu resultieren. Denn die dafür anzusetzende Integration über die Kreisgrenze gäbe unter der Voraussetzung der früheren Geschwindigkeitsverteilung den Ansatz

$$\frac{1}{2}\varrho V^2 \int \frac{A^2}{\frac{A}{r}}\, dq = \frac{1}{2}\varrho V^2 \int \frac{A^2}{\frac{A}{r}}\, dA \sin\varphi,$$

also da A jetzt konstant und die Grenzen von φ $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ sind:

$$\frac{1}{2}\varrho V^2 \cdot A^2 \cdot r \cdot 2,$$

statt wie früher bei der Integration über die Parabel

$$\frac{1}{2}\varrho V^2 \cdot A^2 \cdot r \cdot 2\pi.$$

Die Saugwirkung im ganzen wäre also bei der alten Druckverteilung im Verhältnis $\frac{1}{\pi}$ kleiner; es ist begreiflich, daß in Folge der teilweise bis aufs Doppelte gehenden Verengung der Stromfäden und Vergrößerung der Geschwindigkeit, die bis zur Vervierfachung der Saugkräfte führen kann, der Faktor $\frac{1}{\pi}$

wieder wett gemacht und daher jener Betrag wieder erreicht werden kann. Man kann aber sicherer auch so schließen: Da die von der Saugwirkung absehende Auftriebskraft (der „Druckauftrieb") von der Umgebung von A, wie früher gezeigt, nur einen kleinen Beitrag erhält, andrerseits die Störung der Druckverhältnisse in größeren Entfernungen von A durch die beliebig geformte, aber kleine, Abrundung bei A gering sein wird, erfährt der ganze Druckauftrieb nur eine unwesentliche Änderung in Größe und Richtung. Dieser aber setzt sich mit der Saugwirkung, deren Richtung gegeben, nämlich immer noch die Bogentangente, ist, zum Gesamtauftrieb zusammen, dessen Richtung nach dem Satze von der lebendigen Kraft immer noch senkrecht zur Strömungsrichtung ist. Daraus folgt, daß auch die Größen der beiden letzteren Kräfte keine wesentliche Änderung erfahren, wie auch die Form der Abrundung gewählt worden ist, sofern sie nur klein genug ist. Zu bemerken ist, daß eine Parabel mit ihrer veränderlichen Krümmung sich im allgemeinen besser näherungsweise zur Darstellung irgend einer beliebig gewählten Abrundungskurve eignen wird, als etwa ein Halbkreis mit seiner konstanten Krümmung.

Übrigens verweise ich in bezug auf eine weitere Untersuchung der Wirkung einer Abrundung auf die im letzten Paragraphen erwähnten, künftig zu behandelnden Beispiele.

Nehmen wir eine Abrundung mit $A_1 = 0{,}000\,2\,r$ vor, so ist im Zahlenbeispiel ($V = 10$ m/sec)

$$A_1 = 0{,}6167 \text{ mm}.$$

Die Maximaldicke der Anschwellung wird nach den beiden Schätzungen $8\,A_1$ und $16\,A_1$ als 4,93 mm und 9,86 mm geschätzt. Der maximale Druckverlust im verbleibenden Außenraum ist 696,40 kg/m^2, oder zirka $^1/_{15}$ Atmosphäre. Die Maximalgeschwindigkeit wird (92,35 + 10,41) m/sec = 102,76 m/sec; das maximale Geschwindigkeitsgefälle $10^4 \cdot 7{,}488$ m/sec pro m; also 74,88 m/sec für einen Millimeter.

Weiter sei $A_2 = 0{,}001\,r$

$$A_2 = 3{,}083 \text{ mm}.$$

Maximaldicke der Anschwellung 24,67 mm oder 49,33 mm.
Max. Druckverlust: 176,73 kg/m² = zirka $^1/_{58}$ Atmosphäre.
Max. Geschwindigkeit: (41,30 + 10,41) m/sec = 51,71 m/sec.
Max. Gefälle: 6698 m/sec pro m; also 6,7 m/sec für einen mm.

Endlich sei $\Delta_3 = 0{,}005\, r$

$$\Delta_3 = 15{,}4 \text{ mm}.$$

Maximaldicke der Anschwellung 123,33 mm oder 246,67 mm oder $^1/_{16}$ bis $^1/_8$ der Sehne 2 m.
Max. Druckverlust: 55,48 kg/m² = zirka $^1/_{186}$ Atmosphäre.
Max. Geschwindigkeit: (18,47 + 10,41) m/sec = 28,88 m/sec.
Max. Gefälle: 599 m/sec pro m; also 0,6 m/sec für einen mm.

Für verdoppeltes V (= 20 m/sec) hat man den maximalen Druckverlust zu vervierfachen, die Maximalgeschwindigkeit und das Maximalgefälle zu verdoppeln, wenn die Δ bleiben. Will man das Maximalgefälle nicht ändern, so hat man die Δ im Verhältnis $\sqrt[3]{4} = 1{,}587$ zu vergrößern.

Für verdoppeltes r hat man die Δ zu verdoppeln, dann bleiben die Zahlen für Druckverlust und Geschwindigkeit; das Gefälle wird halb so groß. Oder man beläßt die Δ, dann wird das Gefälle im Verhältnis $\sqrt[3]{2} = 1{,}414$ größer.

Nimmt man die Abrundung in der Form der früher gezeichneten Figur, und mit Δ_3 vor, so würde die größte Dicke der Anschwellung, $12^1/_3$ cm betragend, etwa 12—16 cm vom Ende entfernt erreicht. Der Anschluß der Ausgleichungskurve an den Kreisbogen, also das angeschmiegte Ende der Schwellung, würde 40—50 cm vom Ende entfernt, also rund in $^1/_4$ der Gesamtbogenlänge der Schale von A ab gerechnet liegen.

Fig. 4.

Die angegebenen Zahlen zeigen, daß schon durch verhältnismäßig äußerst geringe Abrundungen nicht nur ein negativer Flüssigkeitsdruck vermieden, sondern sogar die Druckverminderungen auf ein geringes Maß beschränkt werden können. Dadurch ist auch die Auffassung des Verhaltens der Luft als

einer im wesentlichen inkompressibeln Flüssigkeit gerechtfertigt. Dagegen tritt bei geringer Abrundung ein enorm großes Geschwindigkeitsgefälle immer noch auf. Selbst bei der letzten, größten Anschwellung beträgt die Geschwindigkeitsänderung innerhalb 1 cm von der Grenze ab 4,05 m/sec; innerhalb eines mm von der Grenze ab 0,6 m/sec. Bei $V = 20$ m/sec verdoppeln sich noch diese Zahlen. Bei den kleineren Abrundungen wächst das Gefälle noch in der $\frac{3}{2}$ten Potenz.

Obwohl also die Geschwindigkeiten selbst (wenigstens bei der größten Abrundung) in verhältnismäßig nicht zu weiten Grenzen sich bewegen, läßt sich doch wegen dieser großen Gefälle sicher voraussagen, daß wenigstens bei geringeren Abrundungen die Wirkung der Kante A durch die innere Flüssigkeitsreibung sehr wirksam modifiziert werden wird. Ein so großes Geschwindigkeitsgefälle wird selbst bei sehr geringem Koeffizienten der inneren Reibung große Reibungskräfte hervorrufen und dadurch die auftretenden, an sich gar nicht unzulässig großen Geschwindigkeiten in der Nähe der Grenze bedeutend verringern. (Wie dabei die Energie verbraucht wird, zur Wärmebildung oder zu Wirbelbildungen, bleibe dahingestellt.) Wird etwa so die Geschwindigkeit an der Grenze auf die Hälfte verringert, so werden wir die Saugwirkung der Kante A auf $^1/_4$ verringert ansehen. Im Falle aber z. B. einer Abrundung $\Delta_1 = 0{,}000\,2\,r$, der ein Maximalgefälle von 74880 m/sec : m (wenigstens ein Stückchen weit) entspricht, werden wir die Geschwindigkeit auf einen viel geringeren Bruchteil verringert einschätzen; die Saugwirkung bei A wird dann so gut wie erlöschen. Selbst bei der größten betrachteten Abrundung Δ_3 werden wir uns nicht wundern, eine immer noch merkliche Verringerung der Saugkraft zu finden. Dagegen werden an anderen Stellen als A (über B wird nachher noch Rechenschaft gegeben), die Wirkungen der inneren Reibung nicht beträchtlich sein, obwohl z. B. die Geschwindigkeiten an der oberen Schale auch sonst nicht so sehr viel kleiner werden, als an der Anschwellung; bei -18^0 z. B. 21,6 m/sec gegen 28,9 m/sec

an der Abrundung. Denn es ist eben das Geschwindigkeitsgefälle nirgends auch nur annähernd so groß, wie schon ein Blick auf die Tabelle 1 zeigt.

