

Sitzungsberichte

der

506(43 36) 111

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

11111111
1111
11111111

24-14 23 1111

Inhaltsübersicht.

I. Sitzungsberichte.	Seite
8. Januar: Knoblauch und Mollier, Hofmann (über die Ester-, Karbonium- und Oxoniumsalze der Überchlorsäure), Kutta, Pringsheim, Fejér	1
5. Februar: Debye, Günther	5
5. März: v. Gruber, Ohkubo (Virulenz des Milzbrandbazillus)	6
9. März: Öffentliche Sitzung. Ansprache und Mitteilungen des Präsidenten v. Heigel, Nekrologe (v. Neumayer, Engelmann, Newcomb, Kohlrausch, Volhard); Gedächtnisrede auf Carl v. Voit von Frank	11
7. Mai: Rothpletz, Ebert, Dieckmann	33
4. Juni: v. Drygalski	34
2. Juli: Burmester, Lagally	35
5. November: Mollier, v. Dyck, Schmidt, Stübler	36
12. November: Öffentliche Sitzung. Ansprache des Präsidenten v. Heigel, Wahlen (Hofmann, Sommerfeld, v. Gruber; Zeuthen, Hann, Paternò de Sessa, Ciamician, Hermann, Bucher-Wilson, Fletcher, Miers, Osborn, Scott); Festrede von Frhrn. v. Hertling	38
3. Dezember: Rothpletz, Weber, Günther, Muthmann	45
<hr/>	
Verzeichnis der im Jahre 1910 eingelaufenen Druckschriften	49

II. Abhandlungen.		Seite
1. O. Knoblauch u. H. Mollier: Über die spezifische Wärme c_p des überhitzten Wasserdampfes für Drucke bis 8 Atmosphären und Temperaturen von 350° C bis 550° C. (mit 1 Tafel)	1—6
2. W. M. Kutta: Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung	1—58
3. L. Fejér: Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze	1—17
4. S. Günther: Ein Beitrag zur Vorgeschichte der modernen Gewitterkunde	1—22
5. P. Debye: Semikonvergente Entwicklungen für die Zylinderfunktionen und ihre Ausdehnung ins Komplexe	1—29
6. A. Pringsheim: Über Konvergenz und funktionentheoretischen Charakter gewisser limitär-periodischer Kettenbrüche	1—52
7. M. Dieckmann: Funkentelegraphische Empfangsstörung	1—6
8. A. Rothpletz: Über die Ursachen des Kalifornischen Erdbebens von 1906 (mit 2 Tafeln)	1—32
9. E. v. Drygalski: Das Schelfeis der Antarktis am Gaußberg	1—44
10. M. Lagally: Über die Verbiegung geodätischer Netze	1—14
11. M. Schmidt: Koordinatenberechnung und Netzanschlüsse der südbayerischen Dreieckskette (Berichtigungen dazu S. 109)	1—36
12. E. Stübler: Über einige spezielle Bieigungsgruppen	1—13
13. M. Weber: Metamorphe Fremdlinge in Erstarrungsgesteinen (mit 2 Tafeln)	1—38
14. S. Günther: Die Korallenbauten als Objekt wissenschaftlicher Forschung in der Zeit vor Darwin	1—42
15. A. Rothpletz: Meine Beobachtungen über den Sparagmit und Birikalk am Mjöscu in Norwegen (mit 2 Tafeln)	1—66

Sitzungsberichte

der mathematisch-physikalischen Klasse

der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

1910.

Sitzung am 8. Januar.

1. Herr v. LINDE legt eine Mitteilung von OSCAR KNOBLAUCH und HILDE MÖLLIER über die experimentelle Bestimmung der spezifischen Wärme des Wasserdampfes bei 350° bis 550° für Spannungen bis zu 8 Atmosphären vor, welche sich als Fortsetzung der früher mitgeteilten Versuche bis zu 350° darstellt. Die mit neuen Apparaten gewonnenen Versuchsergebnisse bestätigen zunächst in der Nähe der Sättigung die in der früheren Serie gefundenen und bereits in den technischen Gebrauch übergegangenen Werte, wonach mit zunehmender Temperatur c_p von der Sättigungsgrenze ab bis zu einem (bei ungefähr 300° liegenden) Minimum abnimmt, während hiebei zunehmenden Spannungen zunehmende Werte von c_p entsprechen. Weiterhin ergab sich nunmehr von diesem Minimum an ein langsames Wachstum von c_p mit zunehmender Temperatur, wobei der Einfluß des Druckes so abnimmt, daß bei etwa 500° kein über die Grenze der Versuchsfehler hinausgehender Unterschied in den Werten von c_p für Drucke zwischen 2 und 8 Atmosphären mehr besteht. Die Versuche sollen noch auf höhere Drucke — bis zu 20 Atmosphären — ausgedehnt werden.

2. Herr HOFMANN sprach

Über die Ester-, Karbonium- und Oxoniumsalze der Überchlorsäure.

Das nähere Studium der Verbindungen von Überchlorsäure mit Alkoholen, insbesondere mit Glycerinabkömmlingen, hat ergeben, daß diese Ester entsprechend dem hohen Sauerstoffgehalt der Überchlorsäure zu den wirksamsten Explosivstoffen gehören. Der Zerfall, dem die Ester in Berührung mit Wasser unterliegen, beruht auf dem energischen Vereinigungsbestreben der Überchlorsäure mit dem Wasser, das sich in den verschiedenen Hydraten kundgibt.

Solche Säurehydrate kommen nach den neuesten Anschauungen in der Chemie dadurch zustande, daß der Säurewasserstoff sich durch Nebenvalenzen an den Sauerstoff des Wassers bindet. Man spricht daher von säurebindendem oder basischem Sauerstoff. Auch der an Kohlenstoffgruppen gebundene Sauerstoff zeigt solche basische Eigenschaften, wie insbesondere von Baeyer an verschiedenen Beispielen gezeigt hat.

Die Überchlorsäure besitzt nun in ganz besonderem Maße die Fähigkeit, durch Bindung ihres Wasserstoffs an den Sauerstoff der Ketone, Chinone, Aldehyde schön kristallisierte Oxonium- d. h. Sauerstoffsalze zu bilden, die aber durch Wasser wieder gespalten werden, da das Wasser die Säure stärker bindet als die genannten Stoffe der organischen Chemie. Diese lassen sich dementsprechend aus Gemischen als gut kristallisierte überchlorsaure Salze abtrennen und dann aus diesen durch Wasser in reiner Form gewinnen.

Auch für die Behandlung der Frage nach der Natur der Farbstoffe aus der Fuchsinreihe bietet die Überchlorsäure ein wichtiges Hilfsmittel, da ihre Bindung an das zentrale Kohlenstoffatom der Stammsubstanz dieser Farbstoffe, nämlich des Triphenylcarbinols, hervorragend farbgebend wirkt. Bisher hatte man für die Fähigkeit des Kohlenstoffatoms, mit Säuren gefärbte Salze zu bilden, nur wenige Beispiele, die zudem nicht genügend einfach waren, um mit Bestimmtheit auf eine salz-

bildende, farbgebende Valenz des Kohlenstoffs schließen zu lassen. Die durchaus einfach gebauten überchlorsauren Kohlenstoffsalze füllen diese Lücke aus und gestatten zudem den Nachweis, daß entsprechend der Hypothese von v. Baeyer in diesen Kohlenstoffsalzen das zentrale Kohlenstoffatom metallischen Charakter hat. Denn die Hauptkriterien für den metallisch-salzartigen Zustand, nämlich Leitfähigkeit für den galvanischen Strom und parallelgehende Löslichkeit in verschiedenen Solventien, finden sich bei den überchlorsauren Kohlenstoffsalzen besonders stark ausgeprägt.

3. Herr FINSTERWALDER legt vor eine Abhandlung:

Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung. Von Prof. Dr. W. M. KUTTA in Jena.

Es handelt sich um die Strömung der Luft, in welcher sich eine quer zur Strömung unendlich lange, ebene oder schwach gekrümmte, gegen die Richtung der Strömung beliebig geneigte, dünne Platte befindet. Über jene einfache Strömung, bei welcher die Luft dem Hindernis ausweicht und die bei Vernachlässigung der Reibung keinen Gesamtdruck auf dasselbe ausübt, wird eine das Hindernis umkreisende Strömung derart gelagert, daß das Abfließen der Luft an der Hinterkante ohne unendlich große Geschwindigkeit erfolgt. Dadurch entsteht eine dynamische Auftriebwirkung senkrecht zum Luftstrom, welche sich aus zwei Teilen zusammensetzt, von denen der eine senkrecht zur Platte steht und von den beiderseitigen Druckunterschieden herrührt, während der zweite an der angeblasenen Vorderkante durch Saugwirkung in Richtung der Platte zustande kommt. Die bei dieser Strömung an der Vorderkante auftretenden unendlichen Geschwindigkeiten können durch geeignete Abrundung und Verdickung derselben ohne wesentliche Beeinträchtigung der für die Verminderung des Widerstandes nützlichen Saugwirkung vermieden werden. Die so berechneten Auftriebe stehen nach Größe, Richtung und Angriffspunkt in ziemlicher Übereinstimmung mit den Versuchen.

4. Herr PRINGSHEIM spricht:

Über Konvergenz und funktionentheoretischen Charakter gewisser infinitärperiodischer Kettenbrüche.

In einer früheren Mitteilung (Sitzung vom 1. Mai 1909) habe ich die Bedingungen für die Konvergenz von Kettenbrüchen mit infinitärer eingliedriger Periode erörtert. Ich betrachte nunmehr derartige Brüche für den Fall, daß ihre Teilerzähler eine komplexe Veränderliche als Faktor enthalten. Es ergeben sich dabei mit verhältnismäßig äußerst einfachen und elementaren Mitteln u. a. alle diejenigen Resultate, welche für die Gaußschen, Heineschen und Besselschen Kettenbrüche durch sehr viel schwierigere, zum Teil sogar äußerst verwickelte Methoden gefunden worden sind.

5. Herr PRINGSHEIM legt vor eine Abhandlung des Herrn LEOPOLD FEJÉR in Klausenburg:

Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze.

In einer früher in den Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlung über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise hat A. PRINGSHEIM darauf hingewiesen, daß eine Potenzreihe trotz ausnahmsloser Stetigkeit der Randfunktion auf dem Konvergenzkreise noch keineswegs durchweg oder überhaupt zu konvergieren brauche, ohne indessen das wirkliche Vorkommen des als möglich oder sogar als wahrscheinliche zu erachtenden Divergenzfalles an bestimmten Beispielen nachzuweisen. Herr LEOPOLD FEJÉR ist es jetzt gelungen, Potenzreihen zu konstruieren, welche die fragliche Divergenzeigenschaft und zwar sogar an unendlich vielen, überall dicht liegenden Stellen des Konvergenzkreises besitzen.

Sitzung am 5. Februar.

1. Herr A. SOMMERFELD legt eine Abhandlung von Herrn Dr. P. DEBYE vor, betitelt:

Semikonvergente Entwicklungen für die Zylinderfunktionen und ihre Anwendung im Komplexen.

Es handelt sich um asymptotische Darstellungen dieser Funktionen für den Fall, daß Argument und Index als komplexe Größen in vergleichbarer Größenordnung ins Unendliche wachsen, einen Fall, der für mannigfache Probleme der rechnenden Physik von Bedeutung ist.

2. Herr S. GÜNTHER legt für die Sitzungsberichte einen Aufsatz vor:

Ein Beitrag zur Vorgeschichte der modernen Gewitterkunde.

Es wird gezeigt, daß schon während der ersten Hälfte des XIX. Jahrhunderts in Deutschland eine Bewegung im Gange war, welche systematisch Material für eine Erforschung der Gewittererscheinungen zu sammeln und zu verarbeiten bestrebt war und so ganz dieselben Ziele sich gesteckt hatte, die seit 1879 in Bayern und Italien mit großem Erfolge angestrebt worden sind. Zu welchen positiven Ergebnissen man damals bereits gelangt war, wird im einzelnen dargelegt.

Sitzung am 5. März.

Herr MAX V. GRUBER berichtet über Untersuchungen, welche Herr Dr. S. OKUBO betreffs der

Virulenz des Milzbrandbazillus

im Münchener hygienischen Institute ausgeführt hat. Anscheinend sind Kaninchen fast, Meerschweine gänzlich wehrlos gegen Infektion mit vollvirulenten Milzbrandbazillen: es genügt die subkutane Injektion von einem oder einigen wenigen Stäbchen, um das Tier unfehlbar zu töten. Wenn man aber solche hochinfektiöse Milzbrandbazillen, die auf totem Nährboden gewachsen sind, *in vitro* zusammenbringt mit gewissen Zellen und Säften des Kaninchens oder Meerschweins, findet man ein ganzes Arsenal von Schutzaffen. Das Blutserum des Kaninchens ist enorm bakterizid für die Milzbrandstäbchen — ein Kubikzentimeter davon vermag viele Zehntausende in Bruchteilen einer Stunde zu töten —; die polymorphkernigen und die eosinophilen Leukocyten der beiden Tierspezies umklammern oder fressen die Bazillen mit großer Lebhaftigkeit und töten sie dabei ab; die durch Stauung gewonnene Lymphe aus dem subkutanen Zellgewebe wirkt ebenfalls überaus kräftig bakterizid vermöge ihres Gehaltes an dem von Rudolf Schneider im hiesigen Institute entdeckten Leukin.

Die Untersuchungen von Gruber und Futaki haben diesen merkwürdigen Widerspruch aufgeklärt, sie haben zunächst ergeben: 1. daß das Blutplasma des Kaninchens, wie es im Tiere zirkuliert, im Gegensatz zu dessen Blutserum völlig unschädlich für den Milzbrandbazillus ist. Erst bei der Gerinnung des Blutes geben die Blutplättchen das „Plakin“, den für die Milzbrandbazillen tödlichen Stoff ab; 2. daß auch die Leukocyten ihren bakteriziden Stoff, das Leukin, nicht an das Blutplasma abgeben: 3. daß die normale subkutane Lymphe ebenso unschädlich ist, wie das Blutplasma und erst nach ausgiebiger Diapedese und Zuwanderung von Leukocyten durch

das von diesen sezernierte Leukin giftig wird; daß daher von vornherein die Körperkräfte kein Hindernis für die Ansiedlung des Milzbrandbazillus bilden. Bezüglich der Verschiedenheit der Virulenz der Milzbrandbazillenrassen sind Gruber und Futaki aufmerksam geworden auf deren engen Zusammenhang mit der „Kapselbildung“, d. h. der Fähigkeit der Rassen, dicke, auch chemisch von der normalen Membran unterschiedene Hüllen zu bilden, wenn sie in vitro in Blutserum oder Blutplasma gezüchtet werden. Eine virulente Milzbrandrasse bildet hier rasch und ausgiebig Kapseln, eine avirulente kümmerlich oder gar nicht. Wie in vitro bilden die virulenten Milzbrandbazillen auch im subkutanen Bindegewebe Kapseln; höchst beachtenswerterweise im empfänglichen Tiere (Kaninchen, Meerschwein) außerordentlich viel rascher und ausgiebiger als im unempfindlichen (Hund, Huhn). Gruber und Futaki haben dann weiter nachgewiesen, daß hochvirulente Milzbrandbazillen, welche bereits in vitro Kapseln gebildet haben, bei direkter Injektion in die Blutbahn ganz erheblich infektiöser sind als ungekapselte (Dosis letalis minima 15 gegen 1500 Bazillen bei intravenöser Injektion!).

Die weiteren Untersuchungen über die Ursache dieser höheren Virulenz der gekapselten Bazillen haben dann gelehrt, daß zwar die gekapselten Milzbrandbazillen ebenso empfindlich sind gegen die Lösungen von „Plakin“ und „Leukin“, wie die ungekapselten, daß dagegen folgende Unterschiede bestehen: a) ungekapselte Milzbrandbazillen veranlassen im Blute die Blutplättchen zur Ausscheidung von Plakin, die gekapselten tun dies nicht; b) ungekapselte Milzbrandbazillen im subkutanen Bindegewebe veranlassen eine sehr ausgiebige Diapedese von Leukocyten, die dann Leukin ausscheiden, die gekapselten tun dies in sehr viel geringerem Grade; c) die ungekapselten Milzbrandbazillen werden von den Phagocyten energisch umklammert bzw. gefressen, die gekapselten nicht.

Gruber und Futaki sehen daher in der Kapselbildung die Erklärung der Virulenz: vermögen die z. B. ins subkutane Bindegewebe eingebrachten Milzbrandkeime hier rasch Kapseln

zu bilden, dann vermögen ihre gekapselten Nachkommen un-gefährdet von Leukin, Phagocyten und Plakin im Organismus ungestört zu wuchern. Auf die Befähigung zur Kapselbildung kommt es daher vor allem an.

Die neuen Beobachtungen von Dr. Ohkubo sind geeignet, die Richtigkeit dieser Auffassung zu stützen. Dr. Ohkubos Versuche bezogen sich auf zwei Themen:

I. Die Verhütung und Heilung der Milzbrandinfektion durch Pyozyanase. Wie Emmerich und Löw angegeben haben, kann man Kaninchen in der Tat am Leben erhalten, wenn man sie zugleich mit oder auch einige Zeit nach der Infektion mit vollvirulenten Milzbrandbazillen mit Injektionen von sog. Pyozyanase, d. h. der in bestimmter Weise eingedickten und vorbehandelten, bakterienfreien Kulturflüssigkeit des *Bac. pyocyaneus*, zu behandeln beginnt. Übereinstimmend mit den Angaben der genannten Autoren konnte Dr. Ohkubo feststellen, daß es unter diesen Umständen zu einer Massentötung der im Blute reichlich gewucherten Milzbrandbazillen kommt und daß die Abtötung nicht durch Phagocytose, sondern extrazellulär, also offenbar durch gelöste Gifte erfolgt. Um diesen Erfolg zu erzielen, sind allerdings reichliche Mengen von Pyozyanase erforderlich, und es fragte sich daher, ob nicht etwa die Pyozyanase selbst ohne Mitwirkung des Organismus die Milzbrandbazillen tötet. Die Pyozyanase vermag in der Tat ebenso wie andere Bakterien schon *in vitro* gekapselte wie ungekapselte Milzbrandbazillen zu töten; die Versuche Dr. Ohkubos haben aber gelehrt, daß zur Tötung der Milzbrandbazillen eine Konzentration von etwa 6 Prozent erforderlich ist, die im Blute des behandelten Tieres nicht entfernt erreicht wird. Dagegen zeigte es sich, daß Pyozyanase schon in der Konzentration von 1 Prozent die Kapselbildung der Milzbrandbazillen verhindert, ja die fertigen Kapseln wieder auflöst. Damit ist eine befriedigende Erklärung der Schutzwirkung und Heilwirkung der Pyozyanase gegeben. Wenn eine gewisse Konzentration von Pyozyanase im Blute erreicht ist, können die injizierten Milzbrandbazillen

keine Kapseln bilden und verfallen daher der Phagocytose bzw. den von den Leukocyten und Blutplättchen abgesonderten Giften. Hat schon eine Wucherung von Kapselbazillen im Blute stattgefunden, so löst die Pyozyanase wenigstens bei einem Teile von ihnen die Kapseln auf und die entkapselten Bazillen veranlassen nun die Blutplättchen zur Abgabe ihres Plakins, das dann in kurzer Zeit ungeheure Mengen ungekapselter und gekapselter Milzbrandstäbchen vernichtet.

II. Die Schutzwaffen des Meerschweins gegen die Milzbrandinfektion. Da die Blutplättchen des Meerschweins kein Plakin enthalten und daher frisches Meerschweinserum für den Milzbrandbazillus fast unschädlich ist, da die Meerschweinleukocyten arm an Leukin sind und an Meerschweinserum keine bakteriziden Stoffe abgeben, da ferner gekapselte Milzbrandbazillen von den Meerschweinleukocyten nicht angegriffen werden, hatten Gruber und Futaki angenommen, daß gekapselte Milzbrandbazillen durch die Zellen und Säfte des Meerschweins überhaupt nicht nennenswert geschädigt werden können. Weil und Toyosumi haben aber später die Angabe gemacht, daß auch gekapselte Milzbrandbazillen massenhaft abgetötet werden, wenn man sie *in vitro* mit frischem Meerschweinserum und Meerschweinleukocyten zusammenbringt; Phagocytose trete dabei nicht ein.

Dr. Ohkubo fand diese Angaben richtig. Er konnte weiter feststellen, daß die Abtötung der gekapselten Milzbrandbazillen auch dann eintritt, wenn man sie zuerst in dem für sie an und für sich unschädlichen aktiven Meerschweinserum einige Zeit digeriert, dann abzentrifugiert und wäscht und schließlich mit Meerschweinleukocyten zusammenbringt, die in inaktiviertem Meerschweinserum suspendiert sind. Da diese letztere Suspension für solche gekapselte Milzbrandbazillen, welche mit frischem Serum nicht vorbehandelt sind, völlig unschädlich ist, muß also im frischen Serum ein Stoff vorhanden sein (das Alexin?), welches die Milzbrandbazillen so verändert, daß sie nun die Leukocyten zur Abgabe einer bakteriziden Substanz veranlassen. Dr. Ohkubo ermittelte weiter, daß es sich bei

dieser Abgabe um eine wahre Sekretion handelt, die durch den Reiz der präparierten Milzbrandbazillen veranlaßt wird; denn durch Gefrieren oder durch Chloroform abgetötete Leukocyten gaben unter den gleichen Bedingungen solche Stoffe nicht ab.

Nachdem diese starke Wirkung der Leukocyten auf in frischem Serum oder frischem Blutplasma suspendierte gekapselte Milzbrandbazillen festgestellt war, erschien es rätselhaft, wieso trotzdem das Meerschwein der Infektion mit minimalen Dosen vollvirulenter Milzbrandkultur unter ungeheurer Wucherung der Bazillen im Blute rettungslos erliegt. Zuerst dachte man daran, daß vielleicht die Zahl der Leukocyten im zirkulierenden Blute zu gering sei, um die eingesäten Bazillen abzutöten. Die Versuche ergaben aber, daß ca. 1700 Leukocyten pro 1 cmm Blutplasma bereits genügen, um die eingesäten Milzbrandbazillen völlig abzutöten, während im zirkulierenden Meerschweinblute 9000—10000 Leukocyten pro cmm vorhanden sind. Die Menge der lieferbaren bakteriziden Substanz würde daher völlig genügen, um die Ansiedlung des Milzbrandbazillus unmöglich zu machen. Die Aufklärung des Rätsels wurde schließlich durch Schüttelversuche erbracht. Wenn man gekapselte Milzbrandbazillen, Leukocyten und Plasma oder Serum in denselben Mengenverhältnissen, wie sie beim ruhigen Stehen *in vitro* zum vollständigen Untergange der Milzbrandbazillen führen, im Schüttelapparat zusammenbringt, sieht man üppige Wucherung der Milzbrandbazillen eintreten. Die Leukocyten geben also nur dann ihre bakterientötenden Stoffe ab, wenn sie mit den durch das Plasma präparierten Milzbrandstäbchen in unmittelbarem Kontakt kommen, wie das beim ruhigen Stehen *in vitro* auch ohne Phagocytose geschieht. Im zirkulierenden Blute aber gleiten die Leukocyten und die gekapselten Stäbchen aneinander rasch vorüber und die Stäbchen bleiben ungeschädigt. Ganz anders, wenn ungekapselte Milzbrandstäbchen in die Blutbahn gelangen. Diese werden, wie z. B. die mikroskopische Beobachtung von Ausstrichpräparaten und Schnitten der Lunge nach Injektion von Milzbrandbazillen

in die Iugularis lehrt, in kürzester Zeit von den Leukocyten umklammert und dann selbstverständlich auch getötet. Die Nachprüfung der Angaben von Weil und Toyosumi durch Dr. Ohkubo hat somit die hohe Bedeutung der Kapselbildung des Milzbrandbazillus für seine Virulenz neuerdings in helles Licht gesetzt.

Öffentliche Sitzung

zur Feier des 151. Stiftungstages

am 9. März.

Die Sitzung eröffnete der Präsident der Kgl. Akademie der Wissenschaften Herr K. Th. von Heigel mit folgender Ansprache:

Sogar auf die Gefahr, daß die häufige Wiederholung in meinen Berichten den verehrten Hörern nicht erquicklich erscheinen mag, muß ich es als hochehrfroh bezeichnen, daß ich immer wieder mitzuteilen habe: Auch im abgelaufenen Jahre sind sowohl der Akademie, als den damit verbundenen Sammlungen und Instituten beträchtliche Stiftungen und Schenkungen zugewendet worden.

Man kann ja Gelehrte nicht selten darüber klagen hören, daß von dem Reichtum, den das neue Deutschland durch den Aufschwung von Handel und Industrie erworben hat, der Wissenschaft nur wenig zugute käme! „Der deutsche Reichtum“, schrieb erst unlängst Ernst Darnell in der Internationalen Wochenschrift, „hat sich noch nicht zu dem Empfinden durchgerungen, daß es auch für ihn ein nobile officium ist, die geistige Machtstellung seines Landes freigebig zu fördern!“

Solche Klagen können aber sicherlich nicht laut werden in einer Stadt, zu deren kostbarsten Schätzen schon jetzt das Deutsche Museum zählt, das größtenteils durch die Freigebig-

keit von Gönnern der Wissenschaft und Technik geschaffen wird, und auch für die Sammlungen des Staates haben wir, wie meine Eingangsworte beweisen, fast niemals vergeblich die Opferwilligkeit unsrer Mitbürger angerufen.

Eine wahrhaft fürstliche, zu wärmstem Dank verpflichtende Gabe, ein Legat im Betrag von einer halben Million Mark, erhielt unsre Akademie von dem vor anderthalb Jahren gestorbenen Rentner Albert Samson aus Berlin, der aus reiner Liebe zur Wissenschaft sein gesamtes Vermögen zur Förderung der Erforschung des Ursprungs, der urgeschichtlichen und der geschichtlichen Entwicklung der Moral und der Moralgesetze bestimmte. Noch ist das Geschäft der Erbschaftsübernahme und der Versteuerung, das der Berliner Akademie als Universalerbin obliegt, nicht völlig erledigt, doch der weitaus größte Teil der uns zugedachten Summe ist bereits in unsrem Besitz und trägt stattlichen Zins. Demnächst soll ein Organisationsplan über die Verteilung des Arbeitsstoffes und der für die einzelnen Aufgaben nötigen Summen entworfen werden, und wir dürfen hoffen, daß biologische und psychologische, ethnologische und kulturgeschichtliche Forschung aus der Spende Samsons ersprießlichen Gewinn ziehen wird. Vor allem ist zu begrüßen, daß wir dadurch instand gesetzt sind, kräftiger zur Heranbildung junger Kräfte zu wissenschaftlicher Arbeit beizutragen.

Wenn jemand sticheln wollte, daß ein in Brüssel lebender Rentner aus Berlin zufällig nach München kommen mußte, um der Münchener Akademie ein namhaftes Geschenk zuzuwenden, so vermag ich den Spott leicht abzuwehren. Es reicht mir zu hoher Freude, daß ich ermächtigt bin, hier die erste Kunde zu geben von einer neuen Stiftung, die sich der Münchener Bürgerstiftung zu Ehren Pettenkofers würdig an die Seite stellt, an idealem Wert eine Morgansche Millionenschenkung weit übertreffend. Eine Gesellschaft hochgesinnter Mitbürger ist zusammengetreten, um mit vereinten Kräften „die Kunstsammlungen des Staates, künstlerische, wissenschaftliche und solche Bestrebungen, welche der Heimatpflege dienen, zu

unterstützen und zu fördern“. Dem „Bayerischen Stiftungsfonds für Kunst, Wissenschaft und Heimatpflege“, dessen Satzungen das K. Kultusministerium bereits genehmigt hat, sind bisher 15 Mitglieder beigetreten, deren jedes sich verpflichtet hat, mindestens 5 Jahre lang einen jährlichen Beitrag von 3000 Mark zu leisten. Nach den Satzungen ist zunächst eine bestimmte Summe für Kunstzwecke ausgesetzt. Jährlich sollen mindestens 20 000 Mark zur Erwerbung von Kunstwerken für die Staatsgalerien bereitgestellt und überdies 10 000 Mark an den Museumsverein zu gleichem Zweck übergeben werden. Es stehen somit vorerst nur noch 15 000 Mark jährlich zu freier Verfügung, doch mit jedem neu eintretenden Mitglied steigert sich diese Summe, und schon jetzt besteht Hoffnung, die Mitgliederzahl auf 20 zu erhöhen. Sobald dies der Fall sein wird, entfallen jährlich 30 000 Mark zur Unterstützung von Wissenschaft und Heimatpflege, abgesehen davon, daß der Museumsverein auch schon bisher unsrer hoffnungsvoll aufblühenden Sammlung antiker Kleinkunst, dem Antiquarium, wertvolle Neuerwerbungen ermöglicht hat. Schon jetzt ist also, kann man sagen, ein Vermögen von 200 000 Mark, im Falle des erhofften Zuwachses von 300 000 Mark zur Unterstützung der staatlichen Sammlungen bereitgestellt. Die Verfügung über die Vereinsmittel steht der Mitgliederversammlung und einem aus Sachverständigen gebildeten Arbeitsausschuß zu. Anträge von anderer Seite werden nicht berücksichtigt.

Ich bin der Zustimmung aller Lichtfreunde sicher, wenn ich den Sozietären des wahrhaft patriotischen und auf der Höhe der Zeit stehenden Unternehmens herzlichen Dank ausspreche. Die Akademie ist sich der Verpflichtung, die ihr durch die Munifizienz ihrer Gönner auferlegt wird, wohl bewußt und wird eifrig und treu ihre wichtigste Aufgabe: Durchführung von Arbeiten, denen die Kräfte des einzelnen nicht gewachsen sind, zu erfüllen suchen.

Seit unsrer letzten Festsitzung verlor die Akademie ein allverehrtes Ehrenmitglied, Seine Königliche Hoheit Dr. KARL THEODOR, Herzog in Bayern, der am 30. November 1909 in Bad Kreuth aus dem Leben schied. Schon seit 1875 durfte ihn die Akademie zu den ihren zählen; Pettenkofer war es, der ihn auf Grund ernster und erfolgreicher Studien in Physiologie und Anatomie in Vorschlag brachte. Weit über Bayerns und Deutschlands Grenzen hinaus ist bekannt, wie dieser Fürst in der Folge seine Liebe zur Wissenschaft offen dadurch bekundete, daß er sich selbst in die Reihe ihrer Diener stellte und als Augenarzt drei Jahrzehnte lang eine segensreiche Wirksamkeit entfaltete. Der unermüdlige Pflichteißer, womit er diesem Berufe oblag, sein ritterliches, wahrhaft vornehmes Wesen, sein warmes Vaterlandsgefühl haben ihn allen Deutschen ehrwürdig gemacht, und auch in unsrer Mitte wird sein Andenken immer in hohen Ehren gehalten werden.

Auch eine Reihe von Kollegen hat der Tod in den letzten Jahren hinweggerafft. Gerade die vollsten und reifsten Ähren hat der unerbittliche Schnitter weggemäht.

Vor drei Jahren wurde uns entrissen LUDWIG TRAUBE, der große Philologe, der in seinen Werken über Entwicklung von Sprache und Schrift den Sammlerfleiß und die Urteilschärfe eines Mauriners mit dem Feinsinn eines Künstlers verband, ein schneidiger Gegner in Verteidigung seiner Forschungsergebnisse und auch ein Held im Kampfe mit hoffnungslosem Leiden, sonst aber weich, empfindsam, eine miniosenhafte Natur, ein goldenes Herz.

Bald nach ihm fand ein jähes Ende ADOLF FURTWÄNGLER, eine Herrenindividualität in Wissenschaft und Leben, ein gründlicher Kenner und schöpferischer, kraftvoller Könnler, ein kühner Forscher und glücklicher Finder.

Und wieder nach kurzer Zeit erlitten Akademie, Universität und Wissenschaft einen schweren Verlust durch den Tod KARL KRUMBACHERS. *Literis inserviando consumtus!* Von be-

rufenerer Seite wird dargelegt werden, wie von ihm ein neues Reich des Wissens erobert wurde. Mochte der ungeordnete, ungesichtete Quellenstoff noch so beängstigend sich auftürmen, — der tapfre Schwabe forcht sich nit! Durch zähe, unermüdliche Arbeit wurde er der Begründer einer byzantinisch-neugriechischen Philologie. Mit liebevoller Ausdauer hegte und pflegte er den Setzling, der unter seinen Händen schon zum kräftigen Bäumchen heranwuchs, bis der Tod dem Gärtner den Spaten aus der Hand nahm.

Von anderer Art waren die in den letzten Jahren von uns geschiedenen Vertreter der mathematischen und naturwissenschaftlichen Disziplinen; aus ihrem Schaffen weht uns die scharfe, reine Luft der Empirie entgegen. Das Streben, die Naturgesetze durch Versuche festzustellen, und das Rechnen mit realen Werten treten an die Stelle der von den Erfahrungserscheinungen unabhängigen Wahrheitsforschung und der Einbildungskraft.

Die Wirksamkeit des hochverdienten Mathematikers GUSTAV BAUER ist in diesem Kreise schon beleuchtet worden, den Physiologen KARL VON VOIT wird uns die heutige Festrede vor Augen bringen. Nur einen kleinen, aber — wie ich glaube — nicht uninteressanten Beitrag zur Würdigung des Gelehrten und Menschen möchte auch ich mir zu bieten erlauben.

Durch einen Zufall wurde mir bekannt, daß unsre Staatsbibliothek einen Briefwechsel von Liebig, Pettenkofer und Voit verwahrt, der auf die wissenschaftliche Tätigkeit und die Eigenart der drei Gelehrten helles Licht wirft. Liebig erblickte in Behauptungen, welche Karl Voit im Dezember 1869 in einem Vortrag über den Nährwert des Fleischextrakts aufgestellt hatte, einen gegen sich gerichteten Angriff, und es kam darüber zu einer literarischen Fehde, die einen ziemlich gereizten Charakter annahm, wenn auch selbstverständlich von solchen Männern nur mit ritterlichen Waffen gekämpft wurde. Liebig, der damals einen schrankenlosen Prinzipat im geistigen Leben Münchens behauptete, appellierte an seinen Freund Pettenkofer, doch

dieser trat mit rühmlichem Freimut für den jüngeren Forscher ein. In einem herrlichen Briefe vom 25. Dezember 1869 untersucht er ausführlich alle in Betracht kommenden wissenschaftlichen Fragen und kommt zum Schlusse, daß ihm auf dem Gebiet der Pflanzenernährung Liebig als erste Autorität gelte, auf dem Gebiet der Ernährung der Tiere und des Menschen aber Voit, wenn dieser auch freilich die Methode der Forschung Liebig zu verdanken habe. „Sie können stolz auf ihn sein, er ist Ihr bester Schüler; er fördert die von Ihnen angeregten Fragen wirklich vorwärts und bringt etwas Neues heraus. Alle seine Arbeiten sind so voll Gewissenhaftigkeit und tiefem Ernst, daß sie als Muster aufgestellt werden dürfen!“ . . . Liebig möge abstehe von einem Kampf, bei welchem ihm kein Sieg winke. „Unfehlbar ist kein Papst, und unbezwinglich kein Napoleon. Derselbe Feldherr, der mit noch wenig geübten Streitkräften in Italien und Deutschland jeden Widerstand siegreich niederwarf, wurde trotz des auserlesensten Heeres in Rußland besiegt, wo Verhältnisse mitwirkten, die nicht vorgesehen waren. . . . Ein Mann von Ihrer Größe, der in der Wissenschaft eine Geschichte hat, muß auch Mäßigung haben, und Leidenschaft darf ihn nicht unbesonnen machen!“

Liebig fühlte sich durch die freimütigen Worte Pettenkofers und durch den hartnäckigen Widerstand Voits verletzt, und es bestand mehrere Jahre zwischen den Kollegen eine peinliche Spannung. Als aber Liebig von schwerer Krankheit befallen wurde, ließ ihm, wie er zu seinem Freunde Nußbaum sagte, der Gedanke, mit seinem liebsten Schüler zerfallen zu sein, keine Ruhe, und es kam zu aufrichtiger Versöhnung. Voit selbst erzählt darüber in dem Dankschreiben, das er an das Kuratorium der Liebig-Stiftung richtete, die ihm 1892 die goldene Liebig-Medaille für Verdienste um die Landwirtschaft verliehen hatte. „Es war einer der erhabensten Momente meines Lebens, als der große Forscher mich bitten ließ, ihn zu besuchen, und dabei einen Ausgleich der Gegensätze herbeiführte: wir erkannten, daß wir beide nur die Wahrheit zu finden gesucht hatten. Bis an sein Lebensende verband uns von da

ab gegenseitige Hochachtung, ja, ich darf sagen, aufrichtige Freundschaft!“

Auch dem Verhältnis Voits zur Akademie möchte ich noch ein herzlich empfundenes Dankeswort widmen. „Jeder Verein“, sagt Harnack in seiner Geschichte der Berliner Akademie, „braucht mindestens ein Mitglied, in welchem sich der Vereinsgedanke gleichsam verkörpert und dessen ganzes Interesse in der Sorge für den gemeinsamen Zweck aufgeht.“ Dieser Mann war für die Münchener Akademie um die Wende des neunzehnten Jahrhunderts Karl Voit, seit 1865 Mitglied, von 1882 bis zu seinem Tode Sekretär der mathematisch-physikalischen Klasse. Er war mit ganzer Seele bei unsrer Sozietät und kannte keine höhere Ehre, als ihren Dienst; ich möchte in Taines Sinn die Pflichttreue als die *faculté maitresse* in Voits Wesen bezeichnen. Still und stetig, wie das Schwinghämmerchen in der Brust des Menschen, wirkte er in unsrem Kreise, dessen Mittelpunkt er war, obwohl er selbst abgelehnt hatte, an die Spitze zu treten.

Möge es unsrer Akademie nie an solchen „Ältesten“ fehlen, an Männern, deren Alter, wie sogar der Spötter Voltaire ehrfurchtsvoll sagt, „durch Wissen und Erfahrung würzig wird, wie edelster Wein“!

Von Unterstützungen wissenschaftlicher Unternehmungen durch die Kgl. Akademie der Wissenschaften sind folgende bekannt zu geben:

Aus dem Mannheimerfonds:

1. dem Konservatorium des Botanischen Museums zur Teilnahme an Herbariumsubskriptionen 500 M.;

2. dem Pflanzenphysiologischen Institut zur Ergänzung des Kryptogamenherbars 500 M.;

3. dem Konservatorium der anthropologisch-prähistorischen Sammlung zur Erwerbung paläolithischer Werkzeuge aus Frankreich 400 M.;

4. dem Konservatorium des Münzkabinettes zur Erwerbung mittelalterlicher Münzen und einer hervorragenden burgundischen Medaille 2500 M.;

5. dem Konservatorium des Ethnographischen Museums zur Erwerbung mohammedanischer, japanischer und mittelamerikanischer ethnographischer Gegenstände 5000 M.

Aus dem Etat für naturwissenschaftliche Erforschung des Königreichs:

1. dem Konservatorium der mineralogischen Sammlung zur Aufsammlung alpiner Mineralien 400 M.;

2. dem Konservatorium der geologisch-paläontologischen Sammlung zu Aufsammlungen in Bayern und den angrenzenden Gebieten 800 M.;

3. der Ornithologischen Gesellschaft zur Fortsetzung der methodischen Erforschung des Vogelzuges in Bayern 400 M.

4. dem Konservatorium der zoologischen Sammlung zur Durchforschung der Konchylien- und Vogelwelt oberbayerischer Moore 800 M.;

5. Dr. Familler zur Fortsetzung seiner Moosforschungen 300 M.;

6. dem Konservatorium des Botanischen Gartens für Versuche im Alpengarten auf dem Schachen 500 M.

Aus dem Etat für Beschickung internationaler Kongresse:

1. für Professor Otto Maas zum Besuch der Eröffnung des Ozeanographischen Museums und des damit verbundenen internationalen Kongresses 150 M.;

2. Für Kustos Hellmayr zum Besuch des V. Internationalen Ornithologenkongresses in Berlin 150 M.

Aus der Münchener Bürger- und Cramer-Klett-Stiftung:

1. Professor Dr. Birkner zu prähistorischen Studien und Untersuchungen in Frankreich und Nordspanien 1400 M.;

2. dem Konservatorium der anatomischen Anstalt zu embryologischen Untersuchungen an *Testudo graeca* durch Dr. Hasselwander in Dalmatien 1500 M.;

3. Professor Franz Neger in Tharandt zur Untersuchung symbiotischer Verhältnisse an Käfern und Ameisen in Dalmatien 500 M.;

4. Konrektor Hermann Stadler in Ingolstadt zur Herausgabe der zoologischen Schriften des Albertus Magnus 300 M.;

5. Professor Dr. Goldschmidt zu experimentell-zoologischen Untersuchungen in Neapel 500 M.;

6. dem Universitätsprofessor Dr. Rieder in München zu kinematographischen Untersuchungen am Magen lebender Menschen 1000 M.;

7. dem Professor Dr. J. B. Messerschmitt in München zu luftelektrischen Messungen 800 M.;

8. dem Professor an der Tierärztlichen Hochschule Dr. Giesenhagen in München zur Untersuchung der Diatomeenablagerungen in der Lüneburger Haide 400 M.

Aus der W. Koenigs-Stiftung zum Adolf von Baeyer-Jubiläum:

1. Professor Dr. Otto Dimroth zur Fortsetzung seiner Arbeiten über Cochenille 1000 M.;

2. Professor Dr. Hofmann zu Arbeiten über Perchlorate 500 M.;

3. Professor Dr. Wieland zur Beschaffung von Material für Experimentaluntersuchungen über aromatische Hydrazine 400 M.;

4. Dr. Wilhelm Schlenk zu Studien über Triarylmethyle 500 M.;

5. Exzellenz von Baeyer zwecks Forschungen über die Farbstoffe der Triphenylmethangruppe 1000 M.

Aus dem Therianosfonds:

1. dem Professor Dr. A. Heisenberg in München als Preis für sein Werk „Grabeskirche und Apostelkirche. Zwei Basiliken Konstantins“ 800 M.;

2. dem Professor Dr. H. Bulle in Würzburg und Dr. E. Fiechter in München zu architektonischen Untersuchungen in Delphi 1500 M.;

3. dem Professor Heisenberg als Unterstützung bei der Herausgabe der Byzantinischen Zeitschrift 1500 M.;

4. dem Professor Dr. G. N. Politis in Athen zur Fortsetzung seiner Sammlung der volksmäßigen Überlieferungen Neu-Griechenlands 1000 M.;

5. dem Professor K. Reichhold in München zur Fortsetzung des Werkes „Griechische Vasenmalerei“ 1000 M.;

6. dem Dr. N. Veis in Athen zur Fortsetzung seiner Forschungen in Thessalien und Mazedonien 300 M.;

7. dem Dr. F. Versakis in Athen zu architektonischen Aufnahmen am Südbahngang der Akropolis 300 M.;

8. dem Dr. P. Marc in München für die Zwecke des Corpus der griechischen Urkunden des Mittelalters und der neueren Zeit 2000 M.

Es folgten die Nekrologe der Klassensekretäre.

Die mathematisch-physikalische Klasse hat fünf korrespondierende Mitglieder verloren.

Ein an Ehren und Erfolgen reiches, auch durch seinen äußeren Verlauf sehr merkwürdiges Leben endigte am 24. Mai 1909 mit dem Tode GEORG V. NEUMAYERS.

Geboren am 21. Juni 1826 zu Kirchheimbolanden in der Pfalz studierte er an der alten polytechnischen Schule und der Universität in München Mathematik und Physik und wurde 1849 Assistent an der Münchener Sternwarte. Angeregt durch die Schriften des berühmten Nationalökonomen Friedrich List, des Vorkämpfers für Deutschlands wirtschaftliche und politische Einigung, begeisterte er sich für die Entwicklung des Seeverkehrs. Um sich mit diesem vertraut zu machen verheuerte er sich 1850 in Hamburg als gemeiner Matrose und tat zwei volle Jahre auf Reisen nach Südamerika und Australien harte Dienste, wobei er sich das Patent als Steuermann erwarb. Durch Justus von Liebig wurde König Max II. auf Neumayer aufmerksam. Es wurden ihm die Mittel zur Begründung eines Observatoriums für meteorologische und erdmagnetische For-

schungen in Melbourne zur Verfügung gestellt. Dort hat Neumayer zunächst als Privatmann, später im Dienste der Kolonialregierung, nicht nur eine Reihe wichtiger Untersuchungen ausgeführt, er beteiligte sich auch erfolgreich an der geographischen Erforschung des damals noch wenig bekannten australischen Kontinentes. 1864 kehrte er nach Europa zurück.

In dem neubegründeten deutschen Reiche harrten seiner große Aufgaben. Als Hydrograph und Admiraltätsrat trat er 1872 in das neubegründete hydrographische Institut in Berlin. Nach seinen Entwürfen wurde 1876 die deutsche Seewarte (vorher v. Freedens norddeutsche Seewarte) in Hamburg ausgestaltet, welche er bis 1903 mit glänzendem Erfolge leitete. Sein Verdienst ist es in erster Linie, daß dieses Institut der Wissenschaft wie der Technik so reiche Früchte darbot. Aber sein Tatendrang war auch damit nicht erschöpft. Er beteiligte sich bei der Organisation der internationalen Polarforschung und wirkte durch die von ihm herausgegebene „Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen“ höchst anregend auf die Erforschung auch anderer Gebiete der Erde.

Seit 1894 wirkl. geheimer Admiraltätsrat, im Besitze der höchsten Ehren, zog sich Neumayer erst vor wenigen Jahren vom Amte zurück. In Neustadt, wo er, der unvermählt Gebliebene, mit einer verwitweten Schwester zusammenleben konnte, nahm er seinen Wohnsitz. Nunmehr sah er es als seine Lebensaufgabe an, für die Popularisierung der Naturwissenschaften in seiner Heimatprovinz eifrigst zu wirken und als Ehrenpräsident der „Pollichia“, des Naturforschenden Vereines der Rheinpfalz, deren Geschäfte zu fördern. Mit ungebrochener Rüstigkeit des Körpers und Geistes vermochte er noch den gewaltigen Anforderungen gerecht zu werden, welche im Juni 1906 anlässlich seines achtzigsten Geburtstages an ihn gestellt wurden. Ganz kurz vor dem Ende erst meldeten sich wirklich bei ihm die Beschwerden des hohen Alters.

Als Begründer der deutschen nautischen Wissenschaft und verdienstvoller geophysikalischer Forscher wird dieser Sohn des Binnenlandes im Gedächtnis der dankbaren Nachwelt weiterleben.

THEODOR WILHELM ENGELMANN wurde am 14. November 1843 in Leipzig als Sohn des Verlagsbuchhändlers Wilhelm Engelmann geboren. Durch seinen Onkel J. Viktor Carus und die reichen Anregungen, die er in seinem Vaterhause empfing, wurde sein Interesse für die Naturwissenschaften geweckt. Von 1861 studierte er in Jena, Heidelberg, Göttingen und Leipzig Naturwissenschaften und Medizin und promovierte 1867 in Leipzig. Dann wurde er Assistent des Physiologen Donders in Utrecht, erhielt 1871 eine besonders für ihn eingerichtete Professur für allgemeine Biologie und Histologie und wurde bald der Nachfolger von Donders. Im Jahre 1897 folgte er, wenn auch schweren Herzens, dem Rufe nach Berlin auf den Lehrstuhl von Johannes Müller und Du Bois Reymond, den er bis zu seinem Tode inne hatte.

Die erste Arbeit des 18 jährigen Theodor Wilhelm Engelmann bezeichnete, wie so oft, den Weg, den die spätere wissenschaftliche Tätigkeit des Forschers während seines ganzen Lebens genommen hat. Sie handelt über die Naturgeschichte der Infusorien. Die Probleme der Bewegungsvorgänge im tierischen Organismus und der Leitung der Erregung im Nerven- und Muskelsystem beschäftigten ihn zeitlebens. Er verfolgte sie nicht bis zur Aufklärung ihres Zusammenhangs mit physikalischen und chemischen Erscheinungen, sondern nahm die Eigenschaften der Kontraktilität und Irritabilität für die Organismen als gegeben an und suchte diese Prinzipien in ihren verschiedenen Einzelformen nachzuweisen und unter diesen den Zusammenhang zu ermitteln. Er hielt es nicht für richtig, eine Theorie dieser Prinzipien aufzustellen, die nur einem Teil der vielgestaltigen Erscheinungen gerecht wurde. So untersucht er schon sehr frühe die Anatomie und Physiologie der Flimmerzellen, dann die feinere Struktur der quergestreiften Muskeln und ihre Veränderung bei der Tätigkeit, die sich hauptsächlich in der Änderung der Doppelbrechung dokumentiert. Nach ihm ist der doppelbrechende Bestandteil des Muskels, der eigentlich tätige, die Kontraktion ausführende. Die Veränderungen, die er in dem Verhältnis zwischen der einfachen

brechenden und doppelbrechenden Substanz während der Kontraktion beobachtete, bestimmten ihn zu einer Aufstellung einer Theorie der Muskelkontraktion, nach der die Kontraktion durch die Quellung der einen auf Kosten der anderen Substanz erzeugt würde. Die Theorie ist von ihm durch Modellversuche gestützt, aber nicht quantitativ ausgebaut worden.

Ein großer Teil der wissenschaftlichen Tätigkeit Engelmanns war der Erforschung der periodischen Tätigkeit der glatten und der Herzmuskulatur gewidmet. Schon die Beobachtung der Flimmerzellentätigkeit leitete ihn auf dies Gebiet. Bald darnach untersuchte er die rhythmischen Kontraktionen des Ureters des Kaninchen und glaubte festgestellt zu haben, daß sie ihre Impulse nicht von Erregungen des Nervensystems bekämen, sondern aus sich selbst schöpften. Rhythmik und Leitung der Erregung sollten in dem Muskel selbst zustande kommen. Nachdem er dies einmal hier erkannt hatte, übertrug er diese Anschauung, die sogenannte myozene Theorie, auch auf den Herzmuskel. Durch eine Reihe sehr sorgfältiger Untersuchungen über den Ursprung der Herzreize und die Fortleitung der Erregung in dem Herzen suchte er seine Annahme zu stützen. Von ihnen ist besonders bemerkenswert die Methode, durch die in einem bestimmten Fall entschieden werden kann, wo der Ursprungsort der rhythmischen Erregungen sich befindet. Diese Untersuchungen, für die er einen Vorläufer in dem englischen Physiologen Gaskell hatte, machten seinen Namen weithin bekannt, da die praktische Medizin wichtige Folgerungen aus ihnen ziehen konnte.

Allgemeine biologische Bedeutung besitzen seine Forschungen über Phototaxis und Chemotaxis, d. h. die Anlockung von niederen Organismen durch das Licht oder bestimmte Stoffe. Er ist der Entdecker der Chemotaxis, welche eine so große biologische Bedeutung gewann und später namentlich durch die Untersuchungen von W. Pfeffer und seinen Schülern näher untersucht wurde.

Eine ganze Reihe von Arbeiten Engelmanns bewegen sich auf botanischem Gebiete. Er untersuchte die Bewegungen der

Oszillarien und Diatomeen. namentlich aber beschäftigte ihn der Zusammenhang der Farbe der Pflanzen mit der Kohlen-säureassimilation. Er ist es, welcher die „Bakterienmethode“ zum Nachweis kleiner Sauerstoffmengen einführte und die Anschauung zu begründen suchte, daß es stets die zur eigenen Farbe komplementären Lichtstrahlen sind, welche hauptsächlich auf die Sauerstoffausscheidung einwirken. Daraus ergab sich dann auch eine Beziehung der Farbe der Algen mit ihrem Vorkommen. Die gelben und braunen Meeresalgen gehen in größere Tiefen als die grünen, aber nicht so tief wie die roten, welche in Tiefen leben, in denen die grünen und blaugrünen Strahlen eine relativ viel größere Intensität haben, als die roten und gelben.

Engelmanns Untersuchungen sind mit äußerster Sorgfalt durchgeführt, so daß die von ihm gemachten Entdeckungen, wenn auch über seine Theorien noch nicht endgültig abgeurteilt werden kann, ihren unvergänglichen Wert behalten.

O. Frank und K. G.

SIMON NEWCOMB. Mit dem am 12. Juli 1909 gestorbenen Astronomen Simon Newcomb schied wohl die markanteste wissenschaftliche Persönlichkeit Amerikas aus dem Leben.

Geboren am 12. März 1835 in Wallace (Nova Scotia) stammte er aus einer der ältesten Familien, welche von England nach Amerika ausgewandert waren. Im Alter von 22 Jahren bereits Assistent beim Nautical Almanac, wurde er schon 3 Jahre später Professor der Mathematik in der U. S. Navy und dem Naval Observatory in Washington attachiert. Im Jahre 1877 übernahm er die Leitung der Institution des amerikanischen Nautical Almanac, deren Direktor er bis zu seiner Pensionierung im Jahre 1897 war. Von da bis zu seinem Tode lebte er in Washington in regster wissenschaftlicher Tätigkeit bis zum letzten Augenblick, dabei oftmalige Reisen fast in alle Länder Europas unternehmend.

Es ist unmöglich die fast einzigartige Stellung Newcombs in der Wissenschaft in wenigen Worten darzustellen. Neben

seinen großartigen Leistungen in der Astronomie, die ihn in die Reihe der größten Forscher der zweiten Hälfte des 19. Jahrhundert stellen, war er Meister der populären Darstellung, Verfasser mathematischer und astronomischer Lehrbücher, griff in nationalökonomische Fragen ein, interessierte sich für psychologische Dinge und selbst dichterische Gestaltung war ihm nicht fremd. Newcomb war deshalb wohl mit Recht der Stolz seiner Landsleute und wenn es galt, einen Amerikaner hervorzuheben, so dachte jeder wohl zuerst an ihn. Es gibt keine angesehene Akademie oder gelehrte Körperschaft auf der ganzen Welt, die es versäumt hätte Newcomb zum Mitgliede zu ernennen; die Aufzählung der Namen aller Institutionen, die ihn auf die eine oder andere Weise ehrten, würde schon Seiten füllen.

Seine wissenschaftliche Produktivität innerhalb der exakten Wissenschaften dürfte ihresgleichen suchen. Man muß wohl schon bis Cauchy zurückgehen, um ähnliches zu finden. Freilich hatte Newcomb bei vielen seiner Arbeiten die Hilfe mehr oder weniger hervorragender Gehilfen in Anspruch nehmen können, die nach des Meisters Anleitung die Bearbeitung des zu benutzenden Beobachtungsmaterials auszuführen hatten. Aber die großen Mittel, die ihm hierbei, wenigstens viele Jahre hindurch, zur Verfügung standen, verkleinern sein Verdienst in keiner Weise. Vielmehr offenbaren sie uns eine neue Seite der vielseitigen Begabung dieses Genius: ein ungewöhnliches Organisationstalent.

Ohne die Leistungen Newcombs im einzelnen hervorzuheben und ihre relative Bedeutung abzuwägen, wird man doch dasjenige, was seine dominierende Stellung in der Astronomie kennzeichnet und seinen Namen in der Geschichte der Astronomie für immer erhalten wird, mit einiger Sicherheit bezeichnen können. Es sind die Bewegungen innerhalb unseres Sonnensystems, also jenes berühmteste und vielleicht auch wichtigste astronomische Problem der letzten Jahrhunderte, das durch Newcombs Arbeiten so wesentlich gefördert und im Sinne unserer Zeit zum Abschluß gebracht worden ist. Er wurde

so für die großen Planeten unseres Sonnensystems ein ebenbürtiger Nachfolger Leverriers und in dem schwierigsten und verwickeltesten Bewegungsprobleme der Astronomie, nämlich dem den Mond betreffenden, ein Ergänzender und Nachfolger Hausers. Die letzten Jahre seines Lebens erfüllten hauptsächlich die Arbeiten über die Mondbewegung, in der man bekanntlich noch immer gewisse empirisch abgeleitete Glieder heranziehen muß, um die aus der Attraktionslehre folgenden Resultate mit den Beobachtungen in Einklang zu bringen. Gerade das Studium dieser Glieder und ihre möglichst scharfe numerische Bestimmung war die Aufgabe, die sich Newcomb stellte und mit bewundernswerter Präzision löste. Er hat so der Nachwelt bestimmt formulierte Probleme hinterlassen, die wahrscheinlich Einsichten eindringlichster Art in das Wesen der kosmischen Bewegungen eröffnen werden.

Die Leistungen Newcombs im Gebiete der numerischen Feststellung der planetaren Bewegungen sind so großartig und von so fundamentaler Wichtigkeit, daß seine zahlreichen anderen Arbeiten, die sich fast auf alle Gebiete der Astronomie erstrecken, (manchmal selbst übergreifend in die abstraktesten Teile der Mathematik und die physikalische Experimentierkunst) und fast überall zur Erweiterung unserer Kenntnisse geführt haben, zurücktreten. Und so wird auch Newcomb hauptsächlich als der große astronomische Rechner in der Geschichte der Astronomie unsterblich bleiben.

H. v. Seeliger.

Am 17. Januar l. Js. verstarb in Marburg a. d. Lahn der frühere Universitätsprofessor und Präsident der physikalischen Reichsanstalt FRIEDRICH KOHLRAUSCH, ein hochbedeutender und in den weitesten Kreisen der wissenschaftlichen Welt rühmlichst bekannter Vertreter der physikalischen Disziplin.

Als Sohn des durch seine (mit Wilhelm Weber in Göttingen unternommenen) grundlegenden elektrischen Arbeiten bekannten, 1858 in Erlangen verstorbenen ordentlichen Professors der Physik, Rudolf Kohlrausch, wurde F. Kohlrausch schon früh von seinem Vater, später aber insbesondere von W. Weber,

in die Physik eingeführt. Ganz im Sinne dieser Lehrer bildete sich in ihm die Liebe und das Talent für die Bearbeitung des Teiles der Experimentalphysik aus, auf dem er den unbestrittenen Rang der Meisterschaft erreichen sollte: des so ungemein wichtigen Gebietes der exakten elektrischen Messungen. In den vier Jahren, in denen Kohlrausch als Assistent von W. Weber und als a. o. Professor in Göttingen tätig war (1866—1870), wurden fast alle die Arbeiten bereits angefangen, mit deren Vollendung sich K. sein Leben lang beschäftigt hat, und die seinen Ruhm begründet haben. Mit bewundernswerter Ausdauer, Gewissenhaftigkeit und Beherrschung seines Arbeitsgebietes wurden diese klassischen Untersuchungen immer wieder aufgenommen und schließlich zu Ende geführt. Es seien u. a. die folgenden erwähnt: Die Bestimmungen des elektrischen Leitvermögens von Elektrolyten, zu deren Ausführung K. sich zuerst eine brauchbare Methode schaffen mußte, die Messung des elektrochemischen Äquivalents des Silbers, die experimentelle Festlegung der Einheit des galvanischen Widerstandes, erdmagnetische Bestimmungen; dann theoretische und experimentelle Arbeiten über die elektrische und die thermische Leitfähigkeit von Metallen, zum Zweck der Auffindung einer Beziehung beider zueinander. Ebenso datiert aus jener Göttinger Zeit der Anfang der von K. mit besonderem Erfolg unternommenen Ausgestaltung des praktischen physikalischen Unterrichts an den Universitäten; das aus dieser Tätigkeit hervorgegangene „Lehrbuch der praktischen Physik“, das vor kurzem in elfter Auflage erschien, ist ein mustergültiges Werk, das jedem experimentierenden Physiker unentbehrlich geworden ist.

Der physikalische Forscher, der sich hauptsächlich der Aufgabe widmet, exakte Messungen auszuführen und die dazu nötigen Methoden und Apparate zu ersinnen, muß sich von vorneherein eine gewisse Resignation auferlegen: er muß mit der Möglichkeit, ja fast immer mit der Gewißheit rechnen, daß seine Arbeit in verhältnismäßig kurzer Zeit von anderen überholt wird; die von ihm erdachten Methoden werden verbessert und die neu gewonnenen Resultate sind genauer. Damit ver-

schwindet allmählich die Erinnerung an seine Person und an seine Tätigkeit. Anders liegt die Sache, wenn ein Physiker eine wichtige Beziehung gefunden oder eine bedeutsame Tatsache entdeckt hat: sein Name bleibt für immer mit diesem Ereignis verbunden.

Trotzdem der Schwerpunkt seiner Arbeiten in der messenden Physik liegt, wird Kohlrausch nicht sobald vergessen sein: Was er schuf, ist zu gut gesichert und zu reichhaltig, und die Art, wie er arbeitete, ist zu vorbildlich, um bald der Vergessenheit anheimfallen zu können bzw. zu dürfen. Kohlrausch hat aber auch mit einer Entdeckung ersten Ranges eine unverwelkliche Blüte geschaffen, die mit seinem Namen stets verknüpft bleiben wird: das Gesetz von der unabhängigen Wanderung der Ionen, das mit den Resultaten der Hittorfschen Arbeiten über Ionenwanderung die Grundlage für die Theorie der elektroytischen Leitung bildet.

Personalien.

Friedrich Kohlrausch, geboren 14. Oktober 1840, zu Rinteln als Sohn des Gymnasiallehrers R. Kohlrausch. Studierte in Erlangen und Göttingen. Promovierte 1863 in Göttingen. Von 1866 bis 1870 mit kurzer Unterbrechung (am physikal. Verein zu Frankfurt a. M.) a. o. Professor und Assistent von W. Weber in Göttingen. 1870 o. Professor am Polytechnikum in Zürich. 1871 o. Professor am Polytechnikum in Darmstadt. 1875 o. Professor an der Universität Würzburg. 1888 o. Professor an der Universität Straßburg im Elsaß. 1894 Ruf an die Universität Berlin. 1895 Präsident der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg. 1905 Pensionierung. 1910 17. Januar Gestorben.

Roentgen.

Am 14. Januar dieses Jahres starb der Geheime Regierungsrat Professor Dr. JAKOB VOLHARD in Halle im 76. Lebensjahre. Der Tod ereilte den noch rüstigen Mann ohne jeglichen Vorboten; noch wenige Stunden vor seinem Ende schrieb er mehrere Briefe in einer Angelegenheit, welche ihn lebhaft be-

schäftigte. Mit ihm ist ein Mann dahingegangen, der als Forscher, Lehrer und Schriftsteller Vorbildliches geleistet hat.

Jakob Volhard wurde als Sohn des Rechtsanwalts und Justizrats Karl Volhard in Darmstadt am 4. Juni 1834 geboren. Nach Absolvierung des humanistischen Gymnasiums ging er Ostern 1852 nach Gießen, um bei Justus Liebig Chemie zu studieren. Ursprünglich wollte Volhard klassischer Philologe werden, die freundschaftlichen Verhältnisse, welche zwischen den Familien Volhard und Liebig bestanden, bestimmten ihn indessen die Chemie zum Lebensberuf zu wählen.

Dieser Umstand erklärt die auffallende Erscheinung, daß ein so begabter Mann wie Volhard nur langsam auf der wissenschaftlichen Bahn vorwärts gekommen ist und später auch nur langsam produziert hat. Es vergingen 17 Jahre nach dem Verlassen des Gymnasiums, bis er seine erste Entdeckung von Wert — die Synthese des Kreatins — gemacht und 24 Jahre, bis er den Höhepunkt seiner Tätigkeit erreicht hat. Die Erfahrung lehrt nämlich, daß derjenige, welcher nicht eine angeborene Neigung zu einem bestimmten Fache mitbringt, zur Überwindung der Schwierigkeiten, welche der wissenschaftlichen Produktion entgegenstehen, ganz besonders viel Zeit und Kraft verwenden muß. Volhard selbst hat dies wohl gewußt. Sein Schüler Vorländer sagt in seinem schönen Nekrologe: „Volhard pflegte halb im Scherz und halb im Ernst seine wissenschaftliche Tätigkeit mit den Worten zu charakterisieren: „er habe ja nicht viel in seinem Leben publiziert, aber was er gemacht habe, das sei gut, das könne er wohl sagen.““ Dieses Urteil trifft besonders im Schlusse durchaus zu. Seine Experimentalarbeiten gehören zu den gewissenhaftesten und gediegensten, welche wir besitzen.“

Volhards Wunsch unter Liebig in Gießen studieren zu können, ging nicht in Erfüllung, da letzterer schon im Herbst 1852 nach München übersiedelte. Trotzdem blieb er in Gießen und wurde dort im Jahre 1855 zum Doktor promoviert. Nach einem bei Bunsen in Heidelberg zugebrachten Semester, nahm er die ihm von Liebig angebotene Stelle eines Vorlesungs-

assistenten an, die er zwei Jahre behielt. 1860—1861 bekleidete er die Stelle eines Assistenten bei A. W. Hofmann in London und ging dann nach Marburg zu Kolbe, wo er die Synthese des Sarkosins auffand. Liebig, der das Sarkosin zuerst aus einem Bestandteil des Fleischextraktes dargestellt hatte, interessierte sich sehr für diese Entdeckung und lud Volhard ein nach München zu kommen und sich dort zu habilitieren. Dies erfolgte im Jahre 1863.

Fünf Jahre später fand er die Synthese des Kreatins auf, eine Entdeckung von bleibendem Wert. Die betreffende Abhandlung wurde von Liebig der mathematisch-physikalischen Klasse unserer Akademie vorgelegt und erschien in den Berichten vom 7. November 1868.

Schwer verständlich ist, weshalb Liebig den jungen und strebsamen Forscher nicht ganz an sein Laboratorium fesselte, obgleich er ihn doch hoch schätzte und ihm die Vorlesung über organische Chemie übertrug. Trotzdem wurde Volhard im Jahre 1866 zum Adjunkten am pflanzenphysiologischen Institut ernannt, in welcher Stellung er neun Jahre blieb. Hierin brachte auch seine Ernennung zum Extraordinarius an der Universität keine Änderung, da ihm das Adjunktengehalt von dem Professorengehalt abgezogen wurde. Es ist begreiflich, daß Volhard infolge dieser Zwitterstellung keine Zeit zum wissenschaftlichen Arbeiten übrig blieb. Dieses wurde erst anders, als Adolf Baeyer nach dem im Jahre 1873 erfolgten Tode Liebigs im Jahre 1875 nach München berufen wurde. Dieser fand im chemischen Laboratorium des Staates außer altem Gerümpel nur einen Präparator und einen Diener vor, keinen Assistenten und keinen Studenten. Der Professor Volhard war eigentlich Adjunkt am pflanzenphysiologischen Institut. Da mußte Abhilfe geschaffen werden. Der damalige Referent im Kultusministerium riet dem Professor Baeyer sich mit dem Führer der Mehrheit in der Kammer der Abgeordneten in Verbindung zu setzen, um Volhard von der Last seiner Stellung im pflanzenphysiologischen Institut zu befreien. Dies half. Volhard wurde seiner Verpflichtung als Adjunkt im botanischen Institut

enthoben und konnte nun seine ganze Zeit dem chemischen Laboratorium widmen. Es folgten nun $3\frac{1}{2}$ Jahre des ungestörten Zusammenwirkens dieser beiden Chemiker. Volhard übernahm die Leitung der unorganischen Abteilung des Laboratoriums und setzte seine schönen, schon im Jahre 1874 begonnenen maßanalytischen Arbeiten, sowie seine mit der Kreatinsynthese zusammenhängenden Untersuchungen des Guanidins fort. Er wurde so der Gründer der unorganischen Schule des Münchener chemischen Laboratoriums und legte die Prinzipien seines Unterrichtes in einer Anleitung nieder, welche unter dem Namen „die Volhardschen Hefte“ nicht nur im Münchener, sondern auch in sehr vielen anderen Laboratorien die ersten Schritte des Anfängers leitet. Es soll ihm nicht vergessen werden, daß der strenge und sachliche Geist, der in diesem Institute heute noch herrscht, zum großen Teile sein Werk ist.

Im Frühjahr 1879 folgte Volhard einem Rufe nach Erlangen als ordentlicher Professor und Direktor des chemischen Laboratoriums. Hier blieb er aber nur 3 Jahre und siedelte im Frühjahr 1882 als Nachfolger von Heintz nach Halle über, wo er den Rest seines Lebens zugebracht hat.

Das Laboratorium, welches er in Halle vorfand, war den Anforderungen der Neuzeit nicht mehr entsprechend, aber es dauerte acht Jahre, bis er die Mittel für den durchaus erforderlichen Erweiterungsbau erhielt. Diesen führte er in muster-gültiger Weise aus und stattete die Arbeitssäle mit einer Reihe neuer und praktischer Apparate aus. 26 Jahre war Volhard in dieser Stellung unermüdlich tätig, veröffentlichte teils allein, teils mit seinen Schülern eine große Reihe wertvoller Arbeiten, die meist in Liebigs Annalen erschienen sind. Als vorzüglicher Lehrer bewährte sich Volhard in Halle ebenso, wie früher in München. Johannes Thiele, das korrespondierende Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse und Direktor des chemischen Laboratoriums in Straßburg, welcher 9 Jahre hier in München die Stelle eines Abteilungsvorstandes mit dem größten Erfolge bekleidet hat, ist aus seiner Schule hervorgegangen.

Daneben entfaltete Volhard auch noch auf literarischem

Gebiet eine umfassende Tätigkeit. Er redigierte seit dem Jahre 1871 bis zu seinem Tode Liebigs Annalen in mustergültiger Weise und verfaßte im Verein mit Emil Fischer eine Biographie des im Jahre 1892 verstorbenen A. W. von Hofmann, welche so sehr den Stempel seiner kraft- und humorvollen Persönlichkeit trägt, daß man mit Recht gesagt hat, er habe sich in diesem Werke selber das schönste Denkmal gesetzt. Das gleiche gilt auch von seiner Liebig-Biographie, welcher er die letzten 5 Jahre seines Lebens gewidmet hat.

So hat Volhard seinem großen Lehrer Liebig die Treue gehalten. Sein erster Gedanke nach dem Verlassen der Schule war zu Liebig zu eilen, sein letzter, ihm ein dauerndes Denkmal zu setzen. Die Erinnerung an Volhard wird daher auf alle Zeiten mit der an den unvergeßlichen Präsidenten der Akademie der Wissenschaften verknüpft sein. v. Baeyer.

Zum Schluß hielt das außerordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse Herr Otto Frank die Gedächtnisrede auf Carl von Voit.

Sitzung am 7. Mai.

1. Herr A. ROTHPLETZ sprach über die

Ursachen des Kalifornischen Erdbebens von 1906, das man bisher zu den tektonischen Beben gestellt hat, weil die Erdkrustenteile zu beiden Seiten einer über 300 km langen Spalte in horizontaler aber entgegengesetzter Richtung um 3—6 Meter aneinander vorbeigeschoben worden sind. Durch eine vor drei Jahren durchgeführte Triangulation ist nachgewiesen worden, daß nicht nur mit diesem sondern auch schon mit dem Beben von 1868 erhebliche Ortsveränderungen eingetreten sind auf einem Gebiete, das ungefähr die Größe von Ober- und Niederbayern hat. Die Bewegungsrichtungen waren aber nicht jedesmal die gleichen und sie entsprechen auch nicht einfachen Krustenverschiebungen, sondern weisen deutlich auf Zerrungen oder Expansion der Erdkruste hin, die wahrscheinlich durch unterirdische magmatische Injektionen erzeugt wurden. Die dadurch entstandenen Spannungen haben dann durch die Erdbeben eine plötzliche und gewaltsame Auslösung gefunden. Man muß deshalb diese Beben zu den Injektions-Spaltenbeben stellen.

2. Herr EBERT legt vor und bespricht eine Abhandlung von Dr. MAX DIECKMANN:

Funkentelegraphische Empfangsstörung.

Der Empfang drahtlos telegraphischer Nachrichten wird bisweilen durch atmosphärisch elektrische Vorgänge gestört. Die Empfangsorgane sprechen an, auch wenn die Antenne nicht von funkentelegraphischen Wellen getroffen wird. Dr. Dieckmann hat die Natur dieser Empfangsstörungen untersucht und gefunden, daß sie sich durch einen elektrostatischen Schutz der Antenne vor dem Erdfeld vermeiden lassen. Damit die eintreffenden funkentelegraphischen Wellen durch dieses Schutzsystem nicht gleichfalls abgeschirmt werden, ist es erforder-

lich, die die Gestalt des Schutzsystemes bestimmenden Leiter so zu führen, daß sie in Richtung des elektrischen Vektors der eintreffenden Wellen keine Erstreckungskomponente besitzen. Eine durch Ohmsche und Selbstinduktionswiderstände schwingungsunfähig gemachte Verbindungsleitung ist an Erde gelegt und erhält so das ganze System auf Erdpotential.

Sitzung am 4. Juni.

Herr VON DRYGALSKI sprach über das

Schelfeis der Antarktis am Gaußberg.

Die früher lebhaft erörterte Frage, ob die in den kalten Meeren treibenden Eisberge auf dem Lande oder auf dem Meer entstanden sind, ist heute in ersterem Sinn entschieden. Die Eisberge sind losgebrochene Gletscherenden. Dagegen hat man neuerdings in beiden Polargebieten Eisbildungen kennen gelernt, über deren Herkunft man zweifelhaft sein kann. Sie liegen in den flachen Schelfmeeren in der Nähe der Küsten und verändern ihren Standort, von geringen inneren Verschiebungen abgesehen, nur im Laufe sehr langer Zeiten, obgleich sie schwimmen und mit Ebbe und Flut auf und nieder schwanken. Solche Eismassen kann man als Schelfeis bezeichnen.

Eine solche Schelfeismasse wird näher geschildert. Sie erwies sich als aus Bergen und Schollen gemischt, war also teils auf dem Lande, teils auf dem Meere entstanden. Beide Eisarten ließen sich fast überall unterscheiden. Diese Eismasse bewahrte ihren Zusammenhang dadurch, daß einzelne Teile auf Untiefen festlagen. Wo solche Stützpunkte nicht gegeben waren, löst die Eismasse sich auf. Ihre Formen standen wesentlich unter Windwirkungen. Form und Verhalten dieser Schelfeismasse gestattet Rückschlüsse darauf, ob und wie eine Eiszeit auch ein Meer zu erfüllen vermag.

Sitzung am 2. Juli.

1. Herr L. BURMESTER sprach

Über Behälter mit kleinstem Wandungswert bei gegebenem Volumen.

Wenn die Inhalte der einzelnen, nach dem Material verschieden bewerteten Flächen der Wandung eines Behälters mit den zugehörigen Wertkoeffizienten multipliziert werden, so bildet die Summe dieser Produkte den Wandungswert. Sind alle Flächen der Wandung gleichwertig, also alle Wertkoeffizienten gleich, dann wird in diesem häufigen speziellen Fall der kleinste Wandungswert durch den kleinsten Wandungsinhalt bestimmt. Aus der vermittels der Differentialrechnung erfolgenden Lösung des Problems des kleinsten Wandungswertes beziehentlich des kleinsten Wandungsinhaltes bei gegebenem Volumen eines Behälters ergaben sich seine Bestimmungsgrößen.

2. Herr S. FINSTERWALDER legt eine Abhandlung von Herrn Reallehrer Dr. M. LAGALLY vor:

Über die Verbiegung geodätischer Netze.

Es wird gezeigt, daß geodätische Netze unter Beibehaltung ihrer Eigenschaft im allgemeinen nur mit der Fläche, auf der sie liegen, verbogen werden können. Ausnahmen bilden ausgezeichnete Netze, die auf Liouvilleschen Flächen vorkommen und auf verschiedene Flächen, die sich nicht ineinander verbiegen lassen, aufzulegen sind.

Sitzung am 5. November.

1. Herr MOLLIER spricht

Über den Bau der Milzkapillaren mit Rücksicht
auf die Bildung von Blut und Stützgewebe.

2. Herr VON DYCK berichtet über

Zwei wiederaufgefundene Prognostica von Johann
Kepler auf die Jahre 1604 und 1624.

Kepler hat bekanntlich seit seinem ersten Wirken in Graz von Amtswegen und des Verdienstes willen, wie auch aus persönlichem Interesse an meteorologischen und astrologischen Betrachtungen *Calendaria* und *Prognostica* verfaßt. Man kannte bisher fünf dieser Kalender, die zu den selteneren Drucken zählen. Gelegentlich biographischer Studien über Kepler hat Herr Dyck auf der Münchener Hof- und Staatsbibliothek zwei weitere dieser *Prognostica*, die für die Jahre 1604 und 1624 aufgefunden, die bisher unbekannt waren. Dem ersteren, aus der Prager Zeit Keplers stammenden, ist ein interessanter „nutzlicher Bericht, warzue die *Astronomia* und *Artes Mathematicae* dienstlich seyen“ vorangestellt. Das zweite *Prognosticum* (wahrscheinlich das letzte überhaupt von Kepler verfaßte) läßt besonders klar die Anschauungen Keplers über den Einfluß der Aspekte der Planeten auf die Witterung hervortreten.

3. Herr VON SEELIGER legt vor eine Abhandlung von Professor Dr. M. SCHMIDT:

Koordinatenberechnung und Netzanschlüsse der
südbayerischen Dreieckskette.

In den Sitzungsberichten Bd. 36, 1906, Heft 1 sind die Ergebnisse der Winkelmessung und Seitenberechnung einer im südlichen Bayern längs des 48. Breitenparallels in den Jahren

1901 bis 1904 gemessenen Hauptdreieckskette mitgeteilt worden, welche zur Verbindung des Hauptdreiecksnetzes der bayerischen Landesvermessung mit der österreichischen Triangulierung bei Salzburg und mit der an das rheinische Dreiecksnetz der preußischen Landesaufnahme sich anschließenden württembergischen Dreieckskette von Hammer dient und ein Glied der in dem genannten Parallelkreis in Ausführung begriffenen Längengradmessung bildet.

Für diese Hauptdreieckskette ist nunmehr der Anschluß an die fränkische Grundlinie bei Nürnberg, sowie an die sächsische Triangulierung und an das thüringische Dreiecksnetz der K. preußischen Landesaufnahme vermittelt einer längs des Meridians von München bis zur nördlichen Landesgrenze sich erstreckenden Hauptdreieckskette hergestellt und eine neue Winkelausgleichung, Seiten- und Koordinatenberechnung durchgeführt worden, deren Ergebnisse in der vorliegenden Abhandlung mitgeteilt werden.

Als sehr geringfügig haben sich die Anschlußdifferenzen mit den im Westen und Osten angrenzenden Dreiecksnetzen der Nachbarstaaten ergeben, während in der längs des Meridians von München verlaufenden Kette eine Erhöhung des Genauigkeitsgrades der Winkelmessung sich als wünschenswert gezeigt hat.

4. Herr A. Voss legt für die Sitzungsberichte eine Arbeit des Herrn E. STÜBLER in Stuttgart vor:

Über einige spezielle Biegungsgruppen.

Öffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des
Prinz-Regenten

am 12. November.

Der Präsident der Akademie Herr K. Th. von Heigel eröffnete die Festsitzung mit folgender Ansprache:

Da die heutige Feier dem ehrwürdigen Protektor unsrer Akademie gewidmet ist, obliegt mir zunächst die Pflicht, dankbaren Herzens zu erinnern an die treue Fürsorge, die der Hohe Herr in weiser Erkenntnis der Aufgaben eines Staatsoberhauptes auch der Wissenschaft und ihrer Betätigung auf allen Gebieten angedeihen läßt.

Peter Cornelius sagte einmal in einer Ansprache an seine Kunstgenossen: „Unser Glück beruht in der Ausübung unsres Berufs! Wer uns Gelegenheit gibt, unsren Beruf auszuüben, fördert unser Glück!“ Das Wort des Altmeisters deutscher Kunst hat auch für die Wissenschaft Geltung. Ehrliche Hingebung an die Wissenschaft läßt ihre Diener zu innerer Freiheit gelangen, und das Bewußtsein, am Fortschritt der Menschheit, wenn auch nur in bescheidener Weise, mitzuwirken, gibt jenes seelische Gleichgewicht, das uns ein stilles, reines Glück verbürgt.

Doch für wissenschaftliche Betätigung reicht die Gedankenarbeit nicht immer aus. Fast jeder, der sich mit Problemen der Natur- oder Menschheitsentwicklung beschäftigt, braucht Hilfsmittel der verschiedensten Art. Wenn die experimentellen Wissenschaften Kliniken, Laboratorien und Apparate nötig haben, so ist z. B. ein moderner Betrieb der Altertumswissenschaft ohne Museen nicht mehr denkbar. Es ist

also nicht bloß für die Lehrtätigkeit, sondern auch für die eigene Forschung der Mitglieder ein wertvoller Vorteil, daß unsre Münchner Akademie in engster Verbindung steht mit reichen wissenschaftlichen Sammlungen und Instituten. Auch im abgelaufenen Jahre haben sich diese Anstalten der opferwilligen Hilfe der K. Staatsregierung zu erfreuen gehabt. Wenn uns, wie es in einem Mittelstaat nicht anders sein kann, zu ihrem Ausbau nicht so bedeutende Mittel zur Verfügung stehen, wie anderwärts, so müssen wir durch aufmerksamsten Spüreifer und sorgfältigste Auswahl einen Ersatz zu schaffen suchen.

Im vorigen Jahre konnte ich als erfreuliches Ereignis in der Entwicklungsgeschichte der Akademie die Vereinigung der ersten und dritten Klasse zu gemeinsamen Sitzungen anzeigen. Aus der Chronik des letzten Jahres habe ich mitzuteilen, daß die Mitgliederzahl der mathematisch-physikalischen Klasse von 18 auf 24 erhöht worden ist. Unzweifelhaft entspricht es dem großartigen Aufschwung der Naturwissenschaften im neunzehnten Jahrhundert. daß „die beiden Hemisphären des globus intellectualis“, die Natur- und Geisteswissenschaften, in einer Heimstätte der reinen Wissenschaft in gleicher Stärke vertreten sind.

Über der Türe des Hauses des Platon im stillen Hain des Akademos bei Athen soll sich die Inschrift befunden haben: *Μηδείς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μοῦ τὴν στέγην*, Kein der Geometrie Unkundiger möge hier eintreten, oder besser: An meinem esoterischen Unterricht soll sich niemand beteiligen, der nicht geometrisch-mathematisch gebildet ist. Auch in der *πολιτεία* des Platon heißt es: „Bekanntlich besteht ein himmelhoher Unterschied in Bezug auf jegliches Lernen zwischen einem, der sich mit Geometrie beschäftigt hat, und einem, der es nicht getan hat.“ Und Xenokrates wies einen Jüngling, der seine Schule besuchen wollte, ohne vorher Geometrie, Astronomie und Musiktheorie getrieben zu haben, zurück mit den Worten: „Bleibe weg, denn du besitzt nicht, was dich befähigt zur Philosophie!“

Gewiß, die mathematischen wie die naturwissenschaftlichen Studien können nicht hoch genug eingeschätzt werden, doch mögen auch die *γεωμετροί* nicht mißachtend an Platons Haus vorübergehen! Den siegreichen Gedanken des neunzehnten Jahrhunderts, die Evolution, haben Natur- und Geisteswissenschaften, die schon zu Anfang des Jahrhunderts in Alexander und Wilhelm von Humboldt so unvergleichlich verkörpert waren, miteinander gemein; sie suchen nur auf verschiedenen Gebieten in aller Entwicklung und Überlieferung Ursache und Wirkung, Lebensgesetz, die Wahrheit!

Noch einen Punkt möchte ich berühren, selbst auf die Gefahr hin, daß mein Wort zunächst nur als „akademische“ Erörterung gewertet werden kann.

Im verflossenen Frühjahr wurde in der ersten Kammer unsres Landes von berufenster Seite Klage erhoben über die gegenwärtige mangelhafte Unterbringung der wissenschaftlichen Staatssammlungen, die weder für ausgedehnteren Besuch geeignet seien noch für die unbedingt nötigen Erweiterungen Raum böten.

In Bezug auf die ethnographische Sammlung, das Kabinet der Gipsabgüsse und das Antiquarium ist der Vorwurf unbedingt als begründet anzusehen. und auch in Bezug auf die im Wilhelminum vereinigten Sammlungen muß ich, wenn ich offen und ehrlich sein will, jenem hochverehrten Redner recht geben. wenn auch mit einigen Vorbehalten.

Schon im Jahre 1872 beschwerte sich Liebig öffentlich über den unwürdigen Zustand der in einem für Museumszwecke gänzlich ungeeigneten, labyrinthischen Gebäude untergebrachten Sammlungen.

Da die Berechtigung des auch von anderen häufig wiederholten Tadels einleuchtete, wurde 1899 das Projekt eines großen Museums-Neubaues ins Auge gefaßt. Einer unsrer ersten Architekten entwarf einen Plan, der ebenso die kunstsinnigen Laien befriedigte, wie die Sammlungsvorstände, denen ja das

praktische Interesse über dem ästhetischen stehen muß. Das Projekt scheiterte jedoch an verschiedenen Hindernissen, unter denen natürlich auch die leidige Geldfrage keine unwichtige Rolle spielte. Es wurde also beschlossen, von einem Neubau abzusehen, aber die Räume im Wilhelminum auf jede mögliche Weise zu erweitern und für ihren Zweck geeignet umzugestalten. Am 18. November 1901 wurde von meinem Vorgänger v. Zittel die Erklärung abgegeben: Wenn alle anderen, zur Zeit im Akademiegebäude untergebrachten Behörden, also Oberstes Landesgericht, Staatsarchiv, Rechnungskammer, Post und Normaleichungskommission, wegverlegt und alle vorhandenen Räume ausschließlich den Sammlungen zur Verfügung gestellt würden, sei das Gebäude als ausreichend anzusehen.

Seither ließ sich das K. Unterrichtsministerium mit dankenswerter Energie angelegen sein, alles nicht zur Akademie und ihren Attributen Gehörige aus dem Hause zu entfernen, und auch für eine praktische Verbindung der Räume, für Beseitigung der Feuersgefahr, für Schaffung von Luft und Licht Sorge zu tragen. Welch gründliche Umgestaltung das Wilhelminum im Laufe der Jahre erfuhr, dafür bin ich selbst ein berufener Zeuge. Meine Erinnerungen an dieses Gebäude reichen ja auf 60 Jahre zurück. Damals frequentierte ich, mit drei bis sechs Kreuzern ausgestattet, freilich nur die Käferbörse im Flur der zoologischen Sammlung; später lernte ich aber als fleißiger Besucher der Sammlungen, als Hörer der im Akademiegebäude abgehaltenen historischen Vorlesungen, als Gast der Malerateliers, als Mitglied der Akademie das Haus in allen seinen Teilen kennen. Wer z. B. die Entwicklung der zoologischen Sammlungen verfolgt hat, wird der gründlichen und glücklichen Wandlung das Lob nicht versagen, daß gemacht worden ist, was gemacht werden konnte.

Selbstverständlich vermag aber ein zum Kloster bestimmtes, im 16. Jahrhundert errichtetes Gebäude nicht in ein allen modernen Anforderungen genügendes Museum umgezaubert zu werden. Im Jahre 1901 ließ sich auch noch nicht voraussehen,

daß die nächsten Jahre den Sammlungen so reichen Zuwachs bringen würden, der zu den früheren Zugängen in gar keinem Verhältnis stand und in erfreulicher Weise schon wieder einen empfindlichen Rummangel verursacht. Es hat sich ferner inzwischen herausgestellt, daß die Entfernung des Staatsarchivs, der Post usw. sich nicht so rasch vollziehen läßt, wie vor zehn Jahren angenommen wurde. Natürlich bringt auch die Lage in der belebtesten Geschäftsstraße Münchens manche Mißstände mit sich. Staub und Ruß sind gefährliche Feinde der Sammlungen, und feinere Messungen und Wägungen können wegen der durch den Wagenverkehr hervorgerufenen Erschütterungen gar nicht vorgenommen werden. Vor allem: Sammlungen sind dazu da, um gesehen zu werden: dieser Zweck ist der erste und wichtigste, gegen den alle anderen Vorteile und Rücksichten nicht aufkommen. In unsren Parterräumen läßt aber die Beleuchtung so ziemlich alles zu wünschen übrig; es sei nur an die finsternen Gelasse der prähistorischen Sammlung erinnert, wo eine exakte Vergleichung der Objekte nicht vorgenommen werden kann. Auch eines systematischen Zusammenhanges entbehren die Sammlungen und Institute; das anthropologische Institut z. B. befindet sich im dritten Stockwerk, die dazu gehörige Sammlung zu ebener Erde.

Ich würde mich einer Pflichtvergessenheit schuldig machen, wenn ich diese Mißstände verheimlichen wollte. Die Unterbringung der Sammlungen im Wilhelminum kann immer nur als ein Provisorium angesehen werden. Es ist mir ja wohlbekannt, daß die gegenwärtige Finanzlage höhere Ausgaben für derartige Unternehmungen nicht zuläßt, zumal der Staat erst für das Deutsche Museum beträchtliche Opfer gebracht hat. Doch trotz alledem muß immer wieder daran erinnert werden: Nur ein Museums-Neubau kann wirkliche, dauernde Abhilfe schaffen!

Ich sehe vor mir ein Gebäude an derjenigen Straße Münchens, die am glücklichsten Kunst und Natur, Pracht und Heiterkeit verbindet, unfern der Universität und durch den englischen

Garten damit verbunden, — der schönste Platz der Stadt ist gerade gut genug dafür, — ein Gebäude, in dem alle historischen und naturwissenschaftlichen Sammlungen systematisch vereinigt sind, nur mit einfacher, aber vornehmer Fassade ausgestattet, weitgedehnt, so daß für lichtvolle, allen Anforderungen der Musealtechnik entsprechende Räume ausreichend gesorgt ist, ein würdiges Gegenstück zu dem gegenüberliegenden Landesmuseum, der Schatzkammer für die köstlichen Kleinodien bayerischen Kunstfleißes.

Ich weiß: es ist nur ein Traum! Doch muß es ein Traum bleiben? Darf es ein Traum bleiben? Möge eine nicht allzu ferne Zukunft günstige Antwort auf diese Frage geben!

Doch ich will nicht bloß mit einem frommen Wunsche schließen. Meine Hausgenossen möchten sich mit Recht beklagen, daß ich dem Besseren das Gute aufgeopfert, daß ich über dem Morgen auf das Heute vergessen hätte. In der Strategie ist der beste Vorteil immer der erreichbare. Wir sind guten Mutes und haben das feste Vertrauen, daß die zur Entscheidung Berufenen Bedürfnis und Möglichkeit eines Neubaus gerecht und richtig abwägen und im geeigneten Augenblick ans Werk gehen werden. Mögen sie aber auch, solange das neue Haus nicht gebaut werden kann, dem alten ihre Gunst nicht entziehen! Möge vor allem in Erfüllung des vor zehn Jahren gegebenen Versprechens das ganze Wilhelminum der Akademie und ihren Sammlungen überwiesen werden, dann wird durch übersichtliche Anordnung und planmäßige Aufstellung noch auf längere Zeit hinaus der Erhaltung, wie der Nutzbarmachung des Sammlungsschatzes Rechnung getragen sein.

Dann verkündigten die Klassensekretäre die Wahlen.

Es wurden gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigt

in der mathematisch-physikalischen Klasse

als ordentliche Mitglieder:

Dr. Karl Hofmann, Professor der Chemie an der Universität München, bisher a. o. Mitglied der Akademie (jetzt in Charlottenburg),

Dr. Arnold Sommerfeld, o. Professor der theoretischen Physik an der Universität München, bisher a. o. Mitglied der Akademie,

Dr. Max Ritter von Gruber, o. Professor der Hygiene an der Universität München, Obermedizinalrat, bisher a. o. Mitglied der Akademie;

als korrespondierende Mitglieder:

Dr. Hieronymus Zeuthen, Professor der Mathematik an der Universität Kopenhagen,

Dr. Julius Hann, emeritierter Professor der Physik an der Universität Wien, K. K. Hofrat,

Emanuele Paternò di Sessa, Professor der Chemie an der Universität Rom,

Giacomo Ciamician, Professor der Chemie an der Universität Bologna,

Dr. Ludimar Hermann, Professor der Physiologie an der Universität Königsberg,

Dr. Edmond Bucher-Wilson, Professor der Zoologie an der Columbia University in New-York,

L. Fletcher, Direktor des britischen naturhistorischen Museums in London,

Henry Alexander Miers, Prinzipal der Universität London,
Henry Fairfield Osborn, Professor der Zoologie an der Columbia
University in New-York,

Dr. Dukinfield Henry Scott, Präsident der Linnean-Society
in London.

Darauf hielt das ordentliche Mitglied der philosophisch-
philologischen Klasse, Herr G. Frhr. von HERTLING, die besonders
im Druck erscheinende Festrede

Wissenschaftliche Richtungen und philosophische
Probleme im 13. Jahrhundert.

Sitzung am 3. Dezember.

1. Herr A. ROTHPLETZ sprach

Über den Sparagmit und Birikalk am Mjösen
in Norwegen.

Durch einen zweimaligen Besuch (1905 und 1910) dieser
Gegend hat er sich überzeugt, daß zwei verschiedenalterige
Sparagmitstufen, zwischen denen der Birikalk liegen soll, dort
nicht existieren, daß aller Sparagmit gleichalterig und prä-
kambrisch ist, und daß der Birikalk ins Kambrium und Unter-
silur gehört. Ein Teil des Sparagmites erscheint nur deshalb
als eine jüngere Ablagerung, weil er durch eine große starke
Überschiebung über die jüngeren kambrischen und silurischen
Schichtgesteine heraufgeschoben worden ist, auf eine Erstreckung
von sicher 11 Kilometer, vielleicht sogar von mehr als 30 Kilo-
meter.

Diese Schubdecke hat gegen Osten nachweisbar ihre Fort-
setzung und steht jedenfalls in zeitlicher Verbindung mit jener
großen Überschiebung, die sich von Hardangerwidda in Nor-

wegen bis herauf nach Lappland durch ganz Skandinavien hinzieht und deren Schubweite stellenweise über 100 Kilometer mißt.

Die Kalksteingerölle, die an einigen Stellen am Mjösen in dem Sparagmitkonglomerat gefunden werden, beweisen, daß in noch früherer präkambrischer Zeit Kalklager in Skandinavien zum Absatz gekommen sind in einem von ältesten Organismen bewohnten Meere, deren Überreste teilweise in jenen Kalkgeröllen zu erkennen sind.

2. Herr ROTHPLETZ legt vor eine Abhandlung von Professor WEBER:

Über metamorphe Fremdlinge in Erstarrungsgesteinen.

An der Hand neu aufgefundener Granulitvorkommen im Böhmerwalde wird der bisher fehlende petrographische Wahrscheinlichkeitsbeweis erbracht, daß die darin enthaltenen Granaten aus dem Nebengestein stammen; dann müssen aber auch viele andere Gemengteile in Eruptivgesteinen als derartige Fremdlinge betrachtet werden, besonders auch Graphit und Diamant.

3. Herr S. GÜNTHER legt für die Sitzungsberichte eine Abhandlung vor:

Die Korallenbauten als Objekt wissenschaftlicher Forschung in der Zeit bis Darwin.

Es werden zuerst die Anfangsstadien dieses Zweiges der physikalischen Geographie möglichst weit zurückverfolgt, wobei auch die Herkunft des Wortes „Atoll“ Aufklärung findet; nächstdem kommt der langjährige Streit über die Frage, ob die Koralle Mineral, Pflanze oder Tier sei, zur Erörterung; endlich handelt es sich um die Morphologie der korallinen Gebilde bis zu dem einen Markstein bedeutenden Auftreten Charles Darwins.

4. Herr W. MUTHMANN berichtet

über einige Experimentaluntersuchungen.

welche er über die chemischen Vorgänge im Hochspannungs-Lichtbogen ausgeführt hat. Dieselben betreffen in erster Linie die Reaktionsgeschwindigkeiten bei der Zerlegung und Bildung gewisser Substanzen, die in manchen Fällen von der Art der verwendeten Elektroden abhängen. Am besten ließen sich diese Erscheinungen bei der Zersetzung der Kohlensäure verfolgen, während bei der Blausäurebildung die Reaktionen sehr schnell verlaufen. Auch über die Bildung von Stickoxyd aus Stickstoff und Kohlensäure sind Versuche angestellt worden.

Verzeichnis der im Jahre 1910 eingelaufenen Druckschriften.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten.

Aachen. Geschichtsverein:

— — Zeitschrift, Bd. 31, 1909.

Aarau. Historische Gesellschaft des Kantons Aargau:

— — Argovia, Bd. 33, 1909.

Abbeville. Société d'Émulation:

— — Bulletin trimestriel 1909, No. 3, 4; 1910, No. 1, 2.

— — Mémoires, tom. VI, part 2.

Adelaide. Royal Geographical Society of Australia:

— — Proceedings, Sess. 1907/08, vol. 10.

— — Royal Society of South-Australia:

— — Transactions, Proceedings, and Report, vol. XXXIII, 1909.

— — Memoirs, vol. 2, part 2.

Agram. Südslavische Akademie der Wissenschaften:

— — Codex diplomat. regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae, vol. VII.

— — Ijetopis 24, 1909.

— — Rad, Knjiga 178—182.

— — Zbornik, Bd. XIV, 2; Bd. XV, 1.

— — Rječnik 28, No. 5.

— — Monumenta spectantia historiam Slavorum. vol. 32, 1910.

— — K. Kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv:

— — Vjestnik, Bd. XII, Heft 1, 2.

— — K. Kroat. naturwissenschaftliche Gesellschaft:

— — Glasnik Godina XXI, Heft 1, 2.

Aix. Faculté de droit et des lettres:

— — Annales, Faculté des lettres, tom. 3, No. 1—4.

Aix. Société d'études Provençales:

— — Annales de Provence. 7^e année, No. 1.

Albany. New York State Education Department:

— — Bulletin, No. 135—139.

— — New York State Museum, annual Report 62, part 1—4.

— — Annual Report of the Education Department 6, 1908/09.

— Department of agriculture (New York State):

— — Bulletin 12.

— — Horticultural Bulletin 1—3.

— — Farm Bulletin 4.

Alençon. Société historique et archéologique de l'Orne:

— — Bulletin. tom. 28; bulletin 4.

Allegheny. Observatory:

— — Publications, vol. 1, No. 20—23. T. u. R. zu vol. I; vol. II, No. 1—3, 5—8.

— — Miscell. scient. papers, N. S., No. 4. T. u. R. zu vol. 1.

Altenburg. Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes:

— — Mitteilungen aus dem Osterlande, N. F., Bd. 14.

Amani. Biologisch-landwirtschaftliches Institut:

— — Der Pflanzler, 4. Jahrg., No. 1—21; 5. Jahrg., 1—14; 6. Jahrg., 1—16.

Amiens. Académie:

— — Mémoires, tom. 56, 1909.

— Société des Antiquaires de Picardie:

— — Bulletin trimestriel, année 1909, trim. 1—4.

— — Documents 15.

Amsterdam. K. Akademie der Wissenschaften:

— — Verhandelingen, afd. Natuurkunde, II. sectie, XV, 2, 3; XVI, 1, 2.

— — Verhandelingen, afd. Letterkunde, Nieuwe Reeks, deel X, 3; Titel u. Register zu X; deel XI, 1—4.

— — Verslagen, Afd. Natuurkunde, deel XVIII, 1, 2.

— — Jaarboek 1909.

— — Prijsvers, 1910, 3 Stück.

— K. N. aardrijkskundig Genootschap:

— — Tijdschrift, deel 27, No. 1—6.

— Wiskundig genootschap (Société de mathémat.):

— — Nieuw archief, 2. Reeks, deel 9, stuk 1—3.

— — Wiskundige opgaven, 10. deel, stuk 1—6. T. u. R. zu 10.

— — Revue des publications mathém., tom. 18, partie 1, 2.

Annaberg. Verein für Geschichte von Annaberg:

— — Mitteilungen, Heft 1—11.

Ansbach. Historischer Verein:

— — 57. Jahresbericht, 1910.

Antwerpen. Société d'Astronomie d'Anvers:

- — Gazette astronomique, No. 3—38.
- — Rapport 1907, 1908, 1909.

Aschaffenburg. K. Humanist. Gymnasium:

- — Jahresbericht 1909/10.
- — Programm von Fries.

Athen. Ecole française:

- — Bulletin du Correspond. hellénique, année 34, 1—7, 1910.
- — Wissenschaftliche Gesellschaft:
- — Athena, tom. 21, Heft 4; tom. 22, Heft 1—4.

Aurillac. Soc. des lettres, sciences et arts:

- — Revue de la Haute-Auvergne, 11^e année, 1909, fasc. 4; 12^e année, 1910, fasc. 1—3.

Bagnères-de-Bigorre. Société Ramond:

- — Bulletin 44, No. 3, 4.

Baltimore. Peabody Institute:

- — 43th Annual Report, 1910.
- — Johns Hopkins University:
- — Circulars 1909, No. 8, 9; 1910, No. 1—4.
- — American Journal of Mathematics, vol. 31, No. 4; vol. 32, No. 1, 2.
- — The American Journal of Philology, vol. 30, No. 4.
- — Johns Hopkins University Studies, ser. 27, No. 8—12.
- — Bulletin of the Johns Hopkins Hospital, vol. XXI, No. 226—237.
T. u. R. zu XXI.
- — Report vol. XV.
- — Chemical Society:
- — American Chemical Journal, vol. 42, No. 2—6; vol. 43, No. 1—5.
- — Maryland Geological Survey:
- — Maryland Geological Survey, vol. 7, 1908; vol. 8, 1909.
- — Maryland Wheater Service, vol. 3, 1910.
- — Report of the Conservation Committee of Maryland 1908/09.

Bamberg. K. Altes Gymnasium:

- — Jahresbericht 1909/10, mit Programm von Herlet II.
- — K. Neues Gymnasium:
- — Jahresbericht 1909/10.
- — Lyzeum:
- — Jahresbericht 1909/10.

Barbados. Imp. Commissioner of agriculture:

- — Agricultural News, No. 203—225.

Barcelona. R. Academia de Ciencias y Artes:

- — Boletin, vol. 3, No. 1.

Barcelona. R. Academia de Ciencias y artes:

— — Memorias, vol. 8, No. 7—23.

— Institut d'Estudis Catalans:

— — Anuari 1908.

Bar-le-Duc. Société des lettres, sciences et arts:

— — Bulletin 1910, No. 1, 2,

Basel. Naturforschende Gesellschaft:

— — Verhandlungen, Bd. 20, Heft 3, 1910; Bd. 21.

— Historisch-antiquarische Gesellschaft:

— — Basler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde, Bd. IX, Heft 2.

— Universität:

— — Schriften der Universität aus dem Jahre 1909/10 in 4^o und 8^o.

Bastia. Société des sciences hist. et natur.:

— — Bulletin 1906, trim. 2 et 3.

Batavia. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:

— — Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia Anno 1679; 1909, 4^o.

— — Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde, deel 51, afl. 6; deel 52, afl. 1, 2.

— — Notulen van de algemeene en directievergaderingen, deel 47, afl. 1—4. T. u. R., deel 48, afl. 1, 2.

— — Verhandelingen, deel 58, 1, 2.

— — Rapporten van de Commissie in Nederl. Indie 1907, 1908.

— — Ethnographica, Taf. 1—12.

— — Klerck, Java-Oorlog, 1825—30. 1. Teil, 1894, u. Atlas; 2. Teil, 1897, u. Atlas.

— R. Magnetical and Meteorological Observatory:

— — Observations, vol. 30 and Appendix 2, 2^o.

— — Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indie 30, 1, 2.

— — Erdbebenbericht 10a, b, 11a, b, 12a, b. Seismological Bulletin 1910, Jan., Febr., May, Juny—Aug.

— K. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie:

— — Natuurkundig Tijdschrift, deel 69.

Bayreuth. K. Humanist. Gymnasium:

— — Jahresbericht 1909/10, mit Programm von Lederer.

— Historischer Verein:

— — Archiv für Geschichte und Altertumskunde von Oberfranken, Bd. 24, Heft 2.

Belgrad. K. Serbische Akademie der Wissenschaften:

— — Annuaire (Godišnjak), vol. 22, 1908.

— — Archives (Spomenik), vol. 47, 1909.

— — Collection ethnographique (Etnografski Zbornik), vol. 12, 13, 14.

Belgrad. K. Serbische Akademie der Wissenschaften:

- — Collection historique (Istorijski Zbornik), Teil II, No. 1.
- — Comptes rendus (Glas), vol. 77, 79, 82, 1909/10.
- — Skerlić Jovan, Serbische Literatur im 18. Jahrhundert, 1909.
- — Jankovič P. T., Tal der Vlišava, 1909.
- — Stojanovič K., Ökonomische Werte, 1910.
- — Tomic Jov. N., Epische Volkslieder auf Kraljević I, 1910.

Bergen (Norwegen). Museum:

- — Aarbog 1910, Heft 1, 2.
- — Aarsberetning for 1909.
- — Sars G. O., An Account of the Crustacea of Norway, vol. V, part 27—30.

Bergzabern. K. Progymnasium:

- — Jahresbericht 1909/10.

Berkeley. University of California:

- — Bulletin. Third Series, vol. III, No. 5—11.
- — Chronicle, vol. 11, No. 3, 4; vol. 12, No. 1, 2.
- — Library bulletin, No. 17.
- — Publications, Botany, Index zu vol. 3; vol. 4, No. 1—5; Physiology, vol. 3, No. 15—17; Geology, vol. 5, No. 18—29; Zoologie, vol. 4, No. 3—4; vol. 5, No. 4—12, Index zu 5; vol. 6, No. 3—9; vol. 7, No. 1; American Archaeology etc., vol. 5, No. 3, 4; vol. 7, No. 2, 4, 5, Titel und Register; vol. 8, No. 5, 6; vol. 9, No. 1; Modern Philology, vol. 1, No. 2—3; Philosophy, vol. I, 1904; vol. II, No. 3; Entomology, vol. 1, No. 1, 2.
- — Bulletin, No. 202—205.
- — Academy of Pac. Coast history, vol. 1, No. 1—5.
- — Engineering, vol. 1, No. 1.
- — Classical physiology, vol. 1, No. 1—7 und Titel und Register; vol. 2, No. 1—4.
- — Education, vol. 1, 1893—99; vol. 4, 1907; vol. 5, 1.
- — Memoirs, vol. 1, No. 1.
- — Zoe, vol. 1—5.
- College of Agriculture:
- — Bulletin, 202—205.

Berlin. K. Preuß. Akademie der Wissenschaften:

- — Abhandlungen { Philos.-histor. Klasse, 1909, 4^o.
- { Physikal.-math. Klasse, 1909, 4^o.
- — Sitzungsberichte 1910, No. 1—39.
- — Politische Korrespondenz Friedrichs des Großen, Bd. 34.
- — Acta Borussica, Behörden-Organisation, Bd. 5, 1; Bd. 10.
- " " Münzwesen, münzgeschichtlicher Teil, Bd. 3.
- " " Getreidehandelspolitik, Bd. 3.

Berlin. K. Bibliothek:

- — Jahresbericht für 1909/10
- Deutsche Chemische Gesellschaft:
- — Mitgliederverzeichnis 1910.
- — Berichte, 42. Jahrg., Schlußheft; 43. Jahrg., No. 1—18.
- Deutsche Geologische Gesellschaft:
- — Zeitschrift, Bd. 61, Heft 4; Bd. 62, Heft 1—3.
- — Monatsberichte 1909, No. 8—12; 1910, No. 1—6.
- Medizinische Gesellschaft:
- — Verhandlungen, Bd. 40, 1910.
- Deutsche Physikalische Gesellschaft:
- — Die Fortschritte der Physik, 65. Jahrg., 1909, 1—3.
- — Verhandlungen, Jahrg. 11, No. 24; Jahrg. 12, No. 1—23.
- Physiologische Gesellschaft:
- — Zentralblatt für Physiologie, Bd. 23, No. 21—26 a; Bd. 24, No. 1—18.
- — Bibliographia physiologica, III. Serie, Bd. 5, No. 1—4.
- K. Technische Hochschule:
- — Rede von Mathesius, 1910.
- Kais. Deutsches Archäologisches Institut (röm. Abteilung s. unter Rom):
- — Jahrbuch, Bd. 24, Heft 3, 4; Bd. 25, Heft 1, 2.
- — Bericht über die Fortschritte der römisch-germanischen Forschung im Jahre 1908, Frankfurt a. M.
- — Veröffentlichungen des Karlsruher Altertumsvereins, Heft 4, 1910.
- K. Preuß. Geodätisches Institut siehe Potsdam.
- K. Preuß. Meteorologisches Institut:
- — Archiv des Erdmagnetismus, Heft 2, 1909.
- — Veröffentlichungen. No. 194, 214—225, 227.
- Redaktion des „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“:
- — Jahrbuch, Bd. 38, Heft 3; Bd. 39, Heft 1.
- Lehranstalt für die Wissenschaft des Judentums:
- — Schriften, Bd. 1, Heft 3, 4.
- — 28. Bericht, 1910.
- K. Sternwarte:
- — Beobachtungsergebnisse, No. 12—14.
- Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuß. Staaten:
- — Gartenflora, Jahrg. 1910, No. 1—24.
- — Orchis, Jahrg. 4, 1910.
- Verein für Geschichte der Mark Brandenburg:
- — Forschungen zur brandenburgischen und preussischen Geschichte, Bd. 23, 1. Hälfte.

Berlin. Verein für die Geschichte Berlins:

- — Alt-Berlin, 1910, No. 1—12.
- — Schriften, Heft 43, 1910.
- Zeitschrift für Instrumentenkunde:
- — Zeitschrift, 30. Jahrg., No. 1—12.

Bern. Schweizerische Naturforschende Gesellschaft:

- — Actes de la Société Helvétique des Sciences naturelles, session 92, tom. 1 und 2.
- Historischer Verein:
- — Archiv, Bd. 20, Heft 1.
- — Quellen, N. F. 1, 1, 2.
- Universitätskanzlei:
- — Schriften der Universität, 1908/09, 1909/10.

Besançon. Société d'Emulation du Doubs:

- — Mémoires, ser. VIII, vol. 3, 1908.

Beyrut. Université Saint Joseph:

- — Mélanges de la Faculté Orientale, tom. IV, 1910.

Béziers. Société archéol., scientif. et littéraire:

- — Bulletin, 3. série, tom. 8, livr. 1.

Birmingham. Natural history and Philosophical Society:

- — List of membres 1909 and annual Report for 1909.
- — Proceedings, vol. 12, No. 3.

Bistritz. Gewerbelehrlingsschule:

- — Jahresbericht 34, 35.

Bologna. R. Accademia delle Scienze dell' Istituto:

- — Memorie, Classe di scienze morali: Serie I, a) Sezione di scienze storico-filologiche, tom. 1, fasc. 3; tom. 3, fasc. 2; b) Sezione di scienze giuridiche, tom. 1, fasc. 3; tom. 3, fasc. 2.
- — Memorie, Classe di scienze fisiche VI, 6, No. 1—4.
- — Rendiconto, N. Ser., vol. 13.
- R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna:
- — Atti e Memorie, ser. III, vol. 27, fasc. 4—6.
- Osservatorio astronomico e meteorologico:
- — Osservazioni meteorologiche dell' annata 1909.

Bombay. Asiatic Society:

- — Journal of the Bombay branch, 62.
- Meteorol. department siehe Simla.

Bonn. Universität:

- — Schriften aus dem Jahre 1909/10.

Bonn. Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande:

- — Bonner Jahrbücher, Heft 118.
- — Bericht der Kommission für Denkmalpflege. 1907/08.
- Naturhistorischer Verein der preußischen Rheinlande:
- — Verhandlungen, 66. Jahrg., 2. Hälfte.
- — Sitzungsberichte 1909, 2. Hälfte.

Bordeaux. Société des sciences physiques et naturelles:

- — Procès-verbaux 1908/09.
- — Bulletin de la Commission météorologique, année 1908.
- Société de géographie commerciale:
- — Bulletin 1910, année 36, No. 1—12.
- Société Linnéenne:
- — Actes, vol. 63, 1909.

Boston. American Academy of Arts and Sciences:

- — Proceedings, vol. 45. No. 3—21; vol. 46, No. 1—5.
- Boston Society of natural History:
- — Proceedings, vol. 34, No. 5—8.
- — Occasional Papers VII, No. 11.
- — Memoirs 6, 1.
- American Urological Association:
- — Transactions, vol. 3, 1909.
- Museum of Fine Arts:
- — Bulletin, No. 18—48.
- — Annual report 34. 1909.

Bourg. Société d'émulation:

- — Annales 1909, 1—4.

Braunschweig. Verein für Naturwissenschaft:

- — Jahresbericht 14, 1903/04 und 1904/05; 16, 1910.

Bremen. Meteorologisches Observatorium:

- — Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1909. Jahrg. 20. 4^o.
- Naturwissenschaftlicher Verein:
- — Abhandlungen, Bd. XX, Heft 1.

Breslau. Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur:

- — 87. Jahresbericht, 1909.

Brisbane. Geographical Society:

- — Geographical Journal, vol. 24.

Bromberg. Stadtbibliothek (Deutsche Gesellschaft für Kunst und Wissenschaft):

- — Jahresbericht, 4—8, 1905—1910.
- — Vorträge und Verhandlungen des technischen Vereins, No. 1—5.
- — Jahresbericht (Abt. Literatur) 4—7.
- — Jahrbuch des histor. Vereins für den Netzedistrikt, 1880—1899.

Bromberg. Stadtbibliothek (Deutsche Gesellschaft für Kunst und Wissenschaft):

- — Mitteilungen der Stadtbibliothek, Jahrg. 2, No. 1—12; Jahrg. 3, No. 1—12; Jahrg. 4, No. 1—3.
- — Veröffentlichungen, Vorträge von Richert, 1905.
- " " Löwenthal, 1906.
- " " Elster, 1907.
- — Industrie und Gewerbe in Bromberg, von Böhm, 1907.
- — Bodenverhältnisse Brombergs mit Atlas, 1900, von Liebenau.
- — Gaswerk von Bromberg, 1910, von Metzger.
- Kaiser Wilhelms-Institut für Landwirtschaft:
- — Mitteilungen, Bd. 2, Heft 1, 2; Bd. 3, Heft 2.
- — Vorträge über Pflanzenschutz, Heft 1, 1910.

Brooklyn. Institute of Arts and Sciences:

- — Science Bulletin, vol. 1, No. 16, 17.

Brünn. Mährisches Landesmuseum:

- — Časopis, Bd. X, Heft 1, 2.
- — Zeitschrift, Bd. IX, 2; Bd. X, Heft 1, 2.
- Deutscher Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens:
- — Zeitschrift, 14. Jahrg., Heft 1, 2.
- Naturforschender Verein:
- — Verhandlungen, Bd. 47, 1908.

Brüssel. Académie Royale de médecine:

- — Mémoires couronnés, Collection in 8^o, tom. 20, fasc. 6, 7.
- — Bulletin, 1V^e sér., tom. 23, No. 11, Titel u. Register zu 23; tom. 24, No. 1—8.
- Académie Royale des sciences:
- — Annuaire 1910.
- — Bulletin: a) Classe des lettres, 1909, No. 9—12; 1910, No. 1—10;
- b) Classe des sciences, 1909, No. 9—12; 1910, No. 1—10.
- — Mémoires, Classe des sciences, Collection in 8^o, II^e sér., tom. II, fasc. 6—8.
- — Mémoires, Classe des lettres, Collection in 4^o, II^e sér., tom. V, 1910.
- — Mémoires, Classe des sciences, Collection in 4^o, II^e sér., tom. II, fasc. 2—5; tom. III, fasc. 1, 2.
- — Tables générales zu tom. 31—36.
- — Mémoires, Classe des lettres, Collection in 8^o, II^e sér., tom. V, fasc. 2; tom. VI, fasc. 1—3; tom. VII, fasc. 1—3.
- — Biographie nationale, tom. XX, fasc. 2, 3.
- — Classe des sciences, Programme du concours pour 1911.
- — " " lettres, " " " " " " " " 1913.

Brüssel. Académie Royale des sciences:

- — Des Marez-de Sager, Comptes de la ville d'Ypres, T. 1, 1909.
- — Espinasse-Pirenne, Industrie drapière de Flandre, T. 2, 1909.
- Bibliothèque Royale de Belgique:
- — Catalogue des manuscrits, tom. 9, 1909.
- Musée R. d'hist. naturelle de Belgique:
- — Mémoires, tom. 1, 1903; tom. 2, 1903; tom. 3, 1906; tom. 4, 2 extraits; tom. 5, 3 extraits.
- Observatoire Royal siehe Uccle.
- Société d'archéologie:
- — Annales 1910, No. 1, 2.
- — Annuaire, tom. 21, 1910.
- Société des Bollandistes:
- — Analecta Bollandiana, tom. 29, fasc. 1—4.
- Société entomologique de Belgique:
- — Annales, tom. 53.
- Société botanique de Belgique:
- — Bulletin, tom. 44, fasc. 1—3, 1907; tom. 45, fasc. 1—3, 1908; tom. 46, fasc. 1—4, 1909.
- — Massart Jean, Essai de géographie botanique . . ., Brüssel 1908.
- Société chimique:
- — Bulletin, 24^e année, No. 1—12.
- Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie:
- — Nouveaux Mémoires 1909, fasc. 3; 1910, fasc. 4; 4^o.
- — Bulletin: a) Mémoires, tom. 24, fasc. 1, 2; b) Procès-verbaux, tom. 23, No. 7—10, Titel u. Register; tom. 24, No. 1—7.
- Société Royal zoologique et malacologique:
- — Annales, tom. 40, 1905; tom. 44, 1909.

Budapest. K. Ungarische Akademie der Wissenschaften:

- — Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, Bd. 25, 1907.
- — Almanach 1908, 1909.
- — Rapport 1909.
- — Prix Bolyai, 1910.
- — Nyelvjararasok (Mundarten)
- — — Deutsche in Ungarn, Heft 7.
- — — Slavische „ „ „ 1.
- — Farsadalomtudományi Értekezések, Bd. 14, No. 3—4.
- — Történettudományi „ „ 22, „ 4—7.
- — Bölcsészettudományi „ „ 3, „ 6—7.
- — Nyelvtudományi „ „ 21, „ 3—7.
- — Archaeologiai Értekezések, Bd. 29, No. 3—5; 13d. 30, No. 1—3.

Budapest. K. Ungarische Akademie der Wissenschaften:

- — Mathemat. és természetud. Értesítő, vol. 27, No. 3—5; vol. 28, No. 1, 2.
- — Nyelvtudományi Közlemények, Bd. 39, No. 1—4.
- — Nyelvtudomány II, 3, 4; III, 1.
- — Einzelwerke 1910, 9 Bände.
- Association internationale de sismologie:
- — Comptes-rendus 1909, Zermatt 1910.
- Ungarische Ethnographische Gesellschaft:
- — Ethnographia, Jahrg. 21, Heft 1—5.
- K. Ungarische Gesellschaft für Naturwissenschaften:
- — Botanikai Közlemények, 1909, Bd. 8. No. 1—6.
- — Allatani „ 1909, „ 8, „ 1—4.
- — Pethő, A Petervárad Hegység Krétakori faunája, 1910.
- — Róna Zsigmond, Eghaljat. 2. Teil, 1909.
- — Hegyfoky J., Regenangaben aus Ungarn, 1851—70; 1910.
- K. Ungarische Geologische Reichsanstalt:
- — Földtani Közlöny, Bd. 39, Heft 6—12; Bd. 40, Heft 1—6; 1909/10.
- — Sektionsblatt, Zone 13, vol. 30.
- — Erläuterungen zur geologischen Spezialkarte, Zone 13, Kol. 31.
- — Jahrbuch, Bd. 10, No. 4—6; Bd. 14. No. 2—4; Bd. 16, No. 2—6.
- K. Ungarische Geographische Gesellschaft:
- — Mitteilungen, vol. 37, livr. 5—7.
- — Resultate der Erforschung . . . d. Balatonsees, 19 Teile, 1900—1909.
- Statistisches Bureau:
- — Publikationen, No. 44, 45.
- Ungarische volkswirtschaftliche Gesellschaft:
- — Közgazdasági Szemle, Bd. 43, Heft 1 mit Bibliographie, Okt.—Nov. 1909; Bd. 43, Heft 2 mit Bibliographie, Dez. 1909; Bd. 43, Heft 3 mit Bibliographie, Jan. 1910; Bd. 43, Heft 4 mit Bibliographie, Febr. 1910; Bd. 43, Heft 5 mit Bibliographie, März 1910; Bd. 44, Heft 1, 2 mit Bibliographie, Mai—Juni 1910; Bd. 44, Heft 3 mit Bibliographie, Juli 1910.
- Landesrabbinerschule:
- — Jahresbericht 32, 1908—09; 33, 1909—10.
- Ungarisches Nationalmuseum:
- — Értesítője, XI. Jahrg., füzet 1, 2.
- Reichsanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus:
- — Publikationen 1909, Bd. 8.
- K. Ungarische Ornithologische Zentrale:
- — Aquila 16, 1909.

Buenos Aires. Museo nacional publico:

- — Anales, ser. III, tom. 11, 12, 1909.
- — Oficina meteorologica Argentina:
- — Anales, tom. 16, 1905.
- — Davis, Climate of the Argentine Republic, 1910.
- — Sociedad cientifica:
- — Anales, tom. 69, No. 3—4.
- — Congr. intern. Americano, 1910.
- — Deutsch-akademische Vereinigung:
- — Veröffentlichungen 1899—1904; in Einzelheften, = 8 Hefte.
- — Stöpel K. Th., Reise nach Formosa, 1905.

Buffalo. Society of natural sciences:

- — Bulletin, vol. IX, No. 3.

Buitenzorg (Java). Departement van landbouw:

- — Malayan Ferns by G. van Alderwerelf van Rosenbourgh, Batavia 1909.
- — Bulletin, No. 28—43, 4^o.
- — Mededeelingen, No. 4. 9.
- — Verslag, 1895—1903.
- — Technische afdeeling, 1905.
- — Observations meteorol., 1901, 1903/04, 1905, 1907.

Bukarest. Academia Română:

- — Analele, Sect. literare, ser. II, tom. 31, 1908/09; Sect. istorice, ser. II, tom. 31, 1908/09; Sect. scientif., ser. II, tom. 31, 1908/09.
- — Analele, Indice alfab. 21--30, 1898—1908.
- — Bianu und Hodoş, Bibliografia Românească veche, tom. 2, fasc. 5, 4^o.
- — Documente de la storia Romanilor, vol. 13, 1909.
- — Cresterile colecţiunilor, 1903, 4 fasc.; 1909, No. 10—12.
- — Discussioni de receptiune 32, 33.
- — Publicatiunile fondulin Adamachi, tom. 2, 1901—06.
- — Din vicata poporului Român IV, VI, VII.
- — Livius, tom. 4, cap. 31—40.
- — Catalogul manuscriptelor de Litzica.
- — Donado do Lezze.
- — Société des Sciences:
- — Bulletin, anul 18, No. 5, 6; anul 19, No. 1—5.

Burghausen. K. Humanist. Gymnasium:

- — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von Georg Wall.

Caen. Société Linnéenne de Normandie:

- — Mémoires, vol. 23, fasc. 2, und Titel und Register.

Cairo. Institut Égyptien:

- — Bulletin, ser. V, tom. 3, fasc. 1, 2; tom. 4, fasc. 1.

Cairo. Institut Égyptien:

— — Mémoires, tom. 6, fasc. 1, 2.

Calcutta. Meteorological Department of the Government of India siehe Simla.

— Department of agriculture siehe auch Pusa.

— Board of Scientific Advice for India:

— — Annual Report 1908/09.

— Government of Bengal:

— — Hrīshikeśa Sāstri and Nilamani Cakravartti, a descriptive Catalogue of Sanskrit Manuscripts in the Library of Calcutta Sanskrit College, No. 27.

— Royal Asiatic Society of Bengal:

— — Bibliotheca Indica, N. Ser., No. 1201—1213, 1217, 1218, 1220.

— — Journal, vol. 74, part 4.

— — Journal and Proceedings, vol. 4, No. 5—11.

— — Memoirs, vol. 2, No. 5—9.

— Geological Survey of India:

— — Records, vol. 38, part 4; vol. 39.

— — Memoirs, vol. 37, part 4; vol. 38.

— — Palaeontologia Indica, ser. XV, vol. 4, No. 2; ser. XVI, vol. 6, No. 2; N. Ser. vol. 3, Memoir No. 1.

Cambrai. Soc. d'émulation:

— — Memoirs, tom. 63.

Cambridge (Mass.). Harvard University:

— — Bulletin, vol. 52, No. 15—17; vol. 54, No. 1.

— — Memoirs, vol. 34, No. 3; vol. 39, No. 1, Titel u. Register; vol. 40, No. 1; vol. 41, No. 1, 2.

— — Annual Report 1908/09, 1909/10.

— Astronomical Observatory of Harvard University:

— — 64th Annual Report.

— — Annals, vol. 52, part 2; vol. 55, part 2; vol. 59, part 5; vol. 69, part 1; vol. 70.

— — Circular, No. 149—152, 4^o.

— Peabody Museum of Americ. Archaeol. and Ethnology:

— — Memoirs, vol. 1, No. 6, Titel u. Register zu 1; vol. 2, No. 1, 2; vol. 3, No. 1; vol. 4, No. 1—3.

— — Papers, vol. 1, No. 1—7, Titel u. Register zu 1; vol. 3, No. 1—4, Titel u. Register zu 3; vol. 4; No. 1, 3.

— — Codex Nuttall 1902.

Cambridge (Engl.). Observatory:

— — Observations, vol. 24, No. 1.

— Antiquarian Society:

— — Proceedings, No. 55 = 14, 1; No. 56 = 14, 2; No. 57 = 14, 3.

Cambridge. Antiquarian Society:

- — List of members 1910.
- Philosophical Society:
- — Proceedings, vol. 14, part 5, 6; vol. 15, part 4—6.
- — Transactions, vol. XXI, No. 10—14; 4^o.

Catania. Accademia Gioenia di scienze naturali:

- — Atti, serie V, vol. 2, 1909, 4^o.
- — Bollettino. ser. II, fasc. 10—13, 1909.
- Società di storia patria per la Sicilia Orientale:
- — Archivio, anno VI, fasc. 2, 3; anno VII, fasc. 1. 2.

Charkow. Société mathématique:

- — Communications, 2^e sér., tom. 11, No. 5—6; tom. 12, No. 1.
- Université Impériale:
- — Sapiski 1909, Lief. 4; 1910, Lief. 1—3.
- Obsčestvo fiziko-chim. nauk.:
- — Trudy 36, 1908; 37, 1909.

Charlottenburg. Physikalisch-technische Reichsanstalt:

- — Die Tätigkeit der physik.-technischen Reichsanstalt im Jahre 1909.

Chicago. Academy of Sciences:

- — Bulletin, vol. I, Nr. 1—10; vol. III, Nr. 3.
- Deutsch-amerikanische-historische Gesellschaft:
- — Deutsch-amerikanische Geschichtsblätter. 10. Jahrg., Heft 1.
- John Crerar Library:
- — 14th Annual Report for 1909.
- Field Columbian Museum:
- — Publications, No. 130, 131, 136—144.
- University of Chicago Library:
- — Journal of Geology, vol. 18, No. 5.

Christiania. Videnskabselskabet:

- — Forhandlingar, Aar 1909.
- — Skrifter, I. math.-naturwiss. Klasse, 1909; II. histor.-filos. Klasse, 1909.
- Norske geografiska Selskab:
- — Aarboog 20. 1908/09.
- Universitets-Bibliothek:
- — Meridianbeobachtungen. Bd. 1, 1909.

Chur. Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden:

- — 39. Jahresbericht, 1909.
- Naturforschende Gesellschaft für Graubünden:
- — Jahresbericht, N. F., Bd. 49, Jahrg. 1906/07; Bd. 52, Jahrg. 1909/10.

Cincinnati. Lloyd Library:

- — Bulletin, No. 12, 13.
- — Mycological writings, No. 30—35.
- University:
- — Record, ser. I, vol. 6, No. 3, 5—10.
- — University Studies, ser. II, vol. 5, No. 4; vol. 6, No. 1, 2.
- — Progress 1908/09.
- Observatory:
- — Publications, No. 2, 3, 5, 10.
- Society of Natural History:
- — Journal, vol. 21, No. 1, 2.

Claremont. Pomona College:

- — Journal of entomology, vol. 1, No. 1—4; vol. 2, No. 1—3.

Clermont. Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts:

- — Bulletin historique et scientifique de l'Auvergne, ser. II, 1909, No. 1—3.
- Société des amis de l'Université:
- — Revue d'Auvergne et Bulletin de l'Université, année 21, No. 1.

Cleveland. Archaeol. Inst. of America:

- — American Journal of Archaeology, vol. 13, No. 4; vol. 14, No. 1—3.
- — Bulletin, vol. 1, No. 2—4.

Cold Spring Harbor. Biological Laboratory:

- — Monographs 6, 1906.

Colombo. Museum:

- — Spolia Zeylonica, part 1—25.

Columbia. University of Missouri:

- — Bulletin, vol. 5, No. 1—3, 8—10; vol. 6, No. 3—12; vol. 7, No. 1, 3, 12; vol. 8, No. 6, 10, 12; vol. 9, No. 1, 3, 4, 6—12; vol. 10, No. 1, 2, 4, 8—10.

Como. Società storica:

- — Periodico, fasc. 74.
- — Raccolta Storica, vol. 6, disp. 1—3.

Concarneau. Laboratoire maritimes:

- — Travaux scientifiques, tom. 1, part 1, 2.

Czernowitz. Franz Josephs-Universität:

- — Verzeichnis der Vorlesungen, W.-S. 1909/10, S.-S. 1910.
- — Personalstand 1909/10.

Danzig. Technische Hochschule:

- — Personalverzeichnis S.-S. 1910 u. W.-S. 1910/11.
- — Programm 1910/11.
- Verein für Herstellung der Marienburg:
- — Geschäftsbericht 1905—08.

Danzig. Westpreußischer Geschichtsverein:

- — Zeitschrift, Heft 52.
- — Mitteilungen, Jahrg. 9, 1910, No. 1—4.

Darmstadt. Historischer Verein für das Großherzogtum Hessen:

- — Archiv für hessische Geschichte, Ergänzungsband 4, 2.
- — Quartalblätter, 4. Bd., No. 14—16. Titel u. Register zu Bd. 2.

Davenport. Academy of Sciences:

- — Proceedings, vol. 7, 1897, 99.

Davos. Meteorologische Station:

- — Wetterkarten 1910, Sept., Okt.

Delft. Technische Hoogeschool:

- — Dissertat. 1909/10.

Denver (Colorado). Colorado Scientific Society:

- — Proceedings, vol. IX, pag. 259—402, Titel u. Register.
- — Yearbook 1882—1910.

Dessau. Verein für Anhaltische Geschichte und Altertums-
kunde:

- — Mitteilungen, Bd. VII. Teil 8; Bd. VIII, Teil 1—5; Bd. XI, Teil 2, 3.

Dillingen. Historischer Verein:

- — Archiv für die Geschichte des Hochstifts Augsburg, Bd. 1, Lief. 2, 3;
Bd. 2, Lief. 3, 4.

Donauwörth. Historischer Verein:

- — Verwaltungsbericht 1907/08 u. 1909/10.
- — Traber, Herkunft der selig genannten Dominikanerin Marg.
Ebner, 1910.

Douai. Union géographique du Nord de la France:

- — Bulletin, année 30, trim. 4; année 31, trim. 1—3.

Dresden. K. Sächsischer Altertumsverein:

- — Neues Archiv für sächsische Geschichte, Bd. XXXI.
- — Jahresbericht 1909/10.
- Verein für Erdkunde:
 - — Mitteilungen, Heft 10.
- Flora, K. Sächsische Gesellschaft für Botanik und
Gartenbau:
 - — Jahrg. 12—14, 1907—1910.
- Redaktion des Journals für praktische Chemie:
 - — Journal 1910, No. 3—21.
- K. Sächsische Landes-Wetterwarte:
 - — Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1905, 2. Hälfte, 1906,
1. u. 2. Hälfte u. Titel u. Register, 1907, 1. Hälfte.
 - — Dekaden-Monatsberichte, Jahrg. XII, 1909.

Dublin. Royal Irish Academy:

- — Proceedings, vol. XVIII, sect. B, No. 1, 2; vol. XXVII, sect. B, No. 1 u. Titel; sect. C, No. 16—18 u. appendix; vol. XXVIII, sect. A, No. 1—3; sect. B, No. 3—8; sect. C, No. 1—12.
- — Todd Lecture Series, vol. 1, 1; vol. 2, 2.
- — Cunningham Memoirs, No. 1—11.
- Royal Society:
- — The Economic Proceedings, vol. 2, No. 1, 2.
- — The Scientific Proceedings, vol. 12, No. 24—36.
- — Index zu Proceedings 9—11 u. Trans. 7—9.

Dürkheim. Pollichia:

- — Mitteilungen, No. 25.
- Progymnasium:
- — Jahresbericht 1909/10.

Easton (Pa.). American Chemical Society:

- — The Journal, vol. 32, No. 1—12.

Edinburgh. Royal Society:

- — Proceedings, vol. 30, part 1—6.
- — Transactions, vol. 34; vol. 47, part 1, 2.
- Botanical Society:
- — Transactions and Proceedings, vol. 24, No. 1.
- Geological Society:
- — Transactions, vol. 9, Specialpart 1910.
- Mathematical Society:
- — Proceedings, vol. 23, 1909/10.
- Observatory:
- — Annales, vol. 3, 1910.
- Royal Physical Society:
- — Proceedings, vol. 18, No. 1, 2.
- Royal Scottish Geographical Society:
- — Magazine, vol. 26, No. 1.

Eichstätt. K. Humanist. Gymnasium:

- — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von Ludwig Thurmayr.

Einbeck. Verein für Geschichte und Altertümer:

- — Jahresbericht 1896, 1898, 1900, 1901 u. 02, 1906, 1907, 1908.

Eisenach. Karl Friedrich-Gymnasium:

- — Jahresbericht für 1909/10.

Eisenberg. Geschichts- und altertumsforschender Verein:

- — Mitteilungen, Heft 21—25.

Emden. Gesellschaft für bildende Kunst und vaterländische Altertümer:

- — Jahrbuch, Bd. 17, 1, 2.

- Erfurt.** K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften:
— — Jahrbücher, N. F., Heft 35.
— Verein für Geschichte und Altertumskunde von Erfurt:
— — Mitteilungen, Heft 30, 31.
- Erlangen.** K. Humanist. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von S. v. Raumer.
— K. Universität:
— — Festschrift zur Jahrhundertfeier der Verbindung der Friderico
Alexandrina mit der Krone Bayern, 1910.
— K. Universitätsbibliothek:
— — Schriften aus dem Jahre 1909/10 in 4^o und 8^o.
- Florenz.** Reale Accademia dei Georgofili:
— — Atti, ser. V, vol. 7, disp. 1, 2, 3.
— Biblioteca Nazionale Centrale:
— — Bollettino delle Pubblicazioni Italiane, 1909, Titel u. Register;
No. 109—120.
— Società Asiatica Italiana:
— — Giornale, vol. 22, 1909.
- Frankfurt a. M.** Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 32.
— — 41. Bericht, Heft 1, 2.
— Bibliothek des Internat. Entomologenvereins:
— — Entomologische Zeitschrift, Jahrg. 24, No. 1—37.
— Physikalischer Verein:
— — Jahresbericht 1908/09.
— Verein für Geschichte und Altertumskunde:
— — Archiv für Frankfurts Geschichte, 3. Folge, Bd. 10.
- Freiburg i. Br.** Breisgau-Verein Schau ins Land:
— — „Schau ins Land“, 36. Jahrlauf, 2. Hälfte; 37. Jahrlauf, 1. Hälfte.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Berichte, Bd. 16, 1906; Bd. 18, Heft 1.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1909/10 in 4^o und 8^o.
- Friedberg i. H.** Geschichtsverein:
— — Geschichtsblätter, Heft 1, 2.
— — Helenka-Seidenberger-Dreher-Festschrift 1908.
— Dreher, Archiv, 1910.
- Friedrichshafen.** Verein zur Geschichte des Bodensees:
— — Schriften, Heft 38.
- Fürth.** K. Humanist. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von Gustav Scholl.

- Geneva.** U. St. Agricultural Experimental Station:
 — — Bulletin, No. 318—323.
 — — Technical Bulletin, No. 11—13.
- Genf.** Institut National Genèveois:
 — — Mémoires, tom. 20 (1906—10), 4^o.
 — — Bulletin, tom. 38 und 39, 1909.
 — Observatoire:
 — — Observations météorologiques pendant l'année 1908.
 — — Résumé météorologique de l'année 1908.
 — Société d'histoire et d'archéologie:
 — — Mémoires et documents 31, 2; 8^o.
 — Société de physique et d'histoire naturelle:
 — — Mémoires, vol. 36, fasc. 2, 3; 4^o.
 — Universität:
 — — 18 Schriften zur Jahrhundertfeier der Universität 1909.
 — — Dissertationen von Leale, Fraschina, Halésoff.
 — — Thésés 1909/10.
 — Redaktion des „Journal de chimie physique“:
 — — Journal, tom. 8, No. 1—10.
 — Schweizerische Paläontologische Gesellschaft:
 — — Abhandlungen 36, 1909/10.
- Genf.** Vlaamsche Academie van tal- en letterkunde:
 — — Verslagen, Dezember 1909; Jan., Febr., Maart, April, Mei, Juni,
 Juli, Aug., Sept., Oct., Nov., 1910.
 — — Jarboek 1910.
 — Het Vlaamsch Natuur- en geneeskindig Congres:
 — — Handelingen van het 13 . . . Congres, 1909.
- Genua.** Museo civico di storia naturale:
 — — Annali, Ser. III, Bd. 44, 1908.
- Giessen.** Universität:
 — — Schriften aus dem Jahre 1909/10 in 4^o und 8^o.
 — Oberhessischer Geschichtsverein:
 — — Mitteilungen, N. F., Bd. 17.
 — Gesellschaft für Natur- und Heilkunde:
 — — Bericht, N. F., medizinische Abteilung, Bd. 5, 1909; naturwissen-
 schaftliche Abteilung, Bd. 3, 1908/09.
 — — Register zu Bd. 1—34.
 — Gesellschaft für Erd- und Völkerkunde:
 — — Geographische Mitteilungen aus Hessen, Heft 1—5.
- Glasgow.** Geological Society:
 — — Transactions, vol. XIII, 3.

Göttingen. K. Gesellschaft der Wissenschaften:

- — Göttingische Gelehrte Anzeigen 1910, No. 1—12.
- — Abhandlungen. N. F., a) Philol.-hist. Klasse. Bd. XII, No. 1, 2, 4; b) Math.-phys. Klasse, Bd. VI, No. 5, 6; Bd. VII, No. 4.
- — Nachrichten, a) Philol.-hist. Klasse, 1909, Heft 4; 1910, Beiheft, Heft 1, 2; b) Math.-phys. Klasse, 1909, Heft 3 und 4; 1910, Heft 1—4; c) Geschäftliche Mitteilungen, 1909, Heft 2; 1910, Heft 1.

Granville (Ohio). Scientific Laboratories of Denison University:

- — Bulletin, vol. XIV, articles 17, 18; vol. XV, p. 1—100.

Graz. Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark:

- — Mitteilungen. Jahrg. Bd. 46, Heft 1 und 2.
- — Universität:
- — Verzeichnis der Vorlesungen im S.-S. 1910 und W.-S. 1910/11.
- — Verzeichnis der akademischen Behörden etc., 1910/11.
- — Bericht über volkstümliche Vorträge, 1907—1910.

Greifswald. Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein:

- — Pommersche Jahrbücher, 2. Ergänzungsband, 1910.
- — Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern:
- — Mitteilungen, 41. Jahrg., 1910.

Greiz. Verein der Naturfreunde:

- — Abhandlungen u. Berichte, Heft 3, 1898; Heft 4, 1902; Heft 5, 1907.

Grenoble. Académie Delphinale:

- — Bulletin, V. série, tom. I, 1907; tom. II, 1908.
- — Université:

- — Annales, tom. 21, 1909, trim. 1—4; tom. 22, 1910, trim. 1.

Grimma. Fürsten- und Landesschule:

- — Jahresbericht 1909/10, 4^o.

Guéret. Société des sciences naturelles et archéologique:

- — Mémoires, tom. 17, part 1.

Gunzenhausen. K. Realschule:

- — Jahresbericht 17, 1909/10.

Haag. K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie:

- — Bijdragen, VII. Reeks, deel IX, afl. 3, 4; deel X; VIII. Reeks, deel I, afl. 1, 2.
- — Catalogus der Koloniale Bibl., 2. opgave.
- — Fondation pour l'internationalisme:
- — Eykman (P. H.). L'internationalisme medical, Haag 1910.
- — Revue für Internationalismus, Jahrg. 1, No. 1—3.

Haarlem. Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen:

- — Verhandelingen (natuurkundige) VI, 4, 1907.

- Haarlem.** Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, ser. III, tom. 15, livr. 1—4
 — — Oeuvres des Huygens, vol. 12, 1910.
 — — Musée Teyler:
 — — Archives, sér. II, vol. 12, partie 1.
 — — Theologisch Tiidschrift, Jahrg. 8, No. 1—4.
 — — Verhandelingen uitg. dorch Teylers tweede genootschap, N. R., deel 7, 1906.
- Habana.** Sociedad economica de Amigos del Pais:
 — — Revista bimestre Cubana, vol. 4, No. 1, 2; vol. 5, No. 1—3.
- Halifax.** Nova Scotia Institute of Science:
 — — Proceedings and Transactions, vol. 12, part 2, 1907/08.
- Hall.** K. K. Franz Joseph-Gymnasium:
 — — Programm 1904/05, 1905/06, 1906/07, 1909/10.
- Hall i.** Württemb. Historischer Verein für das württembergische Franken:
 — — Württemberg. Franken, N. F., Heft 10, 1910.
- Halle.** K. Leopoldinisch-Karolinische Deutsche Akademie der Naturforscher:
 — — Leopoldina, Heft 46, No. 1—12 und Titel und Register.
 — — Nova Acta, Bd. 90, 91, 1909, 4^o.
 — — Deutsche Morgenländische Gesellschaft:
 — — Zeitschrift, Bd. 63, Heft 4; Bd. 64, Heft 1—3.
 — — Universität:
 — — Schriften aus dem Jahre 1909/10, in 4^o und 8^o.
 — — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1910 und W.-S. 1910/11.
 — — Amtliches Verzeichnis des Personals etc. für S.-S. 1910 und W.-S. 1910/11.
 — — Akademische Preisverteilung, 1909.
 — — Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen u. Thüringen:
 — — Zeitschrift für Naturwissenschaften, Bd. 81, Heft 5, 6.
 — — Sächsisch-Thüringischer Verein für Erforschung des vaterländischen Altertums:
 — — Neue Mitteilungen, Bd. 24, Heft 2.
 — — Jahresbericht für 1909/10.
- Hamburg.** Mathematische Gesellschaft:
 — — Mitteilungen, Bd. IV, Heft 10.
 — — Deutsche Seewarte:
 — — 32. Jahresbericht für das Jahr 1909, 4^o.
 — — Annalen der Hydrographie, 38. Jahrg., Heft 8—12.
 — — Dekadenberichte 1910, No. 19—33.
 — — Deutsche überseeische meteorologische Beobachtungen. Heft 18.
 — — Tabellarische Reiseberichte, Bd. 7.