Der Erfolg ist somit, extrem gesprochen, daß im Falle der fehlenden oder gar zu kleinen Abrundung die auf die Schale ausgeübte Auftriebskraft durch den Druckauftrieb allein gegeben ist, da die Saugwirkung fortfällt. Die Auftriebskraft steht nicht mehr senkrecht zur Strömungsrichtung, sondern ist unter $(\beta - \gamma)$, im Beispiel unter $9^0\,27',_7 - 5^0\,0',_6 = 4^0\,27',_1$ gegen diese Senkrechte in Richtung der Strömung gedreht. Es tritt also, wenn umgekehrt die Schale gegen die ruhende Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit V bewegt wird, eine retardierende Kraft vom Betrage

$$\pi \varrho V^2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{arc} \frac{\alpha}{2}} \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta \cos (\alpha - \beta)$$

pro Flächeneinheit, im Zahlenbeispiel vom Betrag 1,0547 kg pro Flächeneinheit, $0{,}6967 \cdot r$ kg für je einen Meter Schalenbreite auf, während die zur Strömungsrichtung senkrechte Komponente des zum Ganzen gewordenen Druckauftriebs 13,5445 kg pro Flächeneinheit (Quadratmeter), $8{,}9474\,r$ kg pro m Schalenbreite geworden ist; die Hubkraft hat sich sogar etwas erhöht. Zur Überwindung der in der Bewegungsrichtung entgegenwirkenden Kraft ist natürlich beständiger Arbeitsaufwand der Flugmaschine erforderlich.

Daß eine solche retardierende Kraft überhaupt auftreten kann, erklärt sich daraus, daß die berücksichtigte innere Reibung die Anwendung des Satzes von der lebendigen Kraft ausschließt.

Gehen wir vom extremen Fall des Erlöschens der Saugwirkung zum Falle einer Verringerung derselben durch die innere Reibung über, so übersehen wir, daß die retardierende Kraft in gleichem Maße abnimmt. Sind, wie es im Falle A_3 plausibel scheint, die Wirkungen der inneren Reibung mit dem

Gefälle klein geworden, so ist eben auch die zu überwindende retardierende Kraft klein geworden.

Als den Zweck des Anbringens einer Anschwellung an der Vorderkante betrachten wir im hydrodynamischen Sinne nicht nur die Vermeidung negativer Drucke — diese würden ja durch die innere Reibung von selbst vermieden — auch nicht unmittelbar (mittelbar wohl) die Vermeidung der Entstehung von Wirbeln — obwohl die Wirkung der inneren Reibung sich wenigstens zum Teil gerade in dieser dokumentieren wird und die Wirbelbildung deshalb im allgemeinen sicher nicht gänzlich vermieden werden kann. (Doch findet sich bei Ahlborn[1]) ein einziges Strömungsbild, das so gut wie ganz wirbelfrei ist; es scheint das der Fall der Strömungssymmetrie, den ich 1902 behandelt habe, zu sein, ein Fall, wo beide Kanten wie hier B wirken und größeres Gefälle sehr leicht zu vermeiden ist.) Sondern als direkten Zweck betrachten wir die durch Verringerung der inneren Reibungswirkungen in der Nähe der Kante erzielte möglichst vollständige Erhaltung der Saugwirkung von A und damit die möglichste Vermeidung der retardierenden Kraft, die den Energievorrat des Fliegers aufzehren hilft.

Wir schließen vorläufig, daß es vorteilhaft sein wird, der Anschwellung eine Größe von mindestens dem zuletzt aufgestellten Betrage A_3 zu geben. Dann dürfte wohl die Saugkraft der Hauptsache nach erhalten bleiben und es ist dann nur die durch die äußere Reibung von Flüssigkeit und Fläche hervorgerufene retardierende Kraft und die durch die Bildung der von den spitzen Flügel- oder schmalen Platten- und Schalenenden ausstrahlenden Wirbelfäden veranlaßte noch zu überwinden. Die Abschätzung dieser Kräfte, insbesondere der zweiten mit Hilfe der Diskontinuitätstheorie, für die im vorigen ja die Stärke des Wirbels bekannt ist, wäre von dem gewonnenen Strömungsbilde ausgehend wohl möglich, wird aber in dieser Arbeit nicht mehr unternommen.

[1]) Über den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes. 1902, Tafel XV, Fig. 67 Mitte.

Der Größenordnung nach stimmt das Verhältnis der Anschwellungsdicke zum Radius bei den Vögeln wohl einigermaßen mit den hier errechneten Zahlen überein.

Endlich muß noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß auch in der Nähe des Punktes B ein großes, in B selbst ein unendliches Geschwindigkeitsgefälle vorhanden ist, obwohl die Geschwindigkeit dort endlich ist. Das Gefälle wird dort (mit $\frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta}{r}}}$ wachsend, nicht wie in A mit $\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta}{r}}}\right)^3$) durch

$$V \cos\frac{\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right) \frac{3\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}{2\sqrt{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{1}{2r\sqrt{\frac{\Delta}{r}}}$$ gegeben.

Für unser Zahlenbeispiel und die Annahme

$$\Delta = 0{,}000\,01\, r = 0{,}0308 \text{ mm}$$

ergibt dies als Gefälle 494 m/sec pro m oder 0,5 m/sec für einen Millimeter. Man erkennt, selbst bei dieser außerordentlich geringen Abrundung von $\Delta = {}^1/_{32}$ mm, die praktisch von selbst unvermeidlich ist, ist das Maximalgefälle bei B kleiner als das bei der größten oben berechneten Abrundung $\Delta_3 = 15{,}4$ mm bei A. Wäre aber selbst dies Gefälle größer, so würde trotzdem die innere Reibung keine Bedeutung gewinnen, da ja die Geschwindigkeiten bei B so wenig von der normalen 10 m/sec abweichen, daß nur kleine Änderungen und damit kleine Druckänderungen zu erwarten sind. Demnach würde die kleine Druckänderung an der winzigen Breite der Abrundung gar keine wesentliche Kraftwirkung, also Störung der Auftriebsverhältnisse erzeugen können.

Umgekehrt liegt es sogar im Interesse des Fliegers, die Hinterkante möglichst scharf zu gestalten, um die physikalische Auszeichnung dieser Lösung gegenüber allen anderen möglichst stark zu betonen und so das dargestellte Strömungsbild zu einem möglichst stabilen zu gestalten.

Es käme nun die Aufgabe an uns heran, das Netz der Stromlinien und der Äquipotentiallinien genauer zu berechnen und zu zeichnen. Dies soll künftig geschehen. Man wird etwa für eine größere Anzahl geeigneter komplexer Werte von ψ oder t sowohl z als auch W berechnen und zwischen den so gefundenen Punkten z, die auf Stromlinien und Äquipotentiallinien mit gebrochenen Parameterzahlen liegen, die Strom- und Potentiallinien mit ganzen Parameterzahlen interpolieren. Es wäre nicht schwer, sich so ein sehr genaues Bild der Strömung zu verschaffen, nur gehört zu den betreffenden Rechnungen immerhin ein gewisser Zeitaufwand.