Hamburg. Stadtbibliothek:

- — Jahresbericht der Verwaltungsbehörden, 1908, 4^o.
- — Staatshaushaltsberechnung 1908, 4^o.
- — Entwurf des hamburgischen Staatsbudgets für 1910, 4^o.
- — Verhandlungen zwischen Senat und Bürgerschaft, 1909, 4^o.
- Sternwarte:
- — Jahresbericht für 1909.
- Verein für Hamburgische Geschichte:
- — Mitteilungen, 29. Jahrg., 1909.
- — Zeitschrift. Bd. XIV, 2 Bd.; XV, 1.

Hanau. Wetterauische Gesellschaft für die gesamte Naturkunde:

- — Bericht über den Zeitraum 1903—1909.

Hanoi. École Française d'Extrême Orient:

- — Bulletin, tom. 9, No. 4, tom. 10, No. 1, 2.
- — Publications 11.

Hannover. Historischer Verein für Niedersachsen:

- — Zeitschrift, Jahrg. 1910, Heft 1, 2.
- Naturhistorische Gesellschaft:
- — Jahresbericht 58, 1907/08; 59, 1908/09.
- Verein für Geschichte der Stadt Hannover:
- — Hannoverische Geschichtsblätter, 2. Jahrg., 1899; 3. Jahrg., 1900; 13. Jahrg., Heft 1, 2, 3.
- — Katalog der Stadtbibliothek Hannover, 1901.
- Geological and Natural History Survey:
- — Bulletin, No. 1—12, 14, 15; Karte zu No. 7.

Heidelberg. Akademie der Wissenschaften:

- — Sitzungsberichte, a) philol.-histor. Klasse, 1910, Abh. 1—12.
b) mathem.-naturw. „ „ „ 1—24.
- Astrophysikalisches Institut:
- — Publikationen, Bd. III, No. 4—6, 4^o.
- Großherzogliche Sternwarte:
- — Veröffentlichungen, Bd. 6, No. 1—3, 7, 8; T. u. R. zu 3.
- Universität:
- — Schriften der Universität aus dem Jahre 1909/10 in 4^o und 8^o.
- — Schubert, Reich und Reformation.
- Historisch-philosophischer Verein:
- — Neue Heidelberger Jahrbücher, Jahrg. 14, Heft 1; Jahrg. 16, Heft 2.
- Naturhistorisch-medizinischer Verein:
- — Verhandlungen, N. F. X, Heft 3, 4.
- Reichslimeskommission:
- — Der obergermanisch-rätische Limes des Römerreiches, Lief. 33, 4^o.

Helgoland. Biologische Anstalt:

- — Meeresuntersuchungen, N. F., Bd. 11, Abt. Kiel; Abt. Helgoland, Heft 2.

Helsingfors. Institut météorologique central:

- — Observations météorologiques, 1909/10.
- — Meteorologisches Jahrbuch für Finnland, Bd. 3, 1903 u. Beilage zu Bd. 2.
- Finnische Akademie der Wissenschaften:
- — Annales, ser. A, vol. 1; ser. B, vol. 2, No. 1.
- — Sitzungsberichte 1908.
- Universität:
- — Schriften aus dem Jahre 1909/10 in 4^o und 8^o.
- Finnische Altertumsgesellschaft:
- — Finski Museum XVI, 1909.
- — Tidskrift XXIV, 1908.
- — Protokoll 1, 1870—75; 1909.
- — Ailio Jul., Steinzeitliche Wohnplatzfunde in Finnland, 1. Teil, 1909.
- Suomen Historiallinen Seura:
- — Arkisto 20, 1—3; 21, 1, 2.
- — Biaudet, Le Saint-Liége et la Suède 1, Helsingfors 1909.
- — Rauhala K. W., Suomen Keskushallinnon järjestämistä, 1808—17, I, II. 1910.
- Finnische Literaturgesellschaft:
- — Suomi, Bd. 1—7.
- Societas Scientiarum Fennica:
- — Acta, tom. 37, 2—4, 9—11 und Titel u. Register; tom. 36, 1—3; tom. 39 und Titel u. Register; tom. 40, 1—4.
- — Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk, Heft 67, 1—3 und Titel u. Register; Heft 68, 1—2.
- — Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societätens Förhandlingar 51, 1908/09, A, B, C; 52, 1909/10, A, B, C.
- — Finnländische hydrologisch-biologische Untersuchungen, No. 1—5.

Hermannstadt. Verein für siebenbürgische Landeskunde:

- — Archiv, N. F., Bd. 36, Heft 3; Bd. 37, Heft 1.
- — Jahresbericht 1909.
- Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften:
- — Verhandlungen und Mitteilungen, Bd. 47, Jahrg. 1897; Bd. 59, Jahrg. 1909.

Hildburghausen. Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte:

- — Schriften, Heft 60, 61 u. 62.

Hobart Town. R. Society of Tasmania:

- — Papers and Proceedings, 1892—1909.

- Hohenleuben.** Voigtländischer altertumsforschender Verein:
 — — Jahresbericht 78—80.
 — — Reußische Forschungen, Festschrift für Bertold Schmidt.
- Homburg i. Pf.** Progymnasium:
 — — Jahresbericht 1909/10.
- Igló.** Ungarischer Karpathen-Verein:
 — — Jahrbuch 37, Jahrg. 1910.
- Ingolstadt.** Historischer Verein:
 — — Sammelblatt, Heft 32, 1908.
- Innsbruck.** Ferdinandeum:
 — — Zeitschrift, Heft 54, 1910.
 — — Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein:
 — — Berichte, Bd. 33, Jahrg. 1910.
- Irkutsk.** Geographische Gesellschaft:
 — — Iswestija, tom. 29, No. 2, 3; tom. 31, No. 1, 2; tom. 32, No. 1, 2;
 tom. 33, No. 1, 2; tom. 34, No. 1, 2; tom. 35, No. 2; tom. 38, 1909;
 tom. 39, 1908; tom. 40, 1909.
- Ithaca.** Journal of Physical Chemistry:
 — — The Journal, vol. 14, No. 1—8, gr. 8^o.
- Jassy.** Societatea de stinti:
 — — Annales scientifiques, tom. 6, fasc. 2, 3.
 — Societatea des medecins et naturalistes:
 — — Bulletin, année 21, 1—12; année 22, 1—12; année 23, 1—12;
 année 24, 1—5.
- Jekaterinburg.** Oural-Société d'amateurs des sciences naturelles:
 — — Bulletin, tom. 28, 29.
- Jena.** Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft:
 — — Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, Bd. 46, Heft 1—3.
 — — Denkschriften, Bd. XIV, 2, Lief. 1, 2; Bd. XVI, 4, Lief. 1, 2, 3.
- Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde:**
 — — Zeitschrift, N. F., Bd. 19, Heft 2; Bd. 20, Heft 1.
 — Verlag der Naturwissenschaftlichen Wochenschrift:
 — — Wochenschrift 1910, No. 1—52.
- Johannesburg.** Transvaal Meteorological Department Observa-
 tory:
 — — Annual Report 1908/09, Pretoria 1910, fol.
 — Geological Society of South Africa:
 — — Transactions, vol. 7—12, 2; vol. 13, 1.
 — — Proceedings, tom. 7—12.
- Jurjew (Dorpat).** Gelehrte Esthnische Gesellschaft:
 — — Sitzungsberichte 1909.
 — — Verhandlungen, Bd. 22, Heft 23.

Jurjew (Dorpat). Naturforschende Gesellschaft bei der Universität:

- — Sitzungsberichte, Bd. XVIII, 2—4.
- Universität:
- — Schriften aus dem Jahre 1909/10 in 4^o und 8^o.
- — Učenijski Zapiski, Acta et Commentationes, Jahrg. 17, No. 1—10.

Kahla. Verein für Geschichte und Altertumskunde:

- — Mitteilungen, Bd. 7, Heft 1.

Karlsruhe. Badische Historische Kommission:

- — Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins, N. F., Bd. 25, Heft 1—4, Heidelberg 1910.
- — Neujahrsblätter 1910, Heidelberg 1910.
- Technische Hochschule:
- — Schriften 1909/10.
- Zentralbureau für Meteorologie und Hydrographie:
- — Jahresbericht für das Jahr 1909; 1910, fol.
- Naturwissenschaftlicher Verein:
- — Verhandlungen, Bd. 22, 1908/09; 1910.

Kasan. Sociétés physico-mathématique:

- — Bulletin, 11^e sér., tom. 15, No. 1; tom. 16, No. 2, 3.
- Universität:
- — Učenijski Zapiski, Bd. 77, Heft 1—11.
- — Bulletin de l'Observations météorol., Sept. 1909; Sept., Oct. 1910.
- Gesellschaft der Naturforscher:
- — Trudy, tom. 41, 1—6; tom. 42, 1—3.
- — Protokoly 1908/09.

Kassel. Verein für hessische Geschichte und Landeskunde:

- — Zeitschrift, Bd. 44, 1910.
- — Mitteilungen 1891—1908/09.

Kaufbeuren. K. Progymnasium:

- — Jahresbericht 1909/10; 1910.
- Verein „Heimat“:
- — Deutsche Gaue, Bd. 11, Lief. 9, 10 = Heft 217—220.

Kempten. K. Humanist. Gymnasium:

- — Jahresbericht 1909/10 und Programm von Bay.

Kew bei London. R. Botanical Garden:

- — Bulletin 1910, No. 1—10.
- — Appendix 1910, I—IV; 1911, I.

Kiel. Gesellschaft für schleswig-holsteinische Geschichte:

- — Zeitschrift, Bd. 40, Leipzig 1910.
- K. Universität:
- — Schriften aus dem Jahre 1909/10 in 4^o und 8^o.

Kiel. K. Sternwarte:

- — Publikation 12, 1910.
- Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein:
- Schriften, Bd. 14, Heft 2.

Kiew. Universität:

- — Izvěstija, Bd. 49, No. 8--12; Bd. 50. No. 1-9, 1909/10.
- Polytechnisches Institut Kaiser Alexander II.:
- — Annales, 10^e année 1910, livre 1.
- — Chemische Abhandlung, 10^e année 1910, livre 1, 2.
- Gesellschaft der Naturforscher:
- — Zapiski, tom. 20, No. 4; tom. 11, No. 1, 2.
- Ukrainische Gesellschaft der Wissenschaften:
- — Mitteilungen, Sbirnik, Heft 1, 1910.

Klagenfurt. Landesmuseum:

- — Carinthia I, 99. Jahrg., No. 1-6.
- — Carinthia II, 1909, No. 6; 1910, No. 1-4.
- — Jahresbericht des Naturhistorischen Landesmuseums 1906, 1907, 1908, 1909.
- — Jahresbericht des Geschichtsvereins 1908.

Klausenburg. Siebenbürgische Museums-Gesellschaft:

- — Erdélyi Múzeum, Bd. 26, Heft 6; Bd. 27, Heft 1-5.
- — Füzetek, Bd. I, 1, 2; Bd. II, 1, 2; Bd. IV. 1, 2.
- — Ertesítő, I. Sect. Jahrg. 9, 1; Jahrg. 23, 1-3; Jahrg. 24, 1-3; Jahrg. 25, 1; II. Sect. Jahrg. 23. 1-3; Jahrg. 24, 1.
- — Nepszerii Előadások, Jahrg. 8, Heft 3, 4.

Köln. Gesellschaft für rheinische Geschichtskunde:

- — Jahresbericht 29, (1909).

Königsberg. Altertumsgesellschaft „Prussia“:

- — Sitzungsberichte, 22, 1909.
- Universität:
- — Schriften aus dem Jahre 1909/10.
- K. Sternwarte:
- — Astronomische Beobachtungen 42 und 43, 1.

Konstantinopel. Institut d'histoire Ottomane:

- — Revue historique 1910, No. 1-5.

Kopenhagen. K. Akademie der Wissenschaften:

- — Oversigt 1909, No. 6; 1910, No. 1-5.
- — Mémoires. Section des lettres, sér. 7, tom. 1, No. 3; Section des sciences, sér. 7, tom. 5, No. 3, 4; tom. 6, No. 5; tom. 8, No. 4.
- — Jørgensen, Le temple Étrusco-Latin 1909.
- — Meyer & Erbe, Ole Romers Adversaria, 1910.
- Carlsberg-Laboratorium:
- — Comptes rendus des travaux, vol. 8, livre 1, 2; vol. 9, livre 1.

Kopenhagen. Conseil permanent international pour l'exploration de la mer:

- — Rapports et Procès-verbaux, vol. 12, 1908/09.
- — Bulletin, vol. 4, 1907; 1910, part 1.
- — Publications de circonstance, No. 48 - 51.
- — Bulletin hydrographique, 1908/09.
- Gesellschaft für nordische Altertumskunde:
 - — Aarbøger, II. Raekke, Bd. 24.
 - — Mémoires, N. S., 1908/09.
- Kommissionen for Havundersøgelse:
 - — Serie Planton, Bd. I, No. 8.
 - — „ Fiskeri, Bd. I, No. 1—8; Bd. II, No. 1—9; Bd. III, No. 1—8.
 - — „ Hydrografi, Bd. 1, No. 1—14.

Krakau. Akademie der Wissenschaften:

- — Catalogue of Polish Scientific Literature, tom. IX, 3, 4.
- — Anzeiger (Bulletin international), 1. Classe de philologie, 1909, No. 9—10; 1910, Nr. 1, 2; 2. Classe des sciences mathématiques 1909, No. 9, 10; 1910, A, No. 1—7, B, No. 1—6.
- — Materialy i Prace Komisji językowej, tom. 4.
- — Rocznik, Rok 1908/09.
- — Sprawozdanie komisji fizyograficzny, tom. 43, 1909.
- — Rozprawy, filolog.-filozof., ser. III, tom. 1.
- — Rozprawy, mathem., tom. 8, 1908; tom. 9, 1909; biol., tom. 8, 1908; tom. 9, 1909.
- — Biblioteka pisarzy polskich, No. 55 (Aesop), 1910.
- — Corpus iuris Polonici, S. I, vol. 4, 1.
- — Duda; Ruskiowski-Brodzinski.
- — Sawckiego.
- — Buchkatalog der Akademie.
- — Szydelski.
- Historische Gesellschaft:
 - — Rocznik, tom. 11, 12, 14.
 - — Biblioteka, No. 42.
- Numismatische Gesellschaft:
 - — Wiadomosci, 1910, No. 1—12.

Kyoto. Imperial University:

- — Memoirs, vol. 2, No. 9—11.

Landau (Pfalz). K. Humanist. Gymnasium:

- — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von G. Strauß.

Landsberg a. L. K. Realschule:

- — 32. Jahresbericht 1909/10.

Landshut. Historischer Verein:

— — Verhandlungen, Bd. 46, 1910.

Langres. Société historique et archéologique:

— — Bulletin, No. 81, 82.

— — Mémoires, tom. 4, No. 1.

Lausanne. Société Vaudoise des sciences naturelles:

— — Bulletin, No. 168—170.

— Schweizerische Geodätische Kommission:

— — Arbeiten, astron. geodät., Bd. 12, 1910.

— Institut agricole:

— — Observations, année 1890, 1891, 1892, 1894.

— Redaktion des „Bulletin“:

— — Bulletin d'astronomie 1, 1906; 2, 1908.

Laval. Commission historique et archéologique:

— — Bulletin, No. 85 = vol. 27, 1910.

Lawrence. University of Kansas:

— — Bulletin, vol. 3, No. 1—10; vol. 5, No. 1—11.

— — Geological Survey of Kansas. vol. 9.

Leiden. Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde:

— — Tijdschrift, deel 28, afl. 3, 4; deel 29, afl. 1—2.

— — Handelingen en Mededeelingen, 1902/03 und 1909/10.

— — Levensberichten, 1902/03 und 1909/10.

— — Graftschriften 1910.

— Redaktion des „Museum“:

— — Museum maandblad voor philologie en geschiedenis, Jaarg. 17, No. 1—12; Jaarg. 18, No. 1—4.

Leipzig. K. Gesellschaft der Wissenschaften:

— — Abhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 28, No. 1—2; gr. 8°.

— — Berichte über die Verhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 61, No. 3; Bd. 62, No. 1—5.

— — Berichte über die Verhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 61, No. 4—5; Bd. 62, No. 1.

— Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft:

— — Jahresbericht 1881, 1884, 1885, 1886, 1888, 1893, 1895, 1897, 1898, 1910.

— Redaktion der Beiblätter zu den Annalen der Physik:

— — Beiblätter 1909, 23^b, 24; 1910, 1—23.

— Verein für Erdkunde:

— — Mitteilungen 1908, 1909.

Lemberg. K. K. Franzens-Universität:

— — Programm der Vorlesungen 1909/10 und 1910/11.

— — Sktad 1910/11.

- Lemberg.** Towarzystwo dla popierania nauki polskiej:
 — — Archiwum naukowe, Abt. II, tom. 1. No. 6.
 — — Bulletin 9.
 — — Études sur l'histoire du droit polonais, Bd. 4, No. 1.
 — Se ťcenko-Gesellschaft:
 — — Mitteilungen 20—90; 92—96.
 — — Monumenta linguae, T. 1—6.
 — — Sammelschriften der naturw.-ärztl. Sektion, T. 1—13.
 — — Sammlung, ethnographische, T. 1—26.
 — — Sbirnik filolog. sektii, T. 1—12.
 — — „ istorično-filos., T. 5, 9—11.
 — — Studien auf dem Gebiete der Sozialwissenschaften, Bd. 2, 1910.
 — — Archiw ukraiŃsko-russkie, T. 1—5.
 — — Biblioteka ukraiŃsko-ruska, T. 1—3, 6, 7.
 — — „ prawniċa, T. 1, 2, 1—3.
 — — „ Russka istorična. T. 1—24.
 — — Casopis, T. 1—9.
 — — Chronik 1—37.
 — — Fontes, vol. 1—5, 7, 8.
 — — Matériaux d'ethnologie ukraino-ruthène, T. 1—12.
 — — Beiträge zur ukrainischen Bibliographie, No. 1.
- Leoben.** K. K. Montanistische Hochschule:
 — — Studienprogramme, 24 Hefte.
- Lexington.** Transylvania University:
 — — Trans. Univers. Bulletin, vol. 10, No. 5.
- Lille.** Commission historique du Nord:
 — — Bulletin, tom. 27, 1909.
- Lima.** Cuerpo de ingenieros de minas del Perú:
 — — Boletin, No. 75, 76.
- Lincoln.** University of Nebraska library:
 — — Billetin of the Univ. of Nebr., ser. 15, No. 9.
 — — University studies, vol. 4, 24; vol. 5—9; vol. 10, No. 1.
- Lindenberg.** K. PreuŃ. Aëronautisches Observatorium:
 — — Ergebnisse der Arbeiten des Jahres 1908; 4^o.
 — — Ergänzungsband: Bericht über die Expedition nach Ostafrika, 1910.
- Linz.** Museum Francisco-Carolinum:
 — — 68. Jahresbericht 1910.
 — — Katalog der Weihnachtsausstellung 1909.
- Lissabon.** Sociedade de geographia:
 — — Boletin 27, No. 12; 28, No. 1—8.
- Loewen.** Université Catholique:
 — — Annuaire 1910.

Loewen. Université Catholique:

- — Programme des cours 1909/10.
- — Recueil de travaux, fasc. 23.
- Société scientifique de Bruxelles:
- — Annales 34, fasc. 1, 2.
- Zeitschrift „La Cellule“:
- — La Cellule, tom. XXIV, fasc. 2; tom. XXVI, fasc. 1, 2.

Lohr. K. Humanist. Gymnasium;

- — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von Albert Neugschwender.

London. Redaktion der Zeitschrift: Illuminating Engineer:

- — Illuminating Engineer, 1910 (vol. 3), No. 1—12.
- Royal Society:
- — Proceedings, ser. A, 561—572; ser. B, 553—562.
- — Year-Book 1910.
- — Reports of the Evolution Committee. Report V, Titel u. Register zu 1—5.
- — Report on the sleeping sickness commission, No. 10, 11.
- R. Society of Arts:
- — Journal, No. 2975—3032.
- British Astronomical Association:
- — Journal, XX, No. 4—10; XXI, No. 1, 2.
- — Memoirs, vol. 16, part 3, 4; vol. 17, part 1—3.
- — List of members, Sept. 1910.
- R. Astronomical Society:
- — Monthly Notices, vol. 70, No. 2—9; vol. 71, No. 1.
- — Memoirs, vol. 59, part 4; 4^o.
- Chemical Society:
- — Journal, No. 567—570, 573—578 und Suppl.-number vols 95 and 96, 1909/10.
- — Proceedings, vol. 25, No. 350—364, Titel u. Register.
- Farady Society:
- — Transactions, vol. 5, part 3; vol. 6, part 1.
- India Office:
- — District Gazetteers of the United Provinces, vol. 18, 19, 21, 22, 25; vol. 2 Saharanpur.
- R. Patent Office:
- — Catalogue of library, 2 vol.
- — Office Libr.; Series 17 Nummern.
- Linnean Society:
- — Proceedings 1909/10.
- — The Journal, a) Botany, vol. 39, No. 272; b) Zoology, vol. 30 No. 201, 202; vol. 31, No. 207.

London. Royal Microscopical Society:

- — Journal 1910, part 1—5.
- Zoological Society:
- — Proceedings, 1909, part 4; 1910, part 1—3.
- — Transactions, vol. 19, part 2—5.
- — List of fellows, 1910.
- Zeitschrift „Nature“:
- — Nature, No. 2097—2149.
- Redaktion der Zeitschrift „Jon“:
- — Jon, vol. II, fasc. 1—6.

Lons-le-Saunier. Société d'émulation:

- — Mémoires, VIII. Ser., vol. 3, 1909.

Lucca. Accademia delle scienze, lettere ed arti:

- — Memorie, vol. 15.

Lübeck. Naturhistorisches Museum:

- — Mitteilungen der Geograph. Gesellschaft und des Naturhistor. Museums, 2. Reihe. Heft 20—24.
- — Das Museum zu Lübeck, 1900.

Lüneburg. Museumsverein für das Fürstentum Lüneburg:

- — Lüneburger Museumsblätter, Bd. 1, Heft 7, 1910.

Lüttich. Société géologique de Belgique:

- — Annales, tom. 37, livr. 1—3.
- — Mémoires, tom. II, 2.
- Institut botanique de l'Université:
- — Archives, vol. 1—4.
- Société de littérature wallone:
- — Bulletin, tom. 52, part 2; tom. 53, part 1.
- — Bulletin du dictionnaire général, 5^e année = 1910, No. 1—4.
- — Feller Jules: Règles d'orthographe wallone, 1905.

Lund. Universität:

- — Acta Universitatis Lundensis, N. Ser., afd. I, 5, 1909; afd. II, 5, 1909; Register zu Bd. 1—40.
- — Diplomatarium Diöces. Lundensis, vol. 4, 1909.
- — Kyrkohistorisk Arskrift, 10, 1909.
- — Bibelforskaren, 1910, 1—4.
- Redaktion von „Botaniska Notiser“:
- — Notiser, 1910, No. 1—6.

Luxemburg. Section historique de l'Institut Grand-Ducal:

- — Archives trimestr. (de la section des sciences naturelles), 4, 1909, fasc. 1—4; 5, 1910, fasc. 1.
- Société des naturalistes Luxembourgeois:
- — Bulletin, N. F., Jahrg. 2.

Luzern. Naturforschende Gesellschaft:

- — Mitteilungen, Heft 2, 1896/97; Heft 3, 1898/1900; Heft 4, 1904; Heft 5, 1907.

Lyon. Académie des sciences, belles lettres et arts:

- — Mémoires, sér. III, tom. 10.
- — Société d'agriculture, hist. nat. et arts utiles:
- — Annales, 1908; gr. 8^o.
- — Muséum des sciences naturelles:
- — Archives, 1—10.
- — Société Linnéenne:
- — Annales, tom. 56, 1909.

Madison. Wisconsin Geological and Natural History Survey:

- — Bulletin, No. 4 = econ. series No. 2; No. 19 = econ. series No. 12.

Madras. Government:

- — Thurston Edg. u. Rangachari K.: Castes and tribes of Southern India, 7 voll., Madras 1909/10.
- — Kodaikanal and Madras Observatories:
- — Annual Report for 1907/08; 1909; fol.
- — Bulletin, No. 19—22; 4^o.
- — Memoirs, vol. 1, part 1.

Madrid. R. Academia de ciencias exactas:

- — Revista, vol. 7, No. 8, 9; vol. 8, No. 4—12; vol. 9, No. 1—4.
- — Anuario, 1890, 1894, 1902, 1910.
- — Memorias, tom. 7, 1877; tom. 8, 1878; tom. 9, 1881; tom. 10, 1884; tom. 14, 1910; tom. 15, 1910.
- R. Academia de la historia:
- — Boletín, tom. 50, 3; tom. 55, 6; tom. 56, 1—6; tom. 57, 1—5.

Magdeburg. Museum für Natur- und Heimatkunde:

- — Abhandlungen und Berichte, Bd. 2, Heft 1, 1909.
- — Naturwissenschaftlicher Verein:
- — Jahresbericht und Abhandlungen, 1904—1907.

Mailand. R. Istituto Lombardo di scienze:

- — Rendiconti, ser. II, vol. 42, fasc. 16—20; vol. 43, fasc. 1—16.
- — Memorie, a) Classe di lettere, vol. 22, fasc. 1—3; b) Classe di scienze mat. et nat., vol. 21, No. 1—4.
- — Museo storico civico:
- — Raccolta Vinciana, fasc. 6, 1910.
- — R. Osservatorio di Brera:
- — Pubblicazioni, No. 47.
- — Società Italiana di scienze naturali:
- — Atti, vol. 48, fasc. 4; vol. 49, fasc. 1.

- Mailand.** Società Storica Lombarda:
 — — Archivio Storico Lombardo, ser. IV, anno 36, fasc. 24, 1909;
 anno 37, fasc. 25—27, 1910.
- Mainz.** Römisch-germanisches Zentralmuseum:
 — — Mainzer Zeitschrift, Jahrg. 5, 1910, 4^o.
- Manchester.** Literary and philosophical Society:
 — — Memoirs and Proceedings, vol. 54, part 1—3.
 — — Victoria University-Library:
 — — Publications, Historical series No. 9, 10.
 — — „ English series No. 2.
 — — „ Biological series No. 1.
 — — „ Economic series No. 13.
 — — „ Celtic series No. 2.
 — — Museum:
 — — Handbooks, No. 12, 15, 16, 22, 24, 25, 26, 34, 40.
 — — Notes, No. 1—5, 8, 10—12, 14, 16—22.
 — — Report 1895/96—1898/99, 1900/01—1908/09.
 — — Studies in anatomy, vol. 2.
 — — Studies from biolog. laborat., vol. 1, 3, 4.
 — — Studies from physic. and chem. laborat., vol. 1.
- Manila.** Bureau of science:
 — — Philippine Journal of science, vol. 1, No. 8, 9.
- Mannheim.** Verein für Geschichte:
 — — Mannheimer Geschichtsblätter, Jahrg. 11, 1910, No. 1—12, 4^o.
 — — Verein für Naturkunde:
 — — Jahresbericht 73—75.
- Mantua.** R. Accademia Virgiliana:
 — — Atti e Memorie, N. S., vol. 2, parte 2 u. Appendix zu 2; vol. 3, parte 1.
- Marbach.** Schwäbischer Schillerverein:
 — — Rechenschaftsbericht 1—5, 7—9, 11—14.
- Marburg.** Universität:
 — — Schriften aus dem Jahre 1909/10 in 4^o und 8^o.
 — — Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissen-
 schaft:
 — — Schriften, Bd. 13. Abt. 1—6.
 — — Sitzungsberichte 1899—1909.
- Maredsous.** Abbaye:
 — — Revue Bénédictine, année 27, No. 1—4.
- Meissen.** Naturwissenschaftliche Gesellschaft Isis:
 — — Mitteilungen 1908—10.
 — — Zusammenstellung der Wetterwarte, 1908, 1909.
 — — Fürsten- und Landesschule St. Afra:
 — — Jahresbericht für das Jahr 1909/10; 1910, 4^o.
 Sitzungsb. d. math.-phys. Kl. Jahrg. 1910.

Melbourne. Royal Society of Victoria:

- — Proceedings, N. Ser., vol. 22, part 2; vol. 23, part 1.
- — Transactions, vol. 5, part 1, 4^o.
- Mines Department:
- — Victoria, 8 geologische Karten.
- Natural Museum:
- — Memoirs, No. 1—3.

Metten. K. Humanist. Gymnasium:

- — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von Huber.

Metz. Académie des sciences:

- — Mémoires, sér. 2, année 88 (1906/07); année 89 (1907/08).
- Gesellschaft für lothringische Geschichte:
- — Jahrbuch, 21. Jahrg., Hälfte 1 u. 2, 1909.
- Verein für Erdkunde:
- — Jahresbericht 26, 1907—09.

Mexiko. Instituto geológico:

- — Parergones, tom. 3, No. 3, 5.
- — Boletín, No. 25; Atlas u. Text.
- Comité Nacional Mexicano:
- — Boletín, tom. 1, No. 8.
- Museo Nacional:
- — Anales, tom. II, No. 1—5.
- Observatorio meteorológico-magnético central:
- — Boletín mensual. Febr.— Oct. 1905, Nov.—Dec. 1905, Titel und Register zu 1905 und zu 1908; Jan., Febr., März 1906; Mai bis Dec. 1909.
- Sociedad geológico Mexicano:
- — Boletín, tom. I—V; tom. VI, 1, 2.
- Sociedad Mexicana de historia natural:
- — La Naturaleza, III. Serie, tom. 1, No. 1.
- — Roviroso, Meridografía del Sur de Mexico, 1910.
- Sociedad científica „Antonio Alzate“:
- — Memorias y revista, tom. 25, No. 9—12; tom. 27, No. 4—10.

Middelburg. Seeländische Gesellschaft der Wissenschaften:

- — Archief 1903—1909.
- — Catalogus van de Provinciale Bibliothek, 6 Teile, 1905—1909.

Mitau. Kurländische Gesellschaft für Literatur und Kunst:

- — Sitzungsberichte 1908.
- — Kallmeyer Otto, Evangelische Kirchen Kurlands, 1900.

Modena. R. Accademia di scienze, lettere ed arti:

- — Memorie, ser. III, vol. 8, 1909, 4^o.
- Società dei Naturalisti:
- — Atti, IV. ser., vol. III, 1, 2, 4—6; vol. XI, 1909.

- Möln.** Verein für Geschichte des Herzogtums Lauenburg:
 — — Archiv, Bd. 9, Heft 2, 3.
- Monaco.** Musée et Institut océanographique:
 — — Bulletin, No. 154, 155, Titel und Register zu No. 131—155;
 No. 156—184.
 — — Annales, vol. 1, fasc. 1.
- Montevideo.** Museo nacional:
 — — Anales, vol. VII, tom. 4, entrega 2, 4^o.
- Montpellier.** Académie de sciences et lettres:
 — — Bulletin mensuel 1910, No. 1—7.
 — — Mémoires, a) sect. des sciences, II. ser., tom. IV, No. 1, 2.
 b) sect. des lettres, II. ser., tom. V, No. 2.
 — Société Languedocienne de Géographie:
 — — Bulletin, tom. 33, trim. 1.
- Montreal.** Numismatic and Antiquarian Society:
 — — The Canadian Antiquarian and Numismatic Journal, ser. III, vol. 6,
 No. 2, 4; vol. 5, No. 4; vol. 7, No. 3.
- Moskau.** Öffentliches Museum:
 — — Otčet, Jahrg. 1909.
 — Historisch-antiquarische Gesellschaft:
 — — Stenja 232—235, 1910, 1—4.
 — Société Impériale des Naturalistes:
 — — Bulletin, année 1908, No. 3, 4; année 1909, N. S., tom. 23.
 — Société des amis d'histoire naturelle, d'anthropologie
 et ethnographie:
 — — Ivestja, tom. 98—113, 115—117.
 — Mathematische Gesellschaft:
 — — Matematitscheskij Sbornik, Bd. 27, Heft 2, 3.
- Mount Hamilton (California).** Lick Observatory:
 — — Bulletin, No. 173—186.
- Mülhausen i. E.** Historisches Museum:
 — — Bulletin XXXIII, année 1909.
- München.** K. Staatsministerium für Verkehrsangelegenheiten:
 — — Preisverzeichnis der Zeitungen etc. für das Jahr 1911 I und
 Nachträge für 1910, fol.
 — Statistisches Amt:
 — — Mitteilungen, Bd. 20, Heft 1, Teil 5, 6; Bd. 22, Heft 1, Teil 3;
 Bd. 23, Heft 1, Teil 1.
 — — Geburten etc. in München, 1910.
 — — Obdachlosenfürsorge in München, 1910.
 — K. Ludwigs-Gymnasium:
 — — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von Peter Huber.

München K. Luitpold-Gymnasium:

- — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von Theodor Wohlfahrt.
- K. Maximilians-Gymnasium:
- — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von Ruckdeschel I.
- K. Theresien-Gymnasium:
- — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von Jos. Menrad.
- K. Wilhelms-Gymnasium:
- — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von Wilh. Heindl.
- K. Wittelsbacher Gymnasium:
- — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von Jul. Plesch.
- K. Realgymnasium:
- — Jahresbericht 1909/10 und Programm von Karl Reichhold.
- Hydrotechnisches Bureau:
- — Jahrbuch, XI. Jahrg., Heft 2.
- — Flächenverzeichnis, Heft 7, 2. Teil.
- — Schneedecke, 1905/06—1907/08.
- Bayerischer Landtag:
- — Stenographische Berichte und Beilagen.
- K. Luitpold-Kreisoberrealschule:
- — Jahresbericht 3, 1909/10.
- K. Bayerische Technische Hochschule:
- — Bericht über das Studienjahr 1908/09; 1909, 4^o.
- — Programm für das Studienjahr 1910/11.
- — Personalstand im W.-S. 1909/10 und S.-S. 1910.
- Metropolitan-Kapitel München-Freising:
- — Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1910.
- — Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising, 1909, No. 1—31 und Register.
- Universität:
- — Personalstand, S.-S. 1910 und W.-S. 1910/11.
- — Schriften aus dem Jahre 1909/10 in 4^o und 8^o.
- — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1910 und W.-S. 1910/11; 1910, 4^o.
- Ärztlicher Verein:
- — Sitzungsberichte. Bd. 19, 1909; 1910.
- Historischer Verein von Oberbayern in München:
- — Oberbayerisches Archiv. Bd. 53, Heft 2; Bd. 54, Heft 3; Bd. 55, Heft 1, 2.
- — Altbayerische Monatschrift, Jahrg. 9, No. 5—6; Jahrg. 10, No. 1, 2.
- Meteorologische Zentralstation:
- — Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreich Bayern während der Monate Februar bis Oktober 1910.
- — Veröffentlichungen: Deutsches meteorologisches Jahrbuch (Bayern) für 1909.

- München.** Museum von Meisterwerken der Technik:
 — Verwaltungsbericht, No. 6.
 — Oberbergamt:
 — — Geognostische Jahreshefte, 21. Jahrg., 1908.
- Münster.** Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
 — — Zeitschrift für vaterländische Geschichte, Bd. 63—67.
- Nancy.** Académie de Stanislas:
 — — Mémoires, année 159, VI. ser., tom. 6.
 — Société des sciences:
 — — Bulletin, serie III, tom. VI, fasc. 3.
 — Société d'archéologique Lorraine et du Musée Historique Lorrain:
 — — Bulletin 1909, No. 12; 1910, No. 1—11.
 — — Mémoires, tom. 59, 1909.
- Narbonne.** Commission archéologique:
 — — Bulletin, tom. 11.
- Neapel.** R. Istituto d'incorrugiamento:
 — — Atti 61, 1909, 4^o.
 — Accademia delle scienze moral e politiche:
 — — Atti 38—40.
 — — Rendiconto 45—48.
 — Accademia delle scienze fisiche e matematiche:
 — — Rendiconto, vol. 14, fasc. 1—3; vol. 15, fasc. 8—12; vol. 16, fasc. 1—9 und Supplement.
 — Zoologische Station:
 — — Mitteilungen, Bd. 19, Heft 4; Bd. 20, Heft 1.
- Neuburg a. D.** Historischer Verein:
 — — Neuburger Kollektaneen-Blatt, 71. Jahrg., 1907; 72. Jahrg., 1908.
- Neuchâtel.** Académie:
 — — Recueil des travaux, publ. par la faculté des lettres, fasc. 5, 1910.
 — Société Neuchâteloise de géographie:
 — — Bulletin, tom. 20, 1909/10.
 — Société des sciences naturelles:
 — — Bulletin, tom. 36, 1908/09.
- New-Castle (upon-Tyne).** Institute of Engineers:
 — — Transactions, vol. 60, part 1—9.
 — — Annual Report for the year 1909/10.
 — — Account of the State of Northumberland and Durham. Suppl. vol. 1910.
- New-Haven.** American Oriental Society:
 — — Journal, vol. 33, part 2—4.

New-Haven. Connecticut Academy of arts and sciences:

- — Transactions, vol. 14, part 291—466; vol. 16, part 117—245.
- — The New-Haven Mathemat. Colloquium, N.-H. 1910.
- Yale Observatory:
- — Transactions, vol. 2, part 2.
- Yale University:
- — Yale Review, vol. 18, No. 4; vol. 19, No. 1—3.
- — American Journal of Science, No. 169—180.

New-York. Academy of Sciences:

- — Annals, vol. 19, part 1—3.
- American Mathematical Society:
- — Bulletin, vol. 8—16, No. 101—190; vol. 17, 1—3, 191—193.
- — Transactions, vol. 1—10; vol. 11. No. 1—4, Titel u. Register zu 11; Indices zu vol. 1—5.
- American Museum of Natural History:
- — Annual Report 41, 1909.
- — Anthropological Papers, vol. 4, part 1; vol. 5, part 1; vol. 6, part 1.
- — Journal, vol. 10, No. 1—8.
- — Bulletin, vol. 26, 1909; vol. 27, 1910.
- — Memoirs, vol. 1, part 1—7; vol. 2, part 1—5; vol. 3, part 1, 2; vol. 4, part 1—4; vol. 5, part 1, 2; vol. 6, part 1, 2; vol. 7, part 1; vol. 12, part 1; vol. 13, part 1, 2.
- — Ethnographical Album, part 1, 1900.
- — Laufer Berth.. Chinese pottery of the Han Dynasty, Leiden 1909.
- American Philological Association:
- — Transactions and Proceedings, vol. 39, 1908.
- American Geographical Society:
- — Bulletin, vol. 41, No. 12; vol. 42, No. 1—11.
- Botanical garden library:
- — Bulletin, vol. 6, No. 21, 22; vol. 7, No. 23, 24.
- Geological Society of America:
- — Bulletin, vol. 20, 1909/10; vol. 21. No. 1—3.
- Theol. Seminary of America:
- — Text and studies, vol. 1, 2, 3, No. 1.
- American Osservation of genito-urinary surgeons:
- — Transactions, vol. 3, 1908; vol. 4, 1909.

Nijmegen. Nederlandsche botanische Vereeniging:

- — Recueil des travaux botaniques Néerlandais, vol. V, livr. 2—4; Titel u. Register zu V; vol. VI; vol. VII; 1910.
- — Archief Nederl. Kruidkundig, 1909.

Nürnberg. K. Altes Gymnasium:

- — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von Krauß.

Nürnberg. K. Neues Gymnasium:

- -- Jahresbericht 1909/10 mit Programm von H. Blaufuß.
- Naturhistorische Gesellschaft:
- -- Abhandlungen 18, 1.
- Germanisches Nationalmuseum:
- -- Anzeiger, 1909, Heft 1—4; 1909, 4^o.
- -- Mitteilungen 1909.
- Verein für Geschichte der Stadt:
- -- 32. Jahresbericht, 1909.

Oberlin (Ohio). Wilson Ornithological Club:

- -- The Wilson Bulletin, vol. 21, No. 2—4 = No. 67—69; vol. 22, No. 1, 2 = No. 70, 71; Titel u. Register zu vol. 21.

Odessa. Universität:

- -- Dissert. des Jahres 1909.
- Historisch-philologische Gesellschaft an der Universität:
- -- Ljetopis, 16, 1910.

Orléans. Société archéologique de l'Orléanais:

- -- Bulletin, XV, No. 193, 194.

Osnabrück. Verein für Geschichte und Landeskunde:

- -- Mitteilungen, Bd. 34, 1909; Titel u. Register zu Bd. 17—32, 1910.

Ottawa. Geological Survey of Canada:

- -- Geologische Karten, No. 48—50.
- Royal Society of Canada:
- -- Proceedings and Transactions, ser. III, vol. 2, part 2; vol. 3.
- Department of mines (Geological Survey):
- -- Summary report on explorations in Nova Scotia by Fletcher, 1909.
- -- Report on tertiary plants of British Columbia, 973, 977, 1097.
- -- No. 1059, 1082.
- -- Bulletin, No. 2, 3.
- -- Memoir, No. 2, 3.

Oxford. English Historical Review:

- -- Review, vol. 25, No. 97—100.

Padua. R. Accademia di scienze, lettere ed arti:

- -- Atti e memorie, anno 336 = 23; 367 = 24; 368 = 25.
- Museo civico:
- -- Bolletino, anno 12, 1909.
- Redaktion der Zeitschrift „Rivista di storia antica“:
- -- Rivista, N. Ser., anno 13, fasc. 2, 1909/10.

Palermo. R. Accademia di scienze, lettere e belle arti:

- -- Atti III, vol. 7, 1902/03.

Palermo. Circolo matematico:

- — Annuario 1910.
- — Rendiconti, tom. 29, fasc. 1—3; tom. 30, fasc. 1—3.
Supplemento, vol. 2, No. 1, 2; vol. 4, No. 5, 6; vol. 5, No. 1—4.
- — Indici delle Pubblicazioni, No. 3, 1910.
- Collegio degli Ingegneri:
 - — Atti 1908, Luglio—Dec.; 1909, Genn.—Giugno.
- Società di scienze naturali e economiche:
 - — Giornale, vol. 17, 1885/86; vol. 20, 1890.
- Società Siciliana di scienze naturali:
 - — Il Naturalista Siciliano, vol. 21, No. 1—8.

Para (Brasilien). Museo Goeldi:

- — Memorias, 1, 2, 4.
- — Boletín, vol. 4, No. 1—4; vol. 5, No. 1, 2.
- — Arboretum amazonicum, 1—4.

Parenzo. Società istriana di archeologica e storia patria:

- — Atti e memorie, vol. 24; vol. 25, fasc. 1—4; vol. 26.

Paris. Académie de médecine:

- — Bulletin, 1910, No. 1—41.
- — Lebon, E., Darboux, 1910.
- — „ E., Poincaré, 1910.
- — Rapport . . . sur le service vaccinal, 1909.
- Académie des Sciences:
 - — Comptes rendus, tom. 150, No. 1—26; tom. 151, No. 1—26 und tables zu tom. 148; tables zu tom. 149.
- Bibliothèque Nationale:
 - — Cordier, Catalogue du fonds Tibétain, 2^e partie, P. 1909.
- Bureaux de la Revue des questions historiques:
 - — Revue, année 44, livr. 173—176.
- Comité internat. des poids et mesures:
 - — Procès-verbaux des sciences, Session de 1909.
- Rédaction „Cosmos“:
 - — Cosmos, No. 1301—1353.
- École polytechnique:
 - — Journal, II. Serie, Cahier 13.
- Institut de France:
 - — Annuaire pour 1903—1906 und 1910.
- Institut général psychologique:
 - — Bulletin, année 10, No. 1—4.
 - — Notes et documents, 1900—1909.
- Ministère de l'instruction publ. et des beaux-arts:
 - — Bulletin de la commission archéologique de l'Indochine. Année 1909.

Paris. Moniteur Scientifique:

- — Moniteur, livr. 817—829, 4^o.
- Musée Guimet:
- — Annales, tom. 32, 33, 4^o.
- — Le Jubilé du Musée Guimet, Lyon 1909.
- Muséum d'histoire naturelle:
- — Bulletin, année 1909, No. 4—8; 1910, No. 1, 2.
- — Nouvelles Archives, sér. V, tom. 1, fasc. 1, 2.
- Revue des études histoire:
- — Revue, 75, année Mai—Déc. 1909; 76, année Janv.—Févr. 1910
= No. 67; Mars, Avril 1910 = No. 68.
- Revue historique:
- — Revue, 35^e année, tom. 130, No. 1, 2; tom. 104, No. 1, 2; tom. 105,
No. 1, 2.
- Société d'anthropologie:
- — Bulletins et mémoires, 1908, No. 6; 1909, No. 1—3; 1910, No. 1, 2.
- Société astronomique de France:
- — Bulletin, 1910, Janv.—Déc.
- Société de géographie:
- — La Géographie, année 20, 1909, No. 1—6; 21, 1910, No. 1—4.
- Société mathématique de France:
- — Bulletin, No. 38, fasc. 1—4, 1910.
- Société de philosophie:
- — Bulletin, année 10^e, No. 1—7.
- Société zoologique de France:
- — Bulletin, tom. 34, 1909.
- — Mémoires, année 21, 1908.

Passau. K. Lyzeum:

- — Jahresbericht 1909/10; 1910.

Peradeniya. R. Botanic gardens:

- — Annales, vol. 4, part 1—6.
- — Circulars, vol. 4, No. 20—25; vol. 5, No. 1—4.

Perth. Western Australia Geological Survey:

- — Bulletin, No. 1, 4, 14, 19, 21, 24, 33, 36—38.
- — Annual Report for 1909.

Peshawar (India). Arch. Survey of India:

- — Annual Report, 1909/10.

St. Petersburg. Académie Impériale des sciences:

- — Travaux du Musée botanique, vol. 5, 7.
- — Travaux du Musée géologique, tom. III, No. 2—5; tom. IV,
No. 1, 2.
- — Bulletin, sér. VI, 1910, No. 1—18.

St. Petersburg. Académie Impériale des sciences:

- — Mémoires,
 - a) Classe historico-philologique, vol. 8, No. 13, 14; vol. 10, No. 1.
 - b) „ physico-mathémat., vol. 18, No. 1—8, 10—16; vol. 21, No. 1—3, 6; vol. 23, No. 7, 8; vol. 24, No. 2—9; vol. 26, No. 1.
- — Annuaire du Musée zoologique, tom. XIV, No. 3, 4 und Beilage zu IV; tom. XV, No. 1, 2 und Beilage.
- — Byzantina Chronika, Bd. XIV, Teil 4; Bd. XV, No. 1.
- — Izvestija, tom. VII—XII; tom. XIV, No. 2—4; tom. XV, No. 1, 2.
- — Mélanges biologiques, tom. 13, No. 1—3.
- Kais. Bibliothek:
 - — Otschet, für 1902 und 1903.
- Comité géologique:
 - — Bulletins, 1909, vol. 28, No. 1—8.
 - — Mémoires, N. Sér., No. 40, 51, 52.
- Kais. Botanischer Garten:
 - — Acta horti Petropolitani, vol. 26, fasc. 2; vol. 27, fasc. 2, 3, Titel u. Register; vol. 28, fasc. 3.
- Kais. Russische Geographische Gesellschaft:
 - — Isvestija, 1876, 1888—1891, 1893—1899, 1904—1909; tom. 46, 1910, No. 1—5.
 - — Otschet, 1901—1908.
- Kais. Archäologische Kommission:
 - — Isvestija, No. 1—33.
 - — Materialy parch. Ross, No. 22—32.
 - — Otschet, 1896—1906.
- Kais. Mineralogische Gesellschaft:
 - — Verhandlungen, II. Ser., Bd. 46, Lief. 2; Titel u. Register zu 46.
- Physikalisch-chemische Gesellschaft an der Kais. Universität:
 - — Schurnal. Physikalische Abteilung, tom. 42, Heft 1—8.
 - — „ Chemische Abteilung, Bd. 42, Heft 1—8.

Philadelphia. Academy of natural Sciences:

- — Proceedings, vol. 61, part 2, 3; vol. 62, part 1.
- — Journal, Ser. II, vol. 14, part 1.
- College of pharmacy:
 - — American journal of pharmacy, vol. 82, No. 2—12.
 - — Journal, vol. 169, No. 1—6; vol. 170, No. 1—6.
- Geographical Society:
 - — Bulletin, vol. 8, No. 1—4.
- Historical Society of Pennsylvania:
 - — The Pennsylvania Magazine of History, vol. 34, No. 133—135.
 - — The Opennig of New Building . . . , 1910.

Philadelphia. Pennsylvania Museum and School of industrial art:

- — Bulletin, No. 29—32.
- — Report, 33, 1909; 34, 1910.
- American Philosophical Society:
 - — Proceedings, vol. 48, No. 193; vol. 49, No. 194—196.
 - — List, Febr. 1910.
- University:
 - — Publications, a) philology and literature, vol. 9, No. 1, 2; vol. 10; vol. 11; vol. 12, No. 1, 2; b) philosophy, No. 1, 2, 4; c) history, No. 1, 3; d) mathematic, No. 1—3; e) astronomy, vol. 1, No. 2, 3; vol. 2, No. 1—3; vol. 3, No. 1—3.
 - — Contributions from the botanical laboratory, vol. 2, No. 1—3; vol. 3, No. 1, 2.
 - — „ „ „ laboratory of hygiene, No. 1, 2.
 - — „ „ „ zoology laboratory, vol. 1, No. 1; vol. 2.

Pisa. R. Scuola Normale Superiore:

- — Annali, Filos. e Filologia, vol. 8—10; Scienze fisiche-matematiche, vol. 11, 1910.
- Società Toscana di scienze naturali:
 - — Atti, Processi verbali, vol. 18, No. 5, 6; vol. 19, No. 1—4, 1910.
 - — Atti e Memorie, vol. 25, 1909.
- Società Italiana di fisica:
 - — Il nuovo Cimento, vol. 19, fasc. 2—10.

Pistoia. R. Deput. di storia patria:

- — Bulletin, anno XI, fasc. 1—3; anno XII, fasc. 1, 2.
- — Biblioteca d'autori Pistoiesi, 1, 2.
- — Santoli, Liber censuum, 1—3.

Plauen. Altertumsverein:

- — 20. Jahresbericht 1910 mit 2 Beilagen, 4^o.
- Gymnasium:
 - — Jahresbericht, 21, 1909/10.

Poitiers. Société académ. d'agriculture, belles-lettres, sciences et arts:

- — Bulletin, No. 368 (Janv.—Mars), 1910.

Portici. Laboratorio di zoologia:

- — Bollettino, vol. IV; Annali, S. II, vol. 8, 1908.

Portland (Maine). Society of natural history:

- — Proceedings, vol. 2, part 8.

Porto (Portugal). Academia polytechnica:

- — Annaes scientificos, vol. II, No. 1—4; vol. V, No. 1—3.

Posen. Historische Gesellschaft:

- — Zeitschrift, 24. Jahrg., Heft 1 und 2.
- — Historische Monatsblätter, X. Jahrg., No. 1—12.

Potsdam. Geodätisches Institut:

- — Veröffentlichung, N. F., No. 41, 1909; 42—45, 1910.
- — Veröffentlichungen des Zentralbureaus, No. 19, 20, 1910.
- Astrophysikalisches Observatorium:
- — Photographische Himmelskarte. Ergänzungen zu Bd. 5, 1910.

Prag. Böhmisches Kaiser Franz Joseph-Akademie:

- — Sbirka pramenů, Skupina Rada I, číslo 8; Rada II, číslo 8, 9; Skupina II, číslo 14, 15 (1910); Skupina III, číslo 7 (1910).
- — Věstník, Ročník, 18, 1909.
- — Bulletin international, Classe des sciences mathématiques, année 14, 1909.
- — Almanach, Ročník 20, 1910.
- — Rozpravy, Třída I, číslo 39; Třída II, číslo 18; Třída III, číslo 29—32.
- — Filosofická Biblioteka, Rada II, číslo 2, (1909).
- — Velenoický Jos., Morfologi, díl 3, 1910.
- Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen:
- — Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde, Bd. 9, 2; Bd. 10.
- — Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen, Bd. 3, 21, 25, 27—29.
- — Übersicht über die Leistungen der Deutschen Böhmens, 1900—1906, 1908, 1909.
- Landesarchiv des Königreichs Böhmen:
- — Archiv Český, díl 25, 1910.
- Lese- und Redehalle der deutschen Studenten:
- — 61. Bericht über das Jahr 1909.
- Museum im Königreich Böhmen:
- — Časopis musea království českého, Bd. 48, No. 1—4.
- — Památky archaeologické a mistopisné, díl 23, sešit 7, 8, 1909; díl 23, ročník, 1908/09; díl 24, No. 1.
- — Bericht für 1909.
- Čechoslav. Museum:
- — Nardopisny Vestnik Českoslavanský, Bd. 1—4, 5, No. 1—10.
- Deutsche Karl Ferdinands-Universität:
- — Die feierliche Inauguration des Rektors für das Jahr 1909/10.
- — Ordnung der Vorlesungen, S.-S. 1910; W.-S. 1910/11; 1910.
- — Personalstand 1909/10, 1910/11.
- — Katalog der deutschen Handschriften, Teil 1, 1909.
- Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen:
- — Mitteilungen, Jahrg. 48, No. 1—4.

- Prag.** Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos“:
 — — Lotos, Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Bd. 57, No. 1—10, Titel u. Register; N. F., Bd. 1, No. 4—12; 1907.
- Pressburg.** Verein für Natur- und Heilkunde:
 — — Verhandlungen, N. F., Bd. 29, 1908.
- Pulkowa.** Nikolai-Hauptsternwarte:
 — — Publications, vol. 7, 15.
 — — Publications de la commission pour la mesure d'un arc de meridian I, Geodesie III D.
- Pusa (Bengal).** Agricultural Research Institute:
 — — Annual Report of the Department of agriculture, 1904—1909.
 — — Bulletin, No. 16.
 — — Memoirs (Botanical Series), vol. II, No. 5.
 — — Prospectus 1909.
- Regensburg.** Neues Gymnasium:
 — — Jahresbericht für 1909/10 und Programm von Alois Patin.
 — Historischer Verein:
 — — Verhandlungen, Bd. 60, 1908.
 — Naturwissenschaftlicher Verein:
 — — Berichte, Heft 12, 1907—1909.
- Riga.** Gesellschaft für Geschichte und Altertumskunde der Ostseeprovinzen:
 — — Mitteilungen, Bd. 20, Heft 1—3.
 — — Sitzungsberichte 1907—1909.
- Rio de Janeiro.** Instituto historico e geografica Brasileiro:
 — — Revista 3; 27, 2; 29, 1; 30, 1, 2; 31; 32, 1; 33, 2; 34—38; 43, 2; 48—52; 53, 1 (1896/97).
 — Observatorio:
 — — Annuario 7, 1891; 25—26, 1909/10.
 — — Boletim mensal, Januar—März 1908, 4^o.
- Rom.** Reale Accademia dei Lincei:
 — — Annuario 1910.
 — — Atti, ser. V, Notizie degli scavi di antichità, vol. 6, fasc. 9—12; vol. 7, fasc. 1—8.
 — — Atti, ser. V, Rendiconti, Classe di scienze fisiche, vol. 19, fasc. 1—12; 2. semestre, fasc. 1—10; 4^o.
 — — Atti, Rendiconti, Classe di scienze morali, ser. V, vol. 18, fasc. 4—12; vol. 19, fasc. 1—6.
 — — Memorie. Classe di scienze fisiche, ser. V, vol. 7, fasc. 11, 12; vol. 8, fasc. 1—6.

Rom. Reale Accademia dei Lincei:

- — Memorie, Classe di scienze morali, ser. V, vol. 13; vol. 14, fasc. 3, 4.
- — Atti, Rendiconto dell' adunanza solenne, 1910, vol. 2.
- Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei:
- — Atti, anno 63, sessione 1—7, 1909/10, 4^o.
- Biblioteca Apostolica Vaticana:
- — Studi e testi 18, 20—22.
- — Acta Pontifica Instituti Biblici, vol. 1, No. 1—4.
- British and American Archaeological Society:
- — Journal. vol. 4, No. 1—3.
- Kais. Deutsches Archäologisches Institut:
- — Mitteilungen, Bd. 24, No. 1—4; Bd. 25, No. 1—3.
- K. K. Österreichisches Historisches Institut:
- — Publikationen, Bd. 1, 1909.
- Ministerio dell' istruzione publico:
- — Opere di Galilei, vol. 20.
- R. Comitato geologico d'Italia:
- — Bollettino, anno 1909, No. 4; 1910, No. 1, 2.
- — Memorie, vol. 5, parte 1.
- R. Ufficio centrale meteorologico italiano:
- — Annali, ser. II, vol. 19, parte 3, 1897; vol. 24, parte 1, 1902; vol. 27, parte 2, 1905; vol. 28, parte 1, 1906.
- Società italiana delle scienze detta „dei 40“:
- — Memoria di matematica e di fisica, ser. III, tom. 16, 1910.
- Società italiana per il Progresso delle Scienze:
- — Atti, Riunione 3, 1909, 4^o.
- — Bollettino del comitato thalassografico, No. 1—6.
- R. Società Romana di storia patria:
- — Archivio, tom. 32, fasc. 3, 4; tom. 33, fasc. 1, 2.
- Specola Vaticana:
- — Pubblicazioni, vol. 4—7, 1894—1905.

Rosenheim. Gymnasium:

- — Jahresberichte für 1909/10 mit Programm von Striegel.

Rossleben. Klosterschule:

- — Jahresbericht 1909/10; 1909, 4^o.

Rostock. Universität:

- — Schriften aus dem Jahre 1909/10 in 4^o und 8^o.

**Rotterdam. Bataafsche genootschap der proefondervuidelijke
Wijsbegeerte:**

- — Verslag der alg. verdering 24, IX, 1910.

- Rotterdam.** Société Batave de philosophie experiment:
— — Programme 1910.
- Rovereto.** R. Accademia di scienze degli Agiati:
— — Atti, ser. III, vol. 15, fasc. 3, 4; vol. 16, fasc. 1, 2.
- Saargemünd.** Gymnasium mit Realabteilung:
— — 39. Jahresbericht 1909/10; 1910.
- Saintes.** Commission des arts et monuments historique:
— — Recueil, tom. 18, No. 7, 8.
- Saint-Brieuc.** Association Bretonne:
— — Bulletin archéologique et agricole, III. sér., tom. 28 (Ploermel 1909).
- Saint-Louis.** Missouri Botanical Garden:
— — Report 20, 1909.
— Missouri historical Society:
— — Wörner, Evolution of the State Universal 1909.
- Salzburg.** K. K. Staatsgymnasium:
— — Programm für die Jahre 1904/05, 1907/08, 1909/10.
— Gesellschaft für Salzburgerische Landeskunde:
— — Mitteilungen 49, 1909.
— — Festschrift aus Anlaß des 50jährigen Bestandes der Gesellschaft, 1910.
- Salzwedel.** Altmärkischer Verein für vaterländische Geschichte:
— — Jahresbericht 31, 1904; 36, 1908.
- St. Gallen.** Naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jahrbuch für das Jahr 1908 u. 1909.
— Historischer Verein:
— — Mitteilungen, Bd. 31.
— — Arbenz Emil, Vadians Wirksamkeit, 1910.
— — Erinnerung an die Jubiläumsfeier, 1909.
— — Denkschrift zum 50jährigen Bestehen, 1909.
- San Fernando.** Instituto y Observatorio de marina:
— — Anales, Sec. 2^a, Observ. meteorologie, 1908.
- San Francisco.** California Academy of Sciences:
— — Proceedings, ser. IV, vol. 3, pag. 57—72, 1908/09.
- Santiago de Chile.** Observatorio astronomico:
— — Observaciones meteorologicas, 1906—1908.
- Sao Paulo.** Museo Paulista:
— — Revista, vol. 7.
— Sociedade scientifica:
— — Revista, vol. 4, No. 1—5.
- Sarajevo.** Bosnisch-Herzegovininische Landesregierung:
— — Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1908, 4^o.

Sarajevo. Landesmuseum:

— — Glasnik, 22, 1910, No. 1.

— — Reiser, Materialien zu einer Ornio Balcanica III, 1905, IV, 1906.

Sassari (Sardinien). Universität:

— — Studi Sassaesi, anno VII, Sezione II, fasc. 3.

Schweinfurt. K. Realschule:

— — Jahresbericht 1909/10;

Schwerin. Verein für mecklenburgische Geschichte:

— — Jahrbücher und Jahresberichte, Jahrg. 75, 1909.

Shanghai. Nord-China Branch of the Asiatic Society:

— — Journal, vol. 32, 1897/98; vol. 34, 1901/02.

Siena. R. Accademia dei fisiocritici:

— — Atti, ser. IV, vol. 11, No. 1—3; ser. V, vol. 1, No. 7—10; vol. 2, No. 1—6.

— Deputazione de la Storia patria:

— — Bulletino Senese di storia patria, anno XVIII. 1910, fasc. 1, 2.

Simla. Indian meteorological department:

— — India meteorol. Memoirs, vol. 20, part 8; vol. 21, part 1, 2.

— — Monthly Weather Review, Titel u. Register zu 1908; 1909 sept. bis dec.; 1910 jan.—aug.

— — Report of the administration, 1909/10.

— — Rainfall dater of India, 20. 1908.

Sophia. Sociéte archéologique Bulgare:

— — Bulletin, 1, 1910.

— Universität:

— — Annuario (Godišnik), 1, 1904/05; 2, 1905/06; 3, 4, 1906/07; 5, 1908/09 I. II.

Sousse. Sociéte archéologique:

— — Bulletin, No. 11.

Stettin. Gesellschaft für Pommersche Geschichte und Altertumskunde:

— — Baltische Studien. N. F., Bd. 13.

— — Monatsblätter, 1909, No. 1—12.

— — Quellen zur pommerischen Geschichte, Bd. 1—4.

Stockholm. K. Akademie der Wissenschaften:

— — Les prix Nobel en 1907.

— — Meteorologiska Jakttagelser i Sverige, vol. 50, 2; vol. 51.

— — Handlingar, Bd. 45, No. 1—7.

— — Arkiv för Zoologi, Bd. VI, Heft 1—4.

— — Arkiv för Kemi, Bd. III, Heft 4, 5.

— — Arkiv för Botanik, Bd. IX, Heft 2—4.

— — Arkiv för Matematik, Bd. VI, Heft 1.

- Stockholm.** K. Vitterhets Historie och Antikvitets Akademie:
 — — Fornvännen. Årgangen, 4, 1909.
 — K. Landtbruks-Akademien:
 — — Handlingar och tidskrift, Bd. 33 -48, 1894 -1909; Bd. 49, No. 1-7, 1910.
 — Geologiska Förening:
 — — Förhandlingar, Bd. 31, No. 6, 7; Bd. 32, No. 1-56.
 — Nationalekonomiska föreningen:
 — — Förhandlingar, 1909.
 — Schwedische Gesellschaft für Anthropologie und Geographie:
 — — Ymer, 1909, Heft 1-3.
 — Nordiska Museet:
 — — Fataburen, 1909, Heft 1-4.
 — Reichsarchiv:
 — — Meddelanden, 1-11; 13-25; N. F., I, 1-24; II, 1-3.
 — — Handlingar rörande Sveriges Historia, 3. Serie. Bd. 1-12, 1878 bis 1909.
- Stonyhurst.** College Observatory:
 — — Results of Meteorological and Magnetical Observations, 1909. Liverpool 1910.
- Strassburg.** Kais. Universität:
 — — Schriften aus dem Jahre 1909/10, in 4^o und 8^o.
 — Universitäts-Sternwarte:
 — — Annalen, 3. Bd., 1909.
- Straubing.** Gymnasium:
 — — Programm für das Jahr 1903/04, 1905/06, 1907/08, 1908/09.
- Stuttgart.** Württemberg. Kommission für Landesgeschichte:
 — — Vierteljahreshefte für Landesgeschichte, N. F., Jahrg. 19 (1909), Heft 1, 2.
 — — Württemberger Geschichtsquellen, Bd. 9, 10.
 — K. Württembergisches Statistisches Landesamt:
 — — Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde, Jahrg. 1909, Heft 1, 4^o.
 — — Statistisches Handbuch, Jahrg. 1908 und 1909.
- Sydney.** R. Society of New South Wales:
 — — Journal and Proceedings for 1908, vol. 42; for 1909, vol. 43, part 1, 2.
 — Australian Museum:
 — — Records, vol. 7, No. 1-5; vol. 8, No. 1.
 — Australian Association for the advancement of science:
 — — Report of the . . . meeting 12. Brisbane, 1909.
- Sitzungsb. d. math.-phys. Kl. Jahrg. 1910.

Sydney. New-South-Wales Department of Mines, Geological Survey:

- — Annual report for 1909.
- — Records, vol. 9, No. 1.
- Linnean Society of New-South-Wales:
- — Proceedings, vol. 34, part 3, 4; vol. 35, part 1, 2.
- National Art Gallery:
- — Catalogue, 1906.

Teddington. National Physical Laboratory:

- — Report for the year 1909, 4^o.
- — Collected Researches, vol. 6, 1910.

Thorn. Copernikus-Verein für Wissenschaft und Kunst:

- — Mitteilungen, Heft 8—17.

Tiflis. Physikalisches Observatorium:

- — Beobachtungen für die Jahre 1899—1904.

Tokyo. Earthquake Investigation Committee:

- — Bulletin, vol. 4, No. 1; Titel und Register zu vol. 3.
- Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens:
- — Mitteilungen, Bd. XII, 2.
- Geographical Society:
- — Journal, vol. 22, No. 253—258; 1910.
- Mathematico-Physical Society:
- — Proceedings, 2^d ser., vol. 5, No. 11—19.
- Kais. Universität:
- — The Journal of the College of Science, vol. 13, art. 3; vol. 27, art. 7—14.
- — Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät, Bd. VIII, No. 3 und Titel u. Register; Bd. IX, No. 1.
- — The Journal of the College of Agriculture, vol. 2, No. 1—4.

Topeka. Kansas Academy of Science:

- Transactions, 22, 1909.

Torgau. Altertumsverein:

- — Veröffentlichungen, Heft 13, 14, 18, 19.

Toronto. Canadian Institute:

- — Transactions, vol. VIII, part 4.
- R. Astronomical Society of Canada:
- — Journal, vol. 4, No. 1—5.
- University:
- — Review of Historical publications, vol. 14, 1909.
- — Geological Series, No. 6, 7.
- — Biological Series. No. 8.

Toronto. University:

- — Papers from Chemical laboratories, 86—89.
- — Papers from Physical laboratories, No. 18—35, 40—85.
- — Philological Series, No. 1.
- — Phys. Science Series, No. 1—3.
- — Patholog. Series, No. 4.

Toulouse. Académie:

- — Memoirs, X. sér., tom. 1—9; XI. sér., tom. 9.
- — Bulletin, I, 1—3; II, 1—4; III, 1, 2.

Université:

- — Bulletin populaire de la pisciculture, N. Sér., No. 1, 1903; No. 2, 1904; No. 5—9, 1909.
- — Annales du Midi, No. 82—85.
- — Annales de la faculté des sciences, III. sér., tom. 1, 1909.
- Société de géographie:
- — Bulletin, 1909, No. 4.

Trient. Biblioteca e Museo comunale:

- — Archivio Trentino, anno XXIV, fasc. 3, 4; anno XXV, fasc. 1—3.

Triest. K. K. Maritimes Observatorium:

- — Rapporto annuale, vol. 23, 1910, 4^o.

Tromsø. Museum:

- — Aarshefter, 30, 1907.
- — Aarsberetning for 1908.

Troppau. Kaiser Franz Joseph-Museum für Kunst und Gewerbe:

- — Zeitschrift für Geschichte und Kulturgeschichte Österreichisch-Schlesiens, Jahrg. 5, Heft 1, 2.
- — Jahresbericht für das Jahr 1909.

Tübingen. Universität:

- — Rede von Schleich, 1910.
- — Programm von Voretsch, 1910.

Tufts. College:

- — Studies, vol. 3, No. 1.

Tunis. Institut de Carthage:

- — Revue Tunisienne, année 1—17 = No. 1—80, 1894—1909; No. 181 bis 184.

Turin. R. Accademia delle scienze:

- — Atti, vol 45, disp. 1—15, 1910.
- — Memorie, ser. II, tom. 60, 1910, 4^o.
- — Osservazioni meteorol. nell'anno 1908, 1909.

Accademia d'agricoltura:

- — Annali, vol. 52, 1909.

Società Astronomica Italiana:

- — Rivista di astronomia anno 4, No. 1—12.

Uccle. Observatoire:

- -- Annales astronomiques, tom. 5, fasc. 2.
- -- Annales de la physique du globe, 4, 2.
- -- Bulletin climatolog., 1899, 2. Teil.
- -- Bulletin du magnet. terrestre, 1900—1903.
- -- Annales météorologiques, N. S., tom. 19, fasc. 3.
- -- Observations climatologiques, 1887—1890.
- -- Annuaire astronomique, 1901—1903, 1907, 1909, 1910.
- -- Annuaire météorologique, 1907, 1910.
- -- List des observations magnet., 1910.
- -- Resultats du Voyage de Belgica, No. 42—45.
- La Revue Congolaise:
- -- Revue année 1, No. 1—3.

Ulm. Verein für Kunst und Altertum:

- -- Mitteilungen, Heft 1.
- Verein für Mathematik und Naturwissenschaft:
- -- Mitteilungen, Heft 1—13 = 1888—1908; 14, 1909.

Upsala. K. Gesellschaft der Wissenschaften:

- -- K. Vetenskabs Societeten 1910 (Festschrift).
- -- Swedenborg, Opera poetica.
- K. Universität:
- -- Schriften aus dem Jahre 1909/10 in 4^o und 8^o.
- -- Arbeten, No. 7, 8.
- -- Årskrift, 1909.
- -- Linné, I, 4.
- Meteorologisches Observatorium der Universität:
- -- Bulletin mensol., vol. 41, 1909.
- -- Jägerskiöld L. A., Results of the Swedish zoolog. expedition, 1909.
- -- Gratulationsschrift zum Leipziger Univ.-Jubiläum, 1909.
- -- Dissertation von Koraen, 1910.
- Redaktion der Zeitschrift „Eranos“:
- -- Eranos, vol. IX, fasc. 4; vol. X, fasc. 1—3.

Urbana. Illinois State Laboratory of Natural History:

- -- Bulletin, vol. 8, art. 1—5.

Utrecht. Historisch Genootschap:

- -- Bijdragen en Mededeelingen, deel XXXI, Amsterdam 1910.
- -- Werken, ser. III, No. 24 = Hardenbroek, 3; ser. III, No. 11 = Goes, 2.
- Provincial Utrechtsch Genootschap:
- -- Aanteekeningen, 1910.
- -- Verslag, 1910.

- Utrecht.** Institut Royal Météorologique des Pays-Bas:
 — — Annuaire, année 1908, Abt. A. Météorologie; Abt. B. Magnétisme; 1909, 4^o.
 — — Mededeelingen en Verhandelingen. No. 8—10, 4^o.
 — — Maandl. Overzicht der Weersgesteldheid in Nederland, Jahrg. 7 (1910), Januar—November.
 — — Publication, No. 90, IV; No. 105.
 — — Rapport sur l'expédition polaire Néerlandaise, 1910.
 — — Physiologisches Laboratorium der Hoogeschool:
 — — Onderzoekingen, Reeks V, 11, 1910.
- Vaduz.** Historischer Verein für das Fürstentum Lichtenstein:
 — — Jahrbuch, Bd. 1—8 = 1901—1908; Bd. 9, 1909.
- Vendôme.** Société archéologique scientifique et littéraire:
 — — Bulletin, tom. 48, 1909.
- Venedig.** R. Istituto Veneto di scienze:
 — — Concorsi a premio proclamati, 1909.
- Verona.** Accademia di Scienze:
 — — Atti e Memorie, ser. IV, vol. 10 = 85, 1910.
 — — Osservazione meteorol. . . dell'anno 1909.
 — Museo civico:
 — — Madonna Verona, fasc. 12—15.
- Vicenza.** Accademia Olimpica:
 — — Atti, N. Ser., vol. 35; annata 1905/06.
- Warschau.** Mathematisch-physikalische Gesellschaft:
 — — Prace, tom. 20, 1909.
 — Towarzystwo Naukowe (Wissenschaftliche Gesellschaft):
 — — Sprawozdania (Sitzungsberichte), Jahrg. 1; Jahrg. 2, Heft 1—9; Jahrg. 3, Heft 1—7.
 — — Prace, II. Kl. Anthropolog., Geschichte und Philosophie, No. 1—3.
 III. „ Mathematik und Naturwissenschaft, No. 1, 2.
- Washington.** Bureau of American Ethnology:
 — — Bulletin, No. 38, 39, 48.
 — U. S. Department of Agriculture:
 — — Yearbook 1902; 1909.
 — Department of commerce and labor:
 — — Report, 23, 1908.

Washington. Library of congress:

- — Publications issued since 1897.
- — The library and its work, 1907.
- — Report of librarian, 1907/08.
- Smithsonian Institution:
- — Miscellaneous Collections, No. 1869, 1870, 1872, 1920, 1922—1931, 1933—1943, 1945.
- — Annual Report for the year 1909; 1908.
- U. S. National-Museum:
- — Contributions to the U. S. National Herbarium, vol. 13, part 2—5; vol. 14, part 1.
- — Bulletin, vol. 66, 68, 69, 71, 72.
- — Report for the year 1908/09.
- Carnegie Institution:
- — List of Publications, 25. May 1910.
- U. S. Naval Observatory:
- — Astronomical papers, vol. 5—8.
- — Synopsis of the Report for the 1908/09; 1909.
- — Star list of American Ephemeris for 1910.
- Government Printing Office:
- — Report of the Commissioner of Education 1908/09, vol. 2.
- Philosophical Society:
- — Bulletin, vol. XV, pag. 133—167, 169—187.
- U. S. Coast and Geodetic Survey Office:
- — Report of the Superintendent 1908/09.
- — Hayford, 1910.
- U. S. Geological Survey:
- — Annual report, 30, 1908/09.
- — Bulletins, No. 386, 389—393, 395—428, 432; 1909/10.
- — Professional Paper, No. 64—68; 1909/10, 4⁰.
- — Mineral Resources, 1908, Bd. 1, 2.
- — Water-Supply Paper, No. 221, 227, 232, 233, 235—239, 241—252.

Weihenstephan. K. Akademie für Landwirtschaft und Brauerei:

- — Bericht 1909/10; Freising 1909.

Weimar. Thüringischer Botanischer Verein:

- — Mitteilungen, N. F., Heft 1—27.

Wernigerode. Harzverein für Geschichte:

- — Zeitschrift, Jahrg. 42, Heft 3, 4; Jahrg. 43, Heft 1—3.

Wien. Kais. Akademie der Wissenschaften:

- — Almanach 1909.
- — Sitzungsberichte, a) der philos.-histor. Klasse, Bd. 162, Abh. 2—6; Titel u. Register zu Bd. 161; Bd. 163, Abh. 3—6; Titel u. Register zu Bd. 163; Bd. 164, Abh. 1—4; Bd. 165, Abh. 1; Bd. 166, Abh. 2.

Wien. Kais. Akademie der Wissenschaften:

- — Sitzungsberichte, b) der mathem.-naturwiss. Klasse, Bd. 118, Abt. I, Heft 7—10; Abt. II^a, Heft 6—10; Abt. II^b, Heft 8—10; Abt. III, Heft 4—10; Bd. 119, Abt. I, Heft 1—5; Abt. II^a, Heft 1—6; Abt. II^b, Heft 1—6; Abt. III, Heft 1—5.
- — Denkschriften der philos.-histor. Klasse, Bd. 54, 1,
- — Anzeiger (mathem.-naturwiss. Klasse), 1910, No. I—XXVII nebst Titel u. Inhaltsverzeichnis.
- — Archiv für österreichische Geschichte, Bd. 100, 1. und 2. Hälfte: Bd. 101, 2. Hälfte.
- — Almanach, Jahrg. 59, 1909.
- — Mitteilungen der Erdbebenkommission, N. F., No. 37—39.
- K. K. Geologische Reichsanstalt:
- — Verhandlungen, 1909, No. 10—16, Titel und Register zu 1909; 1910, No. 1—12.
- — Jahrbuch, Bd. 59, Heft 3, 4; Bd. 60, Heft 1—3.
- — Geologische Karten, Lief. 9, 1910, und Erläuterungen, No. 51, 78, 85, 116, 118.
- Österreichische Kommission für internationale Erdmessung:
- — Verhandlungen (Protokolle 1908), 1909.
- K. K. Gesellschaft der Ärzte:
- — Wiener klinische Wochenschrift, 1901, No. 1—52, 4^o.
- Zoologisch-botanische Gesellschaft:
- — Verhandlungen, Bd. 59, Heft 9, 10; Bd. 60, Heft 1—8.
- — Abhandlungen, Bd. 5, No. 1—5; Bd. 6, No. 1.
- K. K. Naturhistorisches Hofmuseum:
- — Annalen, Bd. XXIII, No. 3, 4; Bd. XXIV, No. 1, 2.
- Israelitisch-theologische Lehranstalt:
- — Jahresbericht, 1, 3, 9—17.
- v. Kuffnersche Sternwarte:
- — L. de Ball, Astrophysikalische Ortsbestimmung, 1909.
- K. K. Universität:
- — Inauguration des Rektors 1910/11.
- — Verwaltungsbericht der K. K. Univ.-Bibliothek, 3; 1908/09.
- — Bericht über die volkstümlichen Univ.-Vorträge, 1909/10.
- — Übersicht der Behörden, 1910/11.
- — Vorlesungen, 1910; 1910/11.
- Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse:
- — Schriften, Bd. 50, 1909/10.
- — Jubiläumsschrift, 1860—1910.

Wiesbaden. Nassauischer Verein für Naturkunde:

— — Jahrbücher, Jahrg. 63, 1909.

Winterthur. Naturwissenschaftliche Gesellschaft:

— — Mitteilungen, Heft 1—8, 1909/10.

Wladiwostok. Orientalisches Institut:

— — Ivestja, tom. 30; tom. 32, No. 1, 2; tom. 33, No. 1; tom. 34, No. 2; tom. 35, No. 2.

— — Otschet, 1909.

— Verein zur Erforschung des Amurgebietes:

— — Zapiski Obščestva Izučenija Amurskago kraja, tom. 2, 1893; tom. 3, 4, 1894; tom. 5, I u. II, 1896; tom. 6 I, und Atlas, 1897; tom. 7, I, 1899; tom. 7, II, 1900; tom. 8, I, 1902; tom. 9, I, II, 1903 (1904); tom. 10, 1907; tom. 12, 1908.

— — V. P. Margaritov Ob Oročach, imperatorskoj gavani. St. Petersburg 1888.

Wolfenbüttel. Geschichtsverein für das Herzogtum Braunschweig:

— — Jahrbuch, 8. Jahrg., 1909.

— — Braunschweigisches Magazin, Bd. XV, Jahrg. 1909, 4^o.

Worms. Altertumsverein:

— — Vom Rhein, Jahrg. 1—8 = 1902—1909; Jahrg. 9, 1910.

Würzburg. Physikalisch-medizinische Gesellschaft:

— — Verhandlungen, N. F., Bd. 40, No. 6—7, 1910.

— — Sitzungsberichte, 1908, Heft 6, Titel u. Register zu 1908; 1909, Heft 1—5.

— Historischer Verein von Unterfranken:

— — Archiv, Bd. 51, 1910.

— — Jahresbericht für 1908.

— K. Altes Gymnasium:

— — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von Friedr. Pfeiffer.

— K. Neues Gymnasium:

— — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von Rudolf Blümel.

Wunsiedel. Realschule:

— — Jahresbericht, 1909/10.

Zürich. Schweizerische Meteorologische Zentralanstalt:

— — Annalen, 45. Jahrg., 1908, 4^o.

— Antiquarische Gesellschaft:

— — Mitteilungen, Bd. 26, Heft 7, 4^o.

— Naturforschende Gesellschaft:

— — Neujaahrsblatt auf das Jahr 1910, Stück 112.

— — Vierteljahrschrift, Jahrg. 54, Heft 3—4; Jahrg. 55, Heft 1, 2.

Zürich. Schweizerisches Landesmuseum:

- — Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde, N. F., Bd. XI, No. 3, 4;
Bd. XII, No. 1, 2 (mit Beilage); 1909/10.
- — 18. Jahresbericht, 1909.
- Sternwarte:
- — Publikationen, No. 1.
- Universität:
- — Schriften aus dem Jahre 1909/10 in 4^o und 8^o.

Zweibrücken. K. Humanist. Gymnasium:

- — Jahresbericht 1909/10 mit Programm von Rudolf Pfleger.

Geschenke von Privatpersonen, Geschäftsfirmen und Redaktionen.

Max Bernhart, München:

- Markus Welser als Numismatiker, Sep.-Abdr., München 1909.
- Zwei römische Münzfunde in Bayern, Sep.-Abdr., München 1910.

Carl Bezold, Heidelberg:

- Zeitschrift für Assyriologie, Bd. 24, Heft 1—4.

H. Böhlaus Nachf., Weimar:

- Zeitschrift der Savignystiftung, Bd. 31 der romanischen und germanischen Abteilung, 1910.

Vine Albanese di Boterno:

- Tu es Petrus, Modica 1910.

H. Bourges, Brüssel:

- Ethnographie Européenne, Brüssel 1909.

Jos. Leop. Brandstetter, Luzern:

- Der Ortsname Zimikon, Luzern 1910.

Remwald Brandstetter, Madagaskar:

- Wurzel und Wort in den indonesischen Sprachen, 1910.
- Monographien zur indonesischen Sprachforschung, No. 3, 1894;
II. Ser., No. 2, 1902, No. 6, 1910.

Fritz Burger, München:

- Die Villen des Andrea Palladio, ein Beitrag zur Entwicklungsgeschichte der Renaissance-Architektur, 4^o.

Ant. Cabreira, Lissabon:

- Les mathématiques en Portugal, 1910.

Frz. Coblenzer, Coblenz:

- Coblenzer Strophen, 1910.

M. Conrad, Aschaffenburg:

- Seine wissenschaftlichen Publikationen.

- Art. J. Evans, Oxford:
Scripta Minoa, vol. 1. 1909.
- Hermann Fischer, Tübingen:
Schwäbisches Wörterbuch, Lief. 29—32.
- W. M. Foote, Philadelphia:
Complete mineral Catalogue, 1909.
- H. Fritsche, Riga:
Änderungen der erdmagnetischen Elemente, 1910.
- R. Gautier, Genf:
Zwei Separatabdrücke.
- Gildersleeve, Baltimore:
Notes on Stahls Syntax of the greek verb, 1909.
- Goppelsröder, Basel:
Kapillaranalyse, Dresden 1910.
- Aug. Gravis, Brüssel:
Les sciences botanique en Belgique, 1830—1909.
2 Analysis (S. A.)
Notice sur Émil Lawrent, 1909.
- Rod. Guimaraes, Amadora:
Les mathématiques en Portugal, 2^e édition, Coimlera, 1909.
- F. R. Helmert, Potsdam:
Schwerkraft und Massenverteilung der Erde, 1910.
- Friedrich Hirth in New York:
Kingsmilliana, 2 S. A.
- Th. Houtsma und A. Schade, Utrecht:
Enzyklopädie des Islam, Lief. 6, 7.
- Karl Justi, Bonn:
Michelangelo, Neue Beiträge zur Erklärung seiner Werke, Berlin 1909.
- A. Kirchner:
2 Separat-Abdrücke aus Revue française d'ornithologie.
- J. V. Kull, München:
Das Münzrecht und die ehemals münzberechtigten Stände im
Bereiche des heutigen Bayern.
Die Münzen und Medaillen der Wittelsbacher als Reichsvikare.
- Haton de La Gonpilière, Paris:
Étude géométrique et dynamique.
Théorie algebr. d'un jeu de société.
Suites terminées, 1910.
- Heinrich Lanz, Mannheim:
50 Jahre des Wirkens in Landwirtschaft und Industrie, 2 Bände,
Berlin 1910.
- Arthur H. Lea, Philadelphia:
Henry Charles Lea (Copy of a Preliminary Memoir).

- Wilh. Leicke:
Über Entstehung der Eiszeiten, Hamburg 1910.
- F. Limmer, Braunschweig:
Farbenanpassungsverfahren, Wien 1909.
- Märkische Verlagsanstalt, Berlin:
Wörterbuch der deutsch-japanischen Umgangssprache, 1. Lief.
- E. Merck, Darmstadt:
Jahresberichte 1892—1910.
- Johann Metz, Frankfurt a. M.:
Ursache der Bewegungen im Weltall, 1910.
- H. W. Middendorp, Groningen:
Pathogenèse de la Tuberculose, 1910.
- Alfr. Mitscherlich, Königsberg:
4 Separat-Abdrücke, 1910.
- Otto Möller, Hamburg:
Neue Gesichtspunkte über Ursachen und Wirkungen der Hermanns-
schlacht, 1909.
- Oskar Münsterberg, Berlin:
Chinesische Kunstgeschichte, Bd. 1, Esslingen 1910.
- J. Muica, Bucarest:
Beweis des Fermatschen Satzes, Wien 1910.
- A. A. Nijland, Utrecht:
De Koma, der Komeet van Halley, 1910.
- Heinrich Nissen, Berlin:
Orientation. Studien zur Geschichte der Religion, Heft 3, Bd. 1910.
- Adolf Noreen, Upsala:
Vårt språk, Bd. II, 1—4.
- Friedr. Ohlenschläger, München:
Römische Überreste in Bayern, Heft 3.
- Heinrich Ostermaier, Ingolstadt:
Die Ostermaier, 2. Teil, 1909.
- H. Paul, München:
Moorpflanzungen Bayerns, 1910.
- Erich Petzet, München:
August Graf v. Platens sämtliche Schriften in 12 Bänden.
- Bernhard Ponschab, Metten:
Die seligen Utto und Gamelbert, 1910.
- D. Prain, Kew bei London:
Memoirs and Memoranda, Calcutta 1894.
Botanical notes and papers, Calcutta 1901.
Noviciae Indicae, London 1905.
Contribut. to Indian Botany, London 1906.

- H. Rudolph, Pfaffendorf a. Rh.:
Mechanische Erklärung der Naturerscheinungen, Coblenz 1910.
Ergebnisse der wissenschaftlichen Drachen- u. Ballonaufstiege, 1910.
- Karl Rabl, Leipzig:
Bausteine zur Theorie der Extremitäten der Wirbeltiere, 1. Teil, 1910.
Geschichte der Anatomie an der Universität Leipzig, 1910.
- D. Henry Scott, Kew bei London:
Studies in Fossil Botany, 2^d edit., 1909.
- Siemens-Schuckert, Berlin:
Nachrichten, Heft 17, 18. Jahrg., 1909.
- B. G. Teubner, Leipzig:
Encyclopédie des sciences mathématique, tom. I, vol. 2, fasc. 2;
tom. II, vol. 3, fasc. 1; tom. I, vol. 3, fasc. 3, 4.
Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. III, 1, Heft 4;
Bd. IV, 2, II, Heft 3; Bd. VI, 1, Heft 2; Bd. VI, 2, II, Heft 3.
Thesaurus linguae Latinae, vol. III, fasc. 6, 7; vol. V, fasc. 1, 2;
Suppl. fasc. 2.
Archiv für Mathematik und Physik, Bd. 15, Heft 4; Bd. 16, Heft 1—4;
Bd. 17, Heft 1—3.
Byzantinische Zeitschrift, 19, 1. 2.
- Karl J. Trübner, Straßburg:
Minerva, Jahrbuch der Gelehrten Welt, XX. Jahrg., 1910/11.
- Maulavi Abdul Wali, Calcutta:
Sarmad: his life and execution, S. A. 1910.
The Rubā 'iyāt of Abu Saïd ibn Abul Khyar, S. A. Calcutta 1910.
- August Weiler, Karlsruhe:
Gleichung der gestörten Ellipse, Fragmente No. 4, 1910.
- Karl Wunderer, Erlangen:
Polybios-Forschungen. Beiträge zur Sprach- und Kulturgeschichte,
I—III, Leipzig 1898—1909.
- C. Ziem, Sanitätsrat, Danzig:
15 Sep.-Abdr., 3 Sep.-Abdr., 1910.

Berichtigungen zur Abhandlung von M. Schmidt:

„Koordinatenberechnung und Netzanschlüsse der südbayerischen Dreieckskette“, Jahrgang 1910, 11. Abhandlung.

S. 9 in Tabelle II und III sind wegen eines Rechenfehlers in den Koordinaten des Schwerpunktes des Systems die unter (x) , (y) , v_x , v_y , r_x und r_y angegebenen Zahlenreihen durch die folgenden zu ersetzen:

Nr.	(x)	(y)	v_x cm	v_y cm	r_x cm	r_y cm
1	— 39 472,764	+ 88 641,408	+ 19	+ 40	— 14	+ 47
2	+ 22 429,906	+ 82 433,108	+ 18	+ 30	— 3	+ 5
3	— 30 970,534	+ 24 604,167	+ 9	+ 39	— 34	— 6
4	+ 40 814,816	+ 46 054,778	+ 12	+ 27	+ 15	— 25
5	+ 34 208,946	+ 6 013,608	+ 6	+ 29	+ 10	— 20
6	+ 6 436,636	— 17 381,182	+ 2	+ 33	— 2	— 33
7	+ 25 133,216	— 38 887,552	— 1	+ 30	+ 1	— 30
8	+ 9 397,526	— 51 351,732	— 3	+ 33	+ 10	— 25
9	— 41 857,754	— 50 343,332	— 2	+ 41	+ 35	+ 7
10	— 36 228,844	— 88 140,092	— 8	+ 41	+ 18	+ 59
11	+ 2 621,906	— 103 162,772	— 11	+ 34	+ 15	+ 59
12	+ 47 241,116	— 19 879,832	+ 1	+ 26	+ 11	— 22
13	+ 10 740,816	+ 64 359,938	+ 15	+ 32	— 19	— 25
14	— 57 709,734	+ 76 915,268	+ 17	+ 43	— 33	+ 41
15	+ 7 214,746	— 19 875,782	+ 2	+ 33	— 9	— 35
	+ 206 239,630	+ 389 022,275			$m_x =$	$m_y =$
	— 206 239,630	— 389 022,276			± 19 cm	± 34 cm

- S. 11, 5. Z. v. u.: $\delta = + 0^{\circ}32$ statt $+ 0^{\circ}11$ und 4. Z. v. u.:
 $\mu = + 74,8 \times 10^{-9}$ statt $- 24,6 \times 10^{-9}$.
- S. 12, 13. Z. v. o.: $m_x = \pm 19$ cm statt ± 16 cm und $m_y =$
 ± 34 cm statt ± 38 cm; 16 Z. v. o.: $m_r = \pm 38$ cm statt
 ± 41 cm.
- S. 13, 5. Z. v. o.: $m \varphi_y = \pm 1^{\circ}04$ statt $\pm 1^{\circ}17$; $m \varphi_x = \pm 0^{\circ}64$
 statt $\pm 0^{\circ}55$ und $m \varphi_r = \pm 1^{\circ}22$ statt $\pm 1^{\circ}29$; 10. Z.
 v. o.: $\pm m_e = \pm 2^{\circ}44$ statt $\pm 2^{\circ}58$.
- S. 16, 10. Z. v. u.: $m_r = \pm 19$ cm statt ± 16 cm und $m_y =$
 ± 34 cm statt ± 38 cm.
- S. 22, 10 Z. v. u.: Lg. *We Hg* = 4,582 2236.0 statt 4,582 2336.0.
- S. 32, 17. Z. v. u.: 20,000566 m statt 20,000482 m; 16. Z.
 v. u.: 31 μ statt 14 μ ; 15. Z. v. u.: außerhalb statt
 innerhalb; 11. Z. v. u.: 20,000489 m statt 20,000417 m

Durch diese Berichtigungen ergeben sich für die in der
 Abhandlung gezogenen Schlußfolgerungen keine wesentlichen
 Änderungen.

Es muß jedoch noch bemerkt werden, daß eine nachträg-
 lich vorgenommene Vergleichung der neuermittelten Längen
 der einzelnen Meßstangen mit den im Jahre 1807 erhaltenen
 Werten für Stange Nr. 1 im Mittel aus den oben angeführten
 Vergleichungen bei 0° und 21° eine Verkürzung derselben um
 24 μ erkennen ließ, ein Betrag, der dem erwähnten Unterschied
 der Lagenlänge von 31 μ sehr nahe kommt.

Diese Verkürzung erklärt sich dadurch, daß vor der Neu-
 vergleichung der Stangen eine an beiden Enden der Stange
 Nr. 1 vorhandene starke Rostschicht beseitigt werden mußte,
 was trotz der dabei angewendeten Vorsicht die angegebene Ver-
 kürzung zur Folge hatte. Bei den S. 34 und 35 berechneten
 Anschlußdifferenzen ist deshalb die neuermittelte Lagenlänge
 nicht in Betracht gezogen worden. In diesem Sinne sind die
 beiden vorletzten Absätze S. 32 abzuändern.

Dr. M. Schmidt.

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch - physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 1. Abhandlung

Über die spezifische Wärme c_p des überhitzten
Wasserdampfes für Drucke bis 8 Atmosphären
und Temperaturen von 350° C. bis 550° C.

von

Oscar Knoblauch u. Hilde Mollier

Mit 1 Tafel

Vorgelegt am 8. Januar 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die Untersuchung, welche etwa zwei Jahre in Anspruch nahm, bildet eine Fortsetzung der im Laboratorium für technische Physik der Kgl. Technischen Hochschule München durchgeführten Bestimmung der spezifischen Wärme des Wasserdampfes bis 8 at und 350⁰ C.¹⁾ Für diese Versuche hatte der Verein Deutscher Ingenieure sowie die Herren Fabrikbesitzer Carl Lanz Mannheim und Zivilingenieur Dr. ing. Wilh. Schmidt Kassel-Wilhelmshöhe in dankenswerter Weise die Mittel zur Verfügung gestellt. Ein ausführlicher Bericht über die Beobachtungsergebnisse wird demnächst in der Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure und in den von demselben herausgegebenen „Mitteilungen über Forschungsarbeiten“ erscheinen. Es seien hier nur die wesentlichsten Ergebnisse kurz mitgeteilt.²⁾

Durchführung der Versuche: Die Versuchsmethode war im wesentlichen die gleiche wie bei der oben erwähnten früheren Untersuchung. Es wurde jedoch ein anderer Apparat

1) Vgl. Osc. Knoblauch und Max Jakob, Sitzungsber. d. math.-phys. Kl. d. K. Bayer. Akademie d. Wiss., 35, S. 441, 1905. Mitteil. über Forsch.-Arbeit. d. V. D. I., Heft 35 und 36, S. 109, 1906. Zeitschr. d. V. D. I., Bd. 51, S. 81, 1907.

2) Die Beobachtungen sind von Frl. H. Mollier, jetzigen Frau Dr. Barkhausen, und mir gemeinsam angestellt worden. Nach dem Ausscheiden von Frl. Mollier aus dem Laboratorium habe ich die Ausarbeitung der Veröffentlichung und den Entwurf der Kurventafel allein übernommen.

Osc. Knoblauch.

benützt. Der Wasserdampf wurde einem Dampfkessel entnommen, mittels eines Wasserabscheiders entwässert und dann in einem Überhitzer I vollkommen getrocknet und bis zu einer beliebigen Temperatur überhitzt. In diesem Überhitzer strömte der Dampf durch nahtlos gezogene Stahlrohrspiralen im Gegenstrom zu den Abgasen einer Gasfeuerung. Von hier aus gelangte der Dampf in einen Überhitzer II, in welchem ihm eine genau gemessene Wärme mittels elektrischer Heizung zugeführt wurde, und er wurde schließlich in einem Kondensator niedergeschlagen. Dieser zweite Überhitzer bestand aus einer Kupferschlange, auf welcher der Heizdraht aus Nickelinplätt, durch Asbestpappe isoliert, aufgewickelt war. Die Kupferspirale hing in einem Luftbade, welches durch einen Kupferzylinder begrenzt und gegen Wärmeverluste nach Außen möglichst isoliert war.

Die von dem Dampfe während des Durchströmens der Spirale aufgenommene Wärme ist die Differenz der dem Luftbade im ganzen zugeführten elektrischen Energie und der durch Ausstrahlung u. s. w. verloren gegangenen Wärme. Dieser Wärmeverlust wurde in einer Nachperiode in der Weise bestimmt, daß unmittelbar nach Abstellung der Dampfzufuhr diejenige Heizenergie ermittelt wurde, welche nötig war, um die Temperatur des das Luftbad einschließenden Kupferzylinders auf der gleichen Höhe zu halten wie beim Versuche selbst.

Ein Versuch dauerte mindestens eine Stunde, innerhalb deren alle 3 Minuten Spannung und Stromstärke des elektrischen Heizstromes, ferner mittels eines Thermoelementes die Temperatur des aus dem Überhitzer I austretenden Dampfes, sowie mit einem Differentialthermoelement der Betrag der im Überhitzer II erzielten Überhitzung, außerdem der Druck vor und hinter dem Überhitzer II, sowie endlich die Temperatur des erwähnten Kupferzylinders durch zwei Quecksilber- und ein um ihn herumgelegtes Widerstandsthermometer bestimmt wurde. Die stündlich hindurchtretende Dampfmenge wurde durch Wägung des Kondensates ermittelt.

Aus der stündlichen Dampfmenge, dem Betrag der Überhitzung und der vom Dampf aufgenommenen Wärme berechnet sich dann seine spezifische Wärme c_p .

Bei unseren Versuchen betrug das Dampfgewicht im Mittel 46 kg pro Stunde, die Überhitzung im Mittel 37°C .; die Versuche wurden bei 2, 4, 6 und 8 kg/cm^2 angestellt und bei Temperaturen, die in Intervallen von ungefähr 50° von 350° bis 550° anstiegen. Zur Kontrolle der älteren Versuche wurde außerdem noch eine größere Anzahl von Beobachtungen bei Temperaturen unter 350° angestellt.

Versuchsergebnisse: Die Resultate der Untersuchung sind in der beigegebenen Kurventafel zur Darstellung gebracht, in welcher die Temperaturen als Abszissen, die spezifischen Wärmen c_p als Ordinaten eingetragen sind. Des Vergleiches halber sind auch die Werte der früheren Versuchsreihe in die Tafel eingetragen; sie sind durch schwächere Zeichen kenntlich gemacht. Man erkennt, daß die neuen Werte mit den alten bis etwa 300° sehr gut übereinstimmen. Die Werte bei 350° liegen nach den neuen Versuchen etwas tiefer als die früheren und deuten in Übereinstimmung mit den bei höheren Temperaturen gefundenen Versuchszahlen darauf hin, daß das Anwachsen von c_p mit steigender Temperatur (nach dem Durchschreiten des Minimums) in schwächerem Maße stattfindet, als dies aus der früheren Arbeit sich ergab.

Durch die je bei den Drucken 2, 4, 6 und 8 kg/cm^2 beobachteten Punkte sind unter Berücksichtigung gewisser Folgerungen der Thermodynamik Kurven gelegt, so daß ein System von vier c_p -Isobaren entsteht. Der gegenseitige Abstand dieser Kurven wird bei hohen Temperaturen immer kleiner, so daß er die Grenzen der Beobachtungsgenauigkeit erreicht, und die Kurven scheinbar in eine einzige Kurve zusammenlaufen. Bei welcher Temperatur dies möglicherweise eintritt, und in welcher Weise es sich vollzieht, kann aus den vorliegenden Beobachtungsergebnissen nicht festgestellt werden, da die experimentellen Schwierigkeiten sehr stark mit der Temperatur anwachsen

6 1. Abh.: O. Knoblauch u. H. Mollier. Über die spez. Wärme c_p etc.

und daher die Streuung der Beobachtungspunkte bei hohen Temperaturen eine wesentlich größere ist als bei tieferen.

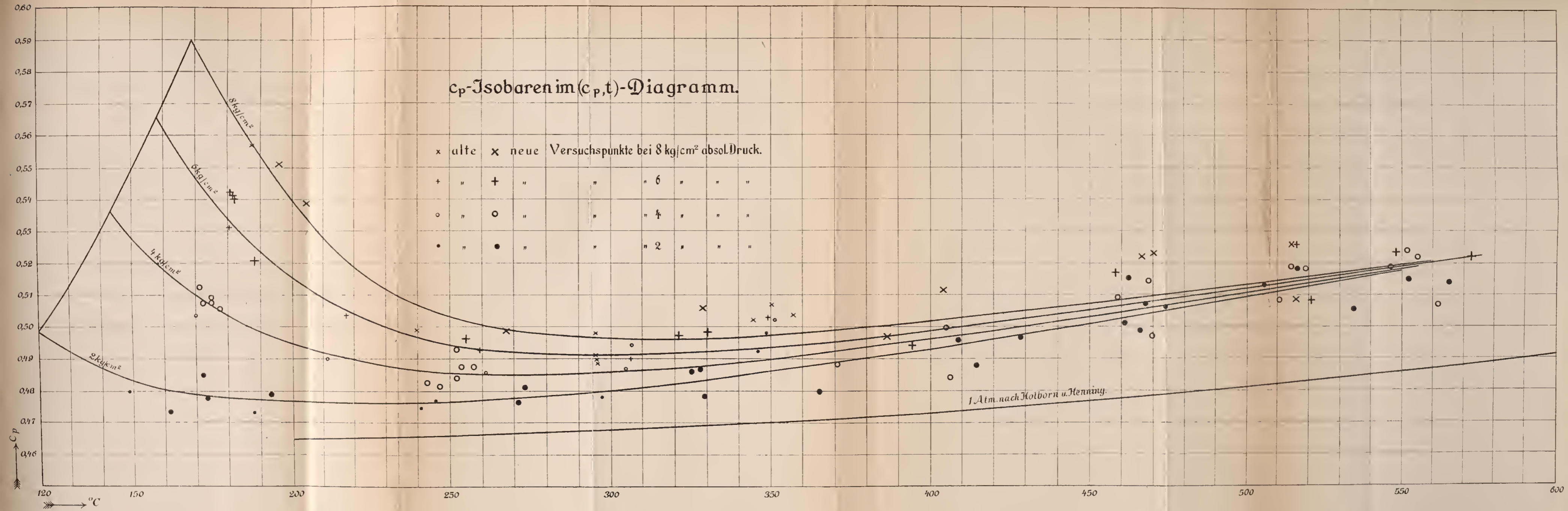
In der Tafel ist noch eine Kurve eingezeichnet, welche durch die von Holborn und Henning (Ann. d. Phys. 23, 809, 1907) angegebenen c_p -Werte bei 200° , 400° und 600° hindurchgelegt ist.

Laboratorium für techn. Physik der K. Techn. Hochschule.

München, im Dezember 1909.

c_p -Isobaren im (c_p, t) -Diagramm.

x alte x neue Versuchspunkte bei 8 kg/cm² absol. Druck.
 + " + " " " 6 " " "
 o " o " " " 4 " " "
 • " • " " " 2 " " "



Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 2. Abhandlung

Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung

von

W. M. Kutta

Vorgelegt am 8. Januar 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

I. Einleitung.

Die Strömungs- und Druckerscheinungen, wie sie in bewegten Flüssigkeiten, insbesondere auch der Luft, an den darein versenkten Körpern beobachtet werden, haben schon seit längerer Zeit der hydrodynamischen Theorie einen viel bearbeiteten, nicht ganz einfachen Gegenstand geboten. Seit Otto Lilienthals Errungenschaften, und der neueren Entwicklung und Lösung des Flugproblems haben diese Fragen auch große praktische Bedeutung erlangt. Von besonderer Wichtigkeit ist Erklärung und Berechnung der auftretenden Auftriebskräfte und ihres Angriffspunktes, sowie des zur Erhaltung einer Bewegung des Körpers erforderlichen Arbeitsbedarfs. Die Entstehung des dynamischen Auftriebs bei gleichförmiger Bewegung des Körpers setzt das Auftreten einer Strömung in der Umgebung desselben voraus, die als die Übereinanderlagerung der Geschwindigkeiten zweier Bewegungen aufgefaßt werden kann, von denen die eine dem Körper auf einfachste Weise ausweicht, während ihn die andere umkreist.¹⁾ Notwendigkeit einer Arbeitsleistung folgt erst bei Berücksichtigung der äußeren oder inneren Flüssigkeitsreibung. Es ist möglich, nach Ausschließen eines linearen wirbelnden Gebietes der Flüssigkeit die Strömung im verbleibenden Teile durch ein mehrdeutiges Geschwindigkeitspotential darzustellen. Dieser Teil wird durch den Ausschluß

¹⁾ Vergleiche hiezu Lanchester: *Aërial Flight*, Bd. I sowie Finsterwaller: *Die Aërodynamik als Grundlage der Luftschiffahrt*. Verhandlungen der Schweizer Naturforschenden Gesellschaft, 92. Jahresversammlung, Lausanne, Bd. 1 S. 12 1909.

der Wirbelachsen zu einem mehrfach zusammenhängenden Raume und die Auftriebskräfte stehen in nächster Beziehung zu der Zirkulation der Flüssigkeit oder den Perioden des Geschwindigkeitspotentials in diesem Raume. Die daraus resultierende indirekte Wirkung der entstehenden Wirbel kann den wesentlichen Betrag des Auftriebes schon ergeben und wird jedenfalls gegenüber der sehr rasch im Einzelnen veränderlichen Wirbelerrscheinung selbst einen weit mehr stationären Charakter zeigen.

Die in Bezug auf dynamische Auftriebswirkung wichtigsten Typen eines in die strömende Flüssigkeit versenkten Körpers sind die lange, ebene, schief gegen die Strömung gestellte Platte, und die lange, schwach gewölbte zylindrische Schale, die auch wenn die Sehne ihres Querschnitts parallel zur Strömung liegt, Auftriebskräfte erfährt. Das letztgenannte spezielle Problem habe ich neben anderen auf Anregung meines verehrten Lehrers, Herrn Professors Dr. Finsterwalder, 1902 in meiner Habilitationsschrift behandelt, indem ich die Abstraktion einer quer zur Strömung unendlich langen zylindrischen Schale vom Querschnitt eines Kreisbogens vom Winkel $2a$ zu Grunde legte. Hiedurch wird das Strömungsproblem ein zweidimensionales und es fällt die ausdrückliche Betrachtung der an die (unendlich entfernt gedachten) Schmalseiten der Schale sich anschließenden Wirbel aus der mathematischen Analyse heraus. Das gewonnene Zahlenresultat stimmte (für kleine Winkel a) ziemlich mit den von Lilienthal durch Versuche erhaltenen Zahlen überein; ein allgemeiner, damals aufgestellter, seitdem von N. Joukowsky¹⁾ neu gefundener Satz besagte, daß der Auftrieb für jeden zylindrischen Körpers senkrecht zur Strömungsrichtung steht und seine Größe proportional zu der im Unendlichen neben der konstanten Geschwindigkeit vorhandenen Komponente der Geschwindigkeit senkrecht vom Radius (sie ist klein von erster Ordnung), also proportional zu der heute als Zirkulation bezeichneten Größe ist. Dieser aus dem Prin-

¹⁾ Bulletin de l'institut aërodynamique de Koutschino, Fascicule I, Petersburg 1906.

zipe der lebendigen Kraft folgende Satz schließt bei reibungsloser Strömung im wirbelfreien, wenn auch mehrfach zusammenhängenden Gebiete eine Arbeitsleistung aus.

Die Abhandlung wurde nicht in extenso veröffentlicht, nur ein Teil der Hauptresultate in den Aëronautischen Mitteilungen 1902, S. 133 kurz angegeben. Einer erneuten Anregung des Herrn Prof. Finsterwalder folgend habe ich in den letzten Monaten die Untersuchung wieder aufgenommen und dabei Strömungsbilder auch für die schiefe Strömung gegen Platte und Schale gefunden, die in wesentlichen Zügen, und auch Zahlenresultaten, mit dem nach den Versuchen zu Erwartenden übereinstimmen. Zugleich erlaubt die Methode auch Strömungen um noch andere praktisch interessante Zylinderformen zu berechnen.

Das Hilfsmittel zur Lösung des im Typus zweidimensionalen Strömungsproblems ist jetzt, wie damals, die konforme Abbildung von Flächenstücken, sei es auf die Halbebene, sei es auf das durch Ausschneiden eines Kreises erhaltene Flächengebiet der Ebene. Das Zweite erlaubt sofort, wie im Paragraphen II ausgeführt ist, die allgemeinste gesuchte Strömung mit Geschwindigkeitspotential um Platte oder Schale aus der bekannten allgemeinsten Strömung um einen Vollkreiszyylinder zu gewinnen. Wie diese, so ist auch jene wegen der noch beliebigen Zirkulation unbestimmt, indem eben eine willkürliche Konstante in die Lösung hineintritt. Die spezielle Lösung wird dann in den vorgelegten Problemen durch die physikalische Forderung bestimmt, daß keine unendlich großen Flüssigkeitgeschwindigkeiten auftreten sollen, wie sie doch die allgemeine Lösung an den hier vorhandenen scharfen Kanten resp. Ecken liefert. In den 1902 behandelten Problemen, insbesondere der Strömung gegen die Schale mit im Unendlichen der Sehne paralleler Geschwindigkeit, gelang es auf Grund der Symmetrieeigenschaft des Problems durch eine geeignete Wahl der Zirkulationskonstante eindeutig eine Lösung aufzustellen, die jene Forderung an Vorder- wie Hinterkante befriedigt. Ebenso wird bei Zylinderformen mit nur einer

scharfen Kante (etwa Hinterkante) sich eine solche Lösung angeben lassen.

Dagegen kann im Probleme der schiefen Strömung gegen Platte oder Schale nur an einer Kante — wir nennen sie die Hinterkante — die unendlich geschwinde Strömung um die Kante vermieden und durch ein Abströmen mit endlicher Geschwindigkeit ersetzt werden; die Lösung ist eindeutig. Dabei ergibt sich eine Auftriebskraft, die sich in zwei Teile zerlegt. Der eine Teil resultiert aus den gesamten Drucken der Flüssigkeit auf die Elemente der Schale; er ist nach dem Schalenzentrum gerichtet. Der zweite Teil stellt eine Saugwirkung der Kante (Vorderkante) dar, die mit unendlicher Geschwindigkeit umflossen wird, und daher einen für die Flächeneinheit unendlichen negativen Druck in Richtung der Schalentangente, wenn auch nur an einer unendlich schmalen Schneide, erfährt. Eine äußerst geringfügige Abrundung der Kante, welche den ersten Teil des Auftriebs nicht wesentlich ändert, genügt, um die physikalisch unzulässigen negativen Drucke und übergroßen Geschwindigkeiten zu beseitigen, ohne daß zunächst dadurch die Saugkraft der Kante besonders beeinflusst wird. Dagegen zeigt sich, daß das an der Kante oder der Abrundung auftretende Geschwindigkeitsgefälle, wenn die Abrundung nicht weit bedeutendere Dimensionen aufweist, übergroße Beträge erreicht. Dann dürfen wir aber die Wirkung der inneren Flüssigkeitsreibung an dieser Stelle nicht mehr außer Acht lassen. Diese Wirkung, wie sie sich im Einzelnen noch äußern mag, wird an der gefährlichen Kante die Geschwindigkeiten und damit die Saugwirkung beträchtlich verringern, ja leicht die Saugwirkung so gut wie ganz zum Erlöschen bringen. Ist dies der Fall, so finden wir außer dem durch äußere Reibung an der Schale erforderten Arbeitsbetrag für die Bewegung der Schale noch einen weiteren in der angedeuteten Weise durch die innere Reibung veranlaßten. Diesen möglichst zu verringern und die Saugwirkung möglichst ungeschädigt zu erhalten, das betrachten wir als den eigentlichen Zweck der Verdickungen, die die Vogelflügel, sowie Lilienthals Tragflächen, an der Vorderseite aufweisen.

II. Allgemeiner Ansatz.

Schneidet man aus der komplexen Ebene $\zeta = \xi + i\eta$ die Fläche des um Punkt $\zeta = 0$ geschlagenen Einheitskreises aus, so ist das übrig bleibende unendliche Flächenstück im Sinne der Funktionentheorie einfach zusammenhängend, da ja der unendlich ferne Punkt nicht als Grenze anzusehen ist. Die Abbildung des Flächenstückes auf die positive komplexe Halbebene t erfolgt im Inneren singularitätenlos durch

$$t = i \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}; \quad \zeta = \frac{t + i}{t - i}$$

ζ und t sind die komplexen Variablen; dem unendlich fernen Punkte der Ebene ζ entspricht in der Ebene t Punkt $t = i$.

Für die Behandlung des zweidimensionalen, wirbellosen Strömungsproblems im betrachteten Flächenstücke ist dagegen dieses als zweifach zusammenhängend anzusehen, insofern für das Unendliche eine Strömungsbedingung gegeben sein wird, also — da diese als Grenzbedingung aufzufassen ist — der unendlich ferne Punkt als Grenze erscheint. Dementsprechend ergibt die Lösung des Strömungsproblem ein periodisches Geschwindigkeitspotential, und es tritt dabei diese Periode, die „Zirkulation“ als willkürliche Konstante auf. Die Lösung ist durch die Geschwindigkeit im Unendlichen noch nicht bestimmt, wie sich im zugehörigen dreidimensionalen Problem denn auch im Kreiszyylinder Wirbelfäden von beliebiger Gesamtwirbelstärke fingieren ließen. Geschlossene Stromlinien können vorhanden sein, aber es ist das im allgemeinen nicht nötig; in den später behandelten Problemen ist es nicht der Fall.

Die Strömungsfunktion sei $W = U + iV$, wo $V = \text{const.}$ das System der Stromlinien, U der Geschwindigkeitspotential ist. Sind u und v die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung im Punkte ζ der Fläche, in ξ und η Richtung gemessen, so ist bekanntlich

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{\partial W}{\partial \zeta} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + i \frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi} - i \frac{\partial U}{\partial \eta} = u - iv.$$

Die allgemeinste Strömung ist gegeben durch

$$W = c_1 \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - i \cdot c_2 \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + i \cdot c \lg \text{nat } \zeta,$$

c_1 , c_2 , c sind als reelle Konstante vorausgesetzt.

Der erste Term für sich allein stellt eine Strömung mit der Geschwindigkeit c_1 in der positiven ξ Richtung im Unendlichen dar; die Stromlinie der Achse ξ spaltet sich im Punkte $\zeta = -1$, folgt beiderseits dem Halbkreis und vereinigt sich wieder im Punkte $\zeta = +1$. Es ist Symmetrie des Strömungsbildes zu den ξ und η Achsen vorhanden.

Der zweite Term allein stellt eine Strömung dar, die im Unendlichen die Geschwindigkeit c_2 in der positiven η Richtung besitzt; die Stromlinie der η Achse spaltet sich in $\zeta = -i$ vereinigt sich wieder in $\zeta = +i$.

Endlich der dritte Term allein gibt eine Strömung in Kreisen um $\zeta = 0$; die Geschwindigkeit im Unendlichen ist Null, $2\pi c$ ist der Betrag der Zirkulation; c wird also die willkürliche Konstante werden.

Wir gehen nun zu einer anderen Ebene, in komplexer Darstellung durch $z = x + iy$ gegeben, über. Aus ihr soll ein beliebiges geschlossenes Flächenstück — das sich auch auf ein doppelt gerechnetes Kürvenstück zusammenziehen kann — ausgeschnitten und entfernt werden; gesucht ist im übrigen Flächenstück die allgemeinste Strömung. Man hat dazu nur das neue Flächenstück auf das vorher betrachtete im Inneren singularitätenfrei abzubilden und dabei dafür zu sorgen, daß dem unendlich fernen Punkte von z der unendlich ferne Punkt von ζ entspricht. Zu diesem Zwecke wird man das Flächenstück z auf die früher eingeführte positive Halbebene t abzubilden haben. Dabei sei $z = \infty$ in $t = t_0$ abgebildet. Die Abbildung enthält drei reelle Konstante; zwei von diesen verwendet man, um $t_0 = i$ zu machen, wodurch das Entsprechen von $z = \infty$ und $\zeta = \infty$ hergestellt ist; die dritte ist nicht von wesentlicher Bedeutung; sie ergäbe in ζ bloß eine ganz gleichgiltige Rotation der Figur um den Punkt $\zeta = 0$.

Ist $z = F(t)$ die gesuchte Abbildungsfunktion, so ergibt sich die gesuchte allgemeinste Strömungsfunktion für das Flächenstück z durch Elimination (— die natürlich tatsächlich nicht vollzogen zu werden braucht —) von t und ζ aus

$$t = i \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}$$

$$W = c_1 \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - i c_2 \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + i \cdot c \lg \operatorname{nat} \zeta$$

$$z = F(t) \text{ oder, was dasselbe } t = \Phi(z).$$

Die Geschwindigkeit der Strömung im Unendlichen von z findet sich durch

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} &= \frac{\frac{dW}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{dW}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \quad \text{für } z = \infty, \zeta = \infty, t = i \\ &= (c_1 - i c_2) \left[\frac{(\zeta - 1)^2}{-2i} \cdot \frac{d\Phi}{dz} \right]_{\substack{\zeta = \infty \\ z = \infty}} = (c_1 - i c_2) \cdot k \end{aligned}$$

wo der letzte Faktor, abgekürzt als k geschrieben und gleich $\left(\frac{d\zeta}{dz} \right)_{z = \infty}$, obwohl von der Form $[\infty \cdot 0]$, doch im allgemeinen endlich werden wird.

Ist im Unendlichen von z die Geschwindigkeit V in der Richtung β gegen die x Achse vorgeschrieben, also deren Komponenten in x und y Richtung $V_1 = V \cdot \cos \beta$, $V_2 = V \cdot \sin \beta$, so ist nun c_1 und c_2 aus $V_1 - i V_2 = (c_1 - i c_2) k$ zu bestimmen. Die willkürliche Zirkulationskonstante c dagegen steht noch beliebig zur Verfügung; es gibt noch unendlich viele Lösungen.

Nun werden wir freilich erwarten, daß unter den so gefundenen möglichen stationären Strömungen sich einzelne durch eine größere Stabilität des Strömungsbildes auszeichnen werden, also bei Störungen die Tendenz besteht, gerade diese herzustellen. Welche speziellen Lösungen das sind, das hängt von der speziellen Form der Grenzkurve ab; im Falle des Kreises ζ werden wir geneigt sein, die Symmetrielösung, also $c = 0$ zu

erwarten. Immerhin werden wir im allgemeinen uns nicht wundern, ein Schwanken des Strömungsbildes um jenes spezielle stabilere Bild herum leicht zu erhalten — sofern eben nicht die spezielle Form der Grenzkurve eine Lösung ganz besonders vor allen anderen bevorzugt, und zwar nicht nur in Bezug auf mehr geometrische Verhältnisse, wie die Symmetrie, sondern in Bezug auf eigentlich physikalische Strömungsverhältnisse.

Ein solcher Fall spezieller Bevorzugung tritt ein, wenn die Grenzkurve des Flächenstückes z in einem ihrer Punkte einen überstumpfen Winkel α nach aussen (praktisch statt dessen auch schon eine sehr kleine Krümmung nach dem Inneren der geschlossenen Kurve hin) aufweist. Ist dies der Punkt z_1 und für ihn $W = W_1$, so gibt bekanntlich die Entwicklung von W am Punkte z_1

$$(z - z_1) = (W - W_1)^{\frac{\alpha}{\pi}} \left[C_0 + \text{Potenzreihe in } (W - W_1)^{\frac{\alpha}{\pi}} \right], \text{ somit}$$

$$\left(\frac{dW}{dz} \right) = \frac{1}{(W - W_1)^{\frac{\alpha - \pi}{\pi}}} [D_0 + \text{Potenzreihe}],$$

wo $\alpha > \pi$ gedacht ist.

Es wird daher im allgemeinen die Strömungsgeschwindigkeit in jenem Punkte unendlich groß. Aber es kann, indem die Konstante D_0 zu Null gemacht wird, dieser störende Zustand aufgehoben werden. Dann gibt es also einen Wert der Zirkulation c , der, indem er D_0 zu Null macht, eine derartig physikalisch ausgezeichnete Lösung repräsentiert und zwar ist diese Lösung eindeutig bestimmt. Dabei wird z_1 im allgemeinen Spaltungspunkt einer Stromlinie werden.

Auf solche Fälle werde ich im letzten Paragraphen aufmerksam machen.

Sind aber mehrere solche überstumpfe Grenzstellen vorhanden, so wird es im allgemeinen nicht mehr möglich sein, überall das Unendlichwerden der Geschwindigkeit durch Wahl der einen Zirkulationskonstanten zu verhüten; vielmehr wird das nur an einer Stelle möglich sein. Wir werden sehen (im Paragraphen V), daß es nur äußerst geringer, praktisch von

selbst nicht zu vermeidender Abrundungen bedarf, um an den übrigen Stellen zu verhindern, daß die Geschwindigkeiten über ein physikalisch zulässiges Maß steigen, und die durch sie erzeugte Druckverminderung auf die unzulässigen negativen Drucke führt. Dagegen werden größere Abrundungen nötig sein, um das an den kritischen Punkte auftretende sehr große Geschwindigkeitsgefälle möglichst unschädlich zu machen und damit die Wirkungen der sonst beträchtlichen und nicht mehr zu vernachlässigender inneren Reibung der Flüssigkeit auf ein geringeres Maß zu reduzieren.

Natürlich können in einzelnen speziellen Fällen, z. B. Symmetriefällen, auch ausnahmsweise gleichzeitig mehrere derartig singuläre Randstellen durch geeignete Wahl der einen Konstanten c unschädlich gemacht werden.

III. Die kreisförmig gewölbte Schale.

Das Beispiel, das ich behandeln will, betrifft den Fall einer in die strömende Flüssigkeit versenkten, zylindrischen unendlich langen Schale, deren Querschnitt ein Kreisbogen vom Zentriwinkel 2α ist. Die Grenzkurve z soll also ein Kreisbogen vom Radius r sein, dessen Bogenmittelpunkt O im Punkte $z = 0$ liegen soll; der Bogen soll dort die x Achse berühren. Der Kreismittelpunkt heiße M . Alsdann haben die Endpunkte A und B des Bogens die Coordinaten:

$$A: x_1 = -r \cdot \sin \alpha \qquad B: x_2 = +r \cdot \sin \alpha$$

$$y_1 = -r \cdot (1 - \cos \alpha) \qquad y_2 = -r \cdot (1 - \cos \alpha)$$

$$\text{also: } z_1 = -2r \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right) \qquad z_2 = 2r \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

Die Abbildung auf die positive Halbebene t erfolgt durch Vermittlung von z' als $z = \frac{1}{z'}$, so daß die A und B entsprechenden Punkte in z' sind:

$$A': z' = \frac{1}{2r} \left(i - \cotg \frac{\alpha}{2} \right); \qquad B': z' = \frac{1}{2r} \left(i + \cotg \frac{\alpha}{2} \right)$$

Dem Punkte $z = \infty$ entspricht $z' = 0$; $z = 0$ $z' = \infty$.

Dann hat man weiter die bekannte Christoffel-Schwarzsche Formel für die Abbildung geradlinig begrenzter Polygone anzuwenden und erhält hier:

$$\frac{dz'}{dt} = C \frac{(t-a)(t-b)}{t^2}$$

wo C , a , b reelle Konstante sind. Daraus folgt

$$z' = C \left[t - (a+b) \lg \operatorname{nat} t - \frac{ab}{t} \right] + C'$$

Es sollen sich entsprechen:

$$t = a \quad \text{und} \quad z' = \frac{1}{2r} \left(i + \cotg \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$t = b \quad \quad \quad z' = \frac{1}{2r} \left(i - \cotg \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$t = i \quad \quad \quad z' = 0.$$

Das liefert $b = -a$; $a = \cotg \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) = \cotg \delta$, wenn abkürzend $45^\circ - \frac{\alpha}{4} = \delta$ gesetzt wird, und schließlich:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{\cotg \frac{\alpha}{2}}{4r} \left[t \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) + \frac{1}{t \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)} \right] + \frac{i}{2r} \\ &= \frac{\operatorname{tg} 2\delta}{4r} \left[t \cdot \operatorname{tg} \delta + \frac{1}{t \cdot \operatorname{tg} \delta} \right] + \frac{i}{2r}. \end{aligned}$$

Fügen wir die Formel für W , in der ζ durch t ausgedrückt ist, hinzu, so kommt:

$$W = 2c_1 \frac{t^2-1}{t^2+1} + 4c_2 \frac{t}{t^2+1} + 2c \operatorname{arctg} t.$$

Diese Formeln enthalten die gesuchte allgemeine Strömung.

Für manche Rechnungen empfiehlt es sich, statt t eine neue Hilfsvariable ψ durch $t = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$ einzuführen. Dadurch wird

$$W = -2c_1 \cos \psi + 2c_2 \sin \psi + c \cdot \psi$$

$$z' = \frac{\operatorname{tg} 2\delta}{4r} \left[\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \cdot \operatorname{tg} \delta + \operatorname{cotg} \frac{\psi}{2} \cdot \operatorname{cotg} \delta \right] + \frac{i}{2r}; \quad z = \frac{1}{z'}$$

Die Strömungsgeschwindigkeit im Punkte z ergibt sich durch

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\frac{dW}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{\frac{dW}{dt}}{\frac{dz'}{dt}} \cdot (-z'^2) = \frac{\frac{dW}{d\psi}}{\frac{dz'}{d\psi}} \cdot (-z'^2).$$

Es ist

$$\frac{dW}{dt} = 8c_1 \frac{t}{(1+t^2)^2} + 4c_2 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{2c}{1+t^2}; \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{\operatorname{tg} 2\delta}{4r} \left[\operatorname{tg} \delta - \frac{1}{t^2} \operatorname{tg} \delta \right]$$

$$\frac{dW}{d\psi} = 2c_1 \sin \psi + 2c_2 \cos \psi + c; \quad \frac{dz'}{d\psi} = \frac{\operatorname{tg} 2\delta}{8r} \left[\frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos^2 \frac{\psi}{2}} - \frac{\operatorname{cotg} \delta}{\sin^2 \frac{\psi}{2}} \right]$$

Die aufgestellten Formeln verwenden wir zunächst, um c_1 und c_2 durch die gegebene Strömungsgeschwindigkeit $V_1 - iV_2 = V(\cos \beta - i \sin \beta)$ im Unendlichen, also für $t = i$, oder $\psi = i \cdot \infty$, auszudrücken. Es wird für $t = i + \varepsilon$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\varepsilon^2} [-2ic_1 - 2c_2 - c \cdot i\varepsilon + \text{Glieder in } \varepsilon^2 \dots]$$

$$z = \frac{2r \cos 2\delta}{\varepsilon} [1 + i \cdot \varepsilon \cos^2 \delta + \text{Glieder in } \varepsilon^2 \dots]$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2r \cos 2\delta}{\varepsilon^2} [1 + \text{Glieder in } \varepsilon^2 \dots].$$

Demnach schließlich

$$\frac{dW}{dz} = \frac{ic_1 + c_2 + \frac{ci}{2}\varepsilon}{r \cos 2\delta} + \text{Glieder in } \varepsilon^2 \dots$$

$$= \frac{ic_1 + c_2}{r \cos 2\delta} + \frac{ci}{z} + \text{Glieder in } \frac{1}{z^2} \dots$$

Da dies für $z = \infty$ $V_1 - iV_2$ geben soll, erhalten wir

$$c_1 = -V_2 \cdot r \cos 2\delta = -V \cdot r \cos 2\delta \sin \beta$$

$$c_2 = +V_1 \cdot r \cos 2\delta = +V \cdot r \cos 2\delta \cos \beta.$$

Wir bemerken noch, daß bei der Entwicklung von $\frac{dW}{dz}$ im Unendlichen nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ der Koeffizient von $\frac{1}{z}$ gleich $c \cdot i$ ist.

Die Konstante c bleibt, wie vorausgesehen, beliebig zur Verfügung.

Die Einführung der erhaltenen Werte für c_1 und c_2 in W ergibt, unter Fortlassung einer gleichgiltigen additiven Konstante

$$\begin{aligned} W &= 4rV \sin \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \beta + t \cos \beta}{1 + t^2} + 2c \operatorname{arctg} t \\ &= 2rV \sin \frac{a}{2} \cdot \sin(\psi + \beta) + c \cdot \psi. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir weiter die Geschwindigkeiten $\frac{dW}{dz}$ in der Nähe der Kanten A und B , d. h. für

$$t = -a + \varepsilon = -\operatorname{cotg} \delta + \varepsilon; \quad \psi = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{a}{2}\right) + k$$

$$\text{und } t = +a + \varepsilon = +\operatorname{cotg} \delta + \varepsilon: \quad \psi = +\left(\frac{\pi}{2} + \frac{a}{2}\right) + k.$$

Für die Umgebung von Punkt B folgt:

$$\frac{dW}{d\psi} = 2rV \sin \frac{a}{2} \cos(\psi + \beta) + c$$

$$= -2rV \sin \frac{a}{2} \left[\sin\left(\frac{a}{2} + \beta\right) + k \cos\left(\frac{a}{2} + \beta\right) - \frac{k^2}{2} \sin\left(\frac{a}{2} + \beta\right) \dots \right] + c$$

$$z' = \frac{i + \operatorname{cotg} \frac{a}{2}}{2r} + \frac{\operatorname{cotg} \frac{a}{2}}{4r} \left[\frac{k^2}{\cos^2 \frac{a}{2}} + \frac{k^3 \sin \frac{a}{2}}{\cos^3 \frac{a}{2}} \dots \right]$$

$$z = r[\sin a - i(1 - \cos a)] - r \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{2} (\cos a - i \sin a) \left[k^2 + k^3 \operatorname{tg} \frac{a}{2} + \dots \right]$$

$$\frac{dz}{d\psi} = -r \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{2} (\cos a - i \sin a) \left[2k + 3k^2 \operatorname{tg} \frac{a}{2} \dots \right]$$

Man erkennt, daß $\frac{dW}{dz}$ nur dann für $k = 0$, also im Punkte B , endlich bleibt, wenn das von k unabhängige Glied in $\frac{dW}{d\psi}$ verschwindet, also

$$-2rV \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) + c = 0 \quad \text{ist.}$$

Daraus bestimmt sich, wie vorausgesehen, eindeutig c und die Zirkulation $2\pi c$.

Die Endformel für W lautet:

$$W = 4rV \sin \frac{\alpha}{2} \left[\frac{t \cos \beta + \sin \beta}{1 + t^2} + \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) \cdot \arctg t \right]$$

oder

$$W = 2rV \sin \frac{\alpha}{2} \left[\sin (\psi + \beta) + \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) \cdot \psi \right].$$

Nochmals zum Punkte B zurückkehrend, führen wir die Bogenentfernung Δ des in der Hilfsvariablen ψ um k von B verschiedenen Punktes ein und erhalten

$$\begin{aligned} & -\frac{\Delta}{r} (\cos \alpha - i \sin \alpha) + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} (-\sin \alpha - i \cos \alpha) + \dots = \\ & = -\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} (\cos \alpha - i \sin \alpha) \left[k^2 + k^3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \dots \right] \end{aligned}$$

Daraus

$$k = \sqrt{\frac{\Delta}{r} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{r} + \text{Glieder in } \left(\frac{\Delta}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \dots}$$

und endlich

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} = V \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) & \left[1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta}{r} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}} \left(3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) \right) \right. \\ & \left. + \text{Glieder in } \frac{\Delta}{r} \dots \right] \cdot [\cos \alpha + i \sin \alpha]. \end{aligned}$$

Die letzte Klammer ist nur Richtungsfaktor.

Die Formel liefert speziell für Punkt B selbst ($A = 0$) die endliche Geschwindigkeit $V \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right)$ in Richtung des Kreisbogens in B ; sie stellt, wenn positiv, also für β

$$\begin{aligned} &< \frac{\pi - \alpha}{2} \\ &> -\frac{\pi - \alpha}{2} \end{aligned}$$

ein Abströmen von der Schale, wenn negativ, ein Anströmen an sie dar. V ist dabei positiv gedacht. Die Formel erlaubt auch, die Änderung der Geschwindigkeit (das Gefälle) in der Nähe von B zu verfolgen; für Punkte der oberen Schalgrenze ist $\sqrt{\frac{A}{r}}$ negativ, für Punkte der unteren Schalgrenze $\sqrt{\frac{A}{r}}$ positiv in Rechnung zu setzen.

Die Entwicklung der Geschwindigkeit in einem um den Bogen A von der Kante A entfernt liegenden Schalenpunkte ergibt durch analoge Rechnung:

$$\frac{dW}{dz} = -V(\cos \alpha - i \sin \alpha) \left[\frac{A}{\sqrt{\frac{A}{r}}} + B + (C + iD) \sqrt{\frac{A}{r}} + \text{Glieder in } \frac{1}{r} + \dots \right]$$

Dabei ist

$$A = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \beta \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$B = -\cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \beta + 3 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta \right)$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}} \left(\sin \alpha \cos \beta - \frac{5}{4} \cos \alpha \sin \beta \right)$$

$$D = -2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \beta \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

Für Punkte der oberen Schalgrenze ist wieder $\sqrt{\frac{\bar{A}}{r}}$ negativ, für Punkte der unteren Schalgrenze $\sqrt{\frac{A}{r}}$ positiv zu nehmen. Der absolute Betrag der Geschwindigkeit ist

$$V \left[\frac{A}{\sqrt{\frac{A}{r}}} + B + C \sqrt{\frac{A}{r}} \right].$$

Die Formeln zeigen, in welcher Art die Strömungsgeschwindigkeit im Punkte A unendlich wird; sie geben natürlich für alle Nachbarpunkte von A , nicht nur die auf der Schale gelegenen, also auch für komplexe A die Geschwindigkeit richtig, und, wenn für das komplexe A sein absoluter Betrag, die Entfernung des betrachteten Punktes von A , gesetzt wird, den Betrag der Geschwindigkeit wenigstens im ersten Gliede richtig.

Weiter seien noch die Geschwindigkeiten für die Mittelpunkte O_+ und O_- des oberen und unteren Schalenbogens berechnet, sowie für ihre Umgebung. Sie sind für $t = \varepsilon$ (bei O_+ , $t = 0$ in O_+), also kleine z :

$$4 V \cos^3 \delta \cdot \cos(\delta - \beta) \cdot \left[1 + \frac{z}{r} \left(i - \frac{\sin \beta \cdot \operatorname{tg} 2 \delta}{4 \cos(\delta - \beta) \cdot \sin \delta} \right) \dots \right]$$

für $t = T$ sehr groß (bei O_- , $t = \infty$ in O_-), also auch kleine z :

$$4 V \sin^3 \delta \cdot \sin(\delta - \beta) \cdot \left[1 + \frac{z}{r} \left(i + \frac{\sin \beta \cdot \operatorname{tg} 2 \delta}{4 \sin(\delta - \beta) \cdot \cos \delta} \right) \dots \right].$$

Zum Schlusse bestimmen wir noch den zweiten (anschaulicher ersten) Spaltungspunkt der Stromlinie, die die Schale unfließt; der eine liegt ja im Punkte B . Da im gesuchten Punkte als einem Stagnationspunkte die Geschwindigkeit $\frac{dW}{dz} = 0$ ist, ergibt sich sofort für das zugehörige ψ als Bestimmungsgleichung:

$$\cos(\psi + \beta) + \sin\left(\frac{a}{2} + \beta\right) = 0.$$

Die eine Lösung derselben $\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$ führt auf B , der Punkt ist schon genauer untersucht, und natürlich kein wirklicher Stagnationspunkt, da auch der Nenner $\frac{dz}{d\psi}$ verschwindet. Die andere Lösung

$$\psi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - 2\beta$$

ist die gesuchte. Wird die Lage eines Schalenpunktes durch den Zenitwinkel φ dargestellt, den der Kreisradius nach ihm mit dem Kreisradius MO nach der Bogenmitte bildet, so ergibt sich die Lage des Spaltungspunktes aus

$$\cotg \frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \tg 2\delta \left[\frac{\tg \delta}{\tg(\delta - \beta)} + \frac{\tg(\delta - \beta)}{\tg \delta} \right].$$

Er liegt auf der unteren, resp. oberen Schalseite, je nachdem β zwischen $-\frac{\pi + \alpha}{2}$ und $\frac{\pi - \alpha}{2}$ liegt, oder nicht.

IV. Der Auftrieb der Schale.

Der Gesamtauftrieb, den die Schale für die Breite b erfährt, berechnet sich aus der Zirkulation

$$2\pi c = 4\pi r V \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right)$$

als

$$4\pi g V^2 \cdot r b \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right);$$

wo g die Dichte der strömenden Flüssigkeit, etwa der Luft, bedeutet. Ist z. B. als Einheitslänge 1 m, als Zeiteinheit 1 sec gewählt, also r und b in m, V in $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ gemessen, so ist für Luft

$$g = \frac{1,293 (1 - \alpha t) \frac{p}{760} \frac{\text{mm Hg}}{\text{mm Hg}}}{\text{m}^3 \cdot 9,81 \frac{\text{sec}^2}{\text{m}}}. \text{Gewichtskilogramm einzusetzen,}$$

und wird dann der Auftrieb in Gewichtskilogramm erhalten. Hierbei ist für einen Augenblick unter t die Temperatur in Celsiusgraden, unter $\alpha = \frac{1}{273}$ der Ausdehnungskoeffizient der Luft, unter p der Luftdruck in Millimetern Quecksilber verstanden.

Die Richtung des Auftriebs ist senkrecht zur Strömungsrichtung, und zwar wird im Falle, daß die oben gegebene Formel einen positiven Zahlenwert liefert, die Auftriebsrichtung aus der Strömungsrichtung durch Drehung um 90° im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers erhalten; im Falle eines negativen Zahlenwertes ist die wirkliche Auftriebsrichtung natürlich die umgekehrte.

Die Angriffslinie des Auftriebs scheint zunächst durch den Kreismittelpunkt M des Schalenbogens gehen zu müssen; wir werden aber sogleich sehen, daß dies ein unrichtiger Schluß wäre.

Den Beweis für die obigen Größen- und Richtungsangaben gebe ich rekapitulierend (wie schon 1902 für den allgemeinen Fall eines beliebigen Zylinders abgeleitet wurde) aus dem Prinzipie der Erhaltung der Energie in der folgenden Art:

Die Geschwindigkeit im Unendlichen wird durch

$$V_1 + i V_2 - \frac{cix - cy}{x^2 + y^2} +$$

Glieder höherer Ordnung dargestellt; die Energie des Volumenelements $d\tau$ also durch

$$\frac{\rho}{2} \left[\left(V_1 + \frac{cy}{x^2 + y^2} \right)^2 + \left(V_2 - \frac{cx}{x^2 + y^2} \right)^2 \right] d\tau.$$

Eine Schicht von der Dicke Δx und der Breite b , zwischen dem großen positiven x und $x + \Delta x$ gelegen, enthält demnach den Energiebetrag

$$b \Delta x \frac{\rho}{2} \int dy \left[V^2 + \frac{2cyV \cos \beta}{x^2 + y^2} - \frac{2cxV \sin \beta}{x^2 + y^2} \right] d\tau,$$

also gegenüber dem Normalbetrag an Energie einen Fehlbetrag von

$$b \Delta x \frac{\rho}{2} \cdot 2cV \sin \beta \left[\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right]_{x \text{ positiv } y = -\alpha}^{y = +\alpha} = b \cdot \Delta x \cdot \pi \rho cV \sin \beta.$$

Für eine Schicht auf der Seite der negativen x ist ebenso ein Überschuß von Energie vom gleichen Betrage in Rechnung zu setzen.

Eine Verschiebung der Schale um Δx von links nach rechts erfordert, wenn die Komponente des Gesamtauftriebs in der $+x$ Richtung X ist, eine Arbeitsleistung der Flüssigkeit vom Betrage $X \cdot \Delta x$. Der Energiebesitz der Flüssigkeit hat aber, da der Vorgang als Ausschaltung einer Schicht Δx im positiven unendlichen x , und Einschaltung einer gleichen Schicht im Negativ unendlichen x aufgefaßt werden kann (wenigstens was den Energievorrat der Flüssigkeit betrifft), um $2b\Delta x \cdot \pi \varrho c V \cdot \sin \beta$ zugenommen.

Es folgt daraus

$$X = -2\pi \varrho b \cdot c V \sin \beta = -4\pi \varrho V^2 \sin \frac{a}{2} \sin \left(\frac{a}{2} + \beta \right) \cdot \sin \beta \cdot b \cdot r.$$

Analog ist die Y Komponente des Gesamtauftriebs

$$Y = +2\pi \varrho c V \cos \beta \cdot b = 4\pi \varrho V^2 \sin \frac{a}{2} \sin \left(\frac{a}{2} + \beta \right) \cdot \cos \beta \cdot b r.$$

Der analoge Beweis für den allgemeinen Zylinder wird noch etwas kürzer; der spezielle hier ist nur zugefügt, um die Sache für das vorliegende Problem noch etwas anschaulicher zu machen.

Der Gesamtauftrieb pro Flächeneinheit ist durchschnittlich demnach gleich

$$\pi \varrho V^2 \sin \left(\frac{a}{2} + \beta \right) \cdot \frac{\sin \frac{a}{2}}{\arccos \frac{a}{2}}$$

zu setzen. Er hängt, wie man sieht, bei gegebenem ϱ und V , also gegebener Strömung im Unendlichen, nicht von r , sondern nur von a und β , d. h. nicht von der Größe der Schale, sondern nur von ihrer Form und dem Luftstoßwinkel ab.