Besonderes Interesse böte natürlich die Verfolgung der gespaltenen Stromlinie, für welche W reell ist. Man hätte am einfachsten zunächst die zugehörige transzendente Kurve der Ebene ζ und daraus die Kurve der Ebene t punktweise zu berechnen. Diese Berechnung wäre auch für alle anderen Strömungsprobleme, wie die im letzten Paragraphen angeführten analog durchzuführen; nur hängt die Kurve noch vom Verhältnis der drei Konstanten $c_1 : c_2 : c$ ab. Eine solche Berechnung für die symmetrische Strömung habe ich 1902 durchgeführt. Die Kurve in t ist dann leicht punktweise in die gesuchte gespaltene Strömungskurve der z Ebene zu transformieren.

Da übrigens der Spaltungspunkt und die Geschwindigkeiten an der Schale bekannt sind, kann man wenigstens eine ungefähre Vorstellung des Verlaufes der Stromlinien in der Nähe der Schale gewinnen.

VI. Ebene Platte und Schale unter verschiedenen Luftstosswinkeln β.

Der Fall $\beta = 0$, also der Symmetrie der Strömung in bezug auf die Schale, ist der einzige, in dem auch am Punkte A keine unendliche Geschwindigkeit auftritt. Der vordere Spaltungspunkt, der sonst ja Stagnationspunkt ist, rückt nach A. Die beiden Eigenschaften der zusammenrückenden Punkte, die 0 und ∞ als Geschwindigkeit besassen, machen das Auftreten

einer endlichen Geschwindigkeit nach dem Zusammenrücken begreiflich. In der Tat ist das Resultat dieselbe endliche Geschwindigkeit, wie sie im Punkte B vorhanden ist; die y Achse ist Symmetrieachse des ganzen Strömungsbildes. Die innere Reibung würde in diesem mathematisch, aber freilich nicht physikalisch exakt zu verwirklichenden Falle keine so wichtige Rolle wie oben spielen. Ich habe diesen Fall unter anderen 1902 behandelt.

Der Fall $\alpha = 0,\ r = \infty;\ 2r\alpha = 4r\sin\frac{\alpha}{2} = 4r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = L$ führt auf die ebene Platte von der Breite $AB = L$. Die Formeln nehmen die folgende spezielle Form an:

$$W = V\left[\frac{t\cos\beta + \sin\beta}{1+t^2} + \sin\beta\cdot\operatorname{arctg} t\right]$$

$$= \frac{1}{2}V\left[\sin(\psi+\beta) + \sin\beta\cdot\psi\right]$$

$$z' = \frac{1}{L}\left[\mathrm{tg}\frac{\psi}{2} + \mathrm{cotg}\frac{\psi}{2}\right] = \frac{2}{L\sin\psi}$$

$$z = \frac{L}{2}\sin\psi = \frac{t}{1+t^2}\cdot L.$$

Winkel δ ist gleich 45°. Die Geschwindigkeiten sind:

bei A gleich $\quad -V\left[\frac{\sin\beta}{\sqrt{\frac{A}{L}}} - \cos\beta - \frac{5}{2}\sin\beta\sqrt{\frac{A}{L}} + \ldots\right]$

bei B gleich $\quad V\cos\beta\left[1 - \mathrm{tg}\,\beta\cdot\sqrt{\frac{A}{L}} + \ldots\right]$

bei O_+ oben gleich $\quad V\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(45^0-\beta)\left[1-\frac{z}{L}\sqrt{2}\frac{\sin\beta}{\cos(45^0-\beta)}\ldots\right]$

bei O_- unten gleich $\quad V\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(45^0-\beta)\left[1+\frac{z}{L}\sqrt{2}\frac{\sin\beta}{\sin(45^0-\beta)}\ldots\right].$

Der Spaltungspunkt gehört zu $\psi = -\frac{\pi}{2} - 2\beta$, liegt also bei $z = -\frac{L}{2}\cos 2\beta$.

Der Gesamtauftrieb, senkrecht zur Strömung, ist pro Flächeneinheit $\pi \varrho V^2 \sin\beta$.

Der von der Saugkraft gelieferte in $-x$ Richtung wirkende Teil derselben $\pi \varrho V^2 \sin^2\beta$;

dessen Komponente in der Strömungsrichtung $-\pi \varrho V^2 \sin^2\beta \cos\beta$

senkrecht dazu $+\pi \varrho V^2 \sin^3\beta$.

Der von der Saugwirkung absehende Druckauftrieb wirkt senkrecht zur Platte; seine Größe ist $\pi \varrho V^2 \sin\beta \cos\beta$; seine Komponenten in der Stromrichtung und senkrecht dazu sind $+\pi \varrho V^2 \sin^2\beta \cos\beta$ und $\pi \varrho V^2 \sin\beta \cos^2\beta$.

Ist die Saugwirkung wegen innerer Reibung ganz zu vernachlässigen, so ist die retardierende Kraft pro Flächeneinheit $\pi \varrho V^2 \sin^2\beta \cos\beta$; der Druckauftrieb stellt den Gesamtauftrieb dar, und dieser ist aus der Senkrechten zur Strömung um Winkel β nach der Strömungsrichtung hin in die Richtung der Senkrechten zur Platte gedreht. Bleibt trotz der inneren Reibung (infolge einer Abrundung an der Vorderkante) ein Teil der Saugwirkung bei A bestehen, so fällt die Auftriebsrichtung zwischen die Plattennormale und die Strömungsnormale.

Sehr einfach gestaltet sich das Resultat für den Angriffspunkt des Auftriebs an der Platte, und zwar bleibt dies Resultat auch bei gänzlichem oder teilweisem Verschwinden der Saugwirkung bestehen. Es ist nämlich der Angriffspunkt des Druckauftriebs an der Platte gleichzeitig Angriffspunkt des Gesamtauftriebs, da die Saugkraft in A die Richtung AB der Platte selbst hat. Nach Seite 29 ergibt sich der Schnittpunkt beider Kräfte durch $x = -r\frac{\sin\gamma}{\cos(\alpha-\gamma)}$; $y = -r\left(1-\frac{\cos\gamma}{\cos(\alpha-\gamma)}\right)$. Hier wird α und γ Null, und y daher Null. Dagegen wird x durch Grenzübergang aus $\lim\frac{r\sin\gamma}{\cos(\alpha-\gamma)} = \lim(r\,\mathrm{tg}\,\gamma)$, oder, da

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\sin\beta - \cos^3\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cos\beta + \cos^3\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta\sin\alpha} \text{ ist,}$$

$$x = -\lim_{\substack{\alpha=0\\ 2r\alpha=L}} \frac{r\cdot\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\sin\beta - \cos^3\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta\cos\alpha\right]}{\sin\beta\cos\beta} = -\frac{L}{4}.$$

Oder: Der Angriffspunkt des Auftriebes liegt bei der ebenen Platte stets um $^1/_4$ der Breite L von der Vorderkante entfernt, teilt also die Platte im Verhältnis 1 : 3. Er ist unabhängig vom Luftstoßwinkel β, und auch unabhängig von Verringerung oder Erlöschen der Saugwirkung.

In der folgenden Tabelle sind Spaltungsstelle, Gesamtauftrieb, Saugkraft, endlich die Geschwindigkeit des Abströmens in B für $\beta = 7^1/_2{}^0$, 15^0, 45^0, 60^0, 90^0; 120^0, 135^0, 150^0, 165^0, $172^1/_2{}^0$, 180^0 angegeben. Es wäre sehr wünschenswert, wenigstens für die kleineren Luftstoßwinkel einige zugehörige Strömungsbilder genau darzustellen; ich hoffe, daß solche nachträglich hergestellt werden können.