Man wird geneigt sein, den Auftrieb noch auf eine zweite Art, nämlich direkt durch Ausführung der Integration über die Drucke zu berechnen, die auf die Schale wirken; es ist

dies für die Schalenbreite $b = 1$ geschehen. Zunächst läßt sich sofort erkennen, daß trotz den unendlich großen Geschwindigkeiten bei A , und den deshalb dort auftretenden unendlich großen negativen Drucken, ja sogar unendlich groß werdenden Druckdifferenzen, d. h. Auftriebskräften auf die Flächeneinheit, doch der Beitrag der bei A gelegenen Flächenelemente der Schale, also der Umgebung von A , zum Auftrieb ein endlicher, ja sogar innerhalb einer nahen Umgebung berechnet ein kleiner sein wird. Denn für die Geschwindigkeiten im selben nahe bei A gelegenen Schalenpunkte, wenn er als oberer und als unterer Schalenpunkt aufgefaßt wird, ist dem Betrage nach anzusetzen:

$$V \left[+ \frac{A}{\sqrt{\frac{\Delta}{r}}} - B + C \sqrt{\frac{\Delta}{r}} \right] \quad \text{resp.} \quad V \left[\frac{A}{\sqrt{\frac{\Delta}{r}}} + B + C \sqrt{\frac{\Delta}{r}} \right].$$

(Man erinnere sich, daß B gewöhnlich eine negative Zahl sein wird.)

Daher ist für das Element $d\Delta$ mit der Breite 1 als der nach oben wirkende Überdruck oder Auftrieb

$$\frac{1}{2} \varrho V^2 \left[- \frac{4 A B}{\sqrt{\frac{\Delta}{r}}} \right]$$

und als Beitrag der Zone von A bis zur Bogenentfernung Δ zum Auftrieb innerhalb derselben Genauigkeit

$$\frac{1}{2} \varrho V^2 (-4 A B) \int_0^{\Delta} \frac{d\Delta}{\sqrt{\frac{\Delta}{r}}} = \varrho V^2 (-4 A B) r \cdot \sqrt{\frac{\Delta}{r}}$$

in Rechnung zu setzen. Der Beitrag wirkt beiläufig natürlich senkrecht zur Bogentangente in A .

Im Beispiele des Paragraphen V wurden solche Berechnungen mehrfach, hauptsächlich zu Kontrollzwecken, ausgeführt.

Die wirkliche Berechnung der Differenz der auf die untere und die obere Schalenseite wirkenden Druckkräfte hat in

Komponenten nach der x und der y Richtung zerlegt zu geschehen. Die so erhaltenen Auftriebskomponenten stellen sich als die Integrale

$$-\frac{\rho}{2} \int \operatorname{mod} \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 \cdot dy \quad \text{und} \quad -\frac{\rho}{2} \int \operatorname{mod} \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 \cdot dx$$

dar, erstreckt über die Oberseite und die Unterseite der Schale. Dabei ist, wenn t als Integrationsvariable eingeführt wird, die Integration für die Oberseite reell von $t = -a$ über $t = 0$ bis $t = +a$ zu erstrecken, dann weiter für die Unterseite von $t = +a$ über $t = \infty$ bis $t = -a$ fortzusetzen.

$$\text{Da } \frac{dW}{dz} = \frac{\frac{dW}{dt}}{\frac{dz'}{dt}} \cdot (-z'^2), \text{ ist, und } \frac{dW}{dt} \text{ sowie } \frac{dz'}{dt} \text{ auf dem}$$

Integrationswege rein reell sind, so sind die Integrale

$$-\frac{\rho}{2} \int \frac{\left(\frac{dW}{dt} \right)^2}{\left(\frac{dz'}{dt} \right)^2} \operatorname{mod}(z'^4) dy \quad \text{und} \quad -\frac{\rho}{2} \int \frac{\left(\frac{dW}{dt} \right)^2}{\left(\frac{dz'}{dt} \right)^2} \operatorname{mod}(z'^4) dx.$$

$$\text{Andererseits ist, da } dz = \frac{dz'}{-z'^2},$$

$$dx + i dy = \frac{dz' [\operatorname{Reeller Teil von } z'^2 - i \operatorname{Imaginärer Coeff in } z'^2]}{\operatorname{mod} z'^4},$$

oder, da ja bei unserer Integration dz' reell ist, und

$$z' = \frac{\operatorname{tg} 2\delta}{4r} \left(\operatorname{tg} \delta \cdot t + \frac{1}{t \cdot \operatorname{tg} \delta} \right) + \frac{i}{2r}, \quad \text{endlich } t \text{ reell ist,}$$

erhalten wir:

$$\operatorname{mod} z'^4 \cdot dx = dz' \left\{ \left[\frac{\operatorname{tg} 2\delta}{4r} \left(t \cdot \operatorname{tg} \delta + \frac{1}{t \operatorname{tg} \delta} \right) \right]^2 - \left(\frac{1}{2r} \right)^2 \right\}$$

$$\operatorname{mod} z'^4 \cdot dy = dz' \left\{ -2 \cdot \frac{1}{2r} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2\delta}{4r} \left(t \operatorname{tg} \delta + \frac{1}{t \operatorname{tg} \delta} \right) \right\}.$$

Die Einführung dieser Werte und der durch t ausgedrückten Werte von $\frac{dW}{dt}$ und $\frac{dz'}{dt} = t \cdot \operatorname{tg} \delta$ bringt die Integrale auf die Form rationaler Integrale in t . Führt man weiter noch als Integrationsvariable $\tau = \frac{t}{a} = t \cdot \operatorname{tg} \delta$ ein, so gehören wegen $z' = \frac{\operatorname{tg} 2\delta}{4r} \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right)$ zu demselben Schalenpunkte als oberem und unterem zwei reziprok reelle Werte τ . Die Integration für die obere Schale ist von $\tau = -1$ über $\tau = 0$ bis $\tau = +1$ zu erstrecken; die Integration für die untere Schale, eigentlich von $\tau = +1$ über $\tau = \infty$ bis $\tau = -1$ zu erstrecken, kann durch Einführung der reziproken Integrationsvariablen $\frac{1}{\tau}$ auf denselben Weg und dieselben Grenzen, wie bei der oberen Schale zurückgeführt werden. Beide Integrale, für die obere und die untere Schalseite, lassen sich nun zusammenfassen; dabei entsprechen demselben Werte der Integrationsvariablen gerade die zwei Punkte desselben Schalenpunktes als oberer und unterer aufgefaßt. Mit anderen Worten, die Integration summiert in dieser Form direkt die Überdrucke unten gegen oben oder Auftriebe an den verschiedenen Schalenpunkten. Dadurch fällt die logarithmische Unendlichkeit bei A von selbst heraus, ganz wie vorhin, als nur die Umgebung von A betrachtet wurde.

Auch die Integrationen über die linke und die rechte Schalenhälfte lassen sich zusammenfassen, so daß die Auftriebskomponenten schließlich durch Integration über zwei rationale Funktionen von τ , $R_x(\tau)$ und $R_y(\tau)$ als

$$\frac{\rho}{2} V^2 \int_{\tau=0}^{\tau=1} R_x(\tau) d\tau \quad \text{und} \quad \frac{\rho}{2} V^2 \int_{\tau=0}^{\tau=1} R_y(\tau) d\tau$$

erhalten werden. Der Integrationsweg ist reell. Die Ausführung der natürlich prinzipiell ganz einfachen Integrationen

ist ziemlich unständlich, das Resultat einfach. Es kommt nämlich für die x Komponente des Auftriebs:

$$-4\pi\varrho V^2 \cdot r \sin \frac{\alpha}{2} \left[\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) \cdot \sin \beta - \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta \cos \alpha \right]$$

und für die y Komponente des Auftriebs:

$$+4\pi\varrho V^2 \cdot r \sin \frac{\alpha}{2} \left[\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) \cdot \cos \beta + \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta \cdot \sin \alpha \right].$$

Das heißt: Es muß zu dem so berechneten Auftrieb noch ein weiterer Auftrieb mit der x Komponente

$$-4\pi\varrho V^2 \cdot r \sin \frac{\alpha}{2} \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta \cdot \cos \alpha$$

und mit der y Komponente

$$-4\pi\varrho V^2 \cdot r \sin \frac{\alpha}{2} \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta \cdot \sin \alpha$$

hinzukommen, damit der vorher auf Grund des Satzes von der lebendigen Kraft berechnete Auftrieb sich wirklich ergibt. Diese Zusatzkraft vom Betrage

$$4\pi\varrho V^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta$$

besitzt eine mit der Richtung der Endtangente des Schalenbogens in \mathcal{A} , und zwar der Verlängerungsrichtung vom Bogen fort, übereinstimmende Richtung. Für die Flächeneinheit gibt sie durchschnittlich den Betrag

$$\pi\varrho V^2 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{arc} \frac{\alpha}{2}}.$$

In der Tat, das Vorhandensein dieser Kraft kann uns nicht überraschen. Denn obwohl die Kante \mathcal{A} der Flüssigkeit nur eine Schneide bietet, kann doch wohl wegen der unendlichen Geschwindigkeiten, also des unendlichen negativen Druckes in \mathcal{A} eine Saugwirkung der Kante in ihrer eigenen

Richtung von endlichem Betrage zu Stande kommen. Bisher haben wir ja bloß die senkrecht zu den Linien- (oder Flächen-) elementen der Schale wirkenden Druckkräfte bis zur Kante berechnet, nicht aber die an der Kante in der Bogentangentenrichtung wirkende Saugkraft. Diese Erklärung wird durch die folgende Überlegung bestätigt und veranschaulicht.

Die Stromlinien in der Nähe von A sind angenähert Parabeln; ihr Brennpunkt ist A , ihre Achsenrichtung die der Bogentangente in A . Ihre Gleichung in Polarkoordinaten läßt sich, wenn ε ihr Parameter ist und A wie früher die Entfernung eines diesmal freilich nicht auf der Schale liegenden Punktes von A ist, schreiben als

$$A = \frac{\varepsilon}{2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}.$$

Sind p und q die auf Brennpunkt und Achse bezogenen rechtwinkligen Koordinaten eines Parabelpunktes, also

$$p = A \cos \vartheta; \quad q = A \sin \vartheta = \varepsilon \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$$

so ist, da hier die Geschwindigkeit genau genug als

$$\frac{A}{\sqrt{\frac{A}{r}}} \cdot V$$

angenommen werden kann, die entlang der Stromlinie sich ergebende Gesamtkomponente der Saugwirkung in der Richtung der Parabelachse, d. h. Bogentangente:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} V^2 \cdot \int \frac{A^2}{A} dq &= \frac{\rho}{2} V^2 \int \frac{A^2}{A} dA \sin \varphi = \frac{\rho}{2} V^2 A^2 r \int_{\vartheta=+\pi}^{\vartheta=+\pi} \frac{\varepsilon \cdot d \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}{\varepsilon \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}} \\ &= \pi \rho V^2 A^2 r. \end{aligned}$$

Das ist, wenn für A sein Wert eingesetzt wird, wirklich

$$4 \pi \rho V^2 \cdot r \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta:$$

also jene oben gefundene fehlende Saugkraft. Der gefundene Wert hängt von ε nicht ab, behält demnach seinen Betrag, wenn die betrachtete Stromlinie nach $\varepsilon = 0$, d. h. in die Grenzkurve bei A , konvergiert, wobei dann auch der Umstand, daß wir nur die Entwicklung von V bis zum ersten Gliede benutzten, unschädlich wird.

Bemerkt sei ausdrücklich, daß, um diese Übereinstimmung zu erzielen, eben die Rechnung mit den nach der Grenzstromlinie $\varepsilon = 0$ konvergierenden Stromlinien durchgeführt werden muß; nicht etwa mit beliebigen Kurven, die nach der Grenzkurve konvergieren. Den Grund dazu werden wir im nächsten Paragraphen andeuten. Ebenso soll die Berechnung der Angriffslinie des Gesamtauftriebs dort bei Gelegenheit der Durchführung eines Beispiels auch für den allgemeinen Fall angegeben werden. Es genügt hier die Bemerkung, daß der erst berechnete Teilauftrieb durch den Kreismittelpunkt M , die als zweiter Teil berechnete Saugkraft durch Punkt A geht, und so die Resultierende leicht gefunden werden kann.

V. Ein Zahlenbeispiel. Die Abrundung der Vorderkante.

Es soll nun die Rechnung für ein Beispiel durchgeführt werden. Wir wählen im Anschluß an eine von Lilienthal experimentell untersuchte Form einen Kreisbogen, dessen Pfeil $1/12$ der Sehne ist. Der Luftstoßwinkel β soll gleich $\frac{a}{2}$ gewählt sein, also die Richtung der Strömung im Unendlichen die der Sehne AO des Halbbogens, die zum Zentriwinkel a gehört. Dann wird

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1}{6}; \quad \frac{a}{2} = \beta = 9^{\circ} 27',74; \quad a = 18^{\circ} 55',48.$$

Der gesamte Winkel der Schale ist $2a = 37^{\circ} 50',96$.

Zunächst liegt der Spaltungspunkt auf der unteren Schalen-seite nahe bei A , so daß der von MO gerechnete Zentriwinkel $\varphi = -17^{\circ} 50',0$ ist. Es sind die Geschwindigkeiten für die

Punkte der oberen und der unteren Schalenseite mit den Zentriwinkeln $-18^{\frac{3}{4}}^{\circ}$, $-18^{\frac{1}{2}}^{\circ}$, -18° , -17° , -15° ; dann um je 3° fortschreitend bis $+15^{\circ}$, endlich für $+17^{\circ}$, $+18^{\circ}$, $+18^{\frac{1}{2}}^{\circ}$, $+18^{\frac{3}{4}}^{\circ}$ und für Randpunkt *B* berechnet worden. Dann weiter deren Quadrate, denen die Druckverminderung proportional ist, endlich die Differenz dieser Druckverminderungen, der die Auftriebskraft pro Flächeneinheit proportional ist. Die nachstehende Tabelle gibt die Übersicht. Eine negative Zahl für eine Geschwindigkeit bedeutet ein Rückströmen entlang der Schale.

Tabelle 1.

	Zentriwinkel	Betrag der Geschwindigkeit		Geschwindigkeitsquadrate		Deren Differenz prop. dem Auftrieb pro Flächeneinheit
		obere Schale	untere Schale	obere Schale	untere Schale	
A	$-18^{\circ}55,48$	$+\infty$	$-\infty$	∞	∞	∞
	$-18^{\frac{3}{4}}^{\circ}$	$+3,445 V$	$-1,365 V$	$11,867 V^2$	$1,862 V^2$	$10,005 V^2$
	$-18^{\frac{1}{2}}^{\circ}$	$+2,618$	$-0,537$	$6,853$	$0,288$	$6,565$
	-18°	$+2,159$	$-0,075$	$4,662$	$0,006$	$4,656$
	$-17^{\circ}50,0$		Null		Null	
	-17°	$+1,883$	$+0,206$	$3,547$	$0,042$	$3,505$
	-15°	$+1,725$	$+0,376$	$2,977$	$0,141$	$2,836$
	-12°	$+1,646$	$+0,458$	$2,710$	$0,210$	$2,500$
	-9°	$+1,612$	$+0,495$	$2,599$	$0,244$	$2,355$
	-6°	$+1,586$	$+0,517$	$2,516$	$0,268$	$2,248$
	-3°	$+1,559$	$+0,536$	$2,430$	$0,287$	$2,143$
O _{+ -}	0°	$+1,526$	$+0,553$	$2,329$	$0,306$	$2,023$
	$+3^{\circ}$	$+1,487$	$+0,573$	$2,211$	$0,328$	$1,883$
	$+6^{\circ}$	$+1,439$	$+0,596$	$2,070$	$0,355$	$1,715$
	$+9^{\circ}$	$+1,380$	$+0,624$	$1,903$	$0,390$	$1,513$
	$+12^{\circ}$	$+1,306$	$+0,662$	$1,705$	$0,439$	$1,266$
	$+15^{\circ}$	$+1,210$	$+0,717$	$1,464$	$0,514$	$0,950$
	$+17^{\circ}$	$+1,123$	$+0,774$	$1,262$	$0,599$	$0,663$
	$+18^{\circ}$	$+1,062$	$+0,819$	$1,129$	$0,671$	$0,458$
	$+18^{\frac{1}{2}}^{\circ}$	$+1,020$	$+0,854$	$1,041$	$0,729$	$0,325$
	$+18^{\frac{3}{4}}^{\circ}$	$+0,988$	$+0,881$	$0,976$	$0,777$	$0,199$
B	$+18^{\circ}55,48$	$+0,933$	$+0,933$	$0,871$	$0,871$	$0,000$

Eine grobe Abschätzung gibt für den Betrag der durchschnittlichen Differenz der Geschwindigkeitsquadrate aus diesen Zahlen etwa $2,1 \cdot V^2$, demnach wenn Luft von 0° Celsius, 760 mm Druck und $V = 10$ m/sec als die strömende Flüssigkeit angenommen wird, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1,293}{9,81} \cdot 2,1 \cdot 100$ kg als Auftrieb pro Flächeneinheit. Das gäbe etwa 13,8 kg für den Auftrieb pro Flächeneinheit, $13,8 \cdot r \cdot \text{arc } 2\alpha = 9,1 \cdot r$ kg Auftrieb für die Schale pro Breite 1 m. Die Richtung des so gefundenen Auftrieb erhält man aus den Zahlen durch rohe Abschätzung also etwa 5° gegen die y Achse nach links oben gedreht. Die Angriffslinie der Kraft geht natürlich durch den Kreismittelpunkt M .

Die genaue Rechnung auf Grund der aufgestellten Formeln gibt für den ersten Teil des Auftriebes — kurz im Folgenden Druckauftrieb genannt — und dieser ist es ja, der eben roh abgeschätzt wurde

	für die Flächeneinheit	für die Schale pro Breite 1 m
als x Komponente	— 1,1863 kg	— 0,7837 $\cdot r$ kg
als y Komponente	+ 13,5336 „	+ 8,9402 $\cdot r$ „
als Betrag	13,5855 „	+ 8,9745 $\cdot r$ „
als Richtungswinkel γ		
gegen die y Achse	$\gamma = -5^\circ 0',6$	— $5^\circ 0',6$.

In Komponenten in der Strömungsrichtung und senkrecht zu ihr zerlegt, ergibt dieser, von der Saugwirkung in A absehende Druckauftrieb:

	für die Flächeneinheit	für die Schale pro Breite 1 m
in Strömungsrichtung	+ 1,0547 kg	+ 0,6967 $\cdot r$ kg
senkrecht dazu	+ 13,5445 „	+ 8,9474 $\cdot r$ kg.

Die grobe Abschätzung hat demnach ein ganz gutes Resultat ergeben.

Der Gesamtauftrieb mit Einschluß der Saugkraft an der Kante berechnet sich

	für die Flächeneinheit	für die Schale pro Breite 1 m
als x Komponente	— 2,1978 kg	— 1,4518 $\cdot r$ kg
als y Komponente	+ 13,1867 „	+ 8,7111 $\cdot r$ „
als Gesamtbetrag	13,3685 „	8,8311 $\cdot r$ „

Die in A ansaugend wirkende Kraft als Differenz der beiden berechneten, besitzt die Größe

	für die Flächeneinheit	für die Schale pro Breite 1 m
als x Komponente	— 1,0114 kg	— 0,6681 r kg
als y Komponente	— 0,3468 .	— 0,2291 r .
als Betrag	1,0692 .	0,7063 r .
als Richtungswinkel		
gegen die x Achse	18° 55',6	18° 55',6.
	(statt 18° 55',48)	

Die Richtung der Gesamtkraft ist senkrecht zur Strömungsrichtung, die Lage ihrer Angriffslinie durch den Schnittpunkt der Tangente in A mit der unter Winkel γ gegen die y Achse durch den Kreismittelpunkt M gezogenen Geraden bestimmt. Dieser Punkt hat allgemein die Koordinaten:

$$x = -\frac{\sin \gamma}{\cos(\alpha - \gamma)} \cdot r; \quad y = \left(-1 + \frac{\cos \gamma}{\cos(\alpha - \gamma)}\right) r.$$

Die Zahlenrechnung liefert hier

$$x = -0,0900 r; \quad y = +0,0263 r.$$

Die Schnittpunkte der Angriffslinie mit den Koordinatenachsen sind $x_1 = -0,0856 r$; $y_2 = -0,5135 r$. Ihr Schnittpunkt mit dem Schalenbogen besitzt die Abszisse $x_3 = -0,0852 r$, also den Zentriwinkel $\varphi = -4^\circ 53'$; er ist etwa um $\frac{1}{4}$ der Bogenlänge der Halbschale OA von O entfernt, statt um $\frac{1}{2}$ der Bogenlänge, was einer Angriffslinie durch M entspräche. Es ist also hier der Ballast, der den Auftrieb äquilibrieren soll, in der Entfernung von $\frac{3}{8}$ der gesamten Bogenlänge AB von der vorderen Kante anzubringen. Bei größerem Luftstoßwinkel β würde der Ballast immer mehr nach vorn rücken müssen, da die Saugkraft mit $\sin^2 \beta$, der Gesamtauftrieb nur mit $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)$ wächst. Doch erfolgt die Wanderung nach vorn nicht so rasch, wie wenn die Angriffslinie durch den Kreismittelpunkt M ginge. Es geht vielmehr ja die Angriffslinie oberhalb M vorbei.

Wir kommen zur Untersuchung der Verteilung der Geschwindigkeiten und Drucke, sowie des Geschwindigkeits- und Druckgefälles in der Umgebung des singulären Punktes A . Bei Voraussetzung von Atmosphärendruck für die ruhende Luft herrscht negativer Druck nur innerhalb eines Kreises um A vom Radius Δ_0 , der durch

$$\frac{\rho}{2} V^2 \left(\frac{A^2}{\frac{\Delta_0}{r}} + \frac{2AB}{\sqrt{\frac{\Delta_0}{r}}} + B^2 + 2AC + \dots \right) = 10330 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

bestimmt ist. Dabei ist der Sicherheit halber $\sqrt{\frac{\Delta_0}{r}}$ negativ (oder B mit seinem positiven Zahlenwerte) zu nehmen; A, B, C sind die auf Seite 16 gegebenen Ausdrücke.

Unter Beschränkung auf das erste Glied erhalten wir

$$\frac{\Delta_0}{r} = \frac{\rho V^2 \cdot \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta}{10330}}{10330};$$

für $V = 10$ m/sec. im Zahlenbeispiel $\Delta_0 = 0,000\ 010\ 88 r$.

Durch genauere Rechnung unter Berücksichtigung der weiteren Terme erhalten wir

$$\Delta_0 = 0,000\ 011\ 47 r.$$

Ist also die Bogensehne gleich 2 m angenommen, somit r aus $\left(2r - \frac{1}{6}\right) \frac{1}{6} = 1$ als $r = 3 \frac{1}{12}$ m = 3,083 m berechnet, so erhalten wir

$$\Delta_0 = 0,035\ 36 \text{ mm.}$$

Die Maximalgeschwindigkeit außerhalb des Kreises Δ_0 , genau genug durch

$$V \left(\frac{A}{\sqrt{\frac{\Delta_0}{r}}} + B \right)$$

dargestellt, ergibt sich dabei als

$$(385,63 + 10,41) \text{ m/sec} = 396,04 \text{ m/sec.}$$

Das maximale Geschwindigkeitsgefälle außerhalb des Kreises Δ_0 , genau genug als $V \frac{A}{2r \left(\sqrt{\frac{\Delta_0}{r}} \right)^3}$ angenommen, wird hier

$10^{6.5,452}$ m/sec pro m, oder $10^{3.5,452}$ m/sec für einen mm. Freilich gilt diese Zahl nur für das Gefälle in unmittelbarster Nähe des Kreises Δ_0 , und behält diesen Betrag wirklich nur $1/100$ mm weit bei. Jedenfalls konstatieren wir, daß die auftretenden Geschwindigkeitsgefälle auch außerhalb des Kreises Δ_0 enorme Beträge erreichen.

Wollen wir nur die negativen, physikalisch unzulässigen Drucke vermeiden, und gleichzeitig das Strömungsbild, und damit die Druckverhältnisse in der Nähe des gefährlichen Punktes A möglichst wenig ändern, damit die früheren Formeln noch verwendbar bleiben, so werden wir die Kante parabolisch, nämlich so wie die Strömungslinien bei A verlaufen, abrunden. (s. Fig. 1). Also durch eine Parabel vom Parameter $\varepsilon = 2 \Delta_0$, A als Brennpunkt, die Bogentangente als Achse. Der Zwischenraum zwischen dieser und dem innerhalb gelegenen Kreisbogen ist beiderseits mit Material auszufüllen. Wir haben dabei die Parabel so weit zu erstrecken, daß in der wegen der hohen Geschwindigkeiten und Druckverluste für Änderungen sehr empfindlichen Nähe von A wirklich die Strömungslinie verfolgt, also die Strömung durchaus nicht gestört wird. Die Saugwirkung bei A bleibt dann gemäß der Betrachtung in Paragraph IV erhalten. Sind wir aus der gefährlichen Nähe von A herausgekommen, so können wir die Parabel — die ja zudem weiterhin gar nicht mehr die genaue Stromlinie ist, vielmehr entfernt sich letztere weniger vom Kreisbogen — allmählig verlassen, und die neue Grenzlinie sich wieder an den Kreisbogen anschmiegen lassen, nach einer weiteren Strecke sogar durch den Kreisbogen ersetzen. Diese kleine Änderung ist dann sicherlich für die Verteilung von Geschwindigkeiten und Drucken von ganz unwesentlicher Bedeutung; sie würde bedenklich nur nahe am Punkte A . Fraglich freilich bleibt, wie weit die Parabel wirklich genau zu verfolgen ist, und wie groß

weiterhin die Maximaldicke der Anschwellung zu wählen ist. Mir scheint vollste Sicherheit gegeben zu sein, wenn man die Parabel exakt bis zur Ordinate gleich dem doppelten Parameter $= 4 \Delta_0$, also zur Abszisse (vom Scheitel) $4 \Delta_0$ verfolgt, und dann allmählig ablenkend die Ausgleichungskurve noch bis zu einer doppelt so großen Ordinate $= 8 \Delta_0$ als Maximalhöhe ansteigen läßt (s. Fig. 2). Die größte Dicke der Anschwellung betrage dann $16 \Delta_0$. Praktisch aber glaube ich, daß es vollständig genügt, die Parabel bis zur Ordinate des Brennpunktes A , deren Größe $2 \Delta_0$ ist, also bis zur Abszisse (vom Scheitel) Δ_0 genau zu verfolgen, und dann durch allmähliges Ablenken etwa als Maximalordinate, $4 \Delta_0$, erreichend (vielleicht bei der Abszisse $8-10 \Delta_0$) die Berührung und das Verschmelzen der Ausgleichungskurve mit dem Kreisbogen etwa bei der Abszisse $25-30 \Delta_0$ erfolgen zu lassen. In diesem, durch die Figur dargestellten Falle wäre die Maximaldicke der Anschwellung $8 \Delta_0$. Mehr als eine Schätzung stellen freilich diese Dickenannahmen $16 \Delta_0$ und $8 \Delta_0$ nicht vor; doch möchten sie wohl praktisch einen natürlichen Spielraum charakterisieren.

Für doppelte Geschwindigkeit, $V = 20$ m/sec würde natürlich Δ_0 zu vervierfachen sein.



Fig. 1.

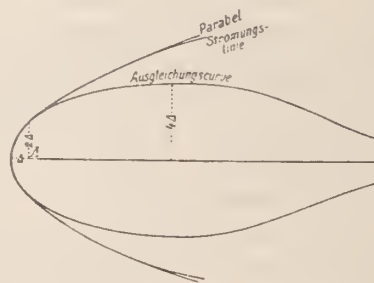


Fig. 2.

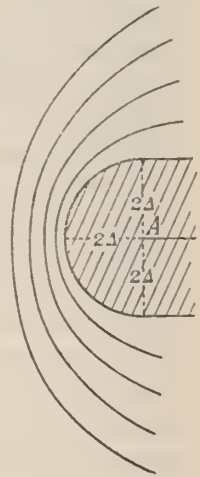


Fig. 3.

Wir setzten die Abstumpfung, um die Saugwirkung nach Verfestigung der neuen Grenze gemäß Paragraph IV berechnen zu können, parabolisch in Stromlinienform voraus. Ganz anders wird dem Anschein nach die Sache, wenn wir die Form der Abrundung anders, z. B. als Halbkreis um A mit den Tangenten in seinen Endpunkten parallel zur Bogentangente voraussetzen. In diesem Falle werden (s. Fig. 3) die Stromlinien, die ja eigentlich parabolisch verlaufen, durch den um das Doppelte zu weit ausspringenden Kreis (verglichen mit der Parabel von gleicher Ordinate in A) vorn zusammengepreßt; dadurch wird vorn eine bedeutend größere Geschwindigkeit — also auch bedeutend größere Möglichkeit einer Saugwirkung, wie es scheint — zu erwarten sein. Dennoch braucht jetzt aus der größeren Geschwindigkeit keine größere Gesamtsaugwirkung in Richtung der Bogentangente zu resultieren. Denn die dafür anzusetzende Integration über die Kreisgrenze gäbe unter der Voraussetzung der früheren Geschwindigkeitsverteilung den Ansatz

$$\frac{1}{2} \varrho V^2 \int \frac{A^2}{\frac{A}{r}} dq = \frac{1}{2} \varrho V^2 \int \frac{A^2}{\frac{A}{r}} d\Delta \sin \varphi,$$

also da Δ jetzt konstant und die Grenzen von $\varphi - \frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ sind:

$$\frac{1}{2} \varrho V^2 \cdot A^2 \cdot r \cdot 2,$$

statt wie früher bei der Integration über die Parabel

$$\frac{1}{2} \varrho V^2 \cdot A^2 \cdot r \cdot 2\pi.$$

Die Saugwirkung im ganzen wäre also bei der alten Druckverteilung im Verhältnis $\frac{1}{\pi}$ kleiner; es ist begreiflich, daß in Folge der teilweise bis aufs Doppelte gehenden Verengung der Stromfäden und Vergrößerung der Geschwindigkeit, die bis zur Vervierfachung der Saugkräfte führen kann, der Faktor $\frac{1}{\pi}$

wieder wett gemacht und daher jener Betrag wieder erreicht werden kann. Man kann aber sicherer auch so schließen: Da die von der Saugwirkung absehende Auftriebskraft (der „Druckauftrieb“) von der Umgebung von A , wie früher gezeigt, nur einen kleinen Beitrag erhält, andererseits die Störung der Druckverhältnisse in größeren Entfernungen von A durch die beliebig geformte, aber kleine, Abrundung bei A gering sein wird, erfährt der ganze Druckauftrieb nur eine unwesentliche Änderung in Größe und Richtung. Dieser aber setzt sich mit der Saugwirkung, deren Richtung gegeben, nämlich immer noch die Bogentangente, ist, zum Gesamtauftrieb zusammen, dessen Richtung nach dem Satze von der lebendigen Kraft immer noch senkrecht zur Strömungsrichtung ist. Daraus folgt, daß auch die Größen der beiden letzteren Kräfte keine wesentliche Änderung erfahren, wie auch die Form der Abrundung gewählt worden ist, sofern sie nur klein genug ist. Zu bemerken ist, daß eine Parabel mit ihrer veränderlichen Krümmung sich im allgemeinen besser näherungsweise zur Darstellung irgend einer beliebig gewählten Abrundungskurve eignen wird, als etwa ein Halbkreis mit seiner konstanten Krümmung.

Übrigens verweise ich in bezug auf eine weitere Untersuchung der Wirkung einer Abrundung auf die im letzten Paragraphen erwähnten, künftig zu behandelnden Beispiele.

Nehmen wir eine Abrundung mit $\Delta_1 = 0,000\ 2r$ vor, so ist im Zahlenbeispiel ($V = 10$ m/sec)

$$\Delta_1 = 0,6167 \text{ mm.}$$

Die Maximaldicke der Anschwellung wird nach den beiden Schätzungen $8\Delta_1$ und $16\Delta_1$ als 4,93 mm und 9,86 mm geschätzt. Der maximale Druckverlust im verbleibenden Außenraum ist 696,40 kg/m², oder zirka $\frac{1}{15}$ Atmosphäre. Die Maximalgeschwindigkeit wird $(92,35 + 10,41)$ m/sec = 102,76 m/sec; das maximale Geschwindigkeitsgefälle $10^4 \cdot 7,488$ m/sec pro m; also 74,88 m/sec für einen Millimeter.

Weiter sei $\Delta_2 = 0,001 r$

$$\Delta_2 = 3,083 \text{ mm.}$$

Maximaldicke der Anschwellung 24,67 mm oder 49,33 mm.

Max. Druckverlust: $176,73 \text{ kg/m}^2 = \text{zirka } \frac{1}{58} \text{ Atmosphäre.}$

Max. Geschwindigkeit: $(41,30 + 10,41) \text{ m/sec} = 51,71 \text{ m/sec.}$

Max. Gefälle: 6698 m/sec pro m; also 6,7 m/sec für einen mm.

Endlich sei $\Delta_3 = 0,005 r$

$$\Delta_3 = 15,4 \text{ mm.}$$

Maximaldicke der Anschwellung 123,33 mm oder 246,67 mm
oder $\frac{1}{16}$ bis $\frac{1}{8}$ der Sehne 2 m.

Max. Druckverlust: $55,48 \text{ kg/m}^2 = \text{zirka } \frac{1}{186} \text{ Atmosphäre.}$

Max. Geschwindigkeit: $(18,47 + 10,41) \text{ m/sec} = 28,88 \text{ m/sec.}$

Max. Gefälle: 599 m/sec pro m; also 0,6 m/sec für einen mm.

Für verdoppeltes V ($= 20 \text{ m/sec}$) hat man den maximalen Druckverlust zu vervierfachen, die Maximalgeschwindigkeit und das Maximalgefälle zu verdoppeln, wenn die Δ bleiben. Will man das Maximalgefälle nicht ändern, so hat man die Δ im Verhältnis $\sqrt[3]{4} = 1,587$ zu vergrößern.

Für verdoppeltes r hat man die Δ zu verdoppeln, dann bleiben die Zahlen für Druckverlust und Geschwindigkeit; das Gefälle wird halb so groß. Oder man beläßt die Δ , dann wird das Gefälle im Verhältnis $\sqrt[3]{2} = 1,414$ größer.

Nimmt man die Abrundung in der Form der früher gezeichneten Figur, und mit Δ_3 vor, so würde die größte Dicke der Anschwellung, $12\frac{1}{3} \text{ cm}$ betragend, etwa 12—16 cm vom Ende entfernt erreicht. Der Anschluß der Ausgleichungskurve an den Kreisbogen, also das angeschmiegte Ende der Schwellung, würde 40—50 cm vom Ende entfernt, also rund in $\frac{1}{4}$ der Gesamtbogenlänge der Schale von A ab gerechnet liegen.



Fig. 4.

Die angegebenen Zahlen zeigen, daß schon durch verhältnismäßig äußerst geringe Abrundungen nicht nur ein negativer Flüssigkeitsdruck vermieden, sondern sogar die Druckverminderungen auf ein geringes Maß beschränkt werden können. Dadurch ist auch die Auffassung des Verhaltens der Luft als

einer im wesentlichen inkompressibeln Flüssigkeit gerechtfertigt. Dagegen tritt bei geringer Abrundung ein enorm großes Geschwindigkeitsgefälle immer noch auf. Selbst bei der letzten, größten Anschwellung beträgt die Geschwindigkeitsänderung innerhalb 1 cm von der Grenze ab 4,05 m/sec; innerhalb eines mm von der Grenze ab 0,6 m/sec. Bei $V = 20$ m/sec verdoppeln sich noch diese Zahlen. Bei den kleineren Abrundungen wächst das Gefälle noch in der $\frac{3}{2}$ ten Potenz.

Obwohl also die Geschwindigkeiten selbst (wenigstens bei der größten Abrundung) in verhältnismäßig nicht zu weiten Grenzen sich bewegen, läßt sich doch wegen dieser großen Gefälle sicher voraussagen, daß wenigstens bei geringeren Abrundungen die Wirkung der Kante A durch die innere Flüssigkeitsreibung sehr wirksam modifiziert werden wird. Ein so großes Geschwindigkeitsgefälle wird selbst bei sehr geringem Koeffizienten der inneren Reibung große Reibungskräfte hervorrufen und dadurch die auftretenden, an sich gar nicht unzulässig großen Geschwindigkeiten in der Nähe der Grenze bedeutend verringern. (Wie dabei die Energie verbraucht wird, zur Wärmebildung oder zu Wirbelbildungen, bleibe dahingestellt.) Wird etwa so die Geschwindigkeit an der Grenze auf die Hälfte verringert, so werden wir die Saugwirkung der Kante A auf $\frac{1}{4}$ verringert ansehen. Im Falle aber z. B. einer Abrundung $A_1 = 0,000 2r$, der ein Maximalgefälle von 74880 m/sec:m (wenigstens ein Stückchen weit) entspricht, werden wir die Geschwindigkeit auf einen viel geringeren Bruchteil verringert einschätzen; die Saugwirkung bei A wird dann so gut wie erlöschen. Selbst bei der größten betrachteten Abrundung A_3 werden wir uns nicht wundern, eine immer noch merkliche Verringerung der Saugkraft zu finden. Dagegen werden an anderen Stellen als A (über B wird nachher noch Rechenschaft gegeben), die Wirkungen der inneren Reibung nicht beträchtlich sein, obwohl z. B. die Geschwindigkeiten an der oberen Schale auch sonst nicht so sehr viel kleiner werden, als an der Anschwellung; bei -18° z. B. 21,6 m/sec gegen 28,9 m/sec

an der Abrundung. Denn es ist eben das Geschwindigkeitsgefälle nirgends auch nur annähernd so groß, wie schon ein Blick auf die Tabelle 1 zeigt.

Der Erfolg ist somit, extrem gesprochen, daß im Falle der fehlenden oder gar zu kleinen Abrundung die auf die Schale ausgeübte Auftriebskraft durch den Druckauftrieb allein gegeben ist, da die Saugwirkung fortfällt. Die Auftriebskraft steht nicht mehr senkrecht zur Strömungsrichtung, sondern ist unter $(\beta - \gamma)$, im Beispiel unter $9^\circ 27',7 - 5^\circ 0',6 = 4^\circ 27',1$ gegen diese Senkrechte in Richtung der Strömung gedreht. Es tritt also, wenn umgekehrt die Schale gegen die ruhende Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit V bewegt wird, eine retardierende Kraft vom Betrage

$$\pi \rho V^2 \frac{\sin \frac{a}{2}}{\arcsin \frac{a}{2}} \cos^3 \frac{a}{2} \sin^2 \beta \cos (a - \beta)$$

pro Flächeneinheit, im Zahlenbeispiel vom Betrag 1,0547 kg pro Flächeneinheit, $0,6967 \cdot r$ kg für je einen Meter Schalenbreite auf, während die zur Strömungsrichtung senkrechte Komponente des zum Ganzen gewordenen Druckauftriebs 13,5445 kg pro Flächeneinheit (Quadratmeter), $8,9474 r$ kg pro m Schalenbreite geworden ist; die Hubkraft hat sich sogar etwas erhöht. Zur Überwindung der in der Bewegungsrichtung entgegenwirkenden Kraft ist natürlich beständiger Arbeitsaufwand der Flugmaschine erforderlich.

Daß eine solche retardierende Kraft überhaupt auftreten kann, erklärt sich daraus, daß die berücksichtigte innere Reibung die Anwendung des Satzes von der lebendigen Kraft ausschließt.

Gehen wir vom extremen Fall des Erlöschens der Saugwirkung zum Falle einer Verringerung derselben durch die innere Reibung über, so übersehen wir, daß die retardierende Kraft in gleichem Maße abnimmt. Sind, wie es im Falle Δ_3 plausibel scheint, die Wirkungen der inneren Reibung mit dem

Gefälle klein geworden, so ist eben auch die zu überwindende retardierende Kraft klein geworden.

Als den Zweck des Anbringens einer Anschwellung an der Vorderkante betrachten wir im hydrodynamischen Sinne nicht nur die Vermeidung negativer Drucke — diese würden ja durch die innere Reibung von selbst vermieden — auch nicht unmittelbar (mittelbar wohl) die Vermeidung der Entstehung von Wirbeln — obwohl die Wirkung der inneren Reibung sich wenigstens zum Teil gerade in dieser dokumentieren wird und die Wirbelbildung deshalb im allgemeinen sicher nicht gänzlich vermieden werden kann. (Doch findet sich bei Ahlborn¹⁾ ein einziges Strömungsbild, das so gut wie ganz wirbelfrei ist; es scheint das der Fall der Strömungssymmetrie, den ich 1902 behandelt habe, zu sein, ein Fall, wo beide Kanten wie hier B wirken und größeres Gefälle sehr leicht zu vermeiden ist.) Sondern als direkten Zweck betrachten wir die durch Verringerung der inneren Reibungswirkungen in der Nähe der Kante erzielte möglichst vollständige Erhaltung der Saugwirkung von A und damit die möglichste Vermeidung der retardierenden Kraft, die den Energievorrat des Fliegers aufzehren hilft.

Wir schließen vorläufig, daß es vorteilhaft sein wird, der Anschwellung eine Größe von mindestens dem zuletzt aufgestellten Betrage A_3 zu geben. Dann dürfte wohl die Saugkraft der Hauptsache nach erhalten bleiben und es ist dann nur die durch die äußere Reibung von Flüssigkeit und Fläche hervorgerufene retardierende Kraft und die durch die Bildung der von den spitzen Flügel- oder schmalen Platten- und Schalenenden ausstrahlenden Wirbelfäden veranlaßte noch zu überwinden. Die Abschätzung dieser Kräfte, insbesondere der zweiten mit Hilfe der Diskontinuitätstheorie, für die im vorigen ja die Stärke des Wirbels bekannt ist, wäre von dem gewonnenen Strömungsbilde ausgehend wohl möglich, wird aber in dieser Arbeit nicht mehr unternommen.

¹⁾ Über den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes. 1902, Tafel XV, Fig. 67 Mitte.

Der Größenordnung nach stimmt das Verhältnis der Anschwellungsdicke zum Radius bei den Vögeln wohl einigermaßen mit den hier errechneten Zahlen überein.

Endlich muß noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß auch in der Nähe des Punktes B ein großes, in B selbst ein unendliches Geschwindigkeitsgefälle vorhanden ist, obwohl die Geschwindigkeit dort endlich ist. Das Gefälle wird dort

$$\left(\text{mit } \sqrt{\frac{\Delta}{r}} \text{ wachsend, nicht wie in } A \text{ mit } \left(\sqrt{\frac{\Delta}{r}}\right)^3\right) \text{ durch}$$

$$V \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \frac{3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}{2 \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{1}{2r \sqrt{\frac{\Delta}{r}}} \text{ gegeben.}$$

Für unser Zahlenbeispiel und die Annahme

$$\Delta = 0,000\ 01\ r = 0,0308\ \text{mm}$$

ergibt dies als Gefälle 494 m/sec pro m oder 0,5 m/sec für einen Millimeter. Man erkennt, selbst bei dieser außerordentlich geringen Abrundung von $\Delta = \frac{1}{32}$ mm, die praktisch von selbst unvermeidlich ist, ist das Maximalgefälle bei B kleiner als das bei der größten oben berechneten Abrundung $\Delta_3 = 15,4$ mm bei A . Wäre aber selbst dies Gefälle größer, so würde trotzdem die innere Reibung keine Bedeutung gewinnen, da ja die Geschwindigkeiten bei B so wenig von der normalen 10 m/sec abweichen, daß nur kleine Änderungen und damit kleine Druckänderungen zu erwarten sind. Demnach würde die kleine Druckänderung an der winzigen Breite der Abrundung gar keine wesentliche Kraftwirkung, also Störung der Auftriebsverhältnisse erzeugen können.

Umgekehrt liegt es sogar im Interesse des Fliegers, die Hinterkante möglichst scharf zu gestalten, um die physikalische Auszeichnung dieser Lösung gegenüber allen anderen möglichst stark zu betonen und so das dargestellte Strömungsbild zu einem möglichst stabilen zu gestalten.

Es käme nun die Aufgabe an uns heran, das Netz der Stromlinien und der Äquipotentiallinien genauer zu berechnen und zu zeichnen. Dies soll künftig geschehen. Man wird etwa für eine größere Anzahl geeigneter komplexer Werte von ψ oder t sowohl z als auch W berechnen und zwischen den so gefundenen Punkten z , die auf Stromlinien und Äquipotentiallinien mit gebrochenen Parameterzahlen liegen, die Strom- und Potentiallinien mit ganzen Parameterzahlen interpolieren. Es wäre nicht schwer, sich so ein sehr genaues Bild der Strömung zu verschaffen. nur gehört zu den betreffenden Rechnungen immerhin ein gewisser Zeitaufwand.

Besonderes Interesse böte natürlich die Verfolgung der gespalteten Stromlinie, für welche W reell ist. Man hätte am einfachsten zunächst die zugehörige transzendente Kurve der Ebene ζ und daraus die Kurve der Ebene t punktweise zu berechnen. Diese Berechnung wäre auch für alle anderen Strömungsprobleme, wie die im letzten Paragraphen angeführten analog durchzuführen; nur hängt die Kurve noch vom Verhältnis der drei Konstanten $c_1 : c_2 : c$ ab. Eine solche Berechnung für die symmetrische Strömung habe ich 1902 durchgeführt. Die Kurve in t ist dann leicht punktweise in die gesuchte gespaltene Strömungskurve der z Ebene zu transformieren.

Da übrigens der Spaltungspunkt und die Geschwindigkeiten an der Schale bekannt sind, kann man wenigstens eine ungefähre Vorstellung des Verlaufes der Stromlinien in der Nähe der Schale gewinnen.

VI. Ebene Platte und Schale unter verschiedenen Luftstosswinkeln β .

Der Fall $\beta = 0$, also der Symmetrie der Strömung in bezug auf die Schale, ist der einzige, in dem auch am Punkte A keine unendliche Geschwindigkeit auftritt. Der vordere Spaltungspunkt, der sonst ja Stagnationspunkt ist, rückt nach A . Die beiden Eigenschaften der zusammenrückenden Punkte, die O und ∞ als Geschwindigkeit besaßen, machen das Auftreten

einer endlichen Geschwindigkeit nach dem Zusammenrücken begreiflich. In der Tat ist das Resultat dieselbe endliche Geschwindigkeit, wie sie im Punkte B vorhanden ist; die y Achse ist Symmetrieachse des ganzen Strömungsbildes. Die innere Reibung würde in diesem mathematisch, aber freilich nicht physikalisch exakt zu verwirklichenden Falle keine so wichtige Rolle wie oben spielen. Ich habe diesen Fall unter anderen 1902 behandelt.

Der Fall $\alpha = 0$, $r = \infty$; $2ra = 4r \sin \frac{\alpha}{2} = 4r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = L$ führt auf die ebene Platte von der Breite $AB = L$. Die Formeln nehmen die folgende spezielle Form an:

$$W = V \left[\frac{t \cos \beta + \sin \beta}{1 + t^2} + \sin \beta \cdot \operatorname{arctg} t \right]$$

$$= \frac{1}{2} V \left[\sin (\psi + \beta) + \sin \beta \cdot \psi \right]$$

$$z' = \frac{1}{L} \left[\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\psi}{2} \right] = \frac{2}{L \sin \psi}$$

$$z = \frac{L}{2} \sin \psi = \frac{t}{1 + t^2} \cdot L.$$

Winkel δ ist gleich 45° . Die Geschwindigkeiten sind:

bei A gleich
$$-V \left[\frac{\sin \beta}{\sqrt{\frac{d}{L}}} - \cos \beta - \frac{5}{2} \sin \beta \sqrt{\frac{d}{L}} + \dots \right]$$

bei B gleich
$$V \cos \beta \left[1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \sqrt{\frac{d}{L}} + \dots \right]$$

bei O_+ oben gleich
$$V \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ - \beta) \left[1 - \frac{z}{L} \sqrt{2} \frac{\sin \beta}{\cos(45^\circ - \beta)} \dots \right]$$

bei O unten gleich
$$V \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ - \beta) \left[1 + \frac{z}{L} \sqrt{2} \frac{\sin \beta}{\sin(45^\circ - \beta)} \dots \right].$$

Der Spaltungspunkt gehört zu $\psi = -\frac{\pi}{2} - 2\beta$, liegt also bei $z = -\frac{L}{2} \cos 2\beta$.

Der Gesamtauftrieb, senkrecht zur Strömung, ist pro Flächeneinheit $\pi \rho V^2 \sin \beta$.

Der von der Saugkraft gelieferte in $-x$ Richtung wirkende Teil derselben $\pi \rho V^2 \sin^2 \beta$;

dessen Komponente in der Strömungsrichtung $-\pi \rho V^2 \sin^2 \beta \cos \beta$
senkrecht dazu $+\pi \rho V^2 \sin^3 \beta$.

Der von der Saugwirkung absehende Druckauftrieb wirkt senkrecht zur Platte; seine Größe ist $\pi \rho V^2 \sin \beta \cos \beta$; seine Komponenten in der Stromrichtung und senkrecht dazu sind $+\pi \rho V^2 \sin^2 \beta \cos \beta$ und $\pi \rho V^2 \sin \beta \cos^2 \beta$.

Ist die Saugwirkung wegen innerer Reibung ganz zu vernachlässigen, so ist die retardierende Kraft pro Flächeneinheit $\pi \rho V^2 \sin^2 \beta \cos \beta$; der Druckauftrieb stellt den Gesamtauftrieb dar, und dieser ist aus der Senkrechten zur Strömung um Winkel β nach der Strömungsrichtung hin in die Richtung der Senkrechten zur Platte gedreht. Bleibt trotz der inneren Reibung (infolge einer Abrundung an der Vorderkante) ein Teil der Saugwirkung bei A bestehen, so fällt die Auftriebsrichtung zwischen die Plattennormale und die Strömungsnormale.

Sehr einfach gestaltet sich das Resultat für den Angriffspunkt des Auftriebs an der Platte, und zwar bleibt dies Resultat auch bei gänzlichem oder teilweisem Verschwinden der Saugwirkung bestehen. Es ist nämlich der Angriffspunkt des Druckauftriebs an der Platte gleichzeitig Angriffspunkt des Gesamtauftriebs, da die Saugkraft in A die Richtung AB der Platte selbst hat. Nach Seite 29 ergibt sich der Schnittpunkt beider Kräfte durch $x = -r \frac{\sin \gamma}{\cos(\alpha - \gamma)}$; $y = -r \left(1 - \frac{\cos \gamma}{\cos(\alpha - \gamma)}\right)$. Hier wird α und γ Null, und y daher Null. Dagegen wird x durch Grenzübergang aus $\lim \frac{r \sin \gamma}{\cos(\alpha - \gamma)} = \lim (r \operatorname{tg} \gamma)$, oder, da

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \sin \beta - \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta \cos \alpha}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \cos \beta + \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta \sin \alpha} \text{ ist,}$$

$$x = \lim_{\substack{\alpha=0 \\ 2r\alpha=L}} r \cdot \frac{\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) \sin \beta - \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \beta \cos \alpha \right]}{\sin \beta \cos \beta} = -\frac{L}{4}.$$

Oder: Der Angriffspunkt des Auftriebes liegt bei der ebenen Platte stets um $\frac{1}{4}$ der Breite L von der Vorderkante entfernt, teilt also die Platte im Verhältnis 1:3. Er ist unabhängig vom Luftstoßwinkel β , und auch unabhängig von Verringerung oder Erlöschen der Saugwirkung.

In der folgenden Tabelle sind Spaltungsstelle, Gesamtauftrieb, Saugkraft, endlich die Geschwindigkeit des Abströmens in B für $\beta = 7\frac{1}{2}^\circ, 15^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ; 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 165^\circ, 172\frac{1}{2}^\circ, 180^\circ$ angegeben. Es wäre sehr wünschenswert, wenigstens für die kleineren Luftstoßwinkel einige zugehörige Strömungsbilder genau darzustellen; ich hoffe, daß solche nachträglich hergestellt werden können.

Es sind hier alle Fälle von $\beta = 0$ bis $\beta = 180^\circ$ in Betracht gezogen. Vermehrung von β um 180° ist äquivalent mit einem Vorzeichenwechsel in V_1 und V_2 , also bloßer Umkehrung der Strömungsrichtung. Die Fälle von $\beta = 90^\circ$ ab, geben das Spiegelbild des Strömungsbildes, das zum Supplementwinkel gehört, in bezug auf die Strömungsnormale; zu beachten ist, daß das Abströmen der Flüssigkeit von der Kante B mit endlicher Geschwindigkeit durch ein Anströmen an die Kante B mit derselben Geschwindigkeit ersetzt ist.

Jede Lösung des Strömungsproblems gilt vorläufig für zwei verschiedene Strömungen, nämlich die beiden nur im Vorzeichen der Geschwindigkeiten verschiedenen. Umgekehrt läßt jede gegebene Geschwindigkeit im Unendlichen vorläufig zwei Lösungen der gefundenen Art für das Strömungsbild zu, je nachdem nämlich die eine oder die andere Kante, B oder A , endliche Geschwindigkeit aufweisen sollen. Das erste Strömungs-

bild gehört zum Winkel β , das andere wird aus dem zu $180^\circ - \beta$ gehörigen durch eine Spiegelung an der Plattennormale erhalten.

Tabelle 2.

Luft- stoß- winkel β	Spaltungspunkt	Gesamt- auftrieb kg für die Flächeneinheit	Saug- wirkung	Geschwindig- keit an der Hinterkante B
0	$-\frac{L}{2}$ (Kante A)	0	0	V
$7\frac{1}{2}^\circ$	$-\frac{L}{2} \cdot 0,966$ unten	$0,1305 \cdot \pi Q V^2$	$0,017 \cdot \pi Q V^2$	$0,9915 V$
15°	$-\frac{L}{2} \cdot 0,866$	0,2588	0,067	0,966
30°	$-\frac{L}{2} \cdot 0,500$	0,5000	0,250	0,866
45°	$-\frac{L}{2} \cdot 0$ (Mitte unt.)	0,707	0,500	0,707
60°	$+\frac{L}{2} \cdot 0,500$	0,866	0,750	0,500
90°	$+\frac{L}{2}$ (Kante B)	1,000	1,000	Null
120°	$+\frac{L}{2} \cdot 0,5$ oben	0,866	0,750	$-0,500$
135°	(Mitte oben)	0,707	0,500	$-0,707$
150°	$-\frac{L}{2} \cdot 0,500$	0,500	0,250	$-0,866$
165°	$-\frac{L}{2} \cdot 0,866$	0,2558	0,067	$-0,966$
$172\frac{1}{2}^\circ$	$-\frac{L}{2} \cdot 0,966$	0,1305	0,017	$-0,9915$
180°	$-\frac{L}{2}$ (Kante A)	0	0	$-1,000$

Natürlich ist ja von vorneherein nicht anzunehmen, daß für große Luftstoßwinkel β , größer als 30° oder gar als 45° , das erhaltene Strömungsbild noch eine gute Annäherung geben wird. Der Wert der Berechnungen dürfte sich höchstens bis $\beta < 30^\circ$ erstrecken. Das sind ja praktisch die wichtigsten Fälle. Und dieser letzte Umstand hängt wohl auch damit zu-

sammen, daß eine Strömung mit Geschwindigkeitspotential, d. h. ohne wesentliche Wirbelbildung außer an den Seitenenden, sich praktisch als stabilste Strömung, und deswegen als am vorteilhaftesten benutzbar erweisen mag.

Die angegebenen Geschwindigkeiten in B sind positiv bezeichnet, wenn ein Abströmen stattfindet, negativ für das Anströmen. Für $\beta = 0$ und $\beta = 180^\circ$ tritt an beiden Kanten endliche Geschwindigkeit, an der einen Kante Anströmen, an der anderen Abströmen auf. Davon abgesehen zeigt von den beiden Lösungen, die für eine gegebene Geschwindigkeit im Unendlichen sich angeben lassen, stets die eine ein Abströmen, die andere ein Anströmen an der Kante endlicher Geschwindigkeit.

Der Gesamtauftrieb ist für $\beta < 180^\circ$ stets positiv, d. h. gegen die Strömungsrichtung um 90° im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers gedreht. Die Umkehrung der Geschwindigkeit ($180^\circ + \beta$ statt β) kehrt zugleich das Zeichen des Auftriebs um, so daß seine wirkliche Richtung, wie natürlich, erhalten bleibt. Die Komponente der Saugkraft in der Strömungsrichtung kehrt von $\beta = 90^\circ$ ab (also für die Lösungen mit Anströmen) ihr Vorzeichen um; die innere Reibung würde dann bei Bewegung der Platte in der ruhenden Flüssigkeit eine accelerierende, statt retardierende Kraft zur Folge haben, was die praktische Unzulässigkeit dieser Lösungen mit Anströmen klar legt. Es bleibt nur eine wirklich brauchbare Lösung übrig.

Wir gehen zur Diskussion des Verhaltens der Kreisschale unter verschiedenen Luftstoßwinkeln über, und behalten das in Paragraph V untersuchte Beispiel, mit Pfeil gleich $\frac{1}{12}$ der Sehne, $\alpha = 18^\circ 55',_{48}$ bei. V ist wieder gleich 10 m/sec gegeben gedacht; β soll dagegen nach einander die Werte 0° , $7\frac{1}{2}^\circ$; $\frac{\alpha}{2} = 9^\circ 27',_{74}$; 15° ; $\alpha = 18^\circ 55',_{48}$; 30° ; $\delta = 40^\circ 16',_{13}$; 60° ; $90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 80^\circ 32',_{26}$; 90° ; $90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 99^\circ 27',_{74}$; $90^\circ + \alpha = 108^\circ 55',_{48}$; 120° ; $90^\circ + \delta = 130^\circ 16',_{13}$; $180^\circ - \delta = 139^\circ 43',_{87}$; 150° ; 165° ; $180^\circ - \frac{\alpha}{2} = 170^\circ 32',_{26}$; $172\frac{1}{2}^\circ$; 180° annehmen. Es ergibt sich für den Spaltungspunkt, den Gesamtauftrieb pro Flächeneinheit, die Saugkraft, und die Geschwindigkeit in B die folgende Tabelle:

Tabelle 3.

I Luftstoßwinkel β zwischen Sehneichtung und Strömungs- richtung	II Gesamt- auftrieb pro m ²	III Druckauftrieb pro m ² Komponente senkrecht zur Strömung	IV Druckauftrieb pro m ² Komponente in Strömungs- richtung	V Saugauftrieb pro m ²
— 15 ⁰	— 3,978 kg	— 2,499 kg	+ 2,199 kg	2,650 kg
— 10 ⁰ 19', ₅	— 0,621	0	+ 1,109	1,271
— 9 ⁰ 27', ₇₄	0	+ 0,508	+ 0,941	1,069
— 7 ⁰ 30'	+ 1,411	+ 1,711	+ 0,604	0,674
— 5 ⁰	+ 3,207	+ 3,329	+ 0,275	0,300
— 2 ⁰ 30'	+ 4,996	+ 5,024	+ 0,070	0,075
0 ⁰	+ 6,776	+ 6,776	+ 0	0
+ 2 ⁰ 30'	+ 8,544	+ 8,565	+ 0,072	0,075
+ 5 ⁰	+ 10,294	+ 10,367	+ 0,292	0,300
+ 7 ⁰ 30'	+ 12,025	+ 12,159	+ 0,661	0,674
+ 9 ⁰ 27', ₇₄	+ 13,368	+ 13,544	+ 1,055	1,069
+ 15 ⁰	+ 17,069	+ 17,250	+ 2,644	2,650
+ 18 ⁰ 55', ₄₈	+ 19,597	+ 19,597	+ 4,161	4,161
+ 30 ⁰	+ 26,198	+ 24,298	+ 9,706	9,890
+ 40 ⁰ 16', ₁₃	+ 31,451	+ 25,436	+ 15,395	16,528
+ 49 ⁰ 43', ₈₇	+ 35,404	+ 23,608	+ 19,782	23,032
+ 60 ⁰	+ 38,607	+ 19,112	+ 22,367	29,670
+ 71 ⁰ 4', ₅₂	+ 40,659	+ 12,707	+ 21,720	35,399
+ 80 ⁰ 32', ₂₆	+ 41,219	+ 7,360	+ 18,299	38,490
+ 90 ⁰	+ 40,659	+ 3,237	+ 12,830	39,560
+ 99 ⁰ 27', ₇₄	+ 38,991	+ 1,025	+ 6,328	38,490
+ 108 ⁰ 55', ₄₈	+ 36,263	+ 0,865	0	35,398
+ 120 ⁰	+ 31,823	+ 3,388	— 4,608	29,670
+ 130 ⁰ 16', ₁₃	+ 26,643	+ 5,191	— 8,383	23,032
+ 139 ⁰ 43', ₈₇	+ 21,110	+ 6,914	— 8,465	16,528
+ 150 ⁰	+ 14,461	+ 7,005	— 6,498	9,890
+ 161 ⁰ 4', ₅₂	+ 6,776	+ 4,223	— 3,286	4,161
+ 165 ⁰	+ 3,978	+ 2,499	— 2,199	2,650
+ 167 ⁰	+ 2,543	+ 1,485	— 1,699	2,002
+ 168 ⁰	+ 1,825	+ 0,946	— 1,467	1,710
+ 169 ⁰ 40', ₅	+ 0,621	0	— 1,109	1,271
+ 170 ⁰ 32', ₂₆	0	— 0,508	— 0,941	1,069
+ 172 ⁰ 30'	— 1,411	— 1,711	— 0,604	0,674
+ 175 ⁰	— 3,207	— 3,329	— 0,275	0,300
+ 177 ⁰ 30'	— 4,996	— 5,024	— 0,070	0,075
+ 180 ⁰	— 6,776	— 6,776	0	0

Über eine zweidimensionale Strömung.

VI	VII	VIII	IX	X
Angriffspunkt des Gesamtauftriebs an der Schale (Zentriwinkel)	Angriffspunkt des Druckauftriebs an der Schale (Zentriwinkel)	Winkel des Druckauftriebs gegen das Lot zur Strömungsrichtung	Spaltungspunkt (Zentriwinkel)	Geschwindigkeit an der Hinterkante
+ 123° 13',5	-- 153° 39',1	+ 138° 39',1	+ 16° 33',8	+ 9,818 $\frac{m}{sec}$
—	-- 100° 19',5	+ 90°	+ 17° 47',9	+ 9,863
—	-- 71° 4',5	+ 61° 36',8	+ 17° 56',7	+ 9,864
-- 36° 1',2	-- 26° 55',6	+ 19° 25',6	+ 18° 18',0	+ 9,858
-- 10° 22',6	-- 9° 43',0	+ 4° 43',0	+ 18° 38',6	+ 9,834
-- 3° 21',8	-- 3° 18',0	+ 0° 48',0	+ 18° 50',6	+ 9,791
0°	0°	0	+ 18° 55',5	+ 9,730
+ 1° 59',7	+ 2° 1',0	+ 0° 29',0	+ 18° 51',0	+ 9,650
+ 3° 19',6	+ 3° 23',3	+ 1° 36',7	+ 18° 37',6	+ 9,551
+ 4° 17',2	+ 4° 23',4	+ 3° 6',6	+ 18° 14',7	+ 9,435
+ 4° 52',5	+ 5° 0',3	+ 4° 27',4	+ 17° 50',0	+ 9,331
+ 6° 4',1	+ 6° 17',2	+ 8° 42',8	+ 16° 8',0	+ 8,978
+ 6° 39',9	+ 6° 56',2	+ 11° 59',3	+ 14° 27',1	+ 8,678
+ 7° 49',2	+ 8° 13',6	+ 21° 46',4	+ 7° 48',0	+ 7,442
+ 8° 34',0	+ 9° 5',1	+ 31° 11',0	+ 0°	+ 6,376
+ 9° 8',9	+ 9° 46',3	+ 39° 57',6	- 7° 13',6	+ 5,052
+ 9° 46,1	+ 10° 30,9	+ 49° 29',1	- 13° 38',9	+ 3,458
+ 10° 32',6	+ 11° 24',2	+ 59° 40',3	- 17° 50',0	+ 1,622
+ 11° 30',2	+ 12° 27',0	+ 68° 5',3	- 18° 55',5	0
+ 13° 21',1	+ 14° 9',7	+ 75° 50',3	- 17° 56',6	- 1,622
+ 18° 39',4	+ 18° 39',7	+ 80° 48',0	- 15° 16',8	- 3,199
+ 31° 27',6	+ 105° 55',5	0	- 11° 21',5	- 4,690
+ 51° 11',9	+ 173° 40',8	- 53° 40',8	- 5° 43',4	- 6,269
+ 70° 27',0	+ 188° 29',9	- 58° 13',8	0°	- 7,526
+ 88° 12',0	+ 190° 29',3	- 50° 45',4	+ 5° 17',0	- 8,472
+ 106° 51,0	+ 192° 51',0	- 42° 51',0	+ 10° 35',7	- 9,237
+ 123° 11',5	+ 198° 57',6	- 37° 53',0	+ 15° 16',8	- 9,730
+ 123° 13',5	+ 206° 20',9	- 41° 20',9	+ 16° 33',8	- 9,818
+ 115° 5',3	+ 216° 50',9	- 48° 50',9	+ 17° 7',4	- 9,845
+ 98° 26',8	+ 225° 10',7	- 57° 10',7	+ 17° 22',7	- 9,854
—	+ 259° 40',5	- 90°	+ 17° 47',9	- 9,863
—	+ 288° 55',5	- 118° 23',2	+ 17° 56',7	- 9,864
+ 323° 58,8	+ 333° 4',4	- 160° 34',4	+ 18° 18',0	- 9,858
+ 349° 37',4	+ 350° 17',0	- 175° 17',0	+ 18° 38',6	- 9,834
+ 356° 38',2	+ 356° 42',0	- 179° 12',0	+ 18° 50',6	- 9,791
+ 360°	+ 360°	- 180°	+ 18° 55',5	- 9,730

Die Spalten III und IV geben die Hubkraft und die retardierende Kraft für den Fall erlöschender Saugwirkung an. Die Zentriwinkel in den Spalten VI, VII, IX sind vom mittleren Radius des Schalenbogens im umgekehrten Uhrzeigersinne gezählt. Nur der obere Teil der Tabelle hat praktisches Interesse.

Auf Grund der Tabelle kann man rohe Skizzen für den Verlauf der Strömungs- und Druckverhältnisse bei verschiedenen Luftstoßwinkeln herstellen. Die Aufzeichnung einiger genauer Strömungsbilder wäre wünschenswert, ist aber recht zeitraubend.

Für $\beta = 90^\circ + \alpha$ sind Gesamtauftrieb und Saugkraft gleich gerichtet (also der Druckauftrieb von gleicher Richtung), aber nicht von gleicher Größe. Wenn $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right) = \cos^3\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta$, so sind beide der Größe nach, aber nicht der Richtung nach gleich. Für $\beta = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$, oder $\beta = -\frac{\alpha}{2}$ verschwindet der gesamte Auftrieb, obwohl die Saugwirkung, und damit der Druckauftrieb nicht verschwindet; gleichzeitig erreicht die Strömungsgeschwindigkeit an Kante *B* den größten, hier überhaupt erreichbaren Wert.

Bei Vermehrung von β um 180° bleibt das Strömungsbild erhalten, und wechselt bloß der Richtungssinn der Strömung.

Für jede gegebene Geschwindigkeit der Strömung im Unendlichen, also jeden Winkel β gibt es zwei hierher gehörige Lösungen; je nachdem die eine oder die andere Kante als solche endlicher Geschwindigkeit vorgeschrieben werden, erhält man die eine oder die andere Lösung. Der einen gehört das Strömungsbild β , der anderen das an der *y* Achse gespiegelte Strömungsbild von $180^\circ - \beta$ zu.

In den meisten Fällen gibt eine, und nur eine, der beiden Lösungen ein Abströmen an der Kante endlicher Geschwindigkeit; die andere ein Anströmen. Gibt eine Geschwindigkeit Abströmen, dann natürlich die entgegengesetzte Anströmen.

Eine Strömung unter Luftstoßwinkeln zwischen $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ und $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, also sehr steil von unten gegen die konkave Schalen-
seite hin, gibt für beide Lösungen Anströmen; umgekehrt die
steile Strömung $\left(\text{zwischen } 270^\circ - \frac{\alpha}{2} \text{ und } 270^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)$ von oben
gegen die konvexe Schalen-
seite hin natürlich für beide Lösungen
Abströmen.

Obwohl jede Lösung für die beiden dem Sinne nach
verschiedenen Geschwindigkeiten vom mathematischen Ge-
sichtspunkte aus gleich richtig ist, wird doch natürlich
die Stabilität der dadurch dargestellten Strömung für beide
Geschwindigkeiten wesentlich verschieden sein können. Denn
fingiert man ein unendlich wenig gestörtes momentanes Strö-
mungsbild, so werden manche Stromfäden Verbreiterung, da-
her Mindergeschwindigkeit und Mehrdruck, andere Verenge-
rung, daher Mehrgeschwindigkeit und Minderdruck aufweisen.
Daraus folgen Beschleunigungen, und aus diesen Geschwindig-
keiten in Richtung der Stromfäden und senkrecht dazu, die
ein ganz bestimmtes, von $\pm V_0$ unabhängiges Vorzeichen be-
sitzen. Sie werden sich mit der eigentlichen Geschwindigkeit
 V_0 an der Stelle zu ganz verschiedenen resultierenden Ge-
schwindigkeiten vereinigen, je nachdem $+V_0$ oder $-V_0$ ge-
wählt ist. Denn die zutretende Geschwindigkeit hat eben ein
festes Zeichen. So kann recht wohl die Tendenz in dem einen
Falle dahin gehen, die Störung zu beseitigen und das unge-
störte Strombild wieder herzustellen; im anderen Falle aber
dahin, die Störung zu vergrößern, und auf ein ganz anderes
Strombild zu führen.

Wir wollen im Anschluß an die Beobachtungstatsachen
die Anschauung bevorzugen, daß starkes Abströmen der Stabi-
lität des Strömungsbildes günstig ist. Für Anströmen finden
wir beiläufig meist die Komponente der Saugkraft in der
Strömungsrichtung positiv, was bei Bewegung der Schale in
der ruhenden Flüssigkeit eine beschleunigende, statt verzögernde

Wirkung der Reibung bedeuten würde. Wir beschränken also unsere Lösungen auf die, welche ein Abströmen aufweisen, was gewöhnlich damit zusammenfällt, daß die singuläre Kante die Vorderkante im gewöhnlichen Sinne, die Kante endlicher Geschwindigkeit die Hinterkante sein soll. Doch soll durchaus nicht die Anschauung vertreten werden, daß jede Lösung, die ein Abströmen aufweist, stabilen, oder auch nur ziemlich stabilen Charakter trage. Vielmehr werden wir vermuten können, daß die Lösungen mit geringerer Abströmungsgeschwindigkeit gegenüber denen größerer Abströmungsgeschwindigkeit in bezug auf die Stabilität im Nachteil sind (wobei dasselbe V im Unendlichen vorausgesetzt sei). Wenigstens scheint mir bei Vögeln wie bei Flugapparaten das flache Auslaufen der Fläche gegen die Hinterkante gerade den Zweck zu haben, dem Abströmen Sicherheit zu verleihen, gewissermassen regulierend zu wirken. Vielleicht könnte die Behandlung des einen der im letzten Paragraphen vorgeschlagenen Beispiele in bezug auf die Wirkung der Abflachung des hinteren Teiles der Flugfläche einen gewissen Aufschluß geben.