Es sind hier alle Fälle von $\beta = 0$ bis $\beta = 180^0$ in Betracht gezogen. Vermehrung von β um 180^0 ist äquivalent mit einem Vorzeichenwechsel in V_1 und V_2, also bloßer Umkehrung der Strömungsrichtung. Die Fälle von $\beta = 90^0$ ab, geben das Spiegelbild des Strömungsbildes, das zum Supplementwinkel gehört, in bezug auf die Strömungsnormale; zu beachten ist, daß das Abströmen der Flüssigkeit von der Kante B mit endlicher Geschwindigkeit durch ein Anströmen an die Kante B mit derselben Geschwindigkeit ersetzt ist.

Jede Lösung des Strömungsproblems gilt vorläufig für zwei verschiedene Strömungen, nämlich die beiden nur im Vorzeichen der Geschwindigkeiten verschiedenen. Umgekehrt läßt jede gegebene Geschwindigkeit im Unendlichen vorläufig zwei Lösungen der gefundenen Art für das Strömungsbild zu, je nachdem nämlich die eine oder die andere Kante, B oder A, endliche Geschwindigkeit aufweisen sollen. Das erste Strömungs-

bild gehört zum Winkel β, das andere wird aus dem zu $180^0 - \beta$ gehörigen durch eine Spiegelung an der Plattennormale erhalten.

Tabelle 2.

Luftstoßwinkel β	Spaltungspunkt	Gesamtauftrieb kg für die Flächeneinheit	Saugwirkung kg für die Flächeneinheit	Geschwindigkeit an der Hinterkante B
0	$-\frac{L}{2}$ (Kante A)	0	0	V
$7^1/_2{}^0$	$-\frac{L}{2} \cdot 0{,}966$ unten	$0{,}1305 \cdot \pi \varrho V^2$	$0{,}017 \cdot \pi \varrho V^2$.	$0{,}9915\ V$
15^0	$-\frac{L}{2} \cdot 0{,}866$	0,2588	0,067	0,966
30^0	$-\frac{L}{2} \cdot 0{,}500$	0,5000	0,250	0,866
45^0	$-\frac{L}{2} \cdot 0$ (Mitte unt.)	0,707	0,500	0,707
60^0	$+\frac{L}{2} \cdot 0{,}500$	0,866	0,750	0,500
90^0	$+\frac{L}{2}$ (Kante B)	1,000	1,000	Null
120^0	$+\frac{L}{2} \cdot 0{,}5$ oben	0,866	0,750	$-0{,}500$
135^0	(Mitte oben)	0,707	0,500	$-0{,}707$
150^0	$-\frac{L}{2}$ 0,500	0,500	0,250	$-0{,}866$
165^0	$-\frac{L}{2}$ 0,866	0,2558	0,067	$-0{,}966$
$172^1/_2{}^0$	$-\frac{L}{2} \cdot 0{,}966$	0,1305	0,017	$-0{,}9915$
180^0	$-\frac{L}{2}$ (Kante A)	0	0	$-1{,}000$

Natürlich ist ja von vorneherein nicht anzunehmen, daß für große Luftstoßwinkel β, größer als 30^0 oder gar als 45^0, das erhaltene Strömungsbild noch eine gute Annäherung geben wird. Der Wert der Berechnungen dürfte sich höchstens bis $\beta < 30^0$ erstrecken. Das sind ja praktisch die wichtigsten Fälle. Und dieser letzte Umstand hängt wohl auch damit zu-

sammen, daß eine Strömung mit Geschwindigkeitspotential, d. h. ohne wesentliche Wirbelbildung außer an den Seitenenden, sich praktisch als stabilste Strömung, und deswegen als am vorteilhaftesten benutzbar erweisen mag.

Die angegebenen Geschwindigkeiten in B sind positiv bezeichnet, wenn ein Abströmen stattfindet, negativ für das Anströmen. Für $\beta = 0$ und $\beta = 180^0$ tritt an beiden Kanten endliche Geschwindigkeit, an der einen Kante Anströmen, an der anderen Abströmen auf. Davon abgesehen zeigt von den beiden Lösungen, die für eine gegebene Geschwindigkeit im Unendlichen sich angeben lassen, stets die eine ein Abströmen, die andere ein Anströmen an der Kante endlicher Geschwindigkeit.

Der Gesamtauftrieb ist für $\beta < 180^0$ stets positiv, d. h. gegen die Strömungsrichtung um 90^0 im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers gedreht. Die Umkehrung der Geschwindigkeit ($180^0 + \beta$ statt β) kehrt zugleich das Zeichen des Auftriebs um, so daß seine wirkliche Richtung, wie natürlich, erhalten bleibt. Die Komponente der Saugkraft in der Strömungsrichtung kehrt von $\beta = 90^0$ ab (also für die Lösungen mit Anströmen) ihr Vorzeichen um; die innere Reibung würde dann bei Bewegung der Platte in der ruhenden Flüssigkeit eine accelerierende, statt retardierende Kraft zur Folge haben, was die praktische Unzulässigkeit dieser Lösungen mit Anströmen klar legt. Es bleibt nur eine wirklich brauchbare Lösung übrig.

Wir gehen zur Diskussion des Verhaltens der Kreisschale unter verschiedenen Luftstoßwinkeln über, und behalten das in Paragraph V untersuchte Beispiel, mit Pfeil gleich $^1/_{12}$ der Sehne, $\alpha = 18^0\,55',_{48}$ bei. V ist wieder gleich 10 m/sec gegeben gedacht; β soll dagegen nach einander die Werte 0^0, $7^1/_2{}^0$; $\frac{\alpha}{2} = 9^0\,27',_{74}$; 15^0; $\alpha = 18^0\,55',_{48}$; 30^0; $\delta = 40^0\,16',_{13}$; 60^0; $90^0 - \frac{\alpha}{2} = 80^0\,32',_{26}$; 90^0; $90^0 + \frac{\alpha}{2} = 99^0\,27',_{74}$; $90^0 + \alpha = 108^0\,55',_{48}$; 120^0; $90^0 + \delta = 130^0\,16',_{13}$; $180^0 - \delta = 139^0\,43',_{87}$; 150^0; 165^0; $180^0 - \frac{\alpha}{2} = 170^0\,32',_{26}$; $172^1/_2{}^0$; 180^0 annehmen. Es ergibt sich für den Spaltungspunkt, den Gesamtauftrieb pro Flächeneinheit, die Saugkraft, und die Geschwindigkeit in B die folgende Tabelle:

Tabelle 3.