Schließen wir wirklich die Lösungen ohne Abströmen aus, so findet sich im Allgemeinen noch für jede Geschwindigkeit eine in diesem Sinne brauchbare Lösung; nur für die steile Strömung von unten zwischen $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ und $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ bleibt gar keine Lösung unserer Art; dagegen freilich für die steile Strömung von oben (zwischen $270^\circ - \frac{\alpha}{2}$ und $270^\circ + \frac{\alpha}{2}$) noch zwei Lösungen.

Halten wir die Strömungsbilder mit geringerer Abströmungsgeschwindigkeit für bedenklich, so sehen wir auf Grund der letzten Tabelle, daß allzu große Luftstoßwinkel, schon solche über 50° , ein nicht viel Vertrauen erweckendes Resultat geben. Dazu kommt das außerordentlich starke Anwachsen der Saugwirkung, die uns von Anfang an zur Vorsicht zwang, während der Gesamtauftrieb zwar wächst, aber für größere Luftstoßwinkel durchaus nicht mehr in gleichem Maße wie jene. Bei Luftstoßwinkeln unter 10° macht sich die Verminderung

der Geschwindigkeit nicht stark fühlbar, bei 20° bleibt sie bei etwa 15%, bei 30° beträgt sie schon 25%. Die Saugwirkung (von der wir wissen, daß sie zu retardierenden Kräften Anlaß geben kann) wächst von etwa 8% des Gesamtauftriebs bei 10° auf 20% bei 20° , und auf 36% bei 30° ; später noch mehr. Für negative Luftstoßwinkel, also Strömung gegen die konvexe Schalenseite (die übrigens für das Flugproblem ohne Bedeutung sind) stehen die Verhältnisse in bezug auf die Abströmungsgeschwindigkeit etwas besser, in bezug auf die Saugkraft ebenso.

Es erscheint so von diesem Gesichtspunkt aus begreiflich, daß die Praxis des Fluges, im Wunsche nach großen Auftriebskräften, trotzdem ein Kompromiß schließen, und sich auf kleinere Luftstoßwinkel beschränken muß.

Ich bemerke ausdrücklich, daß ich von vorneherein die Anwendung der Formeln auf große Luftstoßwinkel β , und besonders auch auf große Winkel α für physikalisch höchst bedenklich halte. Auch bei kleineren Luftstoßwinkeln β , und kleinen Schalenwinkeln 2α (etwa α kleiner, höchstens wenig größer als 20° , β höchstens einige 20 Grad) werden die wirklichen Vorgänge noch durch an der Vorderkante erzeugte Wirbel kompliziert werden, besonders, wenn keine genügende Abstumpfung da ist. Dennoch halte ich es für möglich, daß diese komplizierteren Erscheinungen sich über das hier beschriebene Strömungsbild nur superponieren, und die durchschnittlichen Druck- und Geschwindigkeitsverteilung — besonders die erstere — der geschilderten nahe steht. Die in solchen Fällen beobachteten Wirbel sind ja tatsächlich gewöhnlich im Einzelnen sehr rasch veränderliche Strömungsgebilde. Ich habe früher durch Abbildung des bekannten, bei geeigneter Strömungsgeschwindigkeit am Orte verbleibenden Helmholtz'schen Wirbelpaares Strömungsbilder unter Vermeidung unendlicher Kantengeschwindigkeit aufgestellt, die mit auffallender Ähnlichkeit die Erscheinung von zwei symmetrischen Wirbeln hinter einer senkrecht getroffenen Wand typisch darstellen, ganz wie sie Ahlborn in seinen Photographien wiedergibt. Aber die beiden

dabei auftretenden Wirbelfäden können nicht am Orte festgelegt werden, sondern erleiden einen einseitigen Druck, der sie von der Platte fortreibt. Dies nun stimmt mit der Beobachtung gut zusammen insofern auch Ahlborn auf das rasche Wechseln des Wirbelbildes aufmerksam macht, aber, da das Strömungsbild nicht stationär (und nicht eindeutig bestimmt) war, konnte ich es nicht zur Berechnung der Drucke einwandfrei verwenden.

Wir kommen nun zum Vergleiche der theoretischen Resultate mit den Versuchsergebnissen. Dabei bezieht sich das Folgende nur auf kleine Winkel β (etwa β zwischen -9 und $+15^\circ$), was den praktisch wichtigsten Fall darstellt.

Die für ebene Platten berechnete Kraft normal zur Platte (der Druckauftrieb) beträgt $\pi \rho V^2 \cdot \sin \beta \cos \beta$ pro Flächeneinheit. In bezug auf die Abhängigkeit von β steht dies zwischen dem gewöhnlichen Gesetze der Proportionalität mit $\sin \beta$ und der verbesserten Formel von Duchemin, die Proportionalität mit $\frac{\sin \beta}{1 + \sin^2 \beta}$ annimmt. Der Zahlenfaktor $\pi = 3,14$ dagegen ist beträchtlich zu groß. Für Platten von quadratischer Form ist nach Langley der Zahlenfaktor etwa 1,4, womit auch andere Versuche ziemlich übereinstimmen. Jedoch findet Langley für lange Platten und sehr kleine Winkel β bedeutend größere Faktoren. So für $\beta = 10^\circ$ etwa 1,7; für $\beta = 5^\circ$ etwa 2,3; für noch kleinere Winkel β scheint er noch größere Faktoren anzunehmen. Danach würde für kleine Winkel das Versuchsergebnis etwa $\frac{2}{3}$ und mehr vom errechneten ausmachen, was immerhin in Anbetracht der bei der Theorie vorausgesetzten Vereinfachungen als nicht ganz schlechte Übereinstimmung bezeichnet werden kann. Übrigens ist gerade für kleine Winkel β das Beobachtungsmaterial spärlich.

Für gewölbte Flächen liegen nur Lilienthals Messungen zum Vergleiche vor, die sich auf das Verhältnis $\frac{\text{Pfeil}}{\text{Sehne}} = \frac{1}{12}$, also auf $\alpha = 18^\circ 55'$ beziehen. Nehmen wir an, daß Lilienthals Versuche bei 20° Celsius und 30 m Seehöhe angestellt wurden und reduzieren dementsprechend die theoretischen Zahlen, so ergibt sich folgende

Tabelle 4.

I	II	III	IV	V	VI	VII
	Hubkraft bei Lilienthal	Theo- retischer Gesamt- auftrieb	Komponente des theoret. Druckauf- triebs senk- recht zur Strömungs- richtung	Stirn- wider- stand bei Lilienthal	Differenz desselben gegen den Betrag bei $\beta = 0^0$	Kompo- nente des theoret. Druckauf- triebs in der Strö- mungs- richtung
$\beta = -9^0$	0,20 kg/m ²	0,31 kg/m ²	0,72 kg/m ²	0,90 kg/m ²	0,60 kg/m ²	0,78 kg/m ²
$\beta = -6^0$	1,74	2,29	2,45	0,54	0,24	0,36
$\beta = -3^0$	3,25	4,26	4,30	0,36	0,06	0,09
$\beta = 0^0$	4,96	6,23	6,23	0,30	0,00	0,00
$\beta = +3^0$	7,27	8,18	8,21	0,37	0,07	0,10
$\beta = +6^0$	9,08	10,11	10,20	0,70	0,40	0,39
$\beta = +9^0$	10,43	12,00	12,16	1,12	0,82	0,88
$\beta = +12^0$	11,08	13,87	14,06	1,51	1,21	1,56
$\beta = +15^0$	11,52	15,70	15,86	1,95	1,65	2,44

Die Versuchsergebnisse für die Hubkraft senkrecht zur Strömungsrichtung (in Spalte II) stehen für Winkel β unter 15^0 in ziemlich guter Übereinstimmung mit den errechneten Gesamthubkräften (in Spalte III), wie auch mit den, bei Erlöschen der Saugkraft noch vorhandenen Komponenten des Druckauftriebs senkrecht zur Strömung (Spalte IV). Sehr gut ist die Übereinstimmung in bezug auf den Winkel, für den die Hubkraft Null vorhanden ist; der Versuch wie die Theorie gibt dafür β gleich etwa $-9\frac{1}{2}^0$ an.

Da die Versuche für scharfe Vorderkante angestellt sind, werden wir das völlige, oder doch fast völlige Erlöschen der Stirnsaugkraft erwarten und daher als theoretischen Stirnwiderstand die Komponente des Druckauftriebs in der Strömungsrichtung ansetzen (Spalte VII). Aus Lilienthals Versuchen folgen für den Stirnwiderstand die Zahlen der Spalte V. Betrachtet man den Stirnwiderstand $0,30 \text{ kg/m}^2$ für $\beta = 0$, der theoretisch Null sein müßte, als Wirkung der eigentlichen Oberflächenreibung, so sind (Spalte VI) die Differenzen der

Zahlen V gegen $0,30$ als die Beträge der zur wesentlich konstanten Oberflächenreibung hinzutretenden Bewegungswiderstände aufzufassen. Diese also sind mit den theoretischen Zahlen von Spalte VII zu vergleichen. Man sieht, daß zunächst die Vorzeichen überall übereinstimmen, andererseits die Beträge für β kleiner als 15° im Ganzen erträgliche Übereinstimmung zeigen. Für $\beta = 15^\circ$ wird die Übereinstimmung schon viel schlechter.

Aus der Tabelle scheint also hervorzugehen, daß für die untersuchte gewölbte Fläche und für Luftstoßwinkel unter 15° die beobachtete Hubkraft $80-90$ Prozent der errechneten ausmacht — was mit dem Umstande, daß die theoretischen Vereinfachungen sicher auf zu große Zahlen führen mußten, in Übereinstimmung steht. Auch für den Stirnwiderstand ergeben sich einigermaßen brauchbare Zahlen.

Endlich gibt die Theorie auch für die Lage des Angriffspunktes der wirkenden Kräfte, der praktisch nur sehr unsicher bestimmt ist, einigermaßen befriedigende Resultate. Für die ebene Platte liegt er theoretisch um $\frac{1}{4}$ der Breite von der Vorderkante entfernt; wie er bei der gewölbten Schale nach vorn rückt, darüber gibt Tabelle 3 Spalte VI und VII Aufschluß.

VII. Schlussbetrachtungen.

Die im zweiten Paragraphen gegebenen Ansätze lassen sich zur Lösung weiterer Strömungsprobleme benutzen. So erhält man, um nur drei einfach zu behandelnde Probleme von einem gewissen praktischen Interesse zu erwähnen, auf die schon früher hingewiesen wurde, die Strömung um die nebengezeichneten Querschnitte durch Abbildung der Figuren auf die Halbebene t ; eine Abbildung, die durch reziproke Radien in bezug auf C und sodann Anwendung der Christoffelschen Formel geleistet wird. Die beiden ersten Probleme sind deshalb wichtig, weil sie von vornherein die unendliche Strömungsgeschwindigkeit an einer scharfen Vorderkante vermeiden, und je nach dem Radius des kleinen Vollkreises, also der Abrundung,

die Wirkung einer solchen noch mehr im Einzelnen zu untersuchen gestattet, als dies im Paragraphen V geschehen ist. Im Verhältnis zu einander geben sie gewissen Aufschluß über die Wirkung der Art des Aufsetzens einer Abrundung. Daß in den toten Winkeln hinter der Abrundung Stagnation stattfindet, ist ganz irrelevant.

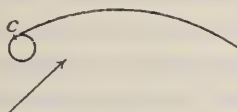


Fig. 5.



Fig. 6.

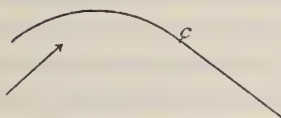


Fig. 7.

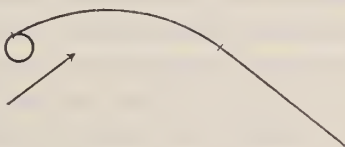


Fig. 8.

Das dritte Problem soll die Wirkung einer an die Hinterkante angefügten ebenen Fläche typisch darstellen, und wird zu beurteilen erlauben, wie eine solche Abflachung das Abströmen der Flüssigkeit beeinflusst.

Noch andere Probleme, wie das aus dem ersten und dritten zusammengesetzte nebengezeichnete fordern die Abbildung von Kreisbogendreiecken, die sich nicht in gradlinige Polygone überführen lassen. Ihre Behandlung müßte also nach dem Schwarz'schen Verfahren, statt nach der einfachen Christoffel'schen Formel versucht werden. Obwohl der prinzipielle Weg dabei vorgezeichnet ist, möchte die Lösung praktisch in solchen Fällen meist schwierig und mühevoll sein; nur wenn ein Problem ganz besonderes Interesse besäße, und nicht in Einzelprobleme einfacherer Art zur angenäherten Berechnung zerlegt werden könnte, wäre diese Behandlung zu empfehlen.

Endlich sei noch auf die Erweiterung des im Paragraphen II Gesagten für den Fall hingewiesen, daß die Ausschließung mehrerer geschlossener Kurven die Ebene z in ein dreifach oder noch mehrfach zusammenhängende Flächenstück verwandelt. Ich habe schon 1902 den Fall behandelt, daß zwei Kreisschalen mit derselben Symmetrieachse in symmetrischer Strömung stehen. Das zweifach periodische Geschwindigkeitspotential führte in der Lösung auf elliptische Integrale, resp. Funktionen, die Lösung wurde für einzelne Fälle bis auf die Zahlen ausgearbeitet, was freilich viel Rechenarbeit erforderte. Die damals angewendete Methode, die sich eigentlich nur als eine Variante der hier an die Spitze gestellten darstellt, bestand in der Abbildung der als Symmetriehälfte gewählten Halbebene z , in der die Strömung gesucht wird, auf ein von Stromgeraden und Äquipotentialgeraden in der Ebene W begrenztes unendliches Flächenstück. Dies wird aber nur der allgemeinen Form nach (nicht also in bezug auf die Längen der Strecken $A' C'$, $C' B'$, $C' D'$ etc. in der Figur) als bekannt angenommen. Die unbekanntenen Strecken werden durch die Forderung, daß entsprechend bezeichnete Punkte bei der Abbildung sich wirk-

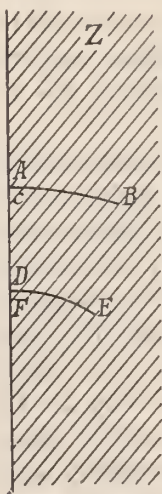


Fig. 9.

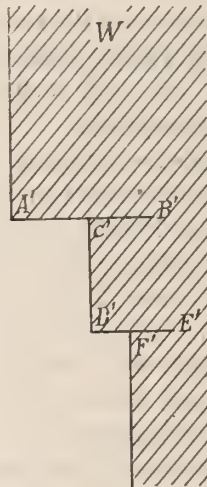


Fig. 10.

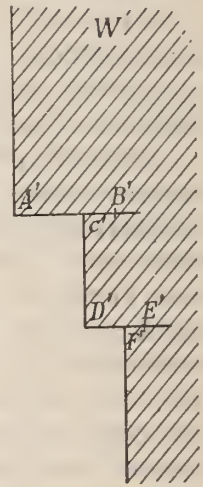


Fig. 11.

lich entsprechen sollen, bestimmt. $A' C'$ und $D' F'$ gaben je die halbe Zirkulation um eine Schale an.

Läßt man nun aber die Abbildung so erfolgen, daß in der Ebene W die den Kanten B und E entsprechenden Punkte nicht in die Ecken, sondern auf beliebig auf den Stromlinien gewählte Punkte B' und E' fallen, so ergeben sich in den Kanten B und E unendliche Strömungsgeschwindigkeiten. Es werde nun auf diese im Unendlichen in der x Richtung verlaufende Strömung eine zweite im Unendlichen in der y Richtung verlaufende zirkulationslose Strömung superponiert; diese ist leicht anzugeben, und liefert gleichfalls in B und E unendliche Geschwindigkeiten. Durch geeignete Wahl der vorher beliebigen Punkte B' und E' kann man nun in B und E , also an den beiden Hinterkanten, Fortfallen der unendlichen Geschwindigkeiten, und endliches Abströmen erzielen. Nicht aber zugleich an den Vorderkanten, für die zwei verschiedene Spiegelungen der beiden superponierten Strömungen zu erfolgen haben, so daß die unendlichen Geschwindigkeiten sich addieren, statt sich fortzuheben. Man hat dann die Lösung für zwei symmetrisch unter einander gestellte Kreisschalen, die von einer beliebigen schiefen Strömung getroffen werden, so daß Abströmen an den Hinterkanten erfolgt, die Vorderkanten aber singular bleiben.

Das Problem hätte Bedeutung für die Frage nach der gegenseitigen Beeinflussung der beiden Flächen eines Doppeldeckers; eine Frage, die ich 1902 nur für den Luftstößwinkel Null zu behandeln vermochte. Prinzipielle Schwierigkeiten liegen hier, wenigstens in einzelnen besonders einfachen Fällen, nicht mehr vor; dagegen glaube ich, daß sich die numerische Auswertung sehr mühsam gestalten wird.

Von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus könnte man wenigstens eine Reihe von Problemen auf das Problem der Strömung in einer Ebene, aus der zwei Kreise ausgeschnitten sind, zurückführen. Dies letztere Problem kann auf die analoge Art, wie das vorher besprochene — vielleicht aber auch auf einfacherem Wege — gelöst werden. Statt seiner kann

natürlich auch das Problem der beliebigen, doppelt zirkulierenden Strömung zwischen zwei konzentrischen Kreisen mit einem Grenzpunkt (dem Bild des unendlich fernen Punktes) innerhalb der Ringfläche vorgelegt sein.

Kann man nun ein Paar von geschlossenen Kurven so auf zwei Kreise abbilden, daß auch das Unendliche sich entspricht und die Abbildung im Inneren der unendlichen zweifach zusammenhängenden Fläche (der unendlich ferne Punkt ist dabei nicht als Grenze zu betrachten) singularitätenfrei ist, so hätte man auch die Strömung um die beiden Kurven gefunden. Freilich darf nicht vergessen werden, daß, während jede einzelne Grenzkurve sich ja theoretisch singularitätenlos in der äußeren Fläche auf den Kreis abbilden läßt, im allgemeinen ein ganz beliebiges Paar von Grenzkurven sich überhaupt nicht auf ein Paar von Kreisen derartig abbilden läßt.

Immerhin könnte man wenigstens leicht von zwei Kreisen rückwärts ausgehend, durch Abbildung Kurvenpaare finden, für die man die Umströmung angeben kann. Dagegen würde, um das direkte Problem für gegebene Kurven zu lösen, sofern das überhaupt möglich wäre, eine Erweiterung der Christoffelschen Formel für mehrfach zusammenhängende geradlinige Polygone erwünscht sein.

Daß analoge Betrachtungen für Flächen von noch höherem Zusammenhange, bezogen auf drei oder mehr Kreise und auf hyperelliptische Integrale führend sich zufügen ließen, ist plausibel.

Aber für die praktische Durchführbarkeit eines Lösungsversuches scheint mir nur der Fall, daß eine gemeinsame Symmetrieachse alle Grenzkurven durchschneidet, Hoffnung zu bieten.

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch - physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 3. Abhandlung

Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze

von

Leopold Fejér

Vorgelegt am 8. Januar 1910



München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Einleitung.

In zwei Notizen und im § 3 einer größeren Abhandlung¹⁾ habe ich verschiedene Beispiele von überall stetigen Funktionen mitgeteilt, deren Fouriersche Reihe an einer Stelle divergiert.

Daß solche überall stetige Funktionen existieren, hat bekanntlich zum erstenmal Paul du Bois-Reymond²⁾ im Jahre 1876 bewiesen.

Meine in den zitierten drei Arbeiten auseinandergesetzten Beispiele sind, wie ich glaube, schon sehr einfach und durchsichtig. Diesen Eigenschaften ist es zu verdanken, daß man für meine stetigen Funktionen nicht nur die bloße Tatsache der Divergenz ihrer Fourierschen Reihe leicht nachweisen kann, sondern daß man auch die Art der Divergenz dieser Fourierschen Reihen an der betrachteten Stelle bis in ihre Einzelheiten leicht verfolgen kann.

1) „Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe.“ Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 137, Heft 1, 1909. (Hier kurz als „Note I“ zitiert.)

„Eine stetige Funktion, deren Fouriersche Reihe divergiert.“ Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXVIII, 2^o semestre, 1909. (Hier kurz als „Note II“ zitiert.)

„Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen“, 1909. Erscheint nächstens im Bande 138 des Crelleschen Journals. (Hier kurz als „Note III“ zitiert.)

2) Paul du Bois-Reymond: „Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln“. Abhandlungen der Bayer. Akad., Math.-phys. Klasse, Bd. XII, 1876.

Weiter sind meine Beispiele auch rechnerisch leicht zu behandeln. Eben deswegen kann man diese Beispiele so gestalten, daß nicht nur ihre Fourierschen Reihen an einer Stelle divergent sind, sondern daß sie auch noch weitere, postulierte, Eigenschaften aufweisen. Dies soll in dieser Note hauptsächlich dadurch gezeigt werden, daß ich in § 4 eine Frage beantworte, die Herr Pringsheim in seiner Abhandlung „Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenz-kreise“¹⁾ aufgeworfen hat. § 1, § 2 und § 3 dienen zur Vorbereitung.

§ 1. Über gewisse trigonometrische Polynome.

In meiner Note II habe ich zum erstenmal das trigonometrische Polynom

$$\frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \dots + \frac{\cos nx}{1} - \frac{\cos(n+1)x}{1} - \dots - \frac{\cos 2nx}{n}$$

betrachtet, und dort bewiesen, daß

$$\left| \frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \dots + \frac{\cos nx}{1} - \frac{\cos(n+1)x}{1} - \dots - \frac{\cos 2nx}{n} \right| < 34.$$

Hier bedeutet n eine beliebige positive ganze Zahl, und x eine beliebige reelle Zahl.

In meiner Note III (§ 2, Art. 8) habe ich nun diese Ungleichung verallgemeinert (und auch noch verschärft). Ich habe nämlich dort bewiesen, daß

$$\left| \frac{\cos(r+1)x}{n} + \frac{\cos(r+2)x}{n-1} + \dots + \frac{\cos(r+n)x}{1} - \frac{\cos(r+n+1)x}{1} - \dots - \frac{\cos(r+2n)x}{n} \right| < 25 \cdot 6. \quad (1)$$

¹⁾ Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften, 1900. Heft 1. Der § 4 hat die Überschrift: „Zusammenhang zwischen dem reellen und imaginären Teile der Randfunktion“. Die zu beantwortende Frage ist auf pag. 98 dieses Paragraphen gestellt. Herr Pringsheim bespricht zum zweitenmale diese Frage in Art. 3 (pag. 513) seiner Arbeit: „Über die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Konvergenzgrenze“, Sitzb. der K. B. Akad. Bd. XXXI, 1901, Heft IV.

Hier bedeutet n wieder eine beliebige positive ganze Zahl, r bedeutet eine beliebige nicht negative ganze Zahl¹⁾, und x bedeutet eine beliebige reelle Zahl.

Der einfache Beweis dafür lautet in den Hauptzügen:
Es ist

$$\begin{aligned} & \frac{\cos(r+1)x}{n} + \frac{\cos(r+2)x}{n-1} + \dots + \frac{\cos(r+n)x}{1} \\ & - \frac{\cos(r+n+1)x}{1} - \dots - \frac{\cos(r+2n)x}{n} = \\ & = \sum_{r=1}^n \frac{\cos(r+n-r+1)x}{r} - \sum_{r=1}^n \frac{\cos(r+n+r)x}{r} = \\ & = 2 \sin\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x \cdot \sum_{r=1}^n \frac{\sin(2r-1)\frac{x}{2}}{r}. \end{aligned}$$

Da aber²⁾

$$\left| \sum_{r=1}^n \frac{\sin(2r-1)t}{r} \right| < 12 \cdot 8, \quad (2)$$

¹⁾ Solche Werte von r kommen hier in Betracht. Die Ungleichung (1) ist aber richtig für jeden reellen Wert von r .

²⁾ Dies folgt aus der bekannten wichtigen Tatsache, daß

$$\left| \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \dots + \frac{\sin nt}{n} \right| < M, \quad (2')$$

wo n eine beliebige positive ganze Zahl, und t eine beliebige reelle Zahl bedeutet. M bezeichnet eine positive Konstante. Ich habe a. a. O. bewiesen, daß man

$$M = 3 \cdot 6$$

setzen kann. Ich vermute aber, daß das Maximum von

$$\left| \sum_{r=1}^n \frac{\sin r t}{r} \right|$$

mit wachsendem n fortwährend wächst, und für $\lim n = \infty$ zu

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 1 \cdot 8519 \dots$$

konvergiert, so daß also $M = 1 \cdot 8519 \dots$ die „richtige Konstante“ für

und zwar für jeden positiven ganzzahligen Wert von n , und für jeden reellen Wert von t , also ist die Ungleichung (1) erwiesen.

Ich will jetzt zeigen, daß auch

$$\left| \frac{\sin(r+1)x}{n} + \frac{\sin(r+2)x}{n-1} + \dots + \frac{\sin(r+n)x}{1} - \frac{\sin(r+n+1)x}{1} - \dots - \frac{\sin(r+2n)x}{n} \right| < 25 \cdot 6. \quad (3)$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(r+1)x}{n} + \frac{\sin(r+2)x}{n-1} + \dots + \frac{\sin(r+n)x}{1} \\ & \quad - \frac{\sin(r+n+1)x}{1} - \dots - \frac{\sin(r+2n)x}{n} = \\ & = \sum_{r=1}^n \frac{\sin(r+n-r+1)x}{r} - \sum_{r=1}^n \frac{\sin(r+n+r)x}{r} = \\ & = -2 \cos\left(r+n+\frac{1}{2}\right)x \cdot \sum_{r=1}^n \frac{\sin(2r-1)\frac{x}{2}}{r}. \end{aligned}$$

Wenn ich also wieder die Ungleichung (2) in Betracht ziehe, so erhalte ich die zu beweisende Ungleichung (3).

Bemerkung. Setze ich in die Ungleichungen (1) und (3) statt x das Produkt sx , wo s eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, so erhalte ich die Ungleichungen:

$$\left| \frac{\cos(r+1)sx}{n} + \frac{\cos(r+2)sx}{n-1} + \dots - \frac{\cos(r+2n)sx}{n} \right| < 25 \cdot 6, \quad (4)$$

$$\left| \frac{\sin(r+1)sx}{n} + \frac{\sin(r+2)sx}{n-1} + \dots - \frac{\sin(r+2n)sx}{n} \right| < 25 \cdot 6. \quad (5)$$

die Ungleichung (2') wäre. Eine geeignete Modifikation der Betrachtungen, die Herr Bôcher im § 9 seiner Arbeit „Introduction to the theory of Fourier's series“ (Annals of Mathematics, second series, vol. 7, 1906) gibt, dürfte wohl diese Vermutung bestätigen. — Ich bemerke noch, daß es wünschenswert wäre für die Ungleichung (2') einen elementaren (d. h. die Integralrechnung nicht benützenden) Beweis zu geben.

§ 2. Beispiel einer überall stetigen Funktion, deren Fourierreihe an einer einzigen Stelle des Intervalles $(0, 2\pi)$ divergiert.

Man betrachte die Gruppe von $2n$ Zahlen

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}, -\dots -\frac{1}{n}.$$

Man bilde diese Zahlengruppe der Reihe nach für die folgenden Werte der ganzen Zahl n :

$$n = 2^{1^3}, 2^{2^3}, 2^{3^3}, 2^{4^3}, \dots, 2^{v^3}, \dots$$

Man schreibe diese Zahlengruppen der Reihe nach alle nebeneinander, nachdem man aber die Zahlen der v -ten Gruppe ($v = 1, 2, 3, \dots$) mit v^2 dividiert hat. So entsteht eine ganz bestimmte unendliche Zahlenfolge

$$\frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4.256}, \frac{1}{4.255}, \frac{1}{4.254}, \dots \quad (a)$$

Es bezeichne a_x die x -te Zahl dieser Zahlenfolge. Dann ist die unendliche Reihe

$$\sum_{x=1}^{\infty} a_x \cos x x \quad (6)$$

die Fouriersche Reihe einer überall stetigen, nach 2π periodischen Funktion, und diese Fouriersche Reihe (6) ist an der Stelle $x = 0$ divergent.¹⁾

Der Beweis dafür ist sehr einfach. Ich will aber vorher eine bequeme Bezeichnungsweise einführen.

Es sei

$$\sum_{x=1}^{\infty} u_x \quad (7)$$

¹⁾ Die Reihe (6) habe ich zum erstenmal im § 3 meiner Note III gegeben. Sie ist aus der Reihe (1) meiner Note II durch eine leichte Modifikation entstanden. Ich kam auf diese Abänderung, indem ich eine Frage zu beantworten suchte, die Herr Lebesgue brieflich an mich richtete.

eine beliebige unendliche Reihe, und es sei

$$g_1, g_2, g_3, \dots, g_r, \dots \quad (8)$$

eine beliebige Folge von positiven ganzen Zahlen. Diese Folge sei kurz mit g bezeichnet.

Dann verstehe ich unter

$$\left(\sum_{\varkappa=1}^{\infty} u_{\varkappa} \right)_g \quad (9)$$

diejenige unendliche Reihe, die aus der Reihe (7) dadurch entsteht, daß ich in ihr die ersten g_1 Glieder, dann die folgenden g_2 Glieder, dann die folgenden g_3 Glieder, . . . dann die folgenden g_r Glieder, . . . , zusammenziehe. In Formeln:

$$\left(\sum_{\varkappa=1}^{\infty} u_{\varkappa} \right)_g = \sum_{r=1}^{\infty} v_r, \quad (11)$$

wo

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + \dots + u_{g_1}, \\ v_2 &= u_{g_1+1} + \dots + u_{g_1+g_2}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_r &= u_{g_1+\dots+g_{r-1}+1} + \dots + u_{g_1+\dots+g_r}. \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned} \quad (12)$$

Nach der Erklärung dieser Bezeichnungsweise lautet nun der Beweis des obigen Satzes für die Reihe (6) einfach folgenderweise.

Es sei

$$g_1 = 2 \cdot 2^1, \quad g_2 = 2 \cdot 2^2, \quad \dots, \quad g_r = 2 \cdot 2^r, \quad \dots \quad (13)$$

Dann ist die unendliche Reihe

$$q(x) = \left(\sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_{\varkappa} \cos \varkappa x \right)_g \quad (14)$$

eine in jedem Intervalle gleichmäßig und absolut konvergente unendliche Reihe. In der Tat ist, mit Rücksicht auf die Ungleichung (1), das r -te Glied dieser Reihe dem absoluten Betrage nach für jedes x kleiner als

$$\frac{25 \cdot 6}{\nu^2}.$$

und da

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{25 \cdot 6}{\nu^2}$$

konvergiert, daher ist die Reihe (14) in der Tat in jedem Intervalle gleichmäßig und absolut konvergent.

Also ist die Funktion $\varphi(x)$ unter (14) überall stetig und nach 2π periodisch. Es ist weiter klar, daß die Fouriersche Reihe der stetigen Funktion (14) gerade die Reihe (6) ist. [Um dies einzusehen, muß man nur die Reihe an der rechten Seite der Gleichung (14) mit $\cos \nu x$ multiplizieren und dann zwischen den Grenzen 0 und π gliedweise integrieren.]

Ich muß also nur noch beweisen, daß

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa}$$

divergent ist. Das ist aber evident.

Da nämlich die $\left(g_1 + \dots + g_{\nu-1} + \frac{g_{\nu}}{2}\right)$ -te Partialsumme dieser Reihe gleich

$$\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{1}{2^{\nu^3}} + \frac{1}{2^{\nu^3-1}} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right)$$

ist, und also größer ist als

$$\frac{1}{\nu^2} \cdot \log 2^{\nu^3} = \nu \cdot \log 2,$$

daher wächst die betrachtete Partialsumme der Reihe $\sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa}$ mit wachsendem ν ins Unendliche.

Ich will noch hier eine Bemerkung hinzufügen, die für den § 4 dieser Note von Wichtigkeit ist. Ich will nämlich beweisen, daß auch die Reihe

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa} \sin \kappa x \tag{15}$$

die Fouriersche Reihe einer überall stetigen, und nach 2π periodischen Funktion darstellt.

Beweis. Es bedeute g wieder die Folge (13). Dann stellt die Reihe

$$\psi(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \right)_g \quad (16)$$

mit Rücksicht auf die Ungleichung (3) eine überall stetige und nach 2π periodische Funktion dar. Weiter ist klar, daß die Fouriersche Reihe der überall stetigen Funktion (16) gerade die Reihe (15) ist. Damit ist der Beweis erbracht.

Wie Herr Pringsheim hervorhebt, folgt im allgemeinen aus der Voraussetzung, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx \quad (17)$$

die Fouriersche Reihe einer überall stetigen und nach 2π periodischen Funktion ist, noch keineswegs, daß auch die „konjugierte“ trigonometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx \quad (18)$$

die Fouriersche Reihe einer überall stetigen und nach 2π periodischen Funktion repräsentiert.

Man betrachte z. B. die Reihe

$$\begin{aligned} & \frac{\cos 3x}{3 \cdot \log 3} - \frac{\cos 5x}{5 \cdot \log 5} + \frac{\cos 7x}{7 \cdot \log 7} - \dots = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1) \log(2n+1)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Diese Reihe ist in jedem Intervalle gleichmäßig konvergent und stellt also die Fouriersche Reihe einer überall stetigen und nach 2π periodischen Funktion dar.

Um die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (19) nachzuweisen, setzte man in (19) statt x

$$x = \frac{\pi}{2} + t.$$

Dann erhält man die Reihe

$$\frac{\sin 3t}{3 \cdot \log 3} + \frac{\sin 5t}{5 \cdot \log 5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1) \log(2n+1)}, \quad (19')$$

und es genügt offenbar zu zeigen, daß diese Reihe (19') in jedem Intervalle gleichmäßig konvergiert.

Aus der Ungleichung (2') (s. § 1, zweite Fußnote) folgt, wenn ich $M = 3 \cdot 6$ nehme, daß

$$\left| \sum_{r=1}^k \frac{\sin(2r-1)t}{2r-1} \right| < 5 \cdot 4,$$

und zwar für jeden positiven ganzzahligen Wert von k , und für jeden reellen Wert von t . Daher ist

$$\left| \sum_{r=n}^m \frac{\sin(2r+1)t}{2r+1} \right| < 10 \cdot 8,$$

und zwar für jedes positive ganzzahlige Wertepaar n, m (wo $n < m$), und für jeden reellen Wert von t .

Daraus folgt, mit Rücksicht auf ein bekanntes Abelsches Lemma, daß

$$\left| \sum_{r=n}^m \frac{1}{\log(2r+1)} \frac{\sin(2r+1)t}{2r+1} \right| < \frac{10 \cdot 8}{\log(2n+1)}.$$

Also ist die Reihe (19') und daher auch die Reihe (19) in jedem Intervalle gleichmäßig konvergent.

Nun lautet die zur Reihe (19) konjugierte Reihe

$$\frac{\sin 3x}{3 \cdot \log 3} - \frac{\sin 5x}{5 \cdot \log 5} + \frac{\sin 7x}{7 \cdot \log 7} - \dots \quad (20)$$

Diese Reihe (20) kann aber nicht die Fouriersche Reihe einer überall stetigen, nach 2π periodischen Funktion sein. Die Reihe (20) geht nämlich für

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

in die Reihe

$$\frac{1}{3 \cdot \log 3} + \frac{1}{5 \cdot \log 5} + \frac{1}{7 \cdot \log 7} + \dots$$

über, und diese ist eigentlich divergent. Die Fouriersche Reihe einer überall stetigen Funktion kann aber an keiner Stelle x eigentlich divergent sein, weil die arithmetischen Mittel ihrer Partialsummen zu $f(x)$ konvergieren.

§ 3. Beispiel einer überall stetigen Funktion, deren Fourier'sche Reihe an überall dicht liegenden Stellen divergiert.

Ich nehme die Reihe

$$\sum_{x=1}^{\infty} a_x \cos x x \quad (6)$$

wo also die a_x die im § 2 unter (a) definierten Zahlen bedeuten. Die Zahlen

$$g_1, g_2, \dots, g_r, \dots$$

sollen wieder die unter (13) definierten positiven ganzen Zahlen bezeichnen.

Ich nenne die ersten g_1 Glieder der Reihe (6) „die erste Gruppe von Glieder“, die folgenden g_2 Glieder der Reihe (6) „die zweite Gruppe von Glieder“, etc.

Ich setze nun in die erste Gruppe von Glieder der Reihe (6) statt x das Produkt $1!x$, in die zweite Gruppe von Glieder statt x das Produkt $2!x$, . . . , in die r -te Gruppe von Glieder statt x das Produkt $r!x$, In solcher Weise entsteht eine neue, ganz bestimmte unendliche Reihe:

$$\sum_{x=1}^{\infty} a_x \cos \lambda_x x,$$

wo

$$\lambda_x = 1!x, \text{ wenn } 1 \leq x \leq g_1,$$

$$\lambda_x = 2!x, \text{ wenn } g_1 + 1 \leq x \leq g_1 + g_2,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\lambda_x = r!x, \text{ wenn } g_1 + \dots + g_{r-1} + 1 \leq x \leq g_1 + \dots + g_r,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

(21)

Diese Reihe (21) ist die Fourier'sche Reihe einer überall stetigen, nach 2π periodischen Funktion, und ist divergent für sämtliche Werte

$$x = \frac{m}{n} \pi, \quad (22)$$

wo

$$\begin{aligned} m &= 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \\ n &= \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Der Beweis läßt sich mit einigen Worten erledigen.

Mit Rücksicht auf die Ungleichung (4) des § 1 ist die Reihe

$$\Phi(x) = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \cos \lambda_{\nu} x \right)_g \quad (23)$$

in jedem Intervalle gleichmäßig und absolut konvergent, stellt also eine überall stetige, und nach 2π periodische Funktion $\Phi(x)$ dar. Es ist weiter klar, daß die Reihe (21) die Fouriersche Reihe dieser Funktion $\Phi(x)$ ist. Schließlich ist diese Fouriersche Reihe (21) an sämtliche Stellen (22) divergent, weil für $x = \frac{m}{n} \pi$

$$\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{1}{2^{\nu^3}} + \dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right)$$

eine Partialsumme dieser Fourierschen Reihe darstellt, wenn nur ν gehörig groß ist.

Ich bemerke noch, daß auch die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \sin \lambda_{\nu} x \quad (24)$$

die Fouriersche Reihe einer überall stetigen und nach 2π periodischen Funktion darstellt. Diese Funktion ist durch die Reihe

$$\Psi(x) = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \sin \lambda_{\nu} x \right)_g \quad (25)$$

definiert, eine Reihe, die in jedem Intervalle gleichmäßig und absolut konvergiert, und die aus der Reihe (24) wieder einfach durch die schon früher angewendete Art der Gliederzusammenziehung entsteht.

§ 4. Eine Potenzreihe, deren Randfunktion für den Konvergenzkreis überall stetig ist, und die an einzelnen Stellen des Konvergenzkreises divergiert.

Herr Pringsheim hat die folgende Frage gestellt (s. die Einleitung dieser Note):

Es sei

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad (26)$$

eine Potenzreihe der komplexen Variabel z , deren Konvergenzradius gleich 1 ist. Weiter sei $f(z)$ für

$$|z| \leq 1$$

stetig.¹⁾ Ist es möglich, daß die Potenzreihe (26) an einer Stelle des Konvergenzkreises $|z| = 1$ (etwa an der Stelle $z = 1$) divergiert?

Wie Herr Pringsheim hervorhebt, ist diese Frage durch die du Bois-Reymondsche Entdeckung (nach welcher es solche überall stetige Funktionen von θ gibt, deren Fouriersche Reihe für $\theta = 0$ divergiert) noch nicht erledigt. Bedeutet nämlich

$$\sum_{x=0}^{\infty} c_x \cos x \theta \quad (27)$$

die Fouriersche Reihe einer solchen (geraden, überall stetigen, nach 2π periodischen) du Bois-Reymondschen Funktion, so ist diese für unsern Zwecke nur dann brauchbar, wenn auch die konjugierte Reihe

$$\sum_{x=0}^{\infty} c_x \sin x \theta \quad (28)$$

die Fouriersche Reihe einer überall stetigen und nach 2π periodischen Funktion repräsentiert.

¹⁾ D. h. es konvergiere $f(\varrho e^{i\theta})$, (wo $0 < \varrho < 1$), für $\lim \varrho = 1$ zu einem bestimmten Grenzwert, und zwar gleichmäßig für $0 < \theta < 2\pi$. Die „Randfunktion“, die eben durch diesen Grenzübergang definiert ist, ist dann notwendigerweise eine überall stetige und nach 2π periodische Funktion von θ .

Ich behaupte nun:

Die Potenzreihe

$$F(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad (29)$$

wo die Koeffizienten a_n die im § 2 unter (a) definierten Zahlen bedeuten, ist für $|z| < 1$ konvergent, und ihre Summe ist für $|z| \leq 1$ stetig. Sie divergiert an der Stelle $z = 1$ des Einheitskreises.

Beweis. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ist, also konvergiert die Reihe (29) für $|z| < 1$. Weiter geht die Reihe (29) für $z = 1$ in die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

über, und wir haben im § 2 gesehen, daß diese Reihe divergiert. Es bleibt also nur noch übrig zu zeigen, daß $F(z)$ für $|z| < 1$ stetig ist.

Für $|z| < 1$ ist

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Da aber für $|z| < 1$ gewiß

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right)_g,$$

daher ist für $|z| < 1$ sicher

$$F(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right)_g. \quad (30)$$

Die rechtsstehende unendliche Reihe konvergiert aber nicht nur für $|z| < 1$, sondern sie konvergiert auch, und zwar gleichmäßig und absolut, im Bereiche

$$|z| < 1.$$

In der Tat. Die an der rechten Seite der Gleichung (30) stehende Reihe ist eine Reihe, deren allgemeines Glied ein

Polynom in $z = x + yi$ ist, d. h. deren allgemeines Glied von der Form $u_r(x, y) + i v_r(x, y)$ ist, wo $u_r(x, y)$, $v_r(x, y)$ harmonische Polynome in x, y bedeuten. Daher ist (mit Rücksicht auf die Ungleichungen (1), (3) des § 1)

$$|u_r(x, y)| < \frac{25 \cdot 6}{r^2}, \quad |v_r(x, y)| < \frac{25 \cdot 6}{r^2} \quad \text{für } x^2 + y^2 \leq 1,$$

womit die gleichmäßige (und absolute) Konvergenz der Reihe (30) für $|z| < 1$ erwiesen ist. Also ist, mit Rücksicht auf die Gleichung (30), die Funktion $F(z)$ für $|z| < 1$ stetig.¹⁾

Es seien a_n dieselben Zahlen wie vorher, und es seien λ_n diejenigen positiven ganzen Zahlen, die unter (21) definiert sind. Dann gilt folgendes:

Die Potenzreihe

$$F_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n} \quad (31)$$

ist für $|z| < 1$ konvergent, und ihre Summe ist für $|z| < 1$ stetig. Sie divergiert an den Stellen

$$z = e^{n\pi i} \quad \left(\begin{array}{l} m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{array} \right)$$

des Einheitskreises, welche den Einheitskreis überall dicht erfüllen.²⁾

1) Daß die Summe der Potenzreihe (29) für $|z| = 1$ gleichmäßig stetig in stetige Randwerte übergeht, folgt auch daraus, daß für $|z| = 1$, die arithmetischen Mittel dieser Potenzreihe gleichmäßig zu $\varphi(\theta) + i\psi(\theta)$ konvergieren. S. Math. Annalen, Bd. 58, pag. 60: „Zusatz zum Hauptsatze“, und pag. 65, 66: „Zusatz“ etc.

2) Ich bemerke beiläufig, daß der Einheitskreis für die Potenzreihe (31) eine natürliche Grenze ist. Wäre nämlich auf dem Konvergenzreise ein noch so kleiner regulärer Bogen vorhanden (wo also $F_1(z)$ überall regulär wäre) so müßte, wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, nach dem Satze des Herrn Fatou die Potenzreihe (31) auf diesem Bogen überall konvergieren. Dies ist aber, wie eben ausgesprochen, nicht der Fall.

Der Beweis dieser Behauptung ist wieder sehr einfach. Man muß sich nur jetzt auf die Resultate des § 3 stützen, und im übrigen den früheren Gedankengang wiederholen.

Man sieht aus diesem § 4, daß die Potenzreihe einer analytischen Funktion selbst dann noch auf ihrem Konvergenzkreise divergieren kann, wenn sie, für diesen Kreis, gleichmäßig stetig in eine überall stetige Randfunktion übergeht: die Divergenz der Potenzreihe kann in einem solchen Falle sogar an überall-dicht liegenden Stellen des Konvergenzkreises stattfinden.

Die Potenzreihen (29) und (31) sind die ersten Beispiele, bei welchen diese Erscheinung nachweisbar auftritt.

Die Frage nach solchen Potenzreihen wurde durch Herrn Pringsheim gestellt.

Ordentliche und ausserordentliche Mitglieder

der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften

Ende März 1910.

I. Philosophisch-philologische Klasse.

a) Ordentliche Mitglieder.

- Dr. v. Amira Karl, Großh. Bad. Hofrat, o. Univ.-Prof., Möhlstr. 37.
„ Crusius Otto, Großh. Bad. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Widenmayerstraße 10/III.
„ Frhr. v. Hertling Georg Fr., Exzllz., Reichsrat der Krone Bayern, K. Geh. Rat, o. Univ.-Prof., Kaulbachstr. 91 I.
„ Kuhn Ernst, K. Geh. Rat, o. Univ.-Prof., Heßstr. 5/I.
„ Lipps Theodor, o. Univ.-Prof., Pienzenauerstr. 14/I.
„ v. Müller Iwan, K. Geh. Rat, o. Univ.-Prof., Siegfriedstr. 21/I.
„ Muncker Franz, o. Univ.-Prof., Liebigstr. 39/I 2. Aufg.
„ Paul Hermann, K. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Kaulbachstr. 62a/II.
„ Vollmer Friedrich, o. Univ.-Prof., Königinstr. 69/IV.
„ Wecklein Nikolaus, K. Oberstudienrat, Gymnasialrektor, Ludwigstraße 14/I 3. Aufg.
„ Wolters Paul, o. Univ.-Prof., Friedrichstr. 4/I.

b) Ausserordentliche Mitglieder.

- Dr. Frhr. v. Bissing Friedrich Wilhelm, o. Univ.-Prof., Georgenstr. 10/O.
„ Meiser Karl, K. Gymnasialrektor a. D., Kaulbachstr. 94/III I.
„ Ohlenschlager Friedrich, K. Oberstudienrat, Gymnasialrektor a. D., Luisenstr. 54/III.
„ Sandberger Adolf, a. o. Univ.-Prof., Prinzregentenstr. 48/I.
„ Streitberg Wilhelm, o. Univ.-Prof., Isabellastr. 31/II.

II. Mathematisch-physikalische Klasse.

a) Ordentliche Mitglieder.

- Dr. v. Baeyer Adolf, Exz., K. Geh. Rat, o. Univ.-Prof., Arcisstr. 1.
„ Burmester Ludwig, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Kaulbachstr. 83/II.
„ v. Dyck Walther, K. Geh. Rat, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Hildesgardstraße 5/III.
„ Ebert Hermann, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Karl Theodorstr. 12a.
„ Finsterwalder Sebastian, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Franz Josephstraße 6/III.
„ Föppl August, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Heßstr. 10/II.
„ v. Goebel Karl, K. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Luisenstr. 27/II.
„ v. Groth Paul, K. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Kaulbachstr. 62/I.
„ Günther Sigmund, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Nikolaistr. 1/II.
„ v. Hertwig Richard, K. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Schackstr. 2/III.
„ v. Linde Karl, K. Geh. Hofrat, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Prinz Ludwigs-
höhe, Heilmannstraße 17.

- Dr. Lindemann Ferdinand, K. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Franz Joseph-
straße 9/1.
„ Muthmann Wilhelm, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Schellingstr. 116/1,
„ Pringsheim Alfred, o. Univ.-Prof., Arcisstr. 12/1.
„ Radlkofer Ludwig, K. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Sonnenstr. 7/1.
„ Ranke Johannes, K. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Briennerstr. 25/III.
„ Röntgen Wilhelm Konrad, Exz., K. Geh. Rat. o. Univ.-Prof., Äußere
Prinzregentenstraße 1.
„ Rothpletz August, o. Univ.-Prof., Giselastr. 6/1.
„ Rückert Johannes, o. Univ.-Prof., Nußbaumstr. 10/1.
„ v. Seeliger Hugo, K. Geh. Rat, o. Univ.-Prof., K. Sternwarte (Bogen-
hausen).
„ Voit Erwin, o. Prof. a. d. Tierärztl. Hochsch., Augustenstr. 3/III.
„ Voss Aurel, K. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Habsburgerstr. 1/II.

b) Ausserordentliche Mitglieder.

- Dr. Burkhardt Heinrich, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Gedonstr. 4/II.
„ v. Drygalski Erich, o. Univ.-Prof., Ohmstr. 14/II.
„ Frank Otto, o. Univ.-Prof., Haydnstr. 5/II.
„ v. Gruber Max, K. Obermedizinalrat, o. Univ.-Prof., Prinzenstr. 10.
„ Hofmann Karl, a. o. Univ.-Prof., Arcisstr. 1/II.
„ Mollier Siegfried, o. Univ.-Prof., Kaulbachstr. 11/1.
„ Sommerfeld Arnold, o. Univ.-Prof., Leopoldstr. 87/III.

III. Historische Klasse.

a) Ordentliche Mitglieder.

- Dr. v. Baumann Franz Ludwig, K. Reichsarchivdirektor, Theresienstr. 14/II.
„ Brentano Lujo, K. Sächs. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Mandlstr. 5/0.
„ Friedrich Johann, o. Univ.-Prof., von der Tannstr. 17/II.
„ Grauert Hermann, K. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Isabellastr. 25/1.
„ v. Heigel Karl Theodor, Exz., K. Geh. Rat, o. Univ.-Prof., Theresien-
straße 76/1.
„ v. Pöhlmann Robert, K. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Hohenzollernstr. 6.
„ Prutz Hans, K. Preuß. Geh. Reg.-Rat, Univ.-Prof., Galeriestr. 23/1.
„ v. Reber, K. Geh. Rat, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Kaulbachstr. 31/0 1.
„ Riehl Berthold, o. Univ.-Prof., Ohmstr. 10/III.
„ v. Riezler Sigmund, K. Geh. Rat. o. Univ.-Prof., K. Maximilianeum.
„ v. Rockinger Ludwig, K. Geh. Rat, Reichsarchivdirektor a. D., Ludwig-
straße 12/0.
„ Simonsfeld Henry, a. o. Univ.-Prof., Schellingstr. 89/III.

b) Ausserordentliche Mitglieder.

- Dr. Doeberl Michael, K. Regierungs- u. Stndienrat, Honorarprofessor an
der Universität, Schönfeldstr. 6/III.
„ Leidinger Georg, K. Oberbibliothekar an der K. Hof- und Staats-
bibliothek, Adalbertstr. 31/1.
„ Mayr Karl, Syndikus der K. Akademie der Wissenschaften, Honorar-
professor an der Universität, Galeriestr. 19/III.
„ Quidde Ludwig, Professor, Gedonstr. 4/1.

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 4. Abhandlung

Ein Beitrag

zur Vorgeschichte der modernen Gewitterkunde

von

Siegmond Günther.

Vorgelegt am 5. Februar 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Auch die Gewitterkunde der neuesten Zeit kann auf eine geschichtliche Entwicklung zurückblicken, die etwa drei Jahrzehnte umfaßt. Wollte man eine Geschichte dieses Zweiges der atmosphärischen Physik überhaupt schreiben, so müßte man selbstverständlich bis in eine altersgraue Vergangenheit zurückgehen und eine Fülle von Einzelheiten berücksichtigen, denen nach unseren heutigen Begriffen der wissenschaftliche Wert gänzlich abzusprechen wäre. Aber trotzdem gibt es auch ein vorgeschichtliches Stadium, welches näher kennen zu lernen an sich schon großes Interesse erregt, um so mehr, da es damals, als man an die Untersuchung des Gewitterproblem es unter neuen Gesichtspunkten herantrat, vollständig der Vergessenheit anheimgefallen war. Abgesehen von einer kurzen Notiz¹⁾ in dem trefflichen, niemals versagenden Werke von Hellmann enthält die neuere Literatur keine Mitteilung einschlägiger Art. Es wird sich deshalb empfehlen, diese Phase der Meteorologie in den ersten Dezennien des XIX. Jahrhunderts einer Untersuchung zu unterziehen.

In der Gewitterkunde lassen sich der Natur der Sache nach auch wieder zwei Hauptabteilungen unterscheiden. Die eine derselben hat es wesentlich mit den elektrischen Entladungen zu tun, deren wahre Natur erst durch Franklin und Divisch erkannt wurde;²⁾ diese Fragen scheiden für uns

1) G. Hellmann, Repertorium der deutschen Meteorologie, Leipzig 1883, S. 918 ff.

2) Vgl. hiezu: Poggen dorff, Geschichte der Physik, Leipzig 1879, S. 867; Rosenberger, Die Geschichte der Physik, 2. Teil, Braunschweig 1884, S. 316 ff. Die noch da und dort geäußerten Bedenken gegen Divischs Unabhängigkeit von Franklin können nicht aufrecht erhalten werden. Auch J. C. Winkler (Programma de avertendi fulminis artificio ex doctrina electricitatis, Leipzig 1753) ist kaum von Franklins Entdeckung beeinflusst gewesen.

an dieser Stelle zwar nicht gänzlich aus, treten aber doch mehr in den Hintergrund. In die zweite Abteilung gehört die dynamische Seite der Gewittererscheinungen, vor allem die Gesamtheit der Fragen nach den Modalitäten der Entstehung und Fortpflanzung der Gewitter. Damit hat sich die frühere Zeit, auch als man längst über die Beschaffenheit des Blitzes im klaren zu sein glaubte, nur sehr wenig beschäftigt; aus dem ganzen XVIII. Jahrhundert führt die das Wissen seiner Epoche zusammenfassende Darstellung von Muncke¹⁾ nur ganz wenig Material an. Hier hatten W. v. Bezold²⁾ und C. Ferrari,³⁾ an welche beide Namen der neuere Aufschwung unserer Kenntnis in diesem Bereiche doch zunächst anzuknüpfen hat, anscheinend ein ganz neues Gebäude aufzuführen. Daß schon zahlreiche Bausteine für ein solches, und zwar in ganz gut vorgearbeitetem Zustande, existierten, wußte man damals nicht. Es wird sich jedoch aus unserer Schilderung ergeben, daß zwischen den Bestrebungen, die 1820 und denjenigen, welche sechzig Jahre später, diesmal freilich mit ganz anderem Erfolge, sich geltend machten, eine sehr weitgehende Übereinstimmung bestand, und daß die Gelehrten, die sich dieses Arbeitsfeld ausersehen hatten, sich auf einem ganz richtigen Wege befanden. Schon rein äußerliche Gründe mußten freilich vor neunzig Jahren als ein unübersteigliches Hindernis sich herausstellen; es sei nur an die Schwierigkeit und Langsamkeit der Nachrichtenbeförderung erinnert. So war denn auch die Summe dessen, was diese erste Etappe einer rationellen Gewitterforschung zutage förderte, nicht allzu groß, aber deshalb verdient sie es doch nicht minder, der Jetztzeit ins Gedächtnis zurückgerufen zu werden.

1) Artikel „Gewitter“ in: Gehlers Physikalisches Wörterbuch, neue Auflage, 4. Band, 2. Abteilung, Leipzig 1828, S. 1581 ff.

2) W. v. Bezold, Über die Verteilung des Luftdruckes und der Temperatur während größerer Gewitter, Zeitschr. d. österr. Gesellsch. f. Meteorol., 18. Band, S. 281 ff.

3) Ciro Ferrari, Osservazioni dei temporali raccolte nel 1880, Mailand 1880.

Unmittelbaren Anstoß, eine systematische Beobachtung der Gewitterphänomene in Aussicht zu nehmen, bot ein Aufsatz des berühmten Elektrikers Volta über Gewitterperiodizität.¹⁾ In seinem Wohnorte Como, so ließ sich dieser vernehmen, habe man eine vortreffliche Gelegenheit, sich über gewisse, einstweilen noch wenig beachtete Eigentümlichkeiten der Gewitter zu unterrichten. Unleugbar gebe es Örtlichkeiten, Schluchten und Täler, in denen sich jene mit Vorliebe festsetzten und längere Zeit verweilen, ohne daß übrigens dorthin ihr Ursprung zu verlegen wäre. Die physikalischen Gründe, welche für diese Erscheinung beigebracht wurden, werden heute nicht mehr als richtig anerkannt werden,²⁾ aber die Tatsache selbst deutet auf eine richtige Beobachtung hin. Daran knüpfte dann J. S. C. Schweigger (1779—1857), der Erfinder des elektromagnetischen Multiplikators, seine eigenen Bemerkungen an.³⁾ Soeben erst von Erlangen nach Halle a. S. berufen, mußte er von den in seinem engeren Vaterlande Bayern gemachten und

¹⁾ Volta, Über periodische Wiederkehr der Gewitter und über den äußerst kalten und ungewöhnlich trockenen Wind, welcher mehrere Stunden nach den mit Hagel begleiteten Gewittern empfunden wird, Brief an Configliachi, deutsch von Kleinschrod, Journal für Chemie und Physik, 19. Band, S. 262 ff.

²⁾ Die Theorie Voltas ist nicht einheitlich. Besonderes Gewicht wird auf die von Tralles (Über die Elektrizität des Staubbaches, Grens Journal der Physik, 1. Band, 1790) publizierte Wahrnehmung gelegt, daß durch Zerstäubung größerer Wassermengen, wie sie sich am Fuße eines Wasserfalles von selbst ergebe, stets elektrische Spannung erzeugt werde. Wenn auch das Gewitter längst vorübergezogen sei, bleibe diese elektrische Disposition doch bestehen. Vgl. auch: Volta, Lettere sulla meteorologia elettrica dirette al Prof. Lichtenberg, Lettera VII, Biblioteca fisica di Brugnatelli, No. IX und X, 1789.

³⁾ Schweigger, Bemerkungen in Beziehung der Meteorologie, Journal für Chemie und Physik, 25. Band, S. 317 ff. Es mag auffallen, daß diese reellen und doch auch nicht fruchtlos gebliebenen Bemühungen des Hallischen Physikers viel weniger Aufmerksamkeit erregten, als seine halbmytischen Spekulationen über eine von ihm hypothetisch konstruierte Urphysik, welche seine späteren Lebensjahre größtenteils ausfüllten. Ein sprechender Beleg hiefür ist Th. v. Martius' ausführliche Biographie (Akademische Denkrede, Leipzig 1866, S. 345 ff.).

geglückten Versuchen zu erzählen, die Verbreitung des Hagels geographisch zu fixieren. Man habe in jenem Königreiche durch das Katasteramt eine Hagelkarte auf Grund dreißigjährigen Durchschnittes bearbeiten lassen¹⁾ und so müsse es auch in dem allgemeineren Falle gehalten werden, um Voltas Angaben kontrollieren zu können. „Man sollte in jeder Gegend den Hauptzug der Gewitter zu bestimmen und auf der Karte mit Linien zu bezeichnen suchen.“ Es wäre wohl denkbar, daß dieser Gedanke durch die soeben erst bekannt gewordenen Isothermenkarten veranlaßt ward, denn in dem gleichen Jahre 1817. dem Schweiggers Anregung entstammt, war A. v. Humboldts grundlegende Denkschrift²⁾ über diese so wichtige Bereicherung der klimatologischen Graphik an die Öffentlichkeit getreten, und als Herausgeber einer viel gelesenen Zeitschrift erhielt der Erstgenannte gewiß rechtzeitig Kunde von Epoche machenden Neuerungen; den Lesern seines Journalen gab er allerdings erst etwas später davon Nachricht. Unmittelbare Folgen scheint der zweckmäßige Vorschlag zwar nicht gehabt zu haben, aber mittelbar gab er Veranlassung dazu, die Erkundung der Gewitter in größerem Stile zu betreiben. Und dabei ist dann doch manches herausgekommen, was dau-

1) Es ist sehr zu beklagen, daß das Original dieser Karte nicht mehr vorhanden ist. Das K. Finanzministerium hatte auf Ersuchen des Verfassers die Freundlichkeit, Nachforschungen nach derselben in Gang zu setzen. Es fand sich ein Aktenvermerk, daß wirklich im Jahre 1816, weil so häufig Steuernachlässe gewährt werden mußten, die Steuerkatasterkommission eine „Schauerstrichkarte nebst einem Nivellement der Schauerstriche“ herstellen ließ. Ein Jahr nachher erbat sich das Ministerium des Inneren dieses Exemplar, um es bei der beabsichtigten Förderung einer Assekuranz gegen Hagel- und andere Elementarschäden zu verwenden. Am 30. August 1817 wurde es diesem Ministerium „zum beliebigen Gebrauche“ übermittelt. Der betreffende Akt befindet sich noch im Archive genannter Stelle, aber die Karte liegt nicht mehr bei und scheint nach dem, was die Ministerialregistratur mitteilt, schon frühzeitig abhanden gekommen zu sein.

2) A. v. Humboldt, Des lignes isothermes et de la distribution de la chaleur sur le globe, Mém. de phys. de la Société d'Arcueil. 3. Teil. Paris 1817.

ernen Wert hat und von der Folgezeit mehr, als es geschah, beachtet zu werden verdient hätte.

Schweigger schritt nämlich auf dem Wege, welche seine erste Arbeit vorgezeichnet hatte, weiter fort.¹⁾ Auf die erwähnte bayerische Hagelkarte zurückkommend, die ihm offenbar gut bekannt war, und deren Verlust auch von uns Epigonon nur beklagt werden kann, meint er, diese sei „das beste, was in neuerer Zeit für elektrische Meteorologie geschehen ist“. In solchem Sinne sollte allgemeiner vorgegangen werden, und zwar appelliert er an die Naturforschende Gesellschaft Halles, sich an die Spitze der zu dem Ende zu schaffenden Organisation zu stellen. Ihre Aufgabe wäre es, sich mit möglichst vielen gelehrten Korporationen und „Agrikulturgesellschaften“ zu verbinden, um Material zu sammeln, und nicht minder müsse auch die Tagespresse zur Mitwirkung herangezogen werden. Der so gebildete Verein wird die Sammlung aller Daten und die „Herstellung einer Gewitterkarte“ besorgen. Wie Schweigger sich eine solche denkt, sagt er freilich nicht direkt, aber aus dem ganzen Zusammenhange geht doch hervor, welches Ziel er vor Augen hatte. Vermutlich sollten auf ihr alle zur Beobachtung gelangten Gewitterstraßen verzeichnet sein, und zwar mit Notierung der Orte, welche zu einer gewissen Zeit von dem fortschreitenden Gewitter erreicht worden waren. So erließ denn auch²⁾ die genannte Gesellschaft ein Anschreiben an sämtliche wissenschaftliche Vereine Deutschlands, „und namentlich an ihre sich für Meteorologie interessierenden Mitglieder“. Es war daran gedacht worden, daß auf jede Quadratmeile ein Beobachter kommen sollte, was ein ungemein dichtmaschiges Netz geliefert haben würde. Außer Schweigger und einigen minder bekannten Mitgliedern hatte den Aufruf auch der Mineraloge und Paläontologe K. F. Gernar (1786—1853) unterzeichnet.

¹⁾ Schweigger, Über Gewitterwolken und Stürme und eine zur Beobachtung ihrer Bildung und ihres Zuges bestimmte Gesellschaft, Journal für Chemie und Physik, 27. Band, S. 353 ff.

²⁾ Ebenda, S. 361 ff.

Die erste beipflichtende Stimme war diejenige des Breslauer Physikers H. W. Brandes (1777—1834), eines Mannes, der innerhalb der meteorologischen Forschung dieses Zeitabschnittes eine besonders geachtete Stellung einnahm.¹⁾ Die von Halle ausgehenden Vorschläge, erklärt er,²⁾ sind gut, bedürfen aber noch der Ergänzung. Die neu zu bildende Assoziation soll auch ermitteln, wie sich die Gewitterwolken im Einzelfalle bilden, und „Zeit und Ort der ersten Blitze bestimmen“. Korrespondenzbeobachtungen würden den Punkt auf der Erde finden lassen, in dessen Zeit das Gewitter zustande kommt, und so vielleicht auch Anhaltspunkte für die Erkenntnis der Entstehungsursache an die Hand geben. So ließen sich die Ausdehnung der Gewitterwolken und deren Vorwärtsbewegung der Kontrolle unterwerfen; die Zeichnung von Hagelkarten bleibe ebenso zu wünschen. Man ersieht aus diesen Andeutungen, wie nahe Brandes bereits den Homobronten gekommen war, den Ortskurven gleichzeitigen ersten Donners; jenen Kurven also, die uns später bei allen Studien über Gewitterfortpflanzung so namhafte Dienste geleistet haben.³⁾

¹⁾ Hierauf ist schon früher an diesem Orte hingewiesen worden (S. Günther - S. Dannbeck. Die Vorgeschichte des barischen Windgesetzes, Sitzungsberichte der bayerischen Akademie der Wissenschaft, Math.-Phys. Kl., 1905, S. 395 ff.). Brandes hat durch seine Untersuchungen über die Tendenz der Luft, von einem Orte sehr hohen Luftdruckes gegen einen benachbarten Ort sehr niedrigen Luftdruckes hin abzuströmen, den vierzig Jahre später eingetretenen Aufschwung der Witterungskunde vorbereitet, wenn auch bedauerlicherweise seine Verdienste nicht immer die richtige Würdigung fanden. Seine Hauptschrift (Beiträge zur Witterungskunde, Leipzig 1820) wird man auch jetzt noch gerne wegen ihres Ideenreichtums lesen.

²⁾ Brandes, Vorschläge zu Witterungsbeobachtungen, Journal für Chemie und Physik, 29. Band, S. 261 ff.

³⁾ Wie man sich der Homobronten, die zugleich als Gewitterfronten aufzufassen sind, in der Praxis zu bedienen habe, zeigten v. Bezold und C. Lang (Beobachtungen der meteorologischen Stationen Bayerns, 1. Band, S. XXXVII). Von da an datiert der reguläre Gewitterdienst in Italien. Die Italiener verfahren ganz ähnlich, indem sie nur, was einer kleinen Parallelverschiebung der Kurven gleichkam, nicht vom erstgehörten Donner,

Denn ob man den ersten Blitz oder den ersten Donner zeitlich festhält, kommt sachlich ziemlich auf das gleiche hinaus; der letztere gewährt nur insofern Vorteile, als die akustische Begleiterscheinung des Gewitters nicht so leicht, wie die optische, übersehen werden kann. Durch systematische Kombination der von Halle und von Breslau gegebenen Anregungen konnte somit tatsächlich der Meteorologie ein ganz neues Arbeitsgebiet schon damals erobert werden.

Zunächst mochte es so aussehen, als ob diese Hoffnung Schweiggers auch in Erfüllung gehen würde. Seine Naturforschende Gesellschaft ließ es nicht bei ihrer ersten Aufforderung bewenden, sondern kam bald nachher auf sie zurück in einer Veröffentlichung,¹⁾ welche dartun sollte, daß der frühere Aufruf bereits seine Wirkung getan habe. Derselbe war 1820 anläßlich der Leipziger Ostermesse verteilt und versandt worden, „um dadurch die Bildung eines wissenschaftlichen Vereines zur Beobachtung des Gewitterzuges zu veranlassen“. Es hatten sich auch schon Mitglieder von Ruf zur Übernahme bestimmter Landesteile gemeldet. Brandes (s. o.) wollte Schlesien, der Astronom B. A. v. Lindenau (1780—1857) wollte das Herzogtum Sachsen-Gotha, der Jenaer Mathematiker J. F. Posselt (1784—1823) wollte das Großherzogtum Sachsen-Weimar, der Forstklimatologe C. Arzberger (1772—1822) wollte das Herzogtum Sachsen-Koburg, Arens²⁾ Westfalen, der Karlsruher Phy-

sondern von der „Maximalphase des Gewitters“ ihren Ausgang nahmen. So ließ sich dann die Abhängigkeit der Sturmbahn von den regionalen Verhältnissen genauer verfolgen (Boernstein, Die Gewitter vom 13. bis 17. Juli 1884 in Deutschland, Hamburg 1884; Günther, Die Mechanik der Gewitterfortpflanzung, Humboldt, 7. Jahrgang, S. 414 ff.).

¹⁾ Nachricht über die Gesellschaft zur Beobachtung der Gewitter, Journal für Chemie und Physik, 31. Band, S. 119 ff. Seit diesem Jahre, in welchem auch der Technologe J. L. G. Meinecke (1781—1823) in die Redaktion eintrat, führt die Zeitschrift noch einen zweiten Titel mit besonderer Berechnung der Jahreszahlen (Jahrbuch der Chemie und Physik).

²⁾ Wer gemeint ist, steht nicht völlig fest; wahrscheinlich F. Arens, von dem Hellmann (a. a. O., Sp. 13) mehrere literarische Arbeiten namhaft macht.

siker K. W. Boeckmann (1773—1821) Baden, der Tübinger Botaniker G. Schübler¹⁾ (1787—1834) Württemberg und endlich der durch sein Werk über die Phosphoreszenz berühmt gewordene Regensburger Gelehrte Placidus Heinrich (1758 bis 1825) Bayern nebst den Salzburger und Tiroler Alpen übernehmen. Der Observator an der Sternwarte zu Halle K. L. G. Winkler, über dessen Lebensumstände sonst recht wenig bekannt ist, war zur Zusammenstellung und Verarbeitung der einlaufenden Korrespondenznachrichten ausersehen. Einer Lieblingsidee Schweiggers Rechnung tragend, sollte die Sammelstelle insbesondere auch herauszubringen suchen, ob die Gewitter mehr dem Zuge der Gebirge sich anschließen oder aber jeweils senkrecht zum magnetischen Meridiane des gerade durchzogenen Landstriches verlaufen sollten. Schweigger nahm auf Grund vorgefaßter Meinungen an, daß das System der Isogonen und dasjenige der regelmäßigen Gewitterzüge sich zu einander wie zwei Scharen rechtwinkliger Trajektorien verhalten müßten.

Von den meisten Mitarbeitern, deren obiges Verzeichnis gedenkt, hat nichts weiter verlautet, was mehrenteils damit zusammenhängt, daß einige von ihnen schon sehr bald vom Tode abberufen wurden. Dafür suchten einige andere Meteorologen, die sich nicht in der Reihe der sozusagen offiziellen Teilnehmer verzeichnet finden, einen Beitrag zu liefern. K. L. Gronau (1772—1846) und J. Schoen (1771—1839) gehören hierher; ihre Arbeiten²⁾ waren insofern immerhin von einigem

¹⁾ Dieser Gelehrte, der sich neben seinem Nominalfache hauptsächlich der Meteorologie und ihrer Anwendung auf die Landwirtschaft widmete, sollte in der Geschichte dieser Disziplin mehr beachtet werden, als es zumeist der Fall ist.

²⁾ Gronau, Über die Gewitter in den Gegenden von Berlin, *Journal für Chemie und Physik*, 31. Band, S. 120 ff.; Schoen, Die Gewitter in der Gegend von Würzburg, ebenda, 34. Band, S. 398 ff. Aus Gronaus Studie ist herauszuheben, daß er als Ursprungsquartier der über Berlin hinstreichenden Gewitter vorzugsweise SW, am seltensten N und NE anzugeben in der Lage war. Auch mag folgender Satz notiert werden: „Des Herrn Prof. Planers und des Herrn Bergrates Rosenthals Be-

Werte, als durch sie die Erfahrungsregel, in welcher Richtung die Gewitter auf deutschem Boden sich zu verbreiten pflegen, in Einzelfällen bekräftigt werden konnte.

Derjenige Meteorologe, welcher auf den von Halle gekommenen Anstoß am kräftigsten reagierte, war unstreitig Schübler (s. o.). Mit wahren Feuereifer nahm er sich der Sache an, die für ihn schon aus dem Grunde besonders bedeutend war, weil das Studium der atmosphärischen Elektrizität seine Lieblingsbeschäftigung bildete. Er verstand es, die landwirtschaftliche Interessenvertretung seines Landes für aktive Unterstützung der Pläne der Naturforschenden Gesellschaft Halles zu gewinnen, indem aus diesen Kreisen nicht weniger als 30 freiwillige Beobachter sich meldeten.¹⁾ Die von der Stuttgarter Zentralstelle hinausgegebenen Fragebogen hatten einen sehr verständigen Inhalt, indem sie sich auf die nachstehenden vier Punkte beschränkten: I. Findet sich eine sogenannte Wetterscheide in der Gegend des Korrespondenten, wo nämlich die Gewitter sich trennen, oder wo sie zuweilen

merkungen, daß die Nähe der Gewittermaterie sich durch ein plötzliches Steigen des Barometers merklich mache und nach erfolgtem Einschlagen wieder auf den vorigen Stand allmählich zurückkehre, habe ich mehrmalen durch die Erfahrung bestätigt gefunden.“ Was den Grund dieser zunächst sehr bedenklich klingenden Äußerung ausmacht, hat Hellmann (Eine historische Bemerkung, Zeitschr. der österr. Gesellsch. f. Meteorol., 19. Band, S. 43) klargestellt. Auch von Schoen wird behauptet, daß fast alle von ihm beobachteten Gewitter „aus dem westlichen Quartier“ heranziehen. Später folgende Gewitter folgen mit Vorliebe der einmal betretenen Bahn. Das Problem der Gewitterperiode wird ebenfalls behandelt; nur sei auch der allgemeine Charakter des Jahres von Einfluß, indem wenigstens die Würzburger Umgebung in guten, fruchtbaren Jahren auf weit mehr Gewitter zu rechnen habe, als in der Durchschnittszahl 12 zum Ausdrucke kommen. Es kann dies offenbar nur heißen, daß in sehr warmen Jahrgängen, wenn also die Stärke der Insolation ungewöhnlich zunimmt und damit auch die Aussichten des Mittelraums auf eine ergiebige Weinernte sich steigern, eine erhöhte Gewittertendenz hervortritt, wie sich das ja angesichts der Abhängigkeit der Gewitterbildung vom aufsteigenden Luftstrom ganz von selbst versteht.

¹⁾ Korrespondenzblatt des Württemberger Landwirtschaftlichen Vereins, 1823, 3. Heft.

ungewöhnlich lange stehen bleiben? II. Ist die Gegend, oder eine der benachbarten Gegenden, mehr als andere den Schloßen ausgesetzt? III. Wie oft wurde die Gegend seit den letzten 10 oder 20 oder 30 Jahren u. s. w. von Schloßen befallen? IV. Aus welcher Himmelsgegend kommen am häufigsten die Gewitter, und aus welcher pflügen die schwersten in diesem Bezirke zu kommen? Man sieht, daß zwei dieser Fragen sich auf den gefährlichsten Feind der Getreidefelder, auf den Hagel, beziehen und man hat wohl ein Recht, zu glauben, daß durch die entsprechenden Antworten, ähnlich wie in Bayern (s. o.), eine Unterlage für die Versicherung gegen das furchtbare Elementarereignis angestrebt wurde. Die erste und vierte Frage hingegen haben es mit den Gewittern schlechtweg zu tun, und daß ihre Beantwortung wichtige allgemeine Schlüsse ermöglichen mußte, wird sich nicht in Abrede stellen lassen.

Das so gesammelte Material verhalf nun Schübler zu einer Untersuchung,¹⁾ welche wohl als die wertvollste von all den durch die Gelehrten Halles inspirierten Arbeiten anzusehen ist. Gleich Anfangs sieht er sich zu dem wichtigen Erfahrungssatze geführt:²⁾ „Der größte Teil der Gewitter zieht in Württemberg von West (SW, W, NW) nach Ost (NE, E, SE).“ Meridionale Gewitter sind selten, Ostgewitter noch seltener, wie denn z. B. von solchen das Jahr 1821 auch nicht ein einziges aufwies. Sehr viele Gewitter sind jedoch nur lokal, pflanzen sich folglich nicht auf weitere Entfernung fort. Ist aber letzteres der Fall, so scheint die Schwäbische Alb auf Bildung und Richtung der Gewitter einen gewissen Einfluß auszuüben. Auch Wetterscheiden sind in Württemberg eine Realität. Sie halten die Gewitter auf oder zwingen sie, einen anderen Weg einzuschlagen. „Zuweilen geschieht es, daß sich ein Gewitter durch eine solche Wetterscheide in zwei Teile teilt, welche nun entweder getrennt weiterziehen oder sich auch wieder hinter

¹⁾ Schübler, Über die Bildung und verschiedene Richtung der Gewitter und Schloßen in Württemberg, Jahrbuch für Chemie und Physik, 31. Band, S. 132 ff.

²⁾ Ebenda, S. 138.

der Wetterscheide vereinigen, wenn diese durch einen mehr einzeln stehenden Berg gebildet wird.“¹⁾ Erhebungen von dieser Art glaubt Schübler in seinem Staate nicht weniger als 27 unterscheiden zu müssen. Eingehend wird von der „Richtung und Entstehung gefährlicher Gewitter“ gehandelt. Zu diesen gehören vor allem die Wintergewitter, „weil sie tiefer ziehen“, womit dann eine verstärkte Neigung zum Einschlagen verbunden ist. Vielfach glaubt man im Lande, die Zugrichtung des ersten Gewitters eines Jahres sei bestimmend für alle die Gewitter, welche im gleichen Jahre nachfolgen. Ein Nachtrag²⁾ vermehrt die Anzahl der stabilen Wetterscheiden um sieben Nummern. Von den Ostgewittern zeigte sich auch im Jahre 1821, daß sie selten, zugleich jedoch „schloßengefährlich“ seien; sie ereigneten sich ausschließlich im April. Als eine neue Tatsache wird die angeführt, daß die Gewitterfrequenz mit der Meereshöhe zunehme. Das folgende Jahr ergab bezüglich der Gewitterrichtung keine neuen Gesichtspunkte,³⁾ indem von Osten kommende Gewitter auch jetzt wieder zu den Seltenheiten zählten. Noch nicht berücksichtigt war bei der bis dahin aufgemachten Gewitterstatistik die Geschwindigkeit der Fortbewegung; nunmehr wird auch diesem Elemente Rechnung getragen, und es wird konstatiert, daß einmal ein Gewitter in der Stunde einen Weg von 24 geographischen Meilen zurücklegte. Ein dritter Ergänzungsaufsatz,³⁾ der das Jahr 1824 in Betracht zieht, macht uns mit einer verhältnismäßig größeren Anzahl von östlichen Gewittern bekannt. Hagel kam häufig vor; was Schübler darüber in Erfahrung brachte, ließ ihm die Berechtigung der Hageltheorie v. Buchs⁴⁾ wahrscheinlich vorkommen. Seine

1) Ebenda, S. 138.

2) Schübler, Über die Gewitter des Jahres 1822 in Württemberg und einigen der angrenzenden Gegenden, ebenda, 38. Band, S. 164 ff.

3) Schübler, Über die Gewitter und Schloßen des Jahres 1824 in Württemberg und den angrenzenden Gegenden, ebenda, 44. Band, S. 216 ff.

4) L. v. Buch. Über den Hagel, Abhandlungen der Preuß. Akademie der Wissenschaften, Phys. Kl., Berlin 1814—1815, S. 73 ff. In Verbindung mit anderen Betätigungen des großen Geologen auf diesem und verwandtem Arbeitsfelde wird die Abhandlung besprochen an anderem Orte

Worte lassen mutmaßen, daß er auch eine graphische Darstellung der Hagelbahnen entworfen hat, aber auch von seiner Hagelkarte hat sich, sowenig wie von der bayerischen, eine Spur erhalten.

Diese Resultate, die wir nur in aller Kürze wiedergeben, sind es wohl wert, einer tiefer eindringenden Analyse teilhaftig zu werden, und eine solche wird erkennen lassen, daß der schwäbische Meteorologe in Wahrheit ganz auf dem richtigen Wege sich befand, eine auch höheren Ansprüchen genügende Gewitterlehre zu schaffen, soweit eben die Zeitumstände die Möglichkeit hiezu gewährten. Eine ganze Reihe von Erkenntnissen, die er erzielte, läßt sich mit dem, was wir heute als gesicherte Wahrheit zu besitzen überzeugt sind, in guten Einklang bringen. So soll denn im folgenden dieser Vergleich zwischen sonst und jetzt gezogen und insonderheit zugleich hervorgehoben werden, welche Tatsachen erst die fortschreitende Forschung des ausgehenden XIX. Jahrhunderts von neuem feststellen mußte, obwohl sie bereits mit einigem Rechte als gesichert hätten gelten können.

In erster Linie war ermittelt, daß die Menge der von Ost nach West ziehenden Gewitter gegenüber der Menge der die entgegengesetzte Richtung einhaltenden nur eine sehr geringe ist — zunächst für Südwestdeutschland, dann aber auch für andere Landesteile.¹⁾ Damals, als man zuerst diese Einsicht gewann, mußte man sie als eine empirische hinnehmen, während wir es jetzt als selbstverständlich betrachten dürfen, daß die Sturmzentren sich im allgemeinen auf den sogenannten Zugstraßen der barometrischen Minima bewegen, die vom Atlantischen Ozean her den Körper Europas durchschneiden. Damit war mithin natürlich auch die Wahr-

(Günther, Die Bedeutung Leopold v. Buchs für die atmosphärische Physik, Gerlands Beiträge zur Geophysik, 5. Band, S. 185 ff.).

¹⁾ Im Mittel entfallen in Bayern 10 Ostgewitter auf 100 Westgewitter. Auch die Jahreszeit spielt da eine gewisse Rolle; so sind nach Hann (Gewitterperioden in Wien, Meteorol. Zeitschr., 3. Band, S. 237 ff.) östliche Gewitter im Spätsommer besonders selten.

nehmung erklärt, daß später folgende Gewitter den Spuren ihrer Vorgänger zu folgen pflegen, ohne daß man zu den künstlichen Hypothesen Voltas (s. o.) seine Zuflucht zu nehmen brauchte.¹⁾ Den Gegensatz zwischen lokalen und rasch fortschreitenden Gewittern, dessen Bestehen sich Schübler (s. o.) aufgedrängt hatte, mußte die spätere Zeit als eine natürliche Konsequenz der Verschiedenheit der Bedingungen verstehen lernen, welche für die elektrischen Ausgleichsprozesse bestehen; Mohn²⁾ hat dafür die bezeichnenden Ausdrücke Wärme- und Wirbelgewitter geprägt und dargetan, daß diejenigen, welche z. B. den Tropen eigen sind und, fast stets ohne Gefahrbegleitung, viel Geräusch verursachen, lediglich auf die intensive Sonnenbestrahlung und die dadurch bedingte energische Luftauflockerung zurückzuführen sind. Auch das Wesen der von ihm als Wetterscheiden bezeichneten Bodenformen ist von Schübler zutreffend erfaßt worden; allerdings hatte man wohl auch schon vorher einzelne Fälle dieser Art kennen gelernt.³⁾

1) Die Angaben Schüblers bestätigte oder antizipierte vielmehr der rheinische Arzt J. J. Günther (Bemerkung zu Voltas Abhandlung über periodische Wiederkehr der Gewitter, Journal für Chemie und Physik, 21. Band, S. 105 ff.), der seine Erfahrungen namentlich im Siebengebirge gemacht zu haben meldet. Die theoretischen Anschauungen Voltas vermag der Autor nicht zu teilen; sie seien lediglich von „Gebirgsschluchten“ abstrahiert und paßten nicht auf ein weites Flachland (um Cöln a. Rh.) mit angrenzendem Gebirge.

2) H. Mohn, Grundzüge der Meteorologie, Berlin 1883, S. 323. Daß der Gegensatz zwischen beiden Grundformen kein schroffer ist, braucht nicht erhärtet zu werden; Mohn selbst, im Vereine mit Hildebrandsson (Les orages dans la peninsule Scandinave, Upsala 1883) und v. Bezold (Zur Thermodynamik der Atmosphäre, Sitzungsber. der Preuß. Akad. der Wissensch., 1892, S. 295) haben die Übergänge aufgezeigt und der Schwierigkeit gedacht, welche hie und da die Zuweisung eines bestimmten Gewitters zu einer der beiden Kategorien mit sich bringen würde. Gleichwohl besteht grundsätzlich der Unterschied zu Recht.

3) Schon vor zweihundert Jahren schrieb (Frankfurter Zeitung, 17. April 1887) der Luzerner Naturforscher Segesser dem Nachbarberge Pilatus die Eigenschaft zu, als ein Anziehungszentrum für Gewitter zu wirken.

Neuestens ist die Einwirkung von Terrainungleichheiten auf den Gewitterzug von Boernstein (s. o.), H. Meyer¹⁾ und — im Experimente — von Vettin²⁾ gründlich studiert worden, und es hat sich da u. a. gefunden, daß isolierte Kuppen vom Sturmfelde förmlich umgangen werden müssen, was natürlich eine Verzögerung bewirkt und, wenn die im Gewitter aufgespeicherte Energie nicht ausreicht, zu dessen gänzlichem Erlöschen führen kann. Daß Wintergewitter in Bezug auf das Vorkommen zündender Blitze die meistgefährlichen sind, wurde gleichfalls bemerkt.³⁾ Kurz, man muß zugestehen, daß Schübler aus dem doch immer recht unvollständigen Beobachtungsstoffe, welchen ihm seine schwäbischen Landsleute zur Verfügung zu stellen vermochten, so viel gemacht hat, als möglich war. Er hat ziemlich viel von dem vorweggenommen, was der gut eingerichtete Gewitterdienst späterer Jahre, dann selbstredend auch mit größerer Zuverlässigkeit, auf dem Gebiete der Gewitterforschung zu leisten im stande war.

So hat denn der Anstoß, welchen die Initiative der von Schweigger beeinflussten Naturforschenden Gesellschaft Halles gab, recht segensreich gewirkt. Leider hat derselbe nicht lange genug nachgewirkt; nur wenige Jahre hindurch wurden die Beobachtungen mit der wünschenswerten Regelmäßigkeit in Gang erhalten. Während dieses Zeitraumes suchte die Auftraggeberin auch zusammenfassende Schlüsse aus den bei ihr einlaufenden Mitteilungen zu ziehen. So gab⁴⁾ der bekannte Geologe C. Keferstein (1784—1870) einen Überblick über die vorläufig

1) H. Meyer, Die Gewitter des oberen Leinetales am 1. Juni 1886, Meteorol. Zeitschr., 3. Band, S. 345 ff.

2) U. F. F. Vettin, Experimentelle Darstellung von Luftbewegungen unter dem Einflusse von Temperaturunterschieden und Bewegungsimpulsen, Meteorol. Zeitschr., 1. Band, S. 227 ff.

3) Vgl. S. Günther, Handbuch der Geophysik, 2. Band, Stuttgart 1899, S. 147.

4) Keferstein, Jahrbuch über die Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle, vom 3. Juli 1821—1822, Journal für Chemie und Physik, 37. Band, S. 4 ff.

gewonnenen Ergebnisse. Schüblers angestrebter Arbeit wird mit gebührender Lobe bedacht. Bei dieser Gelegenheit erfahren wir auch erst die Namen sämtlicher Mitarbeiter; unsere Liste derselben¹⁾ gibt zu erkennen, daß viele von ihnen nur Liebhaber, nicht eigentlich Fachmänner waren. An der Überarbeitung wurde Winckler (s. o.) durch gehäufte Berufsgeschäfte verhindert, weswegen der Berichtersteller jetzt das Bemerkenswerteste heraushebt. Er habe die den Gewitterzug betreffenden Daten sämtlich verglichen und gefunden, daß solche „in der süd-nördlichen Linie“ nur ganz ausnahmsweise vorkämen, während „die westöstliche“ souverän vorherrsche. „Dieser Satz wird besonders deshalb von Interesse, weil in Deutschland die Gebirge und Gebirgsmassen, im allgemeinen und großen betrachtet, eine westöstliche Richtung haben und daher ein Zusammenhang des Gewitterzuges nicht sowohl mit dem Berg- und Talzuge, wie man gewöhnlich glaubt, als mit der Gebirgsformation überhaupt sich offenbaren dürfte. Daß in diesem Sinne die

1) Zschokke in Aarau, Schopfel in Bayreuth, Weber in Werben (an der Elbe), Völker in Altenstadt (Thüringen), Schnetger in Machern (bei Leipzig), Gronau in Berlin, Riese in Halberstadt, Posselt und Schroen — an Ort und Stelle fälschlich Schoen — in Jena, Hornschuh in Greifswald, Bo frank in Bobbin (Insel Rügen), Heisinger in Eicha (Hessen), Schulz in Naumburg, Brandes in Breslau, Schramm in Leobschütz (Schlesien), Spahn in Eisenberg (bei Gera), Chomanus in Niederroßla (am Harz), Wachter in Hamm (Westfalen), Ahrens in Augsburg, Hummel in Dassel (Westfalen), Ausfeld in Schnepfenthal (Thüringen) und Tilesius in Mühlhausen (Thüringen). Von diesen Männern sind uns Gronau, Posselt und Brandes bereits bekannt. Unter den übrigen tritt J. H. D. Zschokke (1771—1848) einigermaßen hervor, dessen Behandlung eines Problemes der meteorologischen Optik, der „farbigen Schatten“, von sich reden machte. Außerdem haben sich in der Gelehrtenrepublik noch eine Stelle errungen H. L. F. Schroen (1799—1875), der, teilweise auch auf Goethes Antrieb, die meteorologischen Stationen Thüringens organisierte; A. J. Schramm (1773—1849), der über verschiedene physikalisch-geographische Gegenstände schrieb; J. T. Ahrens (1786—1841), sonst nur als geometrischer Schriftsteller bekannt; W. G. Tilesius von Tilenau (1769—1857), der als Naturforscher der Weltumsegelung v. Krusensterns zugeteilt war und als solcher n. a. Beiträge zur Lehre vom Leuchten des Meeres lieferte.

Gebirgsformation nicht ohne Beziehung auf das Meer zu betrachten, dessen Einfluß auf Wolken- und Gewitterbildung unverkennbar, versteht sich ohnehin.“ Es ist dies eine der ersten Andeutungen, daß schließlich alle unsere Witterungserscheinungen in letzter Linie durch den Ozean bestimmt werden.

Daß auch Keferstein der Schweiggerschen Schrulle, den Gewitterzug (s. o.) in räumliche Abhängigkeit von den Isogonen zu bringen, eine Konzession macht, kann dem nicht auffallen, der sich des ungeheuren Aufsehens entsinnt, welches Oerstedts Entdeckung des Elektromagnetismus eben in jener Zeit in den weitesten Kreisen erregt hatte. Man dürfe, wird gesagt, die Gewitter nicht bloß als eine elektrische, man müsse sie vielmehr auch als eine elektromagnetische Erscheinung betrachten.¹⁾ Weiter wird eines Vortrages Erwähnung getan, den Inspektor J. Bullmann (1761—1841), der Ersatzmann für den anderweit in Anspruch genommenen Winkler (s. o.), gehalten habe, und der neben einigen Aufschlüssen über die Tages- und Jahresperiode der Gewitter auch die Herkunft der allermeisten Gewitter aus dem Westen sichergestellt habe. Anhangsweise legt Keferstein noch eine Einsendung des obengenannten Weltumseglers v. Tilesius vor, die sich auch mit einer verwandten Frage befasse,²⁾ und schließt mit Bemerkungen über die Wirkung der Blitzschläge auf den menschlichen Körper und auf Bäume,³⁾ um sich alsdann der Mineralogie und Geologie zuzuwenden.

¹⁾ Man hatte sich von Halle aus an die St. Petersburger Akademie gewandt, um dieselbe für eine regelrechte Beobachtung der Gewitter in Sibirien zu interessieren, weil dort der Verlauf der Isogonen ein von denjenigen in Europa verschiedener sei. Die Hoffnung, einer der folgenden Jahresberichte werde nach dieser Seite hin neue Aufschlüsse liefern, mußte sich freilich aus naheliegenden Gründen als illusorisch erweisen.

²⁾ Aus deutscher Literatur dürften wohl nur wenige ältere Originalberichte über einen durchlebten Taifun — hier „Typhon“ benannt — vorliegen. Der Zusammenhang eines solchen mit einem extremen barometrischen Tiefstande wird richtig betont, gleichwohl aber die Ursache in „einer Erschütterung des Meeresgrundes“ gesucht. Der Taifun als solcher wäre demnach die Veranlassung des Barometersturzes.

³⁾ Eichen sollen besonders häufig, Buchen dagegen auffallend selten vom Blitze getroffen werden.

Die weitaussehenden Projekte der Naturforschenden Gesellschaft sind allerdings nicht in Erfüllung gegangen.¹⁾ Bullmann hat noch wiederholt tabellarische Zusammenstellungen von Gewitterbeobachtungen gegeben,²⁾ aber zu theoretischer Durchdringung derselben kam es nicht mehr. Auf rein privatem Wege, ohne Unterstützung des Staates konnte auch um so weniger ein voll befriedigender Erfolg erreicht werden, weil die einzelnen Mitglieder der Assoziation zu sehr von anderen Aufgaben in Anspruch genommen waren. Der tätigste und am meisten vom Erfolge begünstigte Forscher, Schübler in Tübingen, ließ diese weit mehr versprechende Arbeit allmählich ganz hinter seinen minder glücklichen Absichten, einen Einfluß des Mondes auf das Wetter nachzuweisen, zurücktreten. Auch ein neuer, sehr verbesserter Fragebogen, den die Gesellschaftsleitung hinausgab,³⁾ konnte keine Wendung herbeiführen; nach etwa fünfjährigem Bestehen scheint sich der Gewitterausschuß der im übrigen weiter blühenden Naturforschenden Ge-

¹⁾ Keferstein spricht sich darüber (a. a. O.) folgendermaßen aus: „Eine Menge höchst interessanter Gegenstände sind bei den Gewittern noch zu erforschen. Unserer Gesellschaft ist es besonders darum zu tun, den Einfluß der Lokalitäten hiebei zu studieren. Aber dazu ist eine große Zahl von Beobachtern nötig. Jedoch eben, weil Gewittererscheinungen so gewöhnlich sind, würdigen wenige sie zu beachten und aufzuzeichnen. Die Entwerfung einer Hagelkarte von Deutschland nach dreißigjährigem Durchschnitte, welche wir beabsichtigen, ist ein für Assekuranzgesellschaften gegen Hagelschaden unmittelbar nützlichem Unternehmen. Dennoch erhielt unsere Gesellschaft, trotz den Anforderungen in öffentlichen Blättern, noch nicht die gewünschten Mitteilungen.“ Es waltete sonach über der Hagelmappierung, wie wir schon vorhin erfuhren, ein eigentümlicher Unstern, und erst seit zwanzig Jahren ist durch die Mühewaltung der K. Bayer. Hagelversicherungskammer der alte Gedanke verwirklicht worden.

²⁾ Dieselben, die Jahre 1821 bis 1825 umfassend, finden sich in den jährlichen Berichten der Naturforschenden Gesellschaft (bis 1826) und in den Bänden 37, 39, 46 und 51 des Schweiggerschen Journalles.

³⁾ Das Datum der Hinausgabe war der 12. Juni 1823. Diesmal sind „als Direktorium“ unterschrieben der Montanist W. F. v. Veltheim (1785—1839), der Anatom J. F. Meckel (1781—1833), der uns schon bekannte Meinecke und der Pharmazeut K. F. W. Meißner (1792—1853).

sellschaft aufgelöst zu haben. Wir geben jedoch die Einrichtung des Zirkulares wieder, weil sie am besten dartut, von wie

Tag des Gewitters	Stand und Zug der Gewitter	Zeit der Gewitter			Himmelsgegend	
		Anfang	Größter Sturm; nebst Angabe der Minuten und Sekunden zwischen Blitz und Donner	Ende	Woher das Gewitter kam	Wohin es zog
	Auch, wann die Gewitter zum Ausbruch kommen, Himmelsgegend und Zeit des Wetterleuchtens oder irgend einer anderen, mit entfernten Gewittern in Verbindung stehenden Lichterscheinung					

Niemand wird leugnen, daß das Rundschreiben allen Hauptpunkten, die bei der Gewitterforschung maßgebend sein können, gerecht zu werden getrachtet hat.

richtigen Ansichten sich dessen Verfasser haben leiten lassen.
Nachstehend das Schema:

Vindrichtung vor, während, nach dem Ge- witter	Bewölkung			Witterung		Anmerkungen
	Ob es von Sturm, Regen und Schnee begleitet war	Ob es von starkem, häufigem, nahem oder fernem Blitz und Donner begleitet war	Ob elek- trisches Licht an hervor- ragenden Spitzen, ob Feuer- kugeln, Erdstöße u. s. w. be- merkt wurden	Vor- her	Nach- her	
Vobei auf die n der Gegend es Beobach- ers vorherr- schenden Vinde in den einzelnen Jahreszeiten zu achten						Mit Beziehung auf Blitzschläge, Peri- odizität der Gewitter, Wetterscheiden u. s. w. Auch außer- ordentliche meteo- rologische Phäno- mene, welche oft statt der Gewitter aufzutreten pflegen, als großer Höhen- rauch, Orkane, Wir- belwinde u. s. w. würden hierher ge- hören, sowie auch gelegentliche Nach- richten von Erd- stößen, plötzlichem Steigen oder Aus- bleiben von Quellen, von merkwürdigen Wettererschei- nungen in den Tiefen der Berg- werke, von unge- wöhnlicher Unruhe meteorologischer In- strumente, der Mag- netnadel u. s. w. wer- den der Gesellschaft willkommen sein.

Wäre in diesem Sinne eine Reihe von Jahren hindurch
auf größerem Flächenraume anhaltend und zielbewußt gearbeitet
worden, man hätte sich in den Besitz eines gewaltigen Roh-

stoffes von Erfahrungstatsachen gesetzt, dem die wichtigsten Anhaltspunkte für Gewitterzug, Gewitterhäufigkeit, Gewitterperioden und geographische Verbreitung der Gewitter¹⁾ hätten entnommen werden können. Auch in den bescheidenen Grenzen, innerhalb deren nach Zeit und Raum die Freunde der Zentralinstanz von Halle ihre Wirksamkeit gebannt sahen, war von positiven Erkenntnissen eine nicht verächtliche Summe zutage gefördert worden, obschon, wie Hellmann (a. a. O.) mit Recht bemerkt, die indirekt erhaltenen Früchte — Konsolidation der meteorologischen Beobachtungen in Mitteldeutschland und Württemberg — noch vor den direkt gewonnenen einen Vorsprung behaupteten. In verschiedenen Beziehungen aber wäre es zweckdienlich gewesen, wenn die bayerischen und italienischen Regeneratoren der Gewitter-Meteorologie, denen sich sofort gleichstrebende Genossen in Belgien und Skandinavien anschlossen, unmittelbar an die achtbaren Leistungen ihrer Vorläufer aus den zwanziger Jahren des XIX. Jahrhunderts angeknüpft hätten.

¹⁾ Etwa in dem Ausmaße, wie es vor kurzem bei der dankenswerten Untersuchung von E. Alt (Die geographische Verteilung der Gewitterhäufigkeit in Kontinental- und Nordeuropa, Petermanns Geogr. Mitteil., 1910, S. 5 ff.) innegehalten worden ist. Man würde dann auch Gewittertypen haben erkennen können, wie sie für das südliche und südwestliche Deutschland in die Erscheinung treten (E. Alt-L. Weickmann, Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Bayern, 31. Band).

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch - physikalische Klasse

Jahrgang 1910. 5. Abhandlung

Semikonvergente Entwicklungen für die Zylinderfunktionen und ihre Ausdehnung ins Komplexe

von

P. Debye

Vorgelegt am 5. Februar 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

In einem früheren Aufsatz¹⁾ habe ich gezeigt, wie man für die Zylinderfunktionen geeignete Entwicklungen finden kann, welche dieselben ersetzen können für große Werte des Arguments x und unbeschränkt veränderliche Werte des Index α . Die betreffenden Formeln, welche also als Verallgemeinerung der bekannten Hankelschen semikonvergenten Reihen angesehen werden können, wurden indessen dort nur für reelle Werte von α und x angegeben. Die vorliegende Mitteilung bezweckt die ebenfalls dort schon in Aussicht gestellte Verallgemeinerung für beliebig komplexe Werte von α und x zu liefern. Ihre Verwendung finden diese verallgemeinerten Formeln bei der Berechnung der Beugungserscheinungen, welche durch absorbierende Zylinder oder Kugeln veranlaßt werden.

Die im folgenden angewandte Methode ist wesentlich dieselbe wie in der ersten Abhandlung, beruht also auf einer möglichst günstigen Auswahl des Integrationsweges, welcher zu den durch ihre Integraldarstellung definierten Zylinderfunktionen gehört. Wir werden sehen, daß die früheren Formeln das ganze Gebiet der Variablen, soweit es in Betracht zu ziehen ist, lückenlos ausfüllen.

Eingeteilt haben wir unsere Überlegungen folgendermaßen: Im § 1 werden zunächst die Ausgangsformeln festgelegt für beliebig komplexe Werte von x . Dann werden die sogenannten „Umlaufsrelationen“ für die Zylinderfunktionen zu Hilfe gezogen und gezeigt, daß es ausreicht, nur solche Werte von

¹⁾ Math. Ann. 67 (1909), p. 535.

α und x zu betrachten, deren reeller Teil positiv ist. Zugleich ergibt sich eine einfache geometrische Deutung dieser Relationen. In § 2 werden dann für die zweite Hankelsche Funktion $H_2^\alpha(x)$ die geeigneten Integrationswege gesucht. Diese werden in § 3 zur wirklichen Berechnung des Integrals herangezogen. Es zeigt sich dabei u. a., daß die Darstellung an zwei dort näher definierten Kurven sprungweise in eine andere übergeht, ähnlich wie das auch bei den Hankelschen Reihen der Fall ist, für die die imaginäre x -Achse als Übergangskurve im obigen Sinne fungiert. Den Übergangskurven selbst kommt eine besondere Bedeutung zu, da zu ihnen Werte des Verhältnisses $\frac{\alpha}{x}$ gehören, für die die Hankelsche Funktion verschwindet. Die betreffenden Nullstellen, deren Lage meines Wissens bis jetzt noch nicht festgestellt wurde, werden im § 4 diskutiert. Schließlich wird im § 5 noch die erste Hankelsche Funktion, sowie die gewöhnliche Besselsche betrachtet und das Nötige über die zugehörigen Darstellungen zusammengestellt.

§ 1. Integraldarstellungen und Umlaufsrelationen.

In der oben zitierten Arbeit definierten wir im Anschluß an A. Sommerfeld die von N. Nielsen eingeführten beiden Hankelschen Funktionen durch die Formeln

$$(1) \quad \begin{cases} H_1^\alpha(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{(1)} e^{-ix \sin \tau} e^{i\alpha \tau} d\tau, \\ H_2^\alpha(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{(2)} e^{-ix \sin \tau} e^{i\alpha \tau} d\tau. \end{cases}$$

Das dort über die Wege (1) und (2) gesagte gilt indessen nur für reelle Werte von x . Ist x komplex, z. B. in der Form

$$(2) \quad x = P e^{i\varphi},$$

so wird mit $\tau = a + ib$ der reelle Teil vom Exponenten des in (1) vorkommenden Integranden

$$\Re[-ix \sin \tau] = P \frac{e^b}{2} \cos(a - \Phi)$$

für große positive Werte von b und gleich

$$-P \frac{e^{-b}}{2} \cos(a + \Phi)$$

für große negative Werte von b . Damit also unsere Darstellung (1) einen Sinn hat, müssen wir die Wege so wie in Fig. 1 legen, d. h. den Weg (1) anfangen lassen zwischen $\frac{\pi}{2} - \Phi - i\infty$ und $-\frac{\pi}{2} - \Phi - i\infty$ und endigen lassen zwischen $-\frac{\pi}{2} + \Phi + i\infty$ und $-\frac{3\pi}{2} + \Phi + i\infty$. Der Weg (2) muß anfänglich zwischen $\frac{\pi}{2} + \Phi + i\infty$ und $\frac{3\pi}{2} + \Phi + i\infty$ entspringen und dort, wo (1) anfängt, endigen.

Legen wir von vornherein, wie wir es tun wollen, die Endpunkte unserer Wege fest bei $-\pi + i\infty$, $0 - i\infty$ und $\pi + i\infty$, so gelten dann unsere Darstellungen (1) nur so lange

$$-\frac{\pi}{2} < \Phi < \frac{\pi}{2}.$$

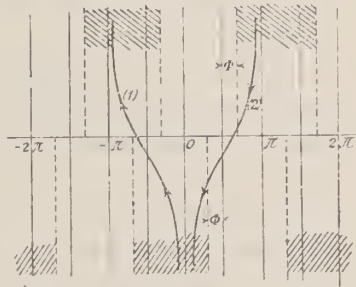


Fig. 1.

Schreiben wir weiter noch

$$(3) \quad a = \varrho e^{i\varphi}$$

und nehmen für φ ebenso an

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

so genügt es dennoch, nur diesen Variabilitätsbereich für a und x näher zu betrachten. Für unsere Funktionen bestehen

nämlich die beiden folgenden bekannten, sogenannten Umlaufrelationen:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_2^{\alpha_0 e^{iq\pi}}(x_0 e^{ip\pi}) = e^{-iq\pi\alpha_0} \left[\frac{\sin(p+1)\pi\alpha_0}{\sin\pi\alpha_0} H_2^{\alpha_0}(x_2) \right. \\ \quad \left. + e^{i\pi\alpha_0} \frac{\sin p\pi\alpha_0}{\sin\pi\alpha_0} H_1^{\alpha_0}(x_0) \right] \\ H_1^{\alpha_0 e^{iq\pi}}(x_0 e^{ip\pi}) = -e^{iq\pi\alpha_0} \left[\frac{\sin(p-1)\pi\alpha_0}{\sin\pi\alpha_0} H_1^{\alpha_0}(x_0) \right. \\ \quad \left. + e^{-i\pi\alpha_0} \frac{\sin p\pi\alpha_0}{\sin\pi\alpha_0} H_2^{\alpha_0}(x_0) \right], \end{array} \right.$$

wobei p und q beliebige ganze Zahlen bedeuten.¹⁾ Haben α_0 und x_0 den oben definierten Variabilitätsbereich, so können wir also von hieraus mittels (4) jeden beliebigen Wert von a und x erreichen. Die Formeln (4) sind hier in etwas anderer Form geschrieben, wie bei Nielsen, loc. cit., die obige Schreibweise ist der Art ihrer Deutung durch unsere Fig. 1 am unmittelbarsten angepaßt. Denkt man sich nämlich Φ stetig wachsend, so schieben sich die oberen, in der Figur schraffierten Grenzbereiche nach rechts, die unteren nach links; eine stetige Fortsetzung wird man nur dann erhalten, wenn man die Endpunkte der Integrationskurven mit verschiebt und so innerhalb des ihnen von vornherein zukommenden Gebietes hält. Andererseits kann man sich die so entstandene langgestreckte Integrationskurve auch zusammengesetzt denken aus Kurven, die immer nur von dem einen oberen (unteren) Endbereich in den nächsten unteren (oberen) reichen; die einfache Transformation aller dieser Teilkurven auf das Gebiet $-\pi$ bis $+\pi$ liefert dann für die H -Funktionen die auf der rechten Seite von (4) angegebenen Darstellungen. Die einzelnen bei diesen Transformationen auftretenden Faktoren bilden nämlich geometrische Reihen, welche sich durch die angegebenen Größen $\frac{\sin(p+1)\pi\alpha_0}{\sin\pi\alpha_0}$ u. s. w. summieren lassen.

¹⁾ Vgl. N. Nielsen. Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904, p. 18 ff.

§ 2. Allgemeine Diskussion der Integrationskurven.

Wir zeigten früher, daß es für die wirkliche Ausführung der Integration am vorteilhaftesten sei, als Integrationskurven solche Wege zu wählen, auf denen der imaginäre Teil des in den Definitionsformeln (1) auftretenden Bestandteiles

$$(5) \quad f(\tau) = i \left(\sin \tau - \frac{\alpha}{x} \tau \right)$$

des Exponenten, einen konstanten Wert annimmt. Maßgebend für den Wert des betreffenden Integrals ist dann im Limes für $x = \infty$ nur die nächste Umgebung desjenigen Punktes, wo der reelle Teil von $f(\tau)$ seinen Minimalwert erreicht und der zugleich einen Sattelpunkt der über die τ -Ebene ausgepannten Fläche des reellen Teiles von $f(\tau)$ bildet. Auch für komplexe Werte von $x = P e^{i\phi}$ können wir mit Vorteil die obige Definition der Integrationskurven beibehalten. Schreiben wir nämlich

$$(6) \quad f(\tau) = R + iJ,$$

so wird der in (1) auftretende Exponent

$$-xf(\tau) = -P(R \cos \Phi - J \sin \Phi) - iP(R \sin \Phi + J \cos \Phi).$$

Da andererseits Φ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegen soll so gibt es eine Kurve, auf welcher der Absolutwert des reellen Teiles unseres Exponenten vom Sattelpunkt aus stetig zunimmt, so daß auch jetzt die Beiträge weiter entfernter Punkte exponentiell kleiner werden mit wachsender Entfernung vom Sattelpunkt. Wir wollen nun in diesem § die charakteristischen Eigentümlichkeiten besprechen, welche die Integrationskurven je nach der Lage des zugehörigen Sattelpunktes auszeichnen.

Was zunächst den Sattelpunkt $\tau = \tau_0$ selbst betrifft, so ist dessen Lage definiert durch die Formel

$$(7) \quad f'(\tau_0) = 0, \quad \text{oder} \quad \cos \tau_0 = \frac{\alpha}{x} = \frac{Q}{P} e^{i(\varphi - \Phi)}.$$

Da nun sowohl φ wie Φ auf Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ beschränkt sind, so kommt man bei der geometrischen Darstellung des Verhältnisses $\frac{a}{x}$ mit der einfach überdeckten komplexen $\frac{a}{x}$ -Ebene gerade aus, unsere Größe τ_0 bleibt deshalb stets im Innern des Streifens $0 - \pi$ der τ -Ebene. Um noch die durch

$$\cos \tau_0 = \frac{a}{x}$$

vermittelte Abbildung genauer zu definieren, sei bemerkt, daß bekanntlich die horizontalen (der reellen Achse der τ -Ebene parallelen) Linien Ellipsen mit den Brennpunkten -1 und $+1$ in der $\frac{a}{x}$ -Ebene und die vertikalen Linien der τ -Ebene Hyperbeln mit denselben Brennpunkten entsprechen. In den sonstigen Streifen der τ -Ebene liegen weitere Sattelpunkte bei

$$\tau = \tau_0 + 2n\pi \quad \text{und} \quad \tau = -\tau_0 + 2n\pi.$$

Wir sahen nun früher schon, daß es für die Auswertung der Integrale wesentlich sei, ob es möglich ist, die vorgeschriebenen Endbereiche auf einer Kurve $J = \text{const.}$ zu erreichen, oder ob man durch mehr wie einen Sattelpunkt hindurch muß. Letzteres war der Fall, wenn τ_0 auf der reellen, ersteres, wenn τ_0 auf der imaginären Achse der τ -Ebene lag. Es ist nun klar, daß sich bei stetiger Verschiebung von τ_0 auch das Bild der Kurven $J = \text{const.}$ stetig ändern muß; andererseits ist es unmöglich, daß unsere Integrationskurven durch zwei Sattelpunkte hindurch gehen, wenn nicht der Wert J_0 , den J in einen Sattelpunkt annimmt, auch noch in einem zweiten vorhanden ist. Wir wollen also zunächst diejenigen Kurven suchen, auf denen zugleich zwei Sattelpunkte mit demselben Wert von J_0 liegen; diese Kurven werden dann das zu untersuchende Gebiet einteilen in Bereiche, von denen jedem ein anderes Verhalten der Integrationswege zukommt.

Fassen wir zunächst die Sattelpunkte $\tau = \tau_0$ und $\tau = -\tau_0$ ins Auge, so ist die zugehörige Grenzkurve definiert durch die Formel

$$\Im [f(\tau_0)] = \Im [f(-\tau_0)]$$

oder auch wegen

$$f(\tau_0) = -f(-\tau_0)$$

durch

$$J_0 = \Im [f(\tau_0)] = 0,$$

d. h. explicite durch

$$(8) \quad \sin a_0 \mathfrak{C}o\mathfrak{J} b_0 - a_0 \cos a_0 \mathfrak{C}o\mathfrak{J} b_0 - b_0 \sin a_0 \mathfrak{S}in b_0 = 0,$$

wenn noch $\tau_0 = a_0 + i b_0$ gesetzt wird. An Stelle von (8) schreiben wir

$$(8') \quad \frac{\sin a_0 - a_0 \cos a_0}{\sin a_0} = b_0 \frac{\mathfrak{S}in b_0}{\mathfrak{C}o\mathfrak{J} b_0}$$

und sehen dann, daß diese Grenzkurven in drei verschiedenen Exemplaren vorhanden sind, welche sich im Nullpunkt kreuzen. Die erste ist die imaginäre Achse $a_0 = 0$, die zwei anderen gehen unter Winkeln von $\pm 30^\circ$ gegen die Horizontale geneigt vom Nullpunkt aus und endigen bei $\pi \pm i\infty$. Die in weiter entfernten Gebieten der τ -Ebene liegenden Grenzkurven können wir unbeachtet lassen. Die drei soeben besprochenen Kurven sind in Fig. 2 gestrichelt eingetragen.

Als zweite Möglichkeit kommt der Fall in Betracht, daß die Integrationskurve zugleich durch τ_0 und den rechts gelegenen Sattelpunkt $2\pi - \tau_0$ hindurch geht. Ebenso wie oben ergibt sich, daß dann τ_0 auf einer der durch

$$(9) \quad \begin{aligned} \sin a_0 \mathfrak{C}o\mathfrak{J} b_0 - a_0 \cos a_0 \mathfrak{C}o\mathfrak{J} b_0 - b_0 \sin a_0 \mathfrak{S}in b_0 \\ = -\pi \cos a_0 \mathfrak{C}o\mathfrak{J} b_0 \end{aligned}$$

oder auch

$$(9') \quad \frac{\sin a_0 + (\pi - a_0) \cos a_0}{\sin a_0} = b_0 \frac{\mathfrak{S}in b_0}{\mathfrak{C}o\mathfrak{J} b_0}$$

definierten Kurven liegen muß. Die durch (9), resp. (9') definierten Kurven erhält man aus den durch (8), resp. (8')

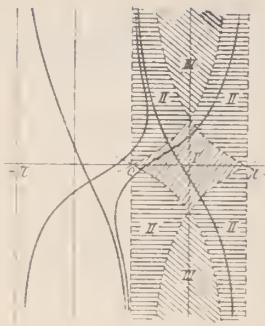


Fig. 2.

definierten durch eine Parallelverschiebung um π nach rechts, sie sind ebenfalls in Fig. 2 gestrichelt eingetragen. Die Gebiete, in die der betrachtete Streifen $0 - \pi$ der τ -Ebene durch diese Kurven eingeteilt wird, bezeichnen wir mit den Ziffern I, II, III und wollen jetzt die Integrationskurven für H_2 diskutieren, wenn der Sattelpunkt in eines dieser Gebiete fällt.

a) Sattelpunkt in I.

Für die Linie $0 - \pi$ dieses Gebietes wurde die Gestalt der Integrationskurve schon früher diskutiert (loc. cit. p. 540, Fig. 2). Die beiden sich im Sattelpunkt schneidenden Kurven haben ihre Endpunkte bei $\pi + i\infty$ und $0 - i\infty$, resp. $0 + i\infty$ und $\pi - i\infty$, erstere ist als Integrationskurve ohne weiteres brauchbar. So lange der Sattelpunkt im Innern des Gebietes I bleibt, ist ersichtlich nichts an dieser Aussage zu ändern. Die betreffenden Kurven sind in Fig. 2 als ausgezogene Kurven eingetragen. Zugleich sind die in Bezug auf $\tau = 0$ spiegelbildlich gelegenen, durch den Sattelpunkt $\tau = -\tau_0$ gehenden Kurven $J = \text{const.}$ gezeichnet.

b) Sattelpunkt in II.

Früher (loc. cit. p. 541, Fig. 4) untersuchten wir schon den Fall, daß der Sattelpunkt auf die Grenzlinie $-i\infty$ bis $+i\infty$ fällt und fanden als Integrationskurven ($J_0 = \text{const.}$) durch den oberen Sattelpunkt eine von $\pi + i\infty$ bis $-\pi + i\infty$ gehende und als zweite die imaginäre Achse. Durch den unteren Sattelpunkt gingen zwei Kurven, von denen wieder die eine die imaginäre Achse war und die zweite ihre Endpunkte bei $-\pi - i\infty$ und $\pi - i\infty$ hatte. Zur Integration gingen wir von $\pi + i\infty$ bis zum oberen Sattelpunkt und von dort längs der imaginären Achse bis $-i\infty$. Liegt nun der

Sattelpunkt nicht gerade auf der Grenze des Gebietes II, so bleiben die Verhältnisse ganz ähnlich, es ändert sich nur insofern etwas, als nicht mehr zwei Kurven $J = \text{const.}$, wie im obigen Spezialfall, zusammenfallen. Betrachten wir z. B. das Gebiet II links oben in Fig. 3, so wird durch den dort befindlichen Sattelpunkt zunächst eine Kurve $J = \text{const.}$ gehen,¹⁾ welche bei $\pi + i\infty$ anfängt und bei $-\pi + i\infty$ endigt, ganz entsprechend der Kurve B unserer früheren Fig. 4 gestaltet. Die zweite durch diesen Punkt gehende Kurve hat noch immer große Ähnlichkeit mit derjenigen Kurve des Gebietes I, welche bei $0 + i\infty$ anfängt und bei $\pi - i\infty$ endigt (vgl. Fig. 2), sie hat denselben Anfangspunkt und Endpunkt. Durch den zweiten Sattelpunkt $\tau = -\tau_0$, der sich im linken unteren Quadranten der Fig. 3 befindet,

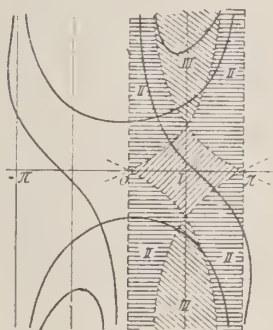


Fig. 3.

gehen Kurven $J = \text{const.}$, welche durch Spiegelung an dem Nullpunkt aus den vorher besprochenen hervorgehen. Wir sehen also, daß statt der im obigen Spezialfall als Doppellinie fungierenden imaginären Achse jetzt wirklich zwei Kurven auftreten, sie entsprechen der einen geknickten Kurve der Fig. 4 (loc. cit. p. 541), welche bei $-\pi + i\infty$ anfängt, beim oberen

Sattelpunkt mit einem Knick in die imaginäre Achse und beim unteren Sattelpunkt wieder mit einem Knick in die bei $\pi - i\infty$ endigende Linie übergeht. Zur Integration gehen wir also, so lange der Sattelpunkt im linken, oberen Teil von II sich befindet, von $\pi + i\infty$ über diesen Sattelpunkt zunächst nach $-\pi + i\infty$, um dann von dort aus die durch den unteren Sattelpunkt gehende Kurve zu benutzen, welche im vorgeschriebenen Bereiche bei $0 - i\infty$ endigt.

¹⁾ Der Verlauf der gezeichneten Integrationskurven ist nur qualitativ richtig, was offenbar für unsere Zwecke vollständig ausreicht.

Liegt der Sattelpunkt im unteren, linken Teil von II, so können wir, wie leicht ersichtlich, die Integrationskurven erhalten, indem wir die vorher gültigen Figuren um die reelle Achse umklappen. Aus der einen Kurve, die von $0 + i\infty$ bis $\pi - i\infty$ ging und die im vorigen Falle von keiner Bedeutung war, entsteht jetzt eine die von $\pi + i\infty$ in einem Zuge bis $0 - i\infty$ führt und deshalb als Integrationskurve ohne weiteres zu brauchen ist.

Ähnliches gilt für die beiden rechten Teile des Gebietes II, es ist jetzt einfach in den obigen Aussagen „oben“ mit „unten“ zu vertauschen.

Zusammenfassend haben wir also schließlich erhalten:

Liegt der Sattelpunkt im oberen linken oder im unteren rechten Teil von II (vgl. Fig. 3), so geht der Integrationsweg notwendig durch zwei Sattelpunkte. Im ersten Falle gehen wir von $\pi + i\infty$ durch den ersten Sattelpunkt $\tau = \tau_0$ nach $-\pi + i\infty$ und von dort über den zweiten $\tau = -\tau_0$ nach $0 - i\infty$. Im zweiten Falle gehen wir zuerst von $\pi + i\infty$ durch den zweiten Sattelpunkt $2\pi - \tau_0$ nach $2\pi - i\infty$ und von dort aus über den ersten $\tau = \tau_0$ nach $0 - i\infty$. Liegt andererseits der Sattelpunkt τ_0 im rechten oberen oder im linken unteren Teil von II, so können wir die Endbereiche durch eine Kurve verbinden, die also von $\pi + i\infty$ ohne Unterbrechung nach $0 - i\infty$ führt.

c) Sattelpunkt in III.

Das Gebiet III ist dadurch ausgezeichnet, daß zu ihm überhaupt keine Kurven $J = \text{const.}$ mehr gehören, welche die vorgeschriebenen Endbereiche verbinden. Dieses ist sofort klar, wenn man bedenkt, daß man sich sowohl über der durch π wie über der durch 0 gehenden Grenzkurve befindet, wenigstens, wenn man, wie wir es zunächst tun wollen, nur den oberen Teil von III in Betracht zieht. Auch die eine Kurve, welche im Gebiete II noch immer die obere mit der unteren Halbebene der Figur verband, hat sich bei der Überschreitung der durch π gehenden Grenzkurve in die Höhe gebogen und

hat Anfang sowie Ende in der oberen Halbebene. Um das Verhalten dieser Kurven zu veranschaulichen, ist in Fig. 4 der Sattelpunkt auf der durch $\tau = \frac{\pi}{2}$ gehenden Vertikalen angenommen; die Kurven $J = \text{const.}$ gehen als ausgezogene Linien A durch ihn hindurch. Sie sind definiert durch die Formel

$$\sin a \operatorname{Coj} b - b \operatorname{Sin} b_0 = \operatorname{Coj} b_0 - b_0 \operatorname{Sin} b_0,$$

oder auch

$$\sin a = \frac{\operatorname{Coj} b_0 + (b - b_0) \operatorname{Sin} b_0}{\operatorname{Coj} b}.$$

Die eine fängt an bei $\pi + i\infty$, geht durch den Sattelpunkt, erreicht ihren tiefsten Punkt unterhalb $\tau = -\frac{\pi}{2}$ und steigt dann wieder durch den bei $\tau_0 - 2\pi$ gelegenen Sattelpunkt hindurch ins Unendliche, das sie bei $-2\pi + i\infty$ erreicht. In analoger Weise verläuft die andere Kurve von $0 + i\infty$ aus nach rechts. Außerdem ist aus dem früher in der unteren Halbebene verlaufenden Teil ein Kurvenstück A' entstanden, das bei $0 - i\infty$ anfängt, seinen höchsten Punkt auf der durch $\tau = -\frac{\pi}{2}$ gehenden Vertikalen erreicht und bei $\tau = -\pi - i\infty$ endigt. Zu dem Sattelpunkt $\tau = -\tau_0$ gehört ein Kurvensystem B, B' , das durch Spiegelung des vorher betrachteten Systems an den Nullpunkt der τ -Ebene entstanden gedacht werden kann.

Um die beiden vorgeschriebenen Endbereiche zu erreichen, sind wir nun nach dem Obigen gezwungen, unsere Kurven $J = \text{const.}$ irgendwo durch ein geeignetes Zwischenstück zu verbinden. Als solches werden wir eine Kurve $R = \text{const.}$ wählen, welche von demjenigen der zwei Sattelpunkte ausgeht, in dem der Integrand den kleinsten Wert annimmt. Da dieser Wert im allgemeinen gegen den im anderen Sattelpunkt erhaltenen exponentiell verschwindet, so braucht der Beitrag dieses Zwischenstückes ebensowenig wie der des erstgenannten

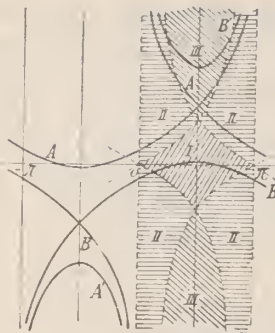


Fig. 4.

Sattelpunktes in unseren semikonvergenten Reihen mitgenommen zu werden. In dem in Fig. 4 zu Grunde gelegten speziellen Fall ist diese Kurve $R = \text{const.}$ einfach ein Stück der im Punkte $\tau = -\frac{\pi}{2}$ errichteten Verticale.

Liegt der Sattelpunkt im unteren Teilstück des Gebietes III, so gelten ganz analoge Verhältnisse. Ebenso ist es klar, daß alles, was unter

a), b), c) für den Streifen $0 - \pi$ gesagt wurde, sich ähnlich auf den Streifen $-\pi - 0$ überträgt, der für die Diskussion der zu H_1 gehörigen Integrationswege in Betracht zu ziehen ist.

§ 3. Die semikonvergenten Reihen für H_2 in den verschiedenen Gebieten.

Wir wollen hier die im vorigen § eingeführte Einteilung beibehalten und unter a), b), c) die Resultate für die Gebiete I, II, III der Fig. 2 besprechen.

a) Sattelpunkt in I.

Das Gebiet I ist ohne weiteres zu erledigen. Wie aus dem in § 2 a) über die Integrationskurven gesagten hervorgeht, ist die Formel zu erhalten durch stetige Fortsetzung der früher (loc. cit.) angegebenen, in dem der Sattelpunkt auf der reellen Achse angenommen war. Definieren wir demnach die Funktionen $A_0(\tau_0)$ u. s. w. durch die Gleichungen

$$(10) \quad \begin{cases} A_0(\tau_0) = 1, \\ A_1(\tau_0) = \frac{1}{8} + \frac{5}{24} \cotg^2 \tau_0, \\ A_2(\tau_0) = \frac{3}{128} + \frac{7}{576} \cotg^2 \tau_0 + \frac{385}{3456} \cotg^4 \tau_0, \\ \dots \end{cases}$$

wobei τ_0 diejenige Wurzel der Gleichung

$$(11) \quad \cos \tau_0 = \frac{a}{x} = \frac{Q}{P} e^{i(\varphi - \Phi)}$$

bedeutet, welche stetig aus der bei $\varphi - \Phi = 0$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegenen hervorgeht, so ist

$$(12) \quad H_2^a(x) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\pi} e^{-ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \left[A_0 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{1}{2}}} + e^{i\frac{\pi}{2}} A_1 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{3}{2}}} + e^{i\pi} A_2 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right].$$

Diese Reihe ist die in der früheren Arbeit unter (53) p. 555 angegebene; ihre Ableitung wurde dort im § 3 p. 543 ff. besprochen.

b) Sattelpunkt in II.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß $\frac{a}{x}$ so beschaffen ist, daß der aus (11) folgende Wert von τ_0 in das Gebiet II fällt und zwar wollen wir der einfacheren Darstellung halber annehmen, der Punkt $\tau = \tau_0$ liege im oberen linken Teilgebiet II der Fig. 2. Die übrigen Gebiete erledigen sich ähnlich, sie werden am Ende dieses Abschnittes b) besprochen.

Ebenso wie im früher behandelten Falle $\left(\frac{a}{x} \text{ reell, } a > x\right)$, in dem die beiden Sattelpunkte auf der imaginären Achse lagen, wird nur die Umgebung eines einzelnen für die Berechnung maßgebend sein. Welcher von den beiden betrachtet werden muß, hängt davon ab, in welchem dieser beiden Punkte der Integrand von (1) den größten Wert annimmt. Wir werden sehen, daß man als maßgebenden Punkt nicht durchweg für das ganze Gebiet II denselben annehmen kann. Um dies zu entscheiden, beachten wir zunächst, daß nach (5)

$$f(\tau_0) = -f(-\tau_0)$$

ist; der Exponent und damit zugleich sein reeller Teil hat

in den beiden Sattelpunkten entgegengesetztes Zeichen. Dementsprechend ist der Sattelpunkt maßgebend für den

$$\Re[-xf(\tau_0)] > 0.$$

Wir suchen nun diejenige Kurve, auf der

$$(13) \quad \Re[-xf(\tau_0)] = 0:$$

diese wird also eventuell unser Gebiet II in zwei Teile teilen, so daß für das eine der in demselben gelegenen (obere) und für das andere der untere Sattelpunkt den Ausschlag gibt.

Gleichung (13) lautet (mit $\tau_0 = a_0 + i b_0$ und $x = P e^{i\Phi}$) explizite

$$(13') \quad P \cos \Phi (\cos a_0 \mathfrak{S}in b_0 - b_0 \cos a_0 \mathfrak{C}of b_0 + a_0 \sin a_0 \mathfrak{S}in b_0) \\ + P \sin \Phi (\sin a_0 \mathfrak{C}of b_0 - a_0 \cos a_0 \mathfrak{C}of b_0 - b_0 \sin a_0 \mathfrak{S}in b_0) = 0.$$

Ist nun $\Phi = 0$, so kommt statt (13'):

$$(14) \quad \cos a_0 \mathfrak{S}in b_0 - b_0 \cos a_0 \mathfrak{C}of b_0 + a_0 \sin a_0 \mathfrak{S}in b_0 = 0$$

oder auch

$$(14') \quad \frac{\cos a_0 + a_0 \sin a_0}{\cos a_0} = b_0 \frac{\mathfrak{C}of b_0}{\mathfrak{S}in b_0}.$$

Die entsprechende Kurve besteht wieder aus drei durch den Nullpunkt gehenden Exemplaren; eines davon ist die reelle Achse $b_0 = 0$, die zwei anderen bilden in der Nähe von $\tau = 0$ Winkel von 60° mit der reellen Achse und haben rechts von der imaginären Achse ihre Endpunkte bei $\tau = \frac{\pi}{2} + i\infty$ und $\tau = \frac{\pi}{2} - i\infty$. Diese Kurven sind in Fig. 5 ausgezogen, zugleich ist die frühere Gebietseinteilung noch einmal reproduziert.

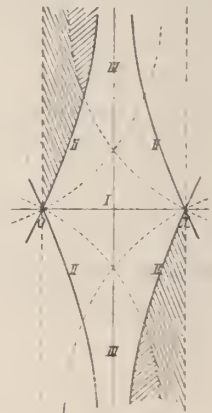


Fig. 5.

Ist $\Phi = \pm \frac{\pi}{2}$, dann sind die Kurven (13'), die wir allgemein „Übergangskurven“ nennen wollen, definiert durch

Semikonvergente Entwicklungen für die Zylinderfunktionen. 17

$$\sin a_0 \mathfrak{C}o\mathfrak{J} b_0 - a_0 \cos a_0 \mathfrak{C}o\mathfrak{J} b_0 - b_0 \sin a_0 \mathfrak{S}in b_0 = 0,$$

sie fallen also zusammen mit den schon früher untersuchten, in der Figur gestrichelt gezeichneten Grenzkurven.

Hat Φ irgend einen Wert zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, so verlaufen die betreffenden Übergangskurven zwischen den durch die Grenzkurven dargestellten äußersten Lagen. Die obere Kurve verläßt den Nullpunkt unter dem Winkel $\frac{\pi}{3} - \frac{\Phi}{3}$ gegen die Horizontale geneigt und hat ihren Endpunkt bei $\frac{\pi}{2} + \Phi + i\infty$; die untere Kurve bildet in der Nähe von $\tau = 0$ den Winkel $-\frac{\pi}{3} - \frac{\Phi}{3}$ mit der Horizontalen und erreicht ihr Ende bei $\frac{\pi}{2} - \Phi - i\infty$. Die dritte Übergangskurve, welche an Stelle der in Fig. 3 als solche fungierenden reellen Achse auftritt, verläßt den Nullpunkt unter dem Winkel $-\frac{\Phi}{3}$ gegen diese Achse geneigt und bleibt im Endlichen.

Ähnliche Übergangskurven werden auch in den rechten Teilgebieten II der Fig. 5 eine Rolle spielen. Sie sind dadurch definiert, daß, wenn der Sattelpunkt τ_0 eine derselben erreicht, der Wert des reellen Teiles des Exponenten unserer Ausgangsformeln (1) im folgenden Sattelpunkt $2\pi - \tau_0$ den gleichen Wert hat. Dementsprechend berechnet man leicht ihre Gleichung zu

$$(15) \quad P \cos \Phi (\cos a_0 \mathfrak{S}in b_0 - b_0 \cos a_0 \mathfrak{C}o\mathfrak{J} b_0 + (a_0 - \pi) \sin a_0 \mathfrak{S}in b_0) + P \sin \Phi (\sin a_0 \mathfrak{C}o\mathfrak{J} b_0 - (a_0 - \pi) \cos a_0 \mathfrak{C}o\mathfrak{J} b_0 - b_0 \sin a_0 \mathfrak{S}in b_0) = 0,$$

wonach die Kurven selbst aus den vorher besprochenen Grenzkurven durch eine Verschiebung um π nach rechts entstehen. In der Fig. 5 sind sie für den dort zu Grunde gelegten Fall $\Phi = 0$ als ausgezogene Kurven eingezeichnet.

Wie aus dem im vorigen § 2 unter b) über die Integrationskurven der Gebiete II Gesagten hervorgeht, spielen die

Übergangskurven unten links und oben rechts keine weitere Rolle; es kommt dort bei der Integration eben von vornherein nur ein Sattelpunkt in Betracht. Oben links und unten rechts dagegen ist der in diesen Gebieten liegende Sattelpunkt nur so lange maßgebend, als der reelle Teil des Exponenten unseres Integranden dortselbst größer ist wie im zweiten Sattelpunkt, durch den ja jetzt unsere Integrationskurve auch noch hindurch muß. Dieses ist der Fall in dem in Fig. 5 nicht schraffierten Teile dieser Gebiete von II, wie man sich leicht überzeugt. Die Stücke unserer Gebiete II, für die der darin liegende Sattelpunkt nicht maßgebend ist, wurden durch Schraffur hervorgehoben. Je nach dem Werte von Φ hat die Übergangskurve eine andere Lage, wie vorher besprochen wurde. Dementsprechend sind z. B. bei $\Phi = \frac{\pi}{2}$ die ganzen Gebiete II oben links und unten rechts zu schraffieren, während sie bei $\Phi = -\frac{\pi}{2}$ gar nicht zu schraffieren sind.

Nach der obigen Orientierung können wir nun die Formeln für H_2 ohne weiteres angeben. Im ganzen nicht schraffierten Teil von II setzt sich nämlich die früher für die reelle Achse angegebene Formel einfach fort und lautet also:

$$(15) \quad H_2^a(x) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\pi} e^{-ix(\sin\tau_0 - r_0 \cos\tau_0)} \left[A_0 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin\tau_0\right)^{\frac{1}{2}}} + e^{i\frac{\pi}{2}} A_1 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin\tau_0\right)^{\frac{3}{2}}} + e^{i\pi} A_2 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin\tau_0\right)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right],$$

wobei τ_0 und A_0, A_1, \dots dieselbe Bedeutung wie früher (vgl. S. 14) haben. Liegt dagegen der durch

$$\cos\tau_0 = \frac{a}{x} = \frac{Q}{P} e^{i(\psi - \phi)}$$

definierte Winkel im schraffierten, oberen linken Teil von II, dann ist an Stelle von τ_0 der in Bezug auf $\tau = 0$ spiegel-

bildlich gelegene Sattelpunkt $\tau = -\tau_0$ maßgebend, so daß dann

$$(16) \quad H_{\frac{1}{2}}^{\alpha}(x) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\pi} e^{ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \left[A_0 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\left(-\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{1}{2}}} + e^{i\frac{\pi}{2}} A_1 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\left(-\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{3}{2}}} + e^{i\pi} A_2 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\left(-\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right].$$

Das einzige noch nicht genau festgelegte sind die Werte der Wurzeln der einzelnen Terme. Der Vergleich mit Formel (44) der früheren Abhandlung (loc. cit. p. 551) zeigt indessen,¹⁾ daß die Wurzel $\left(-\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{1}{2}}$ stetig aus dem Werte

$$\left(-i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

hervorgehen muß, in dem für reelle Werte von x und positive rein imaginäre Werte von τ_0 die Wurzel positiv reell zu nehmen ist. Statt (16) schreiben wir deshalb

$$(16') \quad H_{\frac{1}{2}}^{\alpha}(x) = \frac{i}{\pi} e^{ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \left[A_0 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\left(-i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{1}{2}}} + e^{i\pi} A_1 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\left(-i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{3}{2}}} + e^{2i\pi} A_2 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\left(-i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right],$$

wobei die Wurzeln jetzt aus positiv reellen Werten hervorgehen, welche sie annehmen, wenn x reell und τ_0 auf der imaginären Achse liegt.

Schließlich bleibt noch der schraffierte Teil von II unten rechts übrig, für den der Sattelpunkt $\tau = 2\pi - \tau_0$ maßgebend ist. Ebenso wie oben ergibt sich hier

¹⁾ Man beachte, daß in der betreffenden Formel τ_0 den Wert von τ im unteren Sattelpunkt bedeutet, während hier τ_0 stets im Streifen $0 - \pi$ angenommen wird.

$$(17) \quad H_2^\alpha(x) = \frac{i}{\pi} e^{2\pi i x \cos \tau_0} e^{i x (\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \left[A_0 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\left(-i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{1}{2}}} + e^{i\pi} A_1 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\left(-i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{3}{2}}} + e^{2i\pi} A_2 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\left(-i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right],$$

eine Formel, die mit (16) formal bis auf den Faktor $e^{2\pi i x \cos \tau_0}$ übereinstimmt. Es ist indessen zu beachten, daß in (17) die Wurzeln stetig aus dem positiv reellen Wert hervorgehen sollen, welcher ihnen zukommt,¹⁾ wenn x reell ist und τ_0 auf der durch π gehenden Vertikalen im schraffierten Gebiet liegt.

Ein besonderes Verhalten, das noch nicht in den vorhergehenden Formeln ohne weiteres zum Ausdruck kommt, zeigt unsere Funktion dann, wenn der Sattelpunkt τ_0 gerade auf die (in Fig. 3 ausgezogene) Übergangskurve rückt, welche z. B. den linken oberen Teil von II durchsetzt. Dann ist der reelle Teil des Exponenten des vor den Klammerausdrücken in (15) und (16) stehenden Faktors Null und beide deshalb von derselben Größenordnung. Man kann dann den einen nicht gegen den anderen vernachlässigen, so daß sich $H_2^\alpha(x)$ wie eine Summe von zwei Exponentialfunktionen mit rein imaginärem Exponenten, d. h. wie eine einfach periodische Funktion verhält. Dem entspricht es, daß man für Werte von $\frac{\alpha}{x}$, welche dieser Grenzkurve gemäß (11) angehören, Wurzeln von H_2 findet, über die im nächsten § noch genauere Angaben gemacht werden.

c) Sattelpunkt in III.

Die Kurven $J = \text{const.}$ verbinden, wie im vorigen § bemerkt wurde, jetzt nicht mehr die positive mit der negativen Halbebene (vgl. Fig. 2). Dort verabredeten wir schon, daß wir deshalb zwei solche Kurven durch ein geeignetes Stück einer Kurve $R = \text{const.}$ verbinden wollen. Betrachten wir zu-

¹⁾ Vgl. die entsprechende Überlegung in der ersten Arbeit l. c., pag. 546 oben.

nächst den oberen Teil von III (Fig. 5). so können wir, wenn der Sattelpunkt auf der durch $\frac{\pi}{2}$ gehenden Vertikalen liegt, gemäß Fig. 2 die eine Kurve $J = \text{const.}$ benutzen von $\pi + i\infty$ aus bis zu ihrem Schnittpunkt mit der durch $-\frac{\pi}{2}$ gehenden Vertikale. Diese Vertikale selbst, auf der R konstant ist, führt dann zum Sattelpunkt $\tau = -\tau_0$, von dem aus wir wieder die Kurve $J = \text{const.}$ bis $0 - i\infty$ benutzen. Der Punkt τ_0 liegt jetzt (vgl. Fig. 5) im nichtschraffierten Gebiet, der Beitrag des Punktes $\tau = -\tau_0$, sowie des benutzten Stückes der Kurve $R = \text{const.}$ verschwindet demnach exponentiell mit wachsendem x . Entsprechendes gilt, so lange der Sattelpunkt im oberen Teil von III rechts von der in Fig. 5 ausgezogenen, durch $\tau = 0$ gehenden Übergangskurve bleibt. Wir können also in diesem Gebiet die gesuchte Darstellung einfach erhalten durch stetige Fortsetzung unserer Formeln (12) oder (15), nämlich

$$(18) \quad H_2^\alpha(x) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\pi} e^{-ix(\sin\tau_0 - \tau_0 \cos\tau_0)} \left[A_0 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin\tau_0\right)^{\frac{1}{2}}} + e^{i\frac{\pi}{2}} A_1 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin\tau_0\right)^{\frac{3}{2}}} + e^{i\pi} A_2 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin\tau_0\right)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right].$$

Liegt der Sattelpunkt im unteren Gebiet III links von der Übergangskurve im unschraffierten Gebiet, so gilt, wie man leicht sieht, ebenfalls die mit (15) identische Formel (18), welche also überhaupt im ganzen unschraffierten Teil des Streifens $0 - \pi$ der Fig. 5 Gültigkeit hat.