I Luftstoßwinkel β zwischen Sehnenrichtung und Strömungsrichtung	II Gesamtauftrieb pro m^2	III Druckauftrieb pro m^2 Komponente senkrecht zur Strömung	IV Druckauftrieb pro m^2 Komponente in Strömungsrichtung	V Saugauftrieb pro m^2
-15^0	− 3,978 kg	− 2,499 kg	+ 2,199 kg	2,650 kg
$-10^0\ 19',5$	− 0,621	0	+ 1,109	1,271
$-9^0\ 27',74$	0	+ 0,508	+ 0,941	1,069
$-7^0\ 30'$	+ 1,411	+ 1,711	+ 0,604	0,674
-5^0	+ 3,207	+ 3,329	+ 0,275	0,300
$-2^0\ 30'$	+ 4,996	+ 5,024	+ 0,070	0,075
0^0	+ 6,776	+ 6,776	+ 0	0
$+2^0\ 30'$	+ 8,544	+ 8,565	+ 0,072	0,075
$+5^0$	+ 10,294	+ 10,367	+ 0,292	0,300
$+7^0\ 30'$	+ 12,025	+ 12,159	+ 0,661	0,674
$+9^0\ 27',74$	+ 13,368	+ 13,544	+ 1,055	1,069
$+15^0$	+ 17,069	+ 17,250	+ 2,644	2,650
$+18^0\ 55',48$	+ 19,597	+ 19,597	+ 4,161	4,161
$+30^0$	+ 26,198	+ 24,298	+ 9,706	9,890
$+40^0\ 16',13$	+ 31,451	+ 25,436	+ 15,395	16,528
$+49^0\ 43',87$	+ 35,404	+ 23,608	+ 19,782	23,032
$+60^0$	+ 38,607	+ 19,112	+ 22,367	29,670
$+71^0\ 4',52$	+ 40,659	+ 12,707	+ 21,720	35,399
$+80^0\ 32',26$	+ 41,219	+ 7,360	+ 18,299	38,490
$+90^0$	+ 40,659	+ 3,237	+ 12,830	39,560
$+99^0\ 27',74$	+ 38,991	+ 1,025	+ 6,328	38,490
$+108^0\ 55',48$	+ 36,263	+ 0,865	0	35,398
$+120^0$	+ 31,823	+ 3,388	− 4,608	29,670
$+130^0\ 16',13$	+ 26,643	+ 5,191	− 8,383	23,032
$+139^0\ 43',87$	+ 21,110	+ 6,914	− 8,465	16,528
$+150^0$	+ 14,461	+ 7,005	− 6,498	9,890
$+161^0\ 4',52$	+ 6,776	+ 4,223	− 3,286	4,161
$+165^0$	+ 3,978	+ 2,499	− 2,199	2,650
$+167^0$	+ 2,543	+ 1,485	− 1,699	2,002
$+168^0$	+ 1,825	+ 0,946	− 1,467	1,710
$+169^0\ 40',5$	+ 0,621	0	− 1,109	1,271
$+170^0\ 32',26$	0	− 0,508	− 0,941	1,069
$+172^0\ 30'$	− 1,411	− 1,711	− 0,604	0,674
$+175^0$	− 3,207	− 3,329	− 0,275	0,300
$+177^0\ 30'$	− 4,996	− 5,024	− 0,070	0,075
$+180^0$	− 6,776	− 6,776	0	0

VI Angriffspunkt des Gesamtauftriebs an der Schale (Zentriwinkel)	VII Angriffspunkt des Druckauftriebs an der Schale (Zentriwinkel)	VIII Winkel des Druckauftriebs gegen das Lot zur Strömungsrichtung	IX Spaltungspunkt (Zentriwinkel)	X Geschwindigkeit an der Hinterkante
+ 123° 13′,5	− 153° 39′,1	+ 138° 39′,1	+16° 33′,8 obere Seite	+9,818 m/sec
—	− 100° 19′,5	+ 90°	+17° 47′,9	+9,863
—	− 71° 4′,5	+ 61° 36′,8	+17° 56′,7	+9,864
− 36° 1′,2	− 26° 55′,6	+ 19° 25′,6	+18° 18′,0	+9,858
− 10° 22′,6	− 9° 43′,0	+ 4° 43′,0	+18° 38′,6	+9,834
− 3° 21′,8	− 3° 18′,0	+ 0° 48′,0	+18° 50′,6	+9,791
0°	0°	0	+18° 55′,5 Vorderkante	+9,730
+ 1° 59′,7	+ 2° 1′,0	+ 0° 29′,0	+18° 51′,0 untere Seite	+9,650
+ 3° 19′,6	+ 3° 23′,3	+ 1° 36′,7	+18° 37′,6	+9,551
+ 4° 17′,2	+ 4° 23′,4	+ 3° 6′,6	+18° 14′,7	+9,435
+ 4° 52′,5	+ 5° 0′,3	+ 4° 27′,4	+17° 50′,0	+9,331
+ 6° 4′,1	+ 6° 17′,2	+ 8° 42′,8	+16° 8′,0	+8,978
+ 6° 39′,9	+ 6° 56′,2	+ 11° 59′,3	+14° 27′,1	+8,678
+ 7° 49′,2	+ 8° 13′,6	+ 21° 46′,4	+7° 48′,0	+7,442
+ 8° 34′,0	+ 9° 5′1	+ 31° 11′,0	+ 0°	+6,376
+ 9° 8′,9	+ 9° 46′,3	+ 39° 57′,6	−7° 13′,6	+5,052
+ 9° 46,1	+ 10° 30,9	+ 49° 29′,1	−13° 38′,9	+3,458
+ 10° 32′,6	+ 11° 24′,2	+ 59° 40′,3	−17° 50′,0	+1,622
+ 11° 30′,2	+ 12° 27′,0	+ 68° 5′,3	−18° 55′,5 Hinterkante	0
+ 13° 21′,1	+ 14° 9′,7	+ 75° 50′,3	−17° 56′,6 obere Seite	−1,622
+ 18° 39′,4	+ 18° 39′,7	+ 80° 48′,0	−15° 16′,8	−3,199
+ 31° 27′,6	+ 108° 55′,5	0	−11° 21′,5	−4,690
+ 51° 11′,9	+ 173° 40′,8	− 53° 40′,8	−5° 43′,4	− 6,269
+ 70° 27′,0	+ 188° 29′,9	− 58° 13′,8	0°	−7,526
+ 88° 12′,0	+ 190° 29′,3	− 50° 45′,4	+5° 17′,0	−8,472
+ 106° 51,0	+ 192° 51′,0	− 42° 51′,0	+10° 35′,7	− 9,237
+ 123° 11′,5	+ 198° 57′,6	− 37° 53′,0	+15° 16′,8	−9,730
+ 123° 13′,5	+ 206° 20′,9	− 41° 20′,9	+16° 33′,8	−9,818
+ 115° 5′,3	+ 216° 50′,9	− 48° 50′,9	+17° 7′,4	−9,845
+ 98° 26′,8	+ 225° 10′,7	− 57° 10′,7	+17° 22′,7	−9,854
—	+ 259° 40′,5	− 90°	+17° 47′,9	− 9,863
—	+ 288° 55′,5	− 118° 23′,2	+17° 56′,7	− 9,864
+ 323° 58,8	+ 333° 4′,4	− 160° 34′,4	+18° 18′,0	−9,858
+ 349° 37′,4	+ 350° 17′,0	− 175° 17′,0	+18° 38′,6	−9,834
+ 356° 38′,2	+ 356° 42′,0	− 179° 12′,0	+18° 50′,6	−9,791
+ 360°	+ 360°	− 180°	+18° 55,5 Vorderkante	−9,730

Die Spalten III und IV geben die Hubkraft und die retardierende Kraft für den Fall erlöschender Saugwirkung an. Die Zentriwinkel in den Spalten VI, VII, IX sind vom mittleren Radius des Schalenbogens im umgekehrten Uhrzeigersinne gezählt. Nur der obere Teil der Tabelle hat praktisches Interesse.

Auf Grund der Tabelle kann man rohe Skizzen für den Verlauf der Strömungs- und Druckverhältnisse bei verschiedenen Luftstoßwinkeln herstellen. Die Aufzeichnung einiger genauer Strömungsbilder wäre wünschenswert, ist aber recht zeitraubend.

Für $\beta = 90^0 + \alpha$ sind Gesamtauftrieb und Saugkraft gleich gerichtet (also der Druckauftrieb von gleicher Richtung), aber nicht von gleicher Größe. Wenn $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = \cos^3\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta$, so sind beide der Größe nach, aber nicht der Richtung nach gleich. Für $\beta = 180^0 - \frac{\alpha}{2}$, oder $\beta = -\frac{\alpha}{2}$ verschwindet der gesamte Auftrieb, obwohl die Saugwirkung, und damit der Druckauftrieb nicht verschwindet; gleichzeitig erreicht die Strömungsgeschwindigkeit an Kante B den größten, hier überhaupt erreichbaren Wert.

Bei Vermehrung von β um 180^0 bleibt das Strömungsbild erhalten, und wechselt blos der Richtungssinn der Strömung.

Für jede gegebene Geschwindigkeit der Strömung im Unendlichen, also jeden Winkel β gibt es zwei hierher gehörige Lösungen; je nachdem die eine oder die andere Kante als solche endlicher Geschwindigkeit vorgeschrieben werden, erhält man die eine oder die andere Lösung. Der einen gehört das Strömungsbild β, der anderen das an der y Achse gespiegelte Strömungsbild von $180^0 - \beta$ zu.

In den meisten Fällen gibt eine, und nur eine, der beiden Lösungen ein Abströmen an der Kante endlicher Geschwindigkeit; die andere ein Anströmen. Gibt eine Geschwindigkeit Abströmen, dann natürlich die entgegengesetzte Anströmen.

Eine Strömung unter Luftstoßwinkeln zwischen $90^0 - \frac{\alpha}{2}$ und $90^0 + \frac{\alpha}{2}$, also sehr steil von unten gegen die konkave Schalenseite hin, gibt für beide Lösungen Anströmen; umgekehrt die steile Strömung $\left(\text{zwischen } 270^0 - \frac{\alpha}{2} \text{ und } 270^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$ von oben gegen die konvexe Schalenseite hin natürlich für beide Lösungen Abströmen.

Obwohl jede Lösung für die beiden dem Sinne nach verschiedenen Geschwindigkeiten vom mathematischen Gesichtspunkte aus gleich richtig ist, wird doch natürlich die Stabilität der dadurch dargestellten Strömung für beide Geschwindigkeiten wesentlich verschieden sein können. Denn fingiert man ein unendlich wenig gestörtes momentanes Strömungsbild, so werden manche Stromfäden Verbreiterung, daher Mindergeschwindigkeit und Mehrdruck, andere Verengerung, daher Mehrgeschwindigkeit und Minderdruck aufweisen. Daraus folgen Beschleunigungen, und aus diesen Geschwindigkeiten in Richtung der Stromfäden und senkrecht dazu, die ein ganz bestimmtes, von $\pm V_0$ unabhängiges Vorzeichen besitzen. Sie werden sich mit der eigentlichen Geschwindigkeit V_0 an der Stelle zu ganz verschiedenen resultierenden Geschwindigkeiten vereinigen, je nachdem $+V_0$ oder $-V_0$ gewählt ist. Denn die zutretende Geschwindigkeit hat eben ein festes Zeichen. So kann recht wohl die Tendenz in dem einen Falle dahin gehen, die Störung zu beseitigen und das ungestörte Strombild wieder herzustellen; im anderen Falle aber dahin, die Störung zu vergrößern, und auf ein ganz anderes Strombild zu führen.

Wir wollen im Anschluß an die Beobachtungstatsachen die Anschauung bevorzugen, daß starkes Abströmen der Stabilität des Strömungsbildes günstig ist. Für Anströmen finden wir beiläufig meist die Komponente der Saugkraft in der Strömungsrichtung positiv, was bei Bewegung der Schale in der ruhenden Flüssigkeit eine beschleunigende, statt verzögernde

Wirkung der Reibung bedeuten würde. Wir beschränken also unsere Lösungen auf die, welche ein Abströmen aufweisen, was gewöhnlich damit zusammenfällt, daß die singuläre Kante die Vorderkante im gewöhnlichen Sinne, die Kante endlicher Geschwindigkeit die Hinterkante sein soll. Doch soll durchaus nicht die Anschauung vertreten werden, daß jede Lösung, die ein Abströmen aufweist, stabilen, oder auch nur ziemlich stabilen Charakter trage. Vielmehr werden wir vermuten können, daß die Lösungen mit geringerer Abströmungsgeschwindigkeit gegenüber denen größerer Abströmungsgeschwindigkeit in bezug auf die Stabilität im Nachteil sind (wobei dasselbe V im Unendlichen vorausgesetzt sei). Wenigstens scheint mir bei Vögeln wie bei Flugapparaten das flache Auslaufen der Fläche gegen die Hinterkante gerade den Zweck zu haben, dem Abströmen Sicherheit zu verleihen, gewissermassen regulierend zu wirken. Vielleicht könnte die Behandlung des einen der im letzten Paragraphen vorgeschlagenen Beispiele in bezug auf die Wirkung der Abflachung des hinteren Teiles der Flugfläche einen gewissen Aufschluß geben.

Schließen wir wirklich die Lösungen ohne Abströmen aus, so findet sich im Allgemeinen noch für jede Geschwindigkeit eine in diesem Sinne brauchbare Lösung; nur für die steile Strömung von unten zwischen $90^0 - \frac{\alpha}{2}$ und $90^0 + \frac{\alpha}{2}$ bleibt gar keine Lösung unserer Art; dagegen freilich für die steile Strömung von oben $\left(\text{zwischen } 270^0 - \frac{\alpha}{2} \text{ und } 270^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$ noch zwei Lösungen.

Halten wir die Strömungsbilder mit geringerer Abströmungsgeschwindigkeit für bedenklich, so sehen wir auf Grund der letzten Tabelle, daß allzu große Luftstoßwinkel, schon solche über 50^0, ein nicht viel Vertrauen erweckendes Resultat geben. Dazu kommt das außerordentlich starke Anwachsen der Saugwirkung, die uns von Anfang an zur Vorsicht zwang, während der Gesamtauftrieb zwar wächst, aber für größere Luftstoßwinkel durchaus nicht mehr in gleichem Maße wie jene. Bei Luftstoßwinkeln unter 10^0 macht sich die Verminderung

der Geschwindigkeit nicht stark fühlbar, bei 20° bleibt sie bei etwa 15 %, bei 30° beträgt sie schon 25 %. Die Saugwirkung (von der wir wissen, daß sie zu retardierenden Kräften Anlaß geben kann) wächst von etwa 8 % des Gesamtauftriebs bei 10° auf 20 % bei 20°, und auf 36 % bei 30°; später noch mehr. Für negative Luftstoßwinkel, also Strömung gegen die konvexe Schalenseite (die übrigens für das Flugproblem ohne Bedeutung sind) stehen die Verhältnisse in bezug auf die Abströmungsgeschwindigkeit etwas besser, in bezug auf die Saugkraft ebenso.

Es erscheint so von diesem Gesichtspunkt aus begreiflich, daß die Praxis des Fluges, im Wunsche nach großen Auftriebskräften, trotzdem ein Kompromiß schließen, und sich auf kleinere Luftstoßwinkel beschränken muß.

Ich bemerke ausdrücklich, daß ich von vorneherein die Anwendung der Formeln auf große Luftstoßwinkel β, und besonders auch auf große Winkel α für physikalisch höchst bedenklich halte. Auch bei kleineren Luftstoßwinkeln β, und kleinen Schalenwinkeln 2α (etwa α kleiner, höchstens wenig größer als 20°, β höchstens einige 20 Grad) werden die wirklichen Vorgänge noch durch an der Vorderkante erzeugte Wirbel kompliziert werden, besonders, wenn keine genügende Abstumpfung da ist. Dennoch halte ich es für möglich, daß diese komplizierteren Erscheinungen sich über das hier beschriebene Strömungsbild nur superponieren, und die durchschnittlichen Druck- und Geschwindigkeitsverteilung — besonders die erstere — der geschilderten nahe steht. Die in solchen Fällen beobachteten Wirbel sind ja tatsächlich gewöhnlich im Einzelnen sehr rasch veränderliche Strömungsgebilde. Ich habe früher durch Abbildung des bekannten, bei geeigneter Strömungsgeschwindigkeit am Orte verbleibenden Helmholtzschen Wirbelpaares Strömungsbilder unter Vermeidung unendlicher Kantengeschwindigkeit aufgestellt, die mit auffallender Ähnlichkeit die Erscheinung von zwei symmetrischen Wirbeln hinter einer senkrecht getroffenen Wand typisch darstellen, ganz wie sie Ahlborn in seinen Photographien wiedergibt. Aber die beiden

dabei auftretenden Wirbelfäden können nicht am Orte festgelegt werden, sondern erleiden einen einseitigen Druck, der sie von der Platte forttreibt. Dies nun stimmt mit der Beobachtung gut zusammen insofern auch Ahlborn auf das rasche Wechseln des Wirbelbildes aufmerksam macht, aber, da das Strömungsbild nicht stationär (und nicht eindeutig bestimmt) war, konnte ich es nicht zur Berechnung der Drucke einwandfrei verwenden.

Wir kommen nun zum Vergleiche der theoretischen Resultate mit den Versuchsergebnissen. Dabei bezieht sich das Folgende nur auf kleine Winkel β (etwa β zwischen -9 und $+15^0$), was den praktisch wichtigsten Fall darstellt.

Die für ebene Platten berechnete Kraft normal zur Platte (der Druckauftrieb) beträgt $\pi \varrho V^2 \cdot \sin\beta \cos\beta$ pro Flächeneinheit. In bezug auf die Abhängigkeit von β steht dies zwischen dem gewöhnlichen Gesetze der Proportionalität mit $\sin\beta$ und der verbesserten Formel von Duchenim, die Proportionalität mit $\frac{\sin\beta}{1+\sin^2\beta}$ annimmt. Der Zahlenfaktor $\pi = 3{,}14$ dagegen ist beträchtlich zu groß. Für Platten von quadratischer Form ist nach Langley der Zahlenfaktor etwa 1,4, womit auch andere Versuche ziemlich übereinstimmen. Jedoch findet Langley für lange Platten und sehr kleine Winkel β bedeutend größere Faktoren. So für $\beta = 10^0$ etwa 1,7; für $\beta = 5^0$ etwa 2,3; für noch kleinere Winkel β scheint er noch größere Faktoren anzunehmen. Danach würde für kleine Winkel das Versuchsresultat etwa $^2/_3$ und mehr vom errechneten ausmachen, was immerhin in Anbetracht der bei der Theorie vorausgesetzten Vereinfachungen als nicht ganz schlechte Übereinstimmung bezeichnet werden kann. Übrigens ist gerade für kleine Winkel β das Beobachtungsmaterial spärlich.

Für gewölbte Flächen liegen nur Lilienthals Messungen zum Vergleiche vor, die sich auf das Verhältnis $\frac{\text{Pfeil}}{\text{Sehne}} = \frac{1}{12}$, also auf $\alpha = 18^0\,55'$ beziehen. Nehmen wir an, daß Lilienthals Versuche bei 20° Celsius und 30 m Seehöhe angestellt wurden und reduzieren dementsprechend die theoretischen Zahlen, so ergibt sich folgende

Tabelle 4.

I	II Hubkraft bei Lilienthal	III Theoretischer Gesamtauftrieb	IV Komponente des theoret. Druckauftriebs senkrecht zur Strömungsrichtung	V Stirnwiderstand bei Lilienthal	VI Differenz desselben gegen den Betrag bei $\beta = 0^0$	VII Komponente des theoret. Druckauftriebs in der Strömungsrichtung
$\beta = -9^0$	0,20 kg/m²	0,31 kg/m²	0,72 kg/m²	0,90 kg/m²	0,60 kg/m²	0,78 kg/m²
$\beta = -6^0$	1,74	2,29	2,45	0,54	0,24	0,36
$\beta = -3^0$	3,25	4,26	4,30	0,36	0,06	0,09
$\beta = 0^0$	4,96	6,23	6,23	0,30	0,00	0,00
$\beta = +3^0$	7,27	8,18	8,21	0,37	0,07	0,10
$\beta = +6^0$	9,08	10,11	10,20	0,70	0,40	0,39
$\beta = +9^0$	10,43	12,00	12,16	1,12	0,82	0,88
$\beta = +12^0$	11,08	13,87	14,06	1,51	1,21	1,56
$\beta = +15^0$	11,52	15,70	15,86	1,95	1,65	2,44

Die Versuchsergebnisse für die Hubkraft senkrecht zur Strömungsrichtung (in Spalte II) stehen für Winkel β unter 15^0 in ziemlich guter Übereinstimmung mit den errechneten Gesamthubkräften (in Spalte III), wie auch mit den, bei Erlöschen der Saugkraft noch vorhandenen Komponenten des Druckauftriebs senkrecht zur Strömung (Spalte IV). Sehr gut ist die Übereinstimmung in bezug auf den Winkel, für den die Hubkraft Null vorhanden ist; der Versuch wie die Theorie gibt dafür β gleich etwa $-9^1/_2{}^0$ an.

Da die Versuche für scharfe Vorderkante angestellt sind, werden wir das völlige, oder doch fast völlige Erlöschen der Stirnsaugkraft erwarten und daher als theoretischen Stirnwiderstand die Komponente des Druckauftriebs in der Strömungsrichtung ansetzen (Spalte VII). Aus Lilienthals Versuchen folgen für den Stirnwiderstand die Zahlen der Spalte V. Betrachtet man den Stirnwiderstand 0,30 kg/m² für $\beta = 0$, der theoretisch Null sein müßte, als Wirkung der eigentlichen Oberflächenreibung, so sind (Spalte VI) die Differenzen der

Zahlen V gegen 0,30 als die Beträge der zur wesentlich konstanten Oberflächenreibung hinzutretenden Bewegungswiderstände aufzufassen. Diese also sind mit den theoretischen Zahlen von Spalte VII zu vergleichen. Man sieht, daß zunächst die Vorzeichen überall übereinstimmen, andrerseits die Beträge für β kleiner als 15^0 im Ganzen erträgliche Übereinstimmung zeigen. Für $\beta = 15^0$ wird die Übereinstimmung schon viel schlechter.

Aus der Tabelle scheint also hervorzugehen, daß für die untersuchte gewölbte Fläche und für Luftstoßwinkel unter 15^0 die beobachtete Hubkraft 80—90 Prozent der errechneten ausmacht — was mit dem Umstande, daß die theoretischen Vereinfachungen sicher auf zu große Zahlen führen mußten, in Übereinstimmung steht. Auch für den Stirnwiderstand ergeben sich einigermaßen brauchbare Zahlen.

Endlich gibt die Theorie auch für die Lage des Angriffspunktes der wirkenden Kräfte, der praktisch nur sehr unsicher bestimmt ist, einigermaßen befriedigende Resultate. Für die ebene Platte liegt er theoretisch um $^1/_4$ der Breite von der Vorderkante entfernt; wie er bei der gewölbten Schale nach vorn rückt, darüber gibt Tabelle 3 Spalte VI und VII Aufschluß.

VII. Schlussbetrachtungen.

Die im zweiten Paragraphen gegebenen Ansätze lassen sich zur Lösung weiterer Strömungsprobleme benutzen. So erhält man, um nur drei einfach zu behandelnde Probleme von einem gewissen praktischen Interesse zu erwähnen, auf die schon früher hingewiesen wurde, die Strömung um die nebengezeichneter Querschnitte durch Abbildung der Figuren auf die Halbebene t; eine Abbildung, die durch reziproke Radien in bezug auf C und sodann Anwendung der Christoffelschen Formel geleistet wird. Die beiden ersten Probleme sind deshalb wichtig, weil sie von vornherein die unendliche Strömungsgeschwindigkeit an einer scharfen Vorderkante vermeiden, und je nach dem Radius des kleinen Vollkreises, also der Abrundung,

die Wirkung einer solchen noch mehr im Einzelnen zu untersuchen gestattet, als dies im Paragraphen V geschehen ist. Im Verhältnis zu einander geben sie gewissen Aufschluß über die Wirkung der Art des Aufsetzens einer Abrundung. Daß in den toten Winkeln hinter der Abrundung Stagnation stattfindet, ist ganz irrelevant.

Fig. 5.

Fig. 6.

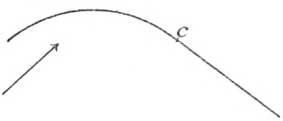

Fig. 7.

Fig. 8.

Das dritte Problem soll die Wirkung einer an die Hinterkante angefügten ebenen Fläche typisch darstellen, und wird zu beurteilen erlauben, wie eine solche Abflachung das Abströmen der Flüssigkeit beeinflußt.

Noch andere Probleme, wie das aus dem ersten und dritten zusammengesetzte nebengezeichnete fordern die Abbildung von Kreisbogendreiecken, die sich nicht in gradlinige Polygone überführen lassen. Ihre Behandlung müßte also nach dem Schwarzschen Verfahren, statt nach der einfachen Christoffelschen Formel versucht werden. Obwohl der prinzipielle Weg dabei vorgezeichnet ist, möchte die Lösung praktisch in solchen Fällen meist schwierig und mühevoll sein; nur wenn ein Problem ganz besonderes Interesse besässe, und nicht in Einzelprobleme einfacherer Art zur angenäherten Berechnung zerlegt werden könnte, wäre diese Behandlung zu emfehlen.

Endlich sei noch auf die Erweiterung des im Paragraphen II Gesagten für den Fall hingewiesen, daß die Ausschließung mehrerer geschlossener Kurven die Ebene z in ein dreifach oder noch mehrfach zusammenhängende Flächenstück verwandelt. Ich habe schon 1902 den Fall behandelt, daß zwei Kreisschalen mit derselben Symmetrieachse in symmetrischer Strömung stehen. Das zweifach periodische Geschwindigkeitspotential führte in der Lösung auf elliptische Integrale, resp. Funktionen, die Lösung wurde für einzelne Fälle bis auf die Zahlen ausgearbeitet, was freilich viel Rechenarbeit erforderte. Die damals angewendete Methode, die sich eigentlich nur als eine Variante der hier an die Spitze gestellten darstellt, bestand in der Abbildung der als Symmetriehälfte gewählten Halbebene z, in der die Strömung gesucht wird, auf ein von Stromgeraden und Äquipotentialgeraden in der Ebene W begrenztes unendliches Flächenstück. Dies wird aber nur der allgemeinen Form nach (nicht also in bezug auf die Längen der Strecken $A'C'$, $C'B'$, $C'D'$ etc. in der Figur) als bekannt angenommen. Die unbekannten Strecken werden durch die Forderung, daß entsprechend bezeichnete Punkte bei der Abbildung sich wirk-

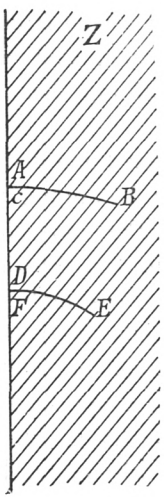

Fig. 9.

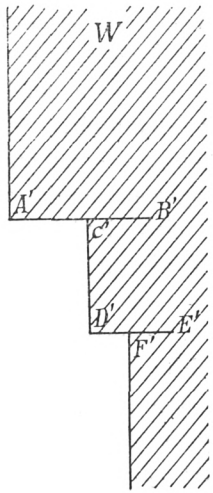

Fig. 10.

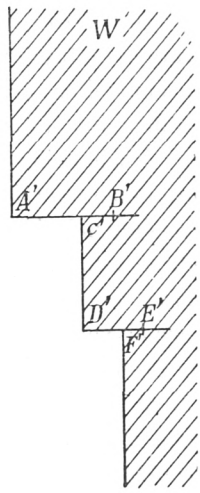

Fig. 11.

lich entsprechen sollen, bestimmt. $A'C'$ und $D'F'$ gaben je die halbe Zirkulation um eine Schale an.

Läßt man nun aber die Abbildung so erfolgen, daß in der Ebene W die den Kanten B und E entsprechenden Punkte nicht in die Ecken, sondern auf beliebig auf den Stromlinien gewählte Punkte B' und E' fallen, so ergeben sich in den Kanten B und E unendliche Strömungsgeschwindigkeiten. Es werde nun auf diese im Unendlichen in der x Richtung verlaufende Strömung eine zweite im Unendlichen in der y Richtung verlaufende zirkulationslose Strömung superponiert; diese ist leicht anzugeben, und liefert gleichfalls in B und E unendliche Geschwindigkeiten. Durch geeignete Wahl der vorher beliebigen Punkte B' und E' kann man nun in B und E, also an den beiden Hinterkanten, Fortfallen der unendlichen Geschwindigkeiten, und endliches Abströmen erzielen. Nicht aber zugleich an den Vorderkanten, für die zwei verschiedene Spiegelungen der beiden superponierten Strömungen zu erfolgen haben, so daß die unendlichen Geschwindigkeiten sich addieren, statt sich fortzuheben. Man hat dann die Lösung für zwei symmetrisch unter einander gestellte Kreisschalen, die von einer beliebigen schiefen Strömung getroffen werden, so daß Abströmen an den Hinterkanten erfolgt, die Vorderkanten aber singulär bleiben.

Das Problem hätte Bedeutung für die Frage nach der gegenseitigen Beeinflußung der beiden Flächen eines Doppeldeckers; eine Frage, die ich 1902 nur für den Luftstoßwinkel Null zu behandeln vermochte. Prinzipielle Schwierigkeiten liegen hier, wenigstens in einzelnen besonders einfachen Fällen, nicht mehr vor; dagegen glaube ich, daß sich die numerische Auswertung sehr mühsam gestalten wird.

Von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus könnte man wenigstens eine Reihe von Problemen auf das Problem der Strömung in einer Ebene, aus der zwei Kreise ausgeschnitten sind, zurückführen. Dies letztere Problem kann auf die analoge Art, wie das vorher besprochene — vielleicht aber auch auf einfacherem Wege — gelöst werden. Statt seiner kann

natürlich auch das Problem der beliebigen, doppelt zirkulierenden Strömung zwischen zwei konzentrischen Kreisen mit einem Grenzpunkt (dem Bild des unendlich fernen Punktes) innerhalb der Ringfläche vorgelegt sein.

Kann man nun ein Paar von geschlossenen Kurven so auf zwei Kreise abbilden, daß auch das Unendliche sich entspricht und die Abbildung im Inneren der unendlichen zweifach zusammenhängenden Fläche (der unendlich ferne Punkt ist dabei nicht als Grenze zu betrachten) singularitätenfrei ist, so hätte man auch die Strömung um die beiden Kurven gefunden. Freilich darf nicht vergessen werden, daß, während jede einzelne Grenzkurve sich ja theoretisch singularitätenlos in der äußeren Fläche auf den Kreis abbilden läßt, im allgemeinen ein ganz beliebiges Paar von Grenzkurven sich überhaupt nicht auf ein Paar von Kreisen derartig abbilden läßt.

Immerhin könnte man wenigstens leicht von zwei Kreisen rückwärts ausgehend, durch Abbildung Kurvenpaare finden, für die man die Umströmung angeben kann. Dagegen würde, um das direkte Problem für gegebene Kurven zu lösen, sofern das überhaupt möglich wäre, eine Erweiterung der Christoffelschen Formel für mehrfach zusammenhängende geradlinige Polygone erwünscht sein.

Daß analoge Betrachtungen für Flächen von noch höherem Zusammenhange, bezogen auf drei oder mehr Kreise und auf hyperelliptische Integrale führend sich zufügen ließen, ist plausibel.

Aber für die praktische Durchführbarkeit eines Lösungsversuches scheint mir nur der Fall, daß eine gemeinsame Symmetrieachse alle Grenzkurven durchschneidet, Hoffnung zu bieten.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1910

Band/Volume: 1910

Autor(en)/Author(s): Kutta Wilhelm

Artikel/Article: Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung 1-58