Gehen wir zurück in das obere Gebiet III, lassen aber den Sattelpunkt $\tau = \tau_0$ über die Übergangskurve hinweg in das schraffierte Gebiet wandern, so kehren sich die Verhältnisse um. Die Umgebung von τ_0 liefert einen Beitrag der gegen den aus der Umgebung von $\tau = -\tau_0$ stammenden exponentiell verschwindet. Integrieren wir also jetzt auf einer Kurve $J = \text{const.}$ von $\pi + i\infty$ bis τ_0 , um dann auf einer

Kurve $R = \text{const.}$ einen Punkt der durch $\tau = -\tau_0$ gehenden Kurve zu erreichen, auf welcher wir dann über $\tau = -\tau_0$ den Endpunkt $0 - i\infty$ erreichen, so ist nur die Umgebung des letzteren Sattelpunktes für den Wert des Integrals maßgebend. Jetzt wird also im Gegensatz zu dem vorher besprochenen Verhalten, die mit (16') identische Formel gelten:

$$(19) \quad H_2^a(x) = \frac{i}{\pi} e^{ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \left[A_0 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\left(-i\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{1}{2}}} + e^{i\pi} A_1 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\left(-i\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{3}{2}}} + e^{2i\pi} A_2 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\left(-i\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right].$$

welche sich auch in der Definition der Wurzelwerte stetig an (16') anschließt. Schließlich gilt im schraffierten Teil des unteren Gebietes III die mit Formel (17) identische und stetig aus derselben hervorgehende Darstellung:

$$(20) \quad H_2^a(x) = \frac{i}{\pi} e^{2\pi ix \cos \tau_0} e^{ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \left[A_0 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\left(-i\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{1}{2}}} + e^{i\pi} A_1 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\left(-i\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{3}{2}}} + e^{2i\pi} A_2 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\left(-i\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right].$$

§ 4. Die Wurzeln der Hankelschen Funktion.

Aus den im vorigen § angegebenen Formeln, welche sämtlich als Faktor eine Exponentialfunktion enthalten, würde auf den ersten Blick folgen, daß unsere Funktion H_2 im Limes für $x = \infty$ keine Nullstellen besitzt. Wir sahen indessen schon, daß unsere Formeln dann ihren Sinn als semikonvergente Darstellungen verlieren, wenn der Sattelpunkt auf einzelne der Übergangskurven rückt. Betrachten wir zunächst die eine Übergangskurve, welche das linke obere Teilgebiet II durchsetzt und in Fig. 5 das schraffierte Gebiet vom ungeschraffierten trennt, und

bleiben wir zunächst im Gebiete II. Liegt der Sattelpunkt τ_0 nun auf dieser Kurve, so liefern $\tau = \tau_0$ und $\tau = -\tau_0$ Beiträge von derselben Ordnung, so daß wir jetzt im Limes für $|x| = \infty$ durch Addition der rechten Seiten von (15) und (16) für $H_2^\alpha(x)$ die Darstellung erhalten:

$$(21) \quad H_2^\alpha(x) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{1}{2}}} \left\{ e^{-ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} + i e^{ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \right\}$$

oder auch

$$(21') \quad H_2^\alpha(x) = \frac{2i}{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{1}{2}}} \cos \left\{ \frac{\pi}{4} + x(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0) \right\}.$$

Andererseits ist ja die Übergangskurve gerade dadurch definiert, daß auf ihr der reelle Teil von $ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)$ oder auch der imaginäre Teil von $x(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)$ verschwindet. Die Hankelsche Funktion wird also asymptotisch dort Nullstellen besitzen, wo die in (21') auftretende cos-Funktion verschwindet. Zusammenfassend können wir also das Resultat folgendermaßen aussprechen:

Definiert man die in unendlicher Anzahl vorhandenen komplexen Größen $\tau_0 = w_n$ durch die beiden Formeln

$$(22) \quad \begin{cases} 3[x(\sin w_n - w_n \cos w_n)] = 0 \\ x(\sin w_n - w_n \cos w_n) = (4n + 1) \frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl bedeutet und übrigens die erste Gleichung (22) in der zweiten enthalten ist, so findet man die unserer Größe w_n entsprechende Wurzel der Hankelschen Funktion nach (7) aus der Formel

$$(22') \quad \frac{\alpha}{x} = \cos w_n.$$

Es ist hierbei noch zu bemerken, daß in Übereinstimmung mit dem im § 3 unter b) über die anderen, durch 0 gehenden Übergangskurven Gesagten nur solche Werte von w_n in Betracht kommen, welche der das obere linke Gebiet II durch-

setzenden Übergangskurve angehören und deren imaginärer Teil deshalb positiv ist.

Um die Anwendung unserer Formeln (22) zu erläutern, wollen wir die ersten Wurzeln (d. h. diejenigen für die τ in der Nähe von Null, also $\frac{\alpha}{x}$ in der Nähe von Eins liegt) wirklich berechnen. Für diese ist w_n selbst eine kleine Größe, so daß wir für die zweite Gleichung (22) auch schreiben können

$$(23) \quad x \frac{w_n^3}{3} = (4n + 1) \frac{\pi}{4}.$$

Soll nun w_n unserer obigen Bemerkung gemäß der Übergangskurve links oben in Fig. 5 angehören, so ist n negativ zu nehmen. Ersetzen wir unter dieser Annahme (23) durch

$$(24) \quad x \frac{w_n^3}{3} = -(4n - 1) \frac{\pi}{4},$$

so daß jetzt n als positive ganze Zahl anzunehmen ist, so wird die einzig brauchbare Lösung

$$(25) \quad w_n = \left(\frac{4n - 1}{P} \frac{3\pi}{4} \right)^{\frac{1}{3}} e^{i \frac{\pi - \phi}{3}}.$$

Dabei haben wir wie früher $x = P e^{i\phi}$ gesetzt; die gebrochene Potenz ist positiv reell zu nehmen.

Nach (22') besteht also schließlich zwischen α und x die Gleichung

$$(26) \quad \frac{\alpha}{x} = \cos \left\{ (4n - 1)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{e^{i \frac{\pi}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \right\}$$

oder auch in erster Näherung für große Werte von $|x|$:

$$(26') \quad \frac{\alpha}{x} = 1 - \frac{e^{2i \frac{\pi}{3}}}{2x^{\frac{2}{3}}} (4n - 1)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Das Resultat ergibt, wie es sein soll, eine funktionelle Beziehung zwischen dem unteren Index α und dem Argument x . Ist x gegeben, so sind die Werte von α , für die H_2 ver-

schwindet, aus (26') sofort zu berechnen. Ist dagegen α gegeben, so folgt x erst durch die Auflösung einer Gleichung dritten Grades. Mit Rücksicht darauf, daß $|x|$ sehr groß ist, kann man (26') indessen auch nach x auflösen in der Form

$$x = \frac{\alpha}{1 - \frac{e^{2i\frac{\pi}{3}}}{2\alpha^{\frac{2}{3}}}(4n+1)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}}} = \alpha \left[1 + \frac{e^{2i\frac{\pi}{3}}}{2\alpha^{\frac{2}{3}}}(4n+1)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \right].$$

Es sei übrigens noch bemerkt, daß gerade diese ersten Wurzeln deshalb wenig genau sein werden, weil sie zu Werten von τ_0 in der Nähe des Nullpunktes gehören, wo ja, wie in der früheren Arbeit p. 548, § 4, näher ausgeführt ist, die angegebenen semikonvergenten Entwicklungen ihren Charakter als solche verlieren.

Die zur Bestimmung der Wurzeln angegebenen allgemeinen Gleichungen (22) und (22') gelten weiterhin zunächst nur so lange $\tau_0 = w_n$ dem Gebiete II angehört. Für Punkte der Übergangskurve, welche dem Gebiete III angehören, wird der Integrationsweg anders, insofern als jetzt von $\pi + i\infty$ aus nur bis zum Punkte τ_0 integriert wird. Von dort aus führt dann zunächst eine Kurve $R = \text{const.}$ in den Sattelpunkt $\tau = -\tau_0$, während dann wieder die der früher benutzten ähnliche Kurve $J = \text{const.}$ bis $0 - i\infty$ folgt. Man überzeugt sich aber leicht durch eine Integration, welche genau so verläuft, wie die durchweg zur Auswertung unserer Integrale benutzte, daß der asymptotische Wert von H_2 immer noch bis auf einen Faktor $\frac{1 + e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{2}$ mit dem in (21) angegebenen übereinstimmt. Zur Berechnung der Wurzeln gelten die Formeln (22) und (22') also auf der ganzen Übergangskurve.

Nachdem dieses klargestellt, berechnen wir noch die Lage der in der τ -Ebene unendlich fernen Wurzeln. Setzen wir

$$(27) \quad w_n = z_n + i\lambda_n,$$

so ist $\lambda_n \gg 1$, so daß die zweite Gleichung von (22) wird

$$(28) \quad P \frac{\lambda_n}{2} e^{i\lambda_n} \{ \sin(z_n - \Phi) + i \cos(z_n - \Phi) \} = -(4n+1) \frac{\pi}{4}$$

oder auch

$$(28') \quad \begin{cases} \cos(z_n - \Phi) = 0 \\ \frac{\lambda_n}{2} e^{i\lambda_n} \sin(z_n - \Phi) = -(4n+1) \frac{\pi}{4} \frac{1}{P}. \end{cases}$$

Unseren weiteren Bedingungen (S. 23 unten) entspricht die Lösung

$$(29) \quad z_n = \frac{\pi}{2} + \Phi,$$

während λ_n zu bestimmen ist aus

$$(29') \quad \lambda_n e^{i\lambda_n} = -\frac{\pi}{2} \frac{4n+1}{P}.$$

Da wir von vornherein bei dieser Näherung $\lambda_n \gg 1$ angenommen haben, so ist die durch (29) und (29') dargestellte Näherung nur so lange gültig, als $\left| \frac{4n+1}{P} \right| \gg 1$. Überdies muß, damit (29') überhaupt eine Lösung hat, ebenso wie oben $n < 0$ angenommen werden. Ist λ_n bestimmt, so ergibt (22') den Zusammenhang zwischen a und x nach der Formel

$$(30) \quad \frac{a}{P} = -\frac{i}{2} e^{i\lambda_n}.$$

Ebenso wie zur oben betrachteten gehören auch zur zweiten Übergangskurve, die in Fig. 5 unten rechts das schraffierte vom unschraffierten Gebiet trennt, eine unendliche Serie von Wurzeln der zweiten Hankelschen Funktion. Zunächst erhält man nämlich wieder, dann wenn der Sattelpunkt τ_0 auf diese Kurve rückt, für $H_2^\alpha(x)$ die asymptotische Darstellung

$$(31) \quad H_2^\alpha(x) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{1}{2}}} \left[e^{-ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} + i e^{2\pi i x \cos \tau_0} e^{ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \right]$$

durch Addition der rechten Seiten von (15) und (17). Setzt man jetzt vorübergehend

$$-ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0) = R_1 + iJ_1$$

und

$$2\pi ix \cos \tau_0 = 2R_2 + 2iJ_2,$$

so kann man für den Klammerausdruck in (31) auch schreiben

$$e^{i\frac{\pi}{4}} \left[e^{R_1 + i\left(J_1 - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{2R_2 - R_1 + i2J_2 - i\left(J_1 - \frac{\pi}{4}\right)} \right].$$

Mit Rücksicht auf die Definition der Übergangskurve

$$(32) \quad R_1 = 2R_2 - R_1$$

erhält man statt dessen

$$e^{i\frac{\pi}{4}} e^{R_1 + iJ_2} \left[e^{i\left(J_1 - J_2 - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(J_1 - J_2 - \frac{\pi}{4}\right)} \right],$$

so daß sich der Klammerausdruck in (31) tatsächlich verhält wie eine reelle \cos -Funktion und deshalb ebenso wie (21') Wurzeln in unendlicher Zahl liefert, deren Lage auf der Übergangskurve durch

$$(33) \quad J_1 - J_2 - \frac{\pi}{4} = -(2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

definiert ist. Beachtet man noch die Definitionsgleichung (32), so kann man diese, sowie (33) in der einen Gleichung

$$(R_1 + iJ_1) - (R_2 + iJ_2) = -i(4n + 1) \frac{\pi}{4}$$

oder auch

$$(34) \quad x [\sin \tau_0 - (\tau_0 - \pi) \cos \tau_0] = (4n + 1) \frac{\pi}{4}$$

zusammenfassen. Gleichung (34) gestattet natürlich ähnliche Schlüsse wie (22').

§ 5. Darstellung für die erste Hankelsche und die Besselsche Funktion.

In diesem § wollen wir noch das zusammenstellen, was in Analogie mit den vorigen §§ über $H_1^\alpha(x)$ und die Besselsche Funktion $J_\alpha(x)$ zu sagen ist.

Maßgebend für das Verhalten ist wieder die Lage des durch

$$\cos \tau_1 = \frac{\alpha}{x}$$

definierten Sattelpunktes $\tau = \tau_1$, den wir jetzt den Streifen $-\pi$ bis 0 durchlaufen lassen wollen. Auch in diesem Streifen zeichnen wir Grenz- und Übergangskurven wie im Streifen $0 - \pi$, deren Lage ebenfalls durch Fig. 2 und 3 veranschaulicht wird, wenn wir die an die reelle Achse angeschriebenen Zahlen 0 resp. π jetzt durch $-\pi$, resp. 0 ersetzen. Schraffieren wir weiterhin zwei Gebiete, welche in Fig. 5 durch Spiegelung der dortselbst schraffierten an der durch $\frac{\pi}{2}$ gehenden Vertikalen entstehen und lassen wir die dort schraffierten jetzt frei, so gilt folgendes: Liegt τ_1 im unschraffierten Gebiete, so wird $H_1^\alpha(x)$ dargestellt durch die Formel

$$H_1^\alpha(x) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\pi} e^{ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \left[A_0 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{1}{2}}} + e^{-i\frac{\pi}{2}} A_1 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{3}{2}}} + e^{-i\pi} A_2 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right],$$

wobei $\tau_0 = -\tau_1$ und die Wurzeln stetig aus dem reellen positiven Wert hervorgehen, den sie auf der reellen Achse haben.

Liegt τ_1 im schraffierten Gebiet oben rechts, so hat $H_1^\alpha(x)$ bis auf exponentiell verschwindende Glieder denselben Wert wie $-H_2^\alpha(x)$, wobei der für diese letztere Funktion maßgebende Sattelpunkt $\tau_0 = -\tau_1$ in dem an die negativ imaginäre Achse anschließenden Gebiete II oder III liegt. Befindet sich anderer-

seits τ_1 im schraffierten Gebiet unten links, so hat $H_1^\alpha(x)$ denselben Wert wie $-e^{-i2\pi\alpha} H_2^\alpha(x)$, für welche Funktion der maßgebende Sattelpunkt $\tau_0 = -\tau_1$ jetzt in dem Gebiete liegt, das an den positiv imaginären Teil der durch π gehenden Vertikale anschließt.

Die Nullpunkte von H_1 entsprechen Werten von τ_1 , die auf den Übergangskurven liegen, welche die schraffierten Gebiete begrenzen.

Was schließlich die Besselsche Funktion $J_\alpha(x)$ betrifft, so ist diese im allgemeinen zugleich mit H_1 und H_2 bekannt nach der Formel

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{2} [H_1^\alpha(x) + H_2^\alpha(x)].$$

In gewissen Teilen der τ -Ebene versagt diese Berechnung, da dort

$$H_1 = -H_2;$$

dann gilt die aus der früher angegebenen Formel (50) (loc. cit. p. 554) durch stetige Fortsetzung hervorgehende Reihe.

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 6. Abhandlung

Über

Konvergenz und funktionentheoretischen Charakter
gewisser limitär-periodischer Kettenbrüche

von

Alfred Pringsheim

Vorgetragen am 1. Mai 1909 u. 8. Januar 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Unter den von einer komplexen Veränderlichen x abhängigen unendlichen Kettenbrüchen des einfachsten Typus, nämlich:

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2 x}{1} + \cdots + \frac{a_n x}{1} + \cdots$$

haben sich insbesondere diejenigen einer ausgiebigeren analytischen Behandlung zugänglich erwiesen, deren Teilzähler-Koeffizienten für $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = \infty$ einen bestimmten Grenzwert besitzen, wie dies z. B. bei dem Gaußschen und dem Heineschen Kettenbrüche für den Quotienten zweier hypergeometrischen bzw. verallgemeinerten hypergeometrischen Reihen der Fall ist. Während nun hierbei der Fall $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = 0$ (wie beim Heineschen

Kettenbrüche) mit Hilfe eines von mir abgeleiteten Konvergenzkriteriums sich außerordentlich einfach erledigen läßt, so ist für den Fall $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = a$, wo $|a| > 0$ (wie beim Gaußschen

Kettenbrüche) eine merklich umständlichere Untersuchung erforderlich. Beide Fälle sind zunächst unter gewissen, durch die besondere Form des Heineschen und des Gaußschen Kettenbruches suggerierten beschränkenden Voraussetzungen von Herrn E. B. van Vleck¹⁾ behandelt worden. Dabei zeigt sich

¹⁾ Nach einer vorausgehenden Untersuchung: „*On the convergence and character of the continued fraction*“

$$\frac{a_1 z}{1} + \frac{a_2 z}{1} + \frac{a_3 z}{1} + \cdots$$

(Transact. Americ. Math. Soc. 2 (1901), p. 476) in der Abhandlung: „*On the convergence of the continued fraction of Gauß and other continued fractions*“ (Annals of Math. 3, No. 1 (1901)). Ich zitiere späterhin diese beiden Arbeiten in der angegebenen Reihenfolge kurz als van Vleck (1) und (2).

indessen, daß gerade jene dem Wesen der Sache fremden Beschränkungen auch eine ganz unnötige Weitläufigkeit der Untersuchung im Gefolge haben. Herr van Vleck hat daher später das betreffende Problem unter Verzicht auf jene Beschränkungen wieder aufgenommen,¹⁾ wobei er sich auf einen Satz des Herrn Poincaré²⁾ über das infinitäre Verhalten der Lösungen einer linearen Rekursionsformel (Differenzen-Gleichung) beliebiger Ordnung stützt. Dieser Satz, auf den vorliegenden Fall reduziert, besagt folgendes. Es sei a_r ($r = 1, 2, 3 \dots$) eine gegebene Zahlenfolge mit dem Grenzwerte $\lim_{r=\infty} a_r = a$ und es werde eine andere Folge von Zahlen D_r bei irgendwie fixierten Anfangswerten D_0, D_1 definiert durch die Rekursionsformel:

$$D_{r+1} - D_r - a_{r+1} x D_{r-1} = 0.$$

Bezeichnet man sodann mit z und z' die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$y^2 - y - ax = 0$$

und zwar, bei definitiver Ausschließung des Falles $|z| = |z'|$, mit der Festsetzung $|z| > |z'|$, so ist im allgemeinen:

$$(a) \quad \lim_{r=\infty} \frac{D_{r+1}}{D_r} = z$$

und ausnahmsweise:

$$(b) \quad \lim_{r=\infty} \frac{D_{r+1}}{D_r} = z'.$$

Der Satz in dieser Form erweist sich aber — ganz abgesehen von der einigermaßen fragwürdigen Natur des Poincaréschen Beweises,³⁾ dem Herr van Vleck übrigens einen

¹⁾ „On the convergence of algebraic continued fractions whose coefficients have limiting values.“ (Transact. Americ. Math. Soc. 4 (1904), p. 253.) Wird von mir als van Vleck (3) zitiert.

²⁾ Americ. Journ. of Math. 7 (885), p. 213.

³⁾ Daß fast alle bei jenem Beweise benützten Formeln verrechnet sind, mag man vielleicht nur als einen Schönheitsfehler ansehen. Aber bei der ziemlich flüchtigen und zugleich überknappen Darstellung des ganzen Beweises ist es mir leider trotz aufrichtiger Bemühung über-

anderen hinzufügt¹⁾ — als völlig unzureichend zur Lösung der vorliegenden Aufgabe. Denn er bietet keinerlei Hilfsmittel, um zu entscheiden, ob für einen willkürlich angenommenen Wert x der „regelmäßige“ Fall (a) oder der „Ausnahmefall“ (b) eintritt. Ja, man wird durch ihn nicht einmal in den Stand gesetzt, auch nur einen einzigen Wert x anzugeben, für welchen die „Regel“ (a) in die Erscheinung tritt. Im vorliegenden Falle handelt es sich aber darum, geradezu festzustellen, daß die Werte x , für welche die Beziehung (a) stattfindet, einen *zusammenhängenden Bereich* T bilden, daß überdies die Konvergenz von $\frac{D_{v+1}}{D_v}$ gegen jenen Grenzwert z für jede abgeschlossene Menge solcher Stellen x eine *gleichmäßige* ist und daß andererseits die Stellen x' , für welche eventuell der Fall (b) eintreten kann, im Bereiche T , abgesehen von dessen Grenzen, immer nur *isoliert* vorkommen.

Dies alles ist auch Herrn van Vleck keineswegs entgangen. Was er aber in der bezeichneten Richtung zur Ergänzung des Poincaréschen Satzes beibringt,²⁾ scheint mir — vorsichtig ausgedrückt — nicht recht verständlich. Noch

hauptsächlich nicht gelungen, ihn restlos zu begreifen. Andere Mathematiker scheinen freilich in dieser Beziehung glücklicher organisiert, da der fragliche Satz ziemlich häufig zitiert und benützt wird, ohne daß mir jemals irgendwelche kritische Bemerkung über seinen Beweis begegnet wäre. Übrigens hat in neuester Zeit Herr Perron Fassung und Beweis des fraglichen Satzes vervollständigt und außer dem verbesserten Poincaréschen Beweise noch einen zweiten, zwar komplizierteren, aber auch weiter tragenden geliefert (Journ. f. Math. 136 (1909), p. 17).

¹⁾ Das Beweisverfahren des Herrn van Vleck ((3), p. 255) beruht auf einem sehr sinnreichen, in der gegebenen Darstellung freilich nicht gerade leicht faßlichen, in geometrischer Form gekleideten Grenz-Prozesse. Übrigens kann jeue Darstellung doch wohl nur als *Skizze* eines Beweises gelten, die, wie ich mich überzeugt habe, bei gehöriger Ausgestaltung zu einem exakten und vollgültigen Beweise an Kürze und scheinbarer Einfachheit sehr erheblich einbüßt.

²⁾ van Vleck (3), p. 257. Ich vermisste die genügende Grundlage für den Satz Zeile 9: „Hence equation (9) takes effect etc.“, auf dem alles weitere beruht.

unverständlicher finde ich freilich die Methode des Herrn Auric,¹⁾ welcher in einer umfangreichen (übrigens von der Pariser Akademie preisgekrönten) Abhandlung über Kettenbrüche unter etwas problematischer Berufung auf die Stetigkeit der D , einfach dekretiert, der Fall (b) habe überhaupt nicht stattzufinden.²⁾

Im folgenden wird der Versuch gemacht, das bezeichnete Problem in möglichst elementarer und, wie ich hoffe, einwandfreier Weise zu erledigen. Obschon die hierzu dienlichen Betrachtungen unschwer auf Kettenbrüche von allgemeinerer Form sich übertragen ließen, will ich mich an dieser Stelle ausdrücklich auf den zu Anfang erwähnten Typus $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1} \right]_2^\infty$ beschränken,

jene Verallgemeinerungen mir für andere Gelegenheit vorbehaltend. Mit Rücksicht auf den Umstand, daß eine systematische Behandlung solcher Kettenbrüche in der Literatur gänzlich zu fehlen scheint, hielt ich es für zweckmäßig, deren allgemeine Eigenschaften im § 1 zunächst übersichtlich zusammenzustellen und in § 2 einen wichtigen, im wesentlichen bereits bekannten Konvergenzsatz aufs neue zu beweisen. Im § 3 folgt dann die Behandlung des Falles $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = 0$ nebst

Anwendung auf den Heineschen Kettenbruch und die Heinesche Reihe $\varphi(a, \beta, \gamma, q, x)$, wobei sich in überaus einfacher Weise das bemerkenswerte und, wie ich vermute, wohl kaum allgemein bekannte Resultat ergibt, daß das Funktions-Element $\varphi(a, \beta, \gamma, q, x)$, wo $|q| < 1$, eine in der ganzen Ebene *eindeutige* und bis auf *einfache* Pole aus der Reihe der Zahlen $1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots$ reguläre analytische Funktion definiert. Ich muß

bekennen, daß dieses Ergebnis mir zunächst neu und einigermaßen überraschend erschien, habe jedoch nachträglich bemerkt, daß dasselbe aus einer Formel entnommen werden kann, die sich in einer wegen des komplizierten analytischen Apparates

¹⁾ Journal de Mathématiques (6), 3 (1907), p. 105—206: „Recherches sur les fractions continues algébriques.“

²⁾ A. a. O. p. 178.

freilich recht schwer zu übersehenden Abhandlung des Herrn J. Thomae¹⁾ findet.

Der § 4 bringt dann die eigentliche, auf den Fall $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$, wo $|a| > 0$, bezügliche Hauptuntersuchung. Dieselbe basiert nicht auf dem oben erwähnten Poincaréschen Satze, vielmehr auf der Herstellung eines konvergenten Verfahrens zur Auflösung der Rekursionsformel für die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche, welches unmittelbar gestattet, das infinitäre Verhalten der Näherungsbrüche festzustellen und überdies als Corollar den Poincaréschen Satz in vervollständigter und präziserer Fassung liefert. Schließlich folgt eine Anwendung auf den Gaußschen Kettenbruch und auf die Beurteilung des analytischen Charakters der durch eine hypergeometrische Reihe definierten analytischen Funktion.

§ 1. Allgemeine Eigenschaften der Kettenbrüche von der Form

$$\left[\begin{array}{c} a_1, \frac{a_\nu x}{1} \\ 1, 1 \end{array} \right]_2^\infty.$$

1. Es sei $a_1, a_2, a_3 \dots$ eine unbegrenzte Folge beliebiger von Null verschiedener Zahlen, x eine komplexe Veränderliche. Die Näherungsbrüche des unendlichen Kettenbruches:

$$(1) \quad \frac{a_1}{1} + \frac{a_2 x}{1} + \dots + \frac{a_\nu x}{1} + \dots$$

oder kürzer geschrieben:

$$\left[\begin{array}{c} a_1, \frac{a_\nu x}{1} \\ 1, 1 \end{array} \right]_2^\infty$$

mögen mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2 \dots$) bezeichnet werden, wobei, wie üblich:

¹⁾ Journ. f. Math. 70 (1869), p. 258—281, Vgl. Fußnote 2) auf p. 32 der vorliegenden Arbeit.

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{0}{1},$$

im übrigen:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{A_1}{B_1} = \frac{a_0}{1} \\ \frac{A_r}{B_r} = \frac{a_0}{1} + \frac{a_1 x}{1} + \dots + \frac{a_r x^r}{1} \quad (r = 2, 3 \dots) \end{cases}$$

zu setzen ist. Da sodann:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 & B_1 &= 1 \\ A_2 &= a_1 & B_2 &= 1 + a_2 x \end{aligned}$$

und für $r \geq 2$:

$$(3) \quad A_{r+1} = A_r + a_{r+1} A_{r-2} \cdot x \quad B_{r+1} = B_r + a_{r+1} B_{r-1} \cdot x,$$

so erkennt man, daß A_{r+1} , B_{r+1} ganze rationale Funktionen $(r-1)$ ten Grades von x sind (die wir nötigenfalls ausführlicher mit $A_{r+1}(x)$, $B_{r+1}(x)$ bezeichnen werden), und zwar A_{r+1} durchweg mit dem konstanten Gliede a_1 , B_{r+1} mit dem konstanten Gliede 1 (also: $A_{r+1}(0) = a_1$, $B_{r+1}(0) = 1$).

2. *Satz I. Konvergiert der Kettenbruch $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_r x}{1} \right]^\infty$ in irgend einem zusammenhängenden abgeschlossenen Bereiche T gleichmäßig, so stellt daselbst sein Grenzwert $K(x)$ eine eindeutige analytische, im Innern von T reguläre Funktion dar.*

Beweis. Da auf Grund der Voraussetzung zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n gehört, derart, daß für alle x des Bereiches T :

$$\left| K(x) - \frac{A_r}{B_r} \right| < \varepsilon \quad \text{für } r > n.$$

so folgt zunächst, daß von einem bestimmten Index $r \geq n$ ab keiner der Nenner B_r innerhalb T verschwindet, da ja, solange sämtliche Kettenbruchzähler von Null verschieden sind, niemals A_r und B_r gleichzeitig verschwinden können, während andererseits im Falle $x = 0$, in welchem sämtliche Kettenbruchzähler außer a_1 verschwinden, $B_r = B_1 = 1$ für jedes r resultiert.

Man hat daher für $n > m$:

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{A_n}{B_n} &= \frac{A_m}{B_m} + \sum_{m+1}^n \left(\frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} \right) \\ &= \frac{A_m}{B_m} + \sum_{m+1}^n (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu} \cdot x^{\nu-1}, \end{aligned}$$

so daß also, da $\frac{A_n}{B_n}$ mit unendlich wachsendem n im Bereiche T gleichmäßig gegen $K(x)$ konvergiert, $K(x)$ definiert wird durch die in T gleichmäßig konvergierende Reihe rationaler Funktionen:

$$(5) \quad K(x) = \frac{A_m}{B_m} + \sum_{m+1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu} \cdot x^{\nu-1},$$

woraus auf Grund eines bekannten Weierstraßschen Satzes die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung unmittelbar hervorgeht.

3. Es werde jetzt angenommen, daß der oben mit T bezeichnete Bereich gleichmäßiger Konvergenz die Stelle $x = 0$ in seinem Innern enthalte. Da nach dem oben gesagten höchstens eine *endliche* Anzahl von Näherungsbruch-Nennern $B_n(x)$ Nullstellen in T besitzen kann, andererseits $B_n(0) = 1$ für jedes n , so existiert eine gewisse Umgebung $|x| < \rho$, innerhalb deren kein einziges $B_n(x)$ verschwindet und somit sämtliche Näherungsbrüche $\frac{A_n(x)}{B_n(x)}$ sich regulär verhalten, etwa:

$$(6) \quad \frac{A_n(x)}{B_n(x)} = \sum_1^{\infty} a_\nu^{(n)} \cdot x^{\nu-1} \quad (n = 2, 3 \dots),$$

speziell:

$$\frac{A_1}{B_1} = a_1^{(1)} = a_1$$

und offenbar allgemein:

$$(7) \quad a_1^{(n)} = a_1.$$

Als dann ergibt sich:

Satz II. Die Potenzreihe für $\frac{A_n}{B_n}$ hat mit derjenigen für $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$ die ersten $(n-1)$ Glieder, diese letztere dem-

nach mit derjenigen für $\frac{A_{n-2}}{B_{n-2}}$ die ersten $(n-2)$ Glieder gemein u. s. f., so daß also gesetzt werden kann:

$$(8) \quad \frac{A_n}{B_n} = \sum_1^{n-1} a_v^{(v)} \cdot x^{v-1} + \sum_n^{\infty} a_v^{(n)} \cdot x^{v-1}.$$

Schließlich hat dann die Potenzreihe für $K(x)$ mit derjenigen für $\frac{A_n}{B_n}$ ($n = 1, 2, 3 \dots$) die ersten n -Glieder gemein, so daß mit Berücksichtigung von Gl. (8) sich ergibt:

$$(9) \quad K(x) = \sum_1^{\infty} a_v^{(v)} \cdot x^{v-1}.$$

Beweis. Da

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{B_{n-1} B_n} \cdot x^{n-1}$$

und $\frac{1}{B_{n-1} B_n}$, wegen $B_{n-1}(0) = B_n(0) = 1$, für $|x| < \rho$ in eine mit dem konstanten Gliede 1 beginnende Potenzreihe $\mathfrak{P}_n(x)$ entwickelt werden kann, so folgt mit Benützung von Gl. (6):

$$\sum_1^{\infty} (a_v^{(n)} - a_v^{(n-1)}) \cdot x^{v-1} = (-1)^{n-1} \cdot a_1 a_2 \dots a_n \cdot \mathfrak{P}_n(x) \cdot x^{n-1}$$

und daher:

$$a_v^{(n)} = a_v^{(n-1)} \quad \text{für } v = 1, 2 \dots (n-1).$$

Ersetzt man hier n durch $n-1$, so findet man weiter:

$$a_v^{(n-1)} = a_v^{(n-2)} \quad \text{für } v = 1, 2 \dots (n-2).$$

u. s. f. — schließlich:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1^{(n)} = a_1^{(n-1)} = \dots = a_1^{(2)} = a_1^{(1)} \\ a_2^{(n)} = a_2^{(n-1)} = \dots = a_2^{(2)} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n-1}^{(n)} = a_{n-1}^{(n-1)}. \end{array} \right.$$

womit die Richtigkeit von Gl. (8) bewiesen ist.

Aus

$$K(x) = \frac{A_n}{B_n} + \sum_{n+1}^{\infty} (-1)^{r-1} \cdot \frac{a_1 a_2 \cdots a_r}{B_{r-1} B_r} \cdot x^{r-1}$$

folgt sodann, daß die Potenzentwicklung von $K(x)$ mit derjenigen von $\frac{A_n}{B_n}$ bis zu dem Gliede $a_n^{(n)} \cdot x^{n-1}$ einschließlich übereinstimmt, so daß also, wie oben behauptet:

$$K(x) = \sum_1^{\infty} \alpha_v^{(v)} \cdot x^{v-1}$$

resultiert.

4. Aus der Entwickelbarkeit eines Kettenbruches der vorliegenden Art in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ ergibt sich ferner, daß für derartige Kettenbrüche auch ein analoger Identitäts-Satz gilt, wie für Potenzreihen, nämlich:

Satz III. Stimmen die Werte zweier Kettenbrüche, die in einem zusammenhängenden, die Stelle $x = 0$ im Innern enthaltenden Bereiche T gleichmäßig konvergieren:

$$K(x) = \left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_v x}{1} \right]_2^{\infty} \quad K_1(x) = \left[\frac{b_1}{1}, \frac{b_v x}{1} \right]_2^{\infty}$$

für unendlich viele Stellen x mit einer im Innern von T gelegenen Häufungsstelle überein, so sind sie identisch.¹⁾

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt zunächst die *Identität* der durch $K(x)$ und $K_1(x)$ im Bereiche T dargestellten

¹⁾ Ob dieser Satz noch gültig bleibt, wenn das zusammenhängende Stück T des Konvergenzbereiches die Stelle $x = 0$ *nicht* im Innern enthält, scheint mir eine offene Frage. Nicht minder fraglich erscheint es freilich, ob es überhaupt Kettenbrüche der betrachteten Art gibt, deren Konvergenzbereich teilweise oder ausschließlich aus irgend einem von der Umgebung der Stelle $x = 0$ *abgetrennten* Stücke T besteht (wie dies bei anderen Kettenbrüchen sehr einfacher Art tatsächlich der Fall sein kann): mir wenigstens ist ein Beispiel dieser Art nicht bekannt, und es erscheint mir daher nach den vorhandenen Analogien zum mindesten nicht ausgeschlossen, daß der gesamte Konvergenzbereich eines solchen Kettenbruches *allemaal* aus einem einzigen, die Stelle $x = 0$ im Innern enthaltenden Stücke besteht.

analytischen Funktionen und somit die *Gleichheit* der beiden Kettenbrüche für den gesamten Bereich. Infolge der Identität der für $K(x)$ und $K_1(x)$ in der Umgebung von $x=0$ bestehenden Potenzreihen-Entwicklung findet man dann zunächst durch Vergleichung der konstanten Anfangsglieder:

$$(11) \quad a_1 = b_1.$$

Aus der für alle x des Bereiches T erwiesenen Gleichheit:

$$\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_v x}{1} \right]_2^\infty = \left[\frac{b_1}{1}, \frac{b_v x}{1} \right]_2^\infty$$

folgt dann weiter, daß auch die Gleichheit bestehen muß:

$$(12) \quad \left[\frac{a_v x}{1} \right]_2^\infty = \left[\frac{b_v x}{1} \right]_2^\infty$$

für alle Stellen von T , an denen diese beiden Kettenbrüche überhaupt *konvergieren*, was im übrigen keineswegs ausnahmslos der Fall zu sein braucht, da ja die ursprünglich vorgelegten Kettenbrüche *nicht* ausdrücklich als *unbedingt* konvergent vorausgesetzt wurden. Sind aber Divergenzstellen überhaupt vorhanden, so können diese, wie aus dem Satze I (Nr. 2 dieses Paragraphen) hervorgeht, nur gewöhnliche Nullstellen von $K(x)$ bzw. $K_1(x)$ sein und daher innerhalb T nur in *endlicher* Anzahl vorkommen. Da andererseits $K(0)$ und $K_1(0)$ nicht verschwinden, so muß für $K(x)$, $K_1(x)$ eine von Nullstellen freie Umgebung von $x=0$ existieren, innerhalb deren also die Kettenbrüche (12) ausnahmslos konvergieren und wegen

$$\left[\frac{a_v x}{1} \right]_2^\infty = \frac{a_1 - K(x)}{K(x)}, \quad \left[\frac{b_v x}{1} \right]_2^\infty = \frac{b_1 - K_1(x)}{K_1(x)}$$

analytische Funktionen regulären Verhaltens darstellen. Dann müssen aber auf Grund von Gl. (12) die Anfangsglieder der betreffenden Potenzreihen-Entwicklungen wieder übereinstimmen, so daß also sich ergibt:

$$a_2 = b_2.$$

Und da diese Schlußweise unbegrenzt fortgesetzt werden kann, so erkennt man die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes.

Zusatz. Hieraus folgt insbesondere, daß ein für eine gewisse Umgebung T der Stelle $x = 0$ gleichmäßig konvergierender unendlicher Kettenbruch der betrachteten Art daselbst nicht einem *endlichen* Kettenbruche der analogen Form gleich sein kann.¹⁾

5. Der Quotient zweier für $x = 0$ nicht verschwindender konvergierender Reihen nach positiven ganzen Potenzen von x läßt sich nach einem bekannten (schon von Lambert und Legendre benützten) Verfahren formal in einem unbegrenzt fortsetzbaren Kettenbruch von der in Frage stehenden Form entwickeln. Man kann nämlich jeden solchen Quotienten $F(x)$ zunächst stets auf die Form bringen:

$$(13) \quad F(x) = \frac{a_1 \cdot \mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_0(x)},$$

wo $\mathfrak{P}_0(x)$, $\mathfrak{P}_1(x)$ etwa für $|x| < r$ gleichzeitig konvergieren mögen und

$$\mathfrak{P}_0(0) = \mathfrak{P}_1(0) = 1,$$

sodann:

$$F(x) = \frac{a_1}{1 + \frac{\mathfrak{P}_0(x) - \mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_1(x)}}.$$

Unter der Voraussetzung, daß zwischen den Koeffizienten von $\mathfrak{P}_0(x)$, $\mathfrak{P}_1(x)$ keine speziellen Relationen bestehen, beginnt die Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x) - \mathfrak{P}_1(x)$ mit einem Gliede von der Form $a_2 x$, so daß also gesetzt werden kann:

$$\mathfrak{P}_0(x) - \mathfrak{P}_1(x) = a_2 x \cdot \mathfrak{P}_2(x),$$

wo $\mathfrak{P}_2(x)$ zum mindesten für $|x| < r$ konvergiert und $\mathfrak{P}_2(0) = 1$ ist. Darnach wird also:

$$F(x) = \frac{a_1}{1 + a_2 x \cdot \frac{\mathfrak{P}_2(x)}{\mathfrak{P}_1(x)}}.$$

¹⁾ Die Richtigkeit dieser Aussage bleibt wieder fraglich, wenn die Stelle $x = 0$ nicht dem Innern des zusammenhängenden Stückes T angehört.

wobei der Quotient $\frac{\mathfrak{P}_2(x)}{\mathfrak{P}_1(x)}$ genau denselben Charakter besitzt, wie der ursprünglich betrachtete: $\frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_0(x)}$ und somit auch wieder die analoge Transformation gestattet. Durch n malige Anwendung dieses Verfahrens gelangt man somit zu einer Kettenbruch-Entwicklung von der Form:

$$(15) \quad F(x) = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2 x}{1} + \cdots + \frac{a_n x}{1} + \frac{a_{n+1} x \cdot \mathfrak{P}_{n+1}(x)}{\mathfrak{P}_n(x)},$$

wo wiederum $\mathfrak{P}_n(x)$, $\mathfrak{P}_{n+1}(x)$ zum mindesten für $|x| < r$ konvergieren und $\mathfrak{P}_n(0) = \mathfrak{P}_{n+1}(0) = 1$.¹⁾ Sieht man von dem besonderen Falle ab, daß für irgend ein bestimmtes n :

$$\frac{\mathfrak{P}_{n+1}(x)}{\mathfrak{P}_n(x)} \equiv 1$$

resultiert und somit $F(x)$ sich auf den *endlichen* Kettenbruch $\left[\begin{smallmatrix} a_1, & a_n x \\ 1, & 1 \end{smallmatrix} \right]^{n+1}$, also auf eine *rationale* Funktion reduziert, so führt das obige Verfahren zur Entstehung eines *unendlichen* Ketten-

¹⁾ Neben dieser Entwicklung existiert naturgemäß noch eine zweite von ähnlicher Form, jedoch mit dem nennerfreien Gliede a_1 anfangend. Man hat nämlich zunächst:

$$F(x) = a_1 \left(1 - \frac{\mathfrak{P}_0(x) - \mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_0(x)} \right) = a_1 - a_1 a_2 \frac{\mathfrak{P}_2(x)}{\mathfrak{P}_0(x)}$$

und kann sodann auf den Quotienten $\frac{\mathfrak{P}_2(x)}{\mathfrak{P}_0(x)}$ das im Texte beschriebene Entwicklungsverfahren anwenden.

Ein analoger Zusammenhang besteht z. B. auch zwischen den beiden Entwicklungen:

$$(1+x)^n = \frac{1}{1} - \frac{nx}{1} + \frac{\frac{n+1}{2}x}{1} - \frac{\frac{n-1}{2 \cdot 3}x}{1} + \frac{\frac{2(n+2)}{3 \cdot 4}x}{1} - \frac{\frac{2(n-2)}{4 \cdot 5}x}{1} + \dots$$

(s. Gauß, Werke, Bd. 3, p. 136) und:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1} - \frac{\frac{n-1}{2}x}{1} + \frac{\frac{n+1}{2 \cdot 3}x}{1} - \frac{\frac{n-2}{2 \cdot 3}x}{1} + \frac{\frac{n+2}{2 \cdot 5}x}{1} - \dots$$

(s. Lagrange, Oeuvres, T. 4, p. 315).

bruches $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_v x}{1} \right]_2^\infty$. Wenn dieser letztere für irgendwelche x des Bereiches $|x| < r$ konvergiert, so würde daraus noch keineswegs ohne weiteres folgen, daß sein Wert mit demjenigen von $F(x)$ übereinstimmt: vielmehr müßte, wenn man wiederum seine Näherungsbrüche mit $\frac{A_v(x)}{B_v(x)}$ bezeichnet, noch ausdrücklich bewiesen werden, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(F(x) - \frac{A_n(x)}{B_n(x)} \right) = 0$$

ist¹⁾ (woraus dann umgekehrt die *Konvergenz* des Kettenbruches *eo ipso* folgen würde). Diese schon bei verhältnismäßig einfachen und beschränkten Voraussetzungen schon ziemlich umständliche,²⁾ bei nur wenig allgemeineren, wie z. B. in dem klassischen Falle des Quotienten zweier hypergeometrischer Reihen³⁾ ganz außerordentlich schwierige und mühsame Feststellung wird indessen entbehrlich durch den folgenden Satz, durch welchen tatsächlich die Frage nach der *Entwickelbarkeit* von $F(x)$ in einen konvergenten Kettenbruch der fraglichen Art auf dessen *rein formale* Herstellung und auf die bloße Untersuchung seiner (gleichmäßigen) *Konvergenz* zurückgeführt wird, nämlich:

*Satz IV. Wenn der bei dem oben bezeichneten Verfahren aus $F(x)$ hervorgehende unendliche Kettenbruch für eine gewisse Umgebung der Stelle $x = 0$ gleichmäßig konvergiert, so stimmt sein Wert daselbst mit demjenigen von $F(x)$ überein.*⁴⁾

¹⁾ Vgl. Enzyklopädie der math. Wissensch. I, 1. p. 135. — Oscar Perron, Sitz.-Ber. 37 (1907), p. 496.

²⁾ Lambert, Histoire de l'Académie de Berlin 1761 (publ. 1768), p. 368 ff. (vgl. hierzu Sitz.-Ber. 28 (1897), p. 331). — Schlämilch, Algebr. Analysis (4. Aufl. 1868), p. 304, 321. — Stolz-Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie 2 (1905), p. 580 ff.

³⁾ W. Thomé, Journ. für Mathematik 66 (1866), p. 322—336; 67 (1867), p. 299—309.

⁴⁾ Diesen Satz scheint im wesentlichen schon Riemann gekannt zu haben, wie ich aus einer Bemerkung am Anfange des Fragmentes:

Beweis. Aus Gl. (15) folgt zunächst:

$$F(x) = \frac{\mathfrak{F}_n(x) \cdot A_n(x) + a_{n+1}x \cdot \mathfrak{F}_{n+1}(x) \cdot A_{n-1}(x)}{\mathfrak{F}_n(x) \cdot B_n(x) + a_{n+1}x \cdot \mathfrak{F}_{n+1}(x) \cdot B_{n-1}(x)}$$

und daher

$$(16) \quad F(x) - \frac{A_n(x)}{B_n(x)} = \frac{a_{n+1}x \cdot \mathfrak{F}_{n+1}(x) \cdot \{A_{n-1}(x) \cdot B_n(x) - A_n(x) \cdot B_{n-1}(x)\}}{B_n(x) \cdot \{\mathfrak{F}_n(x) \cdot B_n(x) + a_{n+1}x \cdot \mathfrak{F}_{n+1}(x) \cdot B_{n-1}(x)\}}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{a_1 a_2 \dots a_{n+1} \cdot x^n \cdot \mathfrak{F}_{n+1}(x)}{B_n(x) \cdot \{\mathfrak{F}_n(x) \cdot B_n(x) + a_{n+1}x \cdot \mathfrak{F}_{n+1}(x) \cdot B_{n-1}(x)\}}.$$

Da $B_n(0) = \mathfrak{F}_n(0) = \mathfrak{F}_{n+1}(0) = 1$, so folgt, daß die Entwicklung des letzten Ausdruckes nach Potenzen von x mit x^n beginnt, somit die Entwicklung von $F(x)$ bis zu dem Gliede mit x^{n-1} einschließlich mit derjenigen von $\frac{A_n(x)}{B_n(x)}$ übereinstimmt (bei beliebigem n). Und da andererseits nach dem Satze II (p. 9) das gleiche für die Entwicklung von $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n(x)}{B_n(x)}$ stattfindet, so ergibt sich die vollkommene Identität der Potenzreihen für $F(x)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n(x)}{B_n(x)}$ und somit die Existenz der Beziehung:

$$(17) \quad F(x) = \left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_n x}{1} \right]_2^\infty$$

in dem behaupteten Umfange. —

Zusatz I. Das oben beschriebene Entwicklungsverfahren und der soeben bewiesene Satz behalten selbstverständlich ihre Gültigkeit, wenn eine der beiden mit $\mathfrak{F}_0(x)$ und $\mathfrak{F}_1(x)$ bezeichneten Potenzreihen auf die Einheit, also $F(x)$ auf eine einfache Potenzreihe oder deren reziproken Wert sich reduziert.

Zusatz II. Reduziert sich $F(x)$ auf den Quotienten zweier *Polynome*, so muß bei dem obigen Verfahren die Kettenbruch-

„Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita“ (Werke, 1. Aufl., p. 400) entnehmen möchte. Er findet sich ohne Angabe des Autors in der Enzyklopädie der math. Wissenschaften II, 2, p. 91, auch bei van Vleck (2), p. 15, scheint aber nicht allgemein bekannt zu sein.

Entwicklung offenbar bei einem bestimmten Gliede abbrechen, mit anderen Worten, eine *rationale* Funktion liefert stets einen *endlichen* Kettenbruch der betrachteten Form. Hieraus folgt aber in Verbindung mit dem Zusatze am Schlusse von Nr. 4, daß ein *unendlicher*, in der Umgebung T von $x = 0$ gleichmäßig konvergierender Kettenbruch dieser Art, daselbst *niemals* eine *rationale* Funktion darstellen kann.¹⁾

6. Es werde jetzt angenommen, bezüglich der Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_v x}{1} \right]$ stehe zunächst nur soviel fest, daß in einem gewissen zusammenhängenden und abgeschlossenen, die Stelle $x = 0$ im Innern enthaltenden Bereiche T der „Rest-Kettenbruch“ $\left[\frac{a_v x}{1} \right]_{m+1}^{\infty}$ bei einer bestimmten, für den ganzen Bereich gleich bleibenden Wahl von $m > 0$ *gleichmäßig konvergiere*. Wird dann mit $\frac{A_{m,n}(x)}{B_{m,n}(x)}$ der n^{te} Näherungsbruch dieses Rest-Kettenbruches bezeichnet, so daß also:

$$(18) \quad \frac{A_{m,n}(x)}{B_{m,n}(x)} = \left[\frac{a_v x}{1} \right]_{m+1}^{m+n},$$

und setzt man:

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{m,n}(x)}{B_{m,n}(x)} = K_m(x),$$

so repräsentiert wiederum $K_m(x)$ nach Satz I (p. 8) eine in T reguläre analytische Funktion. Man hat sodann:

$$(20) \quad \frac{A_{m+n}(x)}{B_{m+n}(x)} = \frac{B_{m,n}(x) \cdot A_m(x) + A_{m,n}(x) \cdot A_{m-1}(x)}{B_{m,n}(x) \cdot B_m(x) + A_{m,n}(x) \cdot B_{m-1}(x)}$$

und daher:

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{m+n}(x)}{B_{m+n}(x)} = \frac{A_m(x) + A_{m-1}(x) \cdot K_m(x)}{B_m(x) + B_{m-1}(x) \cdot K_m(x)},$$

vorausgesetzt, daß der rechts stehende Ausdruck einen Sinn hat.

¹⁾ Auch hier beruht die Sicherheit der gemachten Aussage wieder wesentlich auf der Zugehörigkeit der Stelle $x = 0$ zum Innern von T .

Das letztere wäre aber nur dann *nicht* der Fall, wenn

$$(22) \quad B_m(x) + B_{m-1}(x) \cdot K_m(x) = 0,$$

was offenbar wegen des analytischen Charakters dieses Ausdruckes höchstens für eine *endliche* Anzahl dem Bereiche T angehöriger Stellen möglich ist, die dann nur gewöhnliche Nullstellen der in T regulären analytischen Funktion

$$B_m(x) + B_{m-1}(x) \cdot K_m(x)$$

sein können. Andernfalls müßte nämlich der fragliche Ausdruck in T geradezu *identisch* verschwinden, und man hätte daselbst somit

$$-\frac{B_m(x)}{B_{m-1}(x)} = K_m(x), \text{ d. h. } = \left[\begin{matrix} a, x \\ 1 \end{matrix} \right]_{m+1}^x$$

was nach Zusatz II der vorigen Nummer unmöglich ist.¹⁾

Da andererseits niemals gleichzeitig mit der Gleichung (22) die folgende

$$A_m(x) + A_{m-1}(x) \cdot K_m(x) = 0$$

bestehen kann, denn in diesem Falle hätte man entweder

$$\frac{A_m(x)}{B_m(x)} = \frac{A_{m-1}(x)}{B_{m-1}(x)}$$

oder, falls $K_m(x) = 0$ wäre: $A_m(x) = B_m(x) = 0$, was beides unmöglich ist,²⁾ so sind solche Stellen, für welche Gl. (22)

besteht, *Pole* für die durch $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{m+n}(x)}{B_{m+n}(x)}$ repräsentierte analytische Funktion, also Nullstellen für deren reziproken Wert, mit-

1) Diese Schlußweise versagt, wenn die Stelle $x = 0$ nicht dem Innern von T angehört. In diesem Falle wäre es also in der Tat denkbar, daß der Ausdruck $B_m(x) + B_{m-1}(x) \cdot K_m(x)$ in T *identisch* verschwindet. Andererseits erscheint diese Möglichkeit aber ausgeschlossen, wenn nur soviel bekannt ist, daß er für *irgend eine einzelne Stelle* des Bereiches T von Null verschieden ausfällt, mit anderen Worten (s. Gl. (21)), wenn die *Konvergenz* des Gesamt-Kettenbruches für eine einzige Stelle von T feststeht.

2) S. z. B. Sitz.-Ber. 28 (1898), p. 298.

hin Stellen „*außerwesentlicher*“ Divergenz¹⁾ für den vorgelegten Kettenbruch $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_v x}{1} \right]$. Abgesehen von derartigen (im Bereiche T höchstens in endlicher Anzahl vorkommenden) Stellen ist dann der obige Kettenbruch in T durchweg *konvergent* und zwar, wie aus Gl. (20) und der vorausgesetzten *gleichmäßigen* Konvergenz des Rest-Kettenbruches $K_m(x)$ leicht entnommen werden kann, *gleichmäßig* konvergent in jedem Bereiche T' , welcher aus T durch Ausschluß beliebig kleiner Umgebungen jener Divergenzstellen (Pole) entsteht.

Bezeichnet man das eben charakterisierte Verhalten durch den Ausdruck: der betreffende Kettenbruch konvergiere im Bereiche T „*im wesentlichen gleichmäßig*“, so läßt sich das Ergebnis der vorstehenden Betrachtung folgendermaßen aussprechen:

Satz V. Weiß man nur, daß in irgend einem zusammenhängenden und abgeschlossenen, die Stelle $x = 0$ im Innern enthaltenden Bereiche T der Kettenbruch

$\left[\frac{a_v x}{1} \right]_{m+1}^\infty$, wo $m > 0$, gleichmäßig konvergiert, so konvergiert

der Kettenbruch $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_v x}{1} \right]_2^\infty$ daselbst zum mindesten noch

im wesentlichen gleichmäßig, und zwar konvergiert er mit eventueller Ausnahme einer endlichen Anzahl außerwesentlicher Divergenzstellen x' . Er stellt dann eine in T eindeutige analytische Funktion dar, welche jene Stellen x' zu Polen hat, sonst im Innern von T sich regulär verhält.²⁾

Anmerkung. Ich nenne einen beliebigen unendlichen Kettenbruch $\left[\frac{a_v}{b_v} \right]_1^\infty$, dessen Näherungsbrüche wiederum mit $\frac{A_v}{B_v}$ be-

¹⁾ Bezüglich dieser Ausdrucksweise s. die Anmerkung am Schlusse dieses Paragraphen.

²⁾ Enthält der Bereich T die Stelle $x = 0$ nicht im Innern, so bleibt der Satz, wie die Fußnote auf der vorigen Seite lehrt, noch gültig, falls die Konvergenz des Gesamt-Kettenbruches für irgend eine einzelne Stelle von T anderweitig feststeht.

zeichnet werden mögen, *außerwesentlich divergent*, wenn die *reziproken Werte* der letzteren *nach Null konvergieren*, was offenbar nicht nur der Fall ist, wenn $\lim_{v=\infty} \left| \frac{A_v}{B_v} \right| = +\infty$, sondern auch dann, wenn unter den Näherungsbrüchen unendlich viele „sinnlose“, d. h. solche von der Form $\frac{A_v}{0}$, wo $|A_v| > 0$, sich befinden, während die Folge der übrigen¹⁾ absolut genommen nach $+\infty$ divergiert. Ich habe daher diese Form der Divergenz früher²⁾ mit dem Ausdrucke bezeichnet: der Kettenbruch *divergiere schlechtlin oder im wesentlichen nach ∞* , späterhin diese etwas umständliche Redewendung gelegentlich durch die kürzere (auch von Herrn Perron³⁾ angewendete) ersetzt: *er divergiere eigentlich*. Da aber die Bezeichnung „*eigentliche Divergenz*“ sonst von mir in einem anderen Sinne gebraucht wird,⁴⁾ so erscheint es mir zweckmäßiger, in dem vorliegenden Zusammenhange die Bezeichnung „*außerwesentliche Divergenz*“ einzuführen. In der Tat ist die fragliche Art von Divergenz, ganz abgesehen von der soeben festgestellten Beziehung zu dem Auftreten *außerwesentlich* singulärer Stellen, schon dadurch als eine „*außerwesentliche*“ charakterisiert, daß sie durch Weglassung des ersten Teilbruches $\frac{a_1}{b_1}$ aufgehoben wird: bei außerwesentlicher Divergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_v}{b_v} \right]_1^\infty$ konvergiert der Kettenbruch $\left[\frac{a_v}{b_v} \right]_2^\infty$ allemal nach dem Werte $-b_1$, eventuell sogar *unbedingt*, derart, daß also unter allen Kettenbrüchen $\left[\frac{a_v}{b_v} \right]_{m+1}^\infty$ der für $m = 0$ resultierende dann als der einzig divergente erscheint.

1) Unter der Voraussetzung, daß sämtliche a_v von Null verschieden, ist die Anzahl der nicht sinnlosen Näherungsbrüche stets unbegrenzt: s. Sitz.-Ber. 28 (1898), p. 303, Fußnote.

2) A. a. O., p. 304.

3) Sitz.-Ber. 37 (1907), p. 484.

4) Nämlich für ein Unendlichwerden *mit bestimmtem Vorzeichen* — s. Enzyklopädie der math. Wissenschaften I, 1, p. 68, 1122.

§ 2. Kettenbrüche von der Form $\left[\begin{smallmatrix} a_1 & a_v x \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right]_2^\infty$, deren $|a_v|$ unter einer endlichen Schranke bleiben.

1. Bleiben die $|a_v|$ unter einer endlichen Schranke, so existiert stets eine gewisse Umgebung der Stelle $x = 0$, für welche der Kettenbruch gleichmäßig konvergiert. Denn nach einem bekannten, früher von mir abgeleiteten Konvergenzkriterium¹⁾ ist der Kettenbruch überhaupt (und zwar sogar unbedingt) *konvergent*, falls

$$|a_v x| \leq \frac{1}{4} \quad (v = 2, 3, 4 \dots),$$

also, wenn α die *obere Grenze* der $|a_v|$ bezeichnet, für

$$|x| \leq \frac{1}{4\alpha}.$$

Der Umstand, daß nach jenem Kriterium die Konvergenz noch erhalten bleibt, wenn man sämtliche Teilzähler $a_v x$ durch $-\frac{1}{4}$ ersetzt, läßt dann leicht erkennen, daß die Konvergenz eine für $|x| \leq \frac{1}{4\alpha}$ *gleichmäßige* ist.²⁾ Weiter folgt auf demselben Wege, daß zu diesem Bereiche *gleichmäßiger* Konvergenz noch ein gewisser Bereich zum mindesten *im wesentlichen gleichmäßiger* Konvergenz hinzutritt, falls der *obere Limes* der $|a_v|$ *kleiner* ausfällt als die *obere Grenze* α .

Das eben bezeichnete Ergebnis soll indessen der Vollständigkeit zu Liebe an dieser Stelle auch unabhängig von dem oben zitierten Konvergenz-Kriterium abgeleitet werden.

2. Wir beweisen also den folgenden Satz:

Besitzen die $|a_v|$ ($v = 2, 3 \dots$) die obere Grenze α , so ist der Kettenbruch $\left[\begin{smallmatrix} a_1 & a_v x \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right]_2^\infty$ unbedingt und gleich-

¹⁾ Sitz.-Ber. 28 (1898), p. 322, Formel (78).

²⁾ Vgl. Sitz.-Ber. 35 (1905), p. 380 und die Fußnote auf p. 23 der vorliegenden Abhandlung.

mäßig konvergiert für $|x| < \varrho = \frac{1}{4a}$. Ist der obere Limes a' der a_r von a verschieden, in welchem Falle dann nur $a' < a$ sein kann, so konvergiert der Kettenbruch noch mindestens im wesentlichen gleichmäßig für $\varrho \leq |x| < r' = \frac{1}{4a' + \delta}$, unter δ jede beliebig kleine positive Zahl verstanden.¹⁾

Beweis. Man hat:

$$(1) \quad B_1 = 1 \quad B_2 = 1 + a_2 x,$$

im übrigen für $r \geq 3$:

$$(2) \quad B_r = B_{r-1} + a_r x \cdot B_{r-2}.$$

Wird x auf den Bereich $|x| < \varrho = \frac{1}{4a}$ beschränkt, so hat man $|a_r x| < \frac{1}{4}$ und daher:

$$|B_2| \geq 1 - |a_2 x| > \frac{3}{4}$$

$$|B_r| \geq |B_{r-1}| - \frac{1}{4} |B_{r-2}| \quad (r = 3, 4, \dots),$$

anders geschrieben:

$$|B_r| - \frac{1}{2} |B_{r-1}| \geq \frac{1}{2} (|B_{r-1}| - \frac{1}{2} |B_{r-2}|).$$

Durch Substitution von $r = n, (n-1) \dots 3$ und Multiplikation der resultierenden Ungleichungen folgt hieraus:

$$(3) \quad |B_n| - \frac{1}{2} |B_{n-1}| \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} (|B_2| - \frac{1}{2} |B_1|) > \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Diese zunächst unter der Voraussetzung $n > 3$ abgeleitete Ungleichung gilt, wie unmittelbar ersichtlich auch noch für $n = 2$ (man hat nämlich $|B_2| - \frac{1}{2} |B_1| \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$).

¹⁾ Vgl. van Vleck (1), p. 477, 478. Die dort befolgte Beweismethode reicht übrigens nur aus, um die gleichmäßige Konvergenz für

$$x \leq \varrho' < \varrho = \frac{1}{4a}$$

zu beweisen.

Ersetzt man in Ungl. (3) n sukzessive durch $(n-1)$, $(n-2)$, \dots , 2 , multipliziert die resultierenden Ungleichungen bzw. mit $\frac{1}{2}$, $(\frac{1}{2})^2$, \dots , $(\frac{1}{2})^{n-2}$ und addiert sie zu Ungl. (3), so findet man:

$$(4) \quad B_n - (\frac{1}{2})^{n-1} \cdot B_1 \geq (n-1) \cdot (\frac{1}{2})^n,$$

also schließlich mit Berücksichtigung von (1):

$$(5) \quad B_n \geq (n+1) \cdot (\frac{1}{2})^n.$$

Hieraus folgt zunächst, daß keiner der Näherungsbruch-Nenner $B_n(x)$ für $|x| \leq \varrho$ verschwinden kann. Da sodann:

$$(6) \quad \frac{A_n}{B_n} = a_1 + \sum_2^n (-1)^{v-1} \frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_v}{B_{v-1} B_v} \cdot x^{v-1}$$

und andererseits mit Benützung von Ungl. (5):

$$(7) \quad \left| \frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_v}{B_{v-1} B_v} \cdot x^{v-1} \right| \leq |a_1| \cdot \frac{2^{v-1} \cdot 2^v}{4^{v-1} \cdot v(v+1)} = |a_1| \cdot \frac{2}{v(v+1)},$$

so erkennt man, daß die Summe (6) für $|x| \leq \varrho$ und $\lim n = \infty$ in eine absolut konvergente Reihe übergeht, deren einzelne Glieder absolut genommen die entsprechenden Glieder der absolut konvergenten Reihe

$$|a_1| \left\{ 1 + 2 \sum_2^\infty \frac{1}{v(v+1)} \right\}$$

nicht übersteigen und die somit für $|x| < \varrho$ *gleichmäßig* konvergiert.¹⁾ Das letztere gilt somit auch für den mit jener

¹⁾ Das eben durchgeführte Beweisverfahren besagt im Grunde nichts anderes, als daß der Kettenbruch bzw. die damit äquivalente Reihe noch in dem für die Konvergenz *ungünstigsten* Falle $a_v x = -\frac{1}{2}$ ($v = 2, 3, \dots$) *konvergiert*. In diesem Falle tritt nämlich an die Stelle der *Ungleichung* (5) die *Gleichung*:

$$B_n = (n+1) \cdot (\frac{1}{2})^n$$

und es wird demnach:

$$\begin{aligned} \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} &= a_1 \left(1 + 2 \sum_2^\infty \frac{1}{v(v+1)} \right) \\ &= 2 a_1, \end{aligned}$$

Reihe äquivalenten Kettenbruch. Und da die obere Grenze der a_v sich keinesfalls erhöhen kann, wenn man lediglich Indices $v > m > 2$ in Betracht zieht, so folgt unmittelbar, daß der Kettenbruch auch *unbedingt* konvergiert (so daß also sein Wert für $|x| < \varrho$ durchweg von Null verschieden ist).

Wird jetzt ferner angenommen, daß $\overline{\lim}_{v=\infty} |a_v| = a' < a$, so läßt sich zu beliebig kleinem $\delta > 0$ ein n so fixieren, daß:

$$|a_v| \leq a' + \frac{\delta}{4} \text{ für } v > n.$$

Genügt dann x der Bedingung:

$$|x| \leq r' = \frac{1}{4a' + \delta},$$

so ist auf Grund des soeben bewiesenen Satzes der Kettenbruch $\left[\frac{a_v x}{1} \right]_n^\infty$ (unbedingt und) gleichmäßig konvergiert, und es konvergiert daher der Gesamt-Kettenbruch noch zum mindesten im wesentlichen gleichmäßig in dem erweiterten Gebiete $\varrho < x \leq r'$.

Zusatz. Unter den gemachten Voraussetzungen stellt der Kettenbruch eine für $0 \leq |x| < \varrho$ (wo $\varrho = \frac{1}{4a}$) eindeutige und von Null verschiedene, zum mindesten für $0 \leq |x| < \varrho$ reguläre analytische Funktion dar. Die Regularität erstreckt sich auch noch auf $|x| = \varrho$, wenn $\overline{\lim}_{v=\infty} |a_v| = a' < a$, während dann die betreffende Funktion für $\varrho < |x| < \varrho'$ (wo $\varrho' = \frac{1}{4a'}$) noch bis auf etwaige Pole regulär ist. Die eventuelle Anzahl dieser letzteren ist für $|x| < r' < \varrho'$ stets endlich, könnte aber bei unbegrenzter Annäherung von r' an ϱ' über alle Grenzen wachsen.

wie sich übrigens auch durch Auswertung des periodischen Kettenbruches

$$\frac{a_1}{1} - \frac{1}{1} - \frac{1}{1} - \dots$$

leicht verifizieren läßt.

Zugleich ergibt sich aus Satz IV des vorigen Paragraphen (p. 15), daß ein Kettenbruch der vorliegenden Art, falls er durch formale Entwicklung von $F(x) = \frac{\mathfrak{P}_1(x)}{\mathfrak{P}_0(x)}$ gewonnen wird, die Funktion $F(x)$ bzw. auch deren analytische Fortsetzung wirklich darstellt.

§ 3. Der Fall $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$. — Der Heinesche Kettenbruch und die Heinesche Reihe.

1. Besonders einfach gestaltet sich der Fall $\alpha' = \overline{\lim}_{\nu=\infty} |a_\nu| = 0$, d. h. schließlich:

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0.$$

Da sodann $\varrho' = \frac{1}{\delta}$ d. h. beliebig groß wird, so konvergiert der betreffende Kettenbruch in jedem noch so großen endlichen Bereiche zum mindesten im wesentlichen gleichmäßig, für eine gewisse Umgebung der Stelle $x = 0$ schlechthin gleichmäßig. Da er also keinesfalls eine rationale Funktion darstellen kann, so ergibt sich der folgende Satz:

Ist $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$, so konvergiert der Kettenbruch $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1} \right]_2^\infty$ in jedem noch so großen endlichen Bereiche mit eventueller Ausnahme einer endlichen Anzahl außerwesentlicher Divergenzstellen. Er stellt eine in der Umgebung von $x = 0$ reguläre, im übrigen bis auf etwaige¹⁾ Pole reguläre analytische Funktion mit der wesentlich singulären Stelle $x = \infty$ dar.

¹⁾ Die Pole können auch gänzlich fehlen, so daß also dann der betreffende Kettenbruch eine ganze transzendente Funktion darstellt. Man hat z. B.

$$e^x = \frac{1}{1} - \frac{x}{1} + \frac{\frac{1}{2}x}{1} - \frac{\frac{1}{2 \cdot 3}x}{1} + \frac{\frac{1}{2 \cdot 3}x}{1} - \frac{\frac{1}{2 \cdot 5}x}{1} + \frac{\frac{1}{2 \cdot 5}x}{1} - \dots$$

2. Dem hier betrachteten Typus gehört der Kettenbruch an, den Heine für den Quotienten zweier verallgemeinerter hypergeometrischer („Heinescher“) Reihen abgeleitet hat.¹⁾ Es werde gesetzt:

$$(1) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) \\ = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{(1-q^\alpha) \dots (1-q^{\alpha+\nu-1}) (1-q^\beta) \dots (1-q^{\beta+\nu-1})}{(1-q^\gamma) \dots (1-q^{\gamma+\nu-1}) (1-q) \dots (1-q^\nu)} \cdot x^\nu,$$

wo α, β, γ, q beliebige reelle oder komplexe Zahlen bedeuten, lediglich mit der Beschränkung, daß γ weder Null, noch ganzzahlig negativ und $|q| < 1$;²⁾ die Potenzen von q sind als Hauptwerte zu verstehen. Die Reihe konvergiert, wie unmittelbar aus dem Cauchyschen Haupt-Kriterium zweiter Art hervorgeht, für $|x| < 1$, sie divergiert für $|x| > 1$ (übrigens auch für $|x| = 1$, da die Koeffizienten bei unbegrenzt wachsendem Index, in Folge der Konvergenz der im Zähler und Nenner auftretenden Produkte, bestimmte von Null verschiedene Grenzwerte besitzen); ist mindestens eine der Zahlen α, β negativ ganzzahlig, so reduziert sich die Reihe auf ein Polynom, im Falle $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ auf das Anfangsglied 1.

(Gauß, Werke, Bd. 3, p. 136; daselbst steht infolge eines Druckfehlers im dritten Gliede $\frac{1}{3}$ statt $\frac{1}{2}$), oder auch:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} - \frac{\frac{1}{2}x}{1} + \frac{\frac{1}{2 \cdot 3}x^2}{1} - \frac{\frac{1}{2 \cdot 3}x^2}{1} + \frac{\frac{1}{2 \cdot 5}x^3}{1} - \frac{\frac{1}{2 \cdot 5}x^3}{1} + \dots$$

(Lagrange, Oeuvres T. 4, p. 317).

1) Dies gilt mit einer unerheblichen Modifikation auch für den „Besselschen“ Kettenbruch, d. h. die Kettenbruch-Entwicklung des Quotienten zweier Besselscher Funktionen, deren Indices sich um eine additive Einheit unterscheiden. S. van Vleck (1), Nr. 10.

2) Der Fall $|q| > 1$ kann mit Hilfe der unmittelbar ersichtlichen Beziehung:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = \varphi\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{q}, q^{\alpha+\beta-\gamma-1}x\right)$$

auf den im Text behandelten zurückgeführt werden. Für $q = 1$, genauer gesagt für $\lim q = 1$ geht die Reihe in die gewöhnliche hypergeometrische über.

Für den Quotienten zweier solcher Reihen besteht dann, wie Heine *rein formal* abgeleitet hat,¹⁾ eine Kettenbruch-Entwicklung von der Form:

$$(2) \quad \frac{\varphi(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, q, x)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)} = \left[\begin{matrix} a_1 & a_2 & x \\ 1 & 1 & \end{matrix} \right]_2^\infty,$$

wo $a_1 = 1$, im übrigen:

$$(3) \quad \begin{cases} a_{2\mu} = -q^{\beta+\mu-1} \cdot \frac{(1-q^{\alpha+\mu-1})(1-q^{\gamma-\beta+\mu-1})}{(1-q^{\gamma+2\mu-2})(1-q^{\gamma+2\mu-1})} \\ a_{2\mu+1} = -q^{\alpha+\mu-1} \cdot \frac{(1-q^{\beta+\mu})(1-q^{\gamma-\alpha+\mu})}{(1-q^{\gamma+2\mu-1})(1-q^{\gamma+2\mu})} \end{cases} \quad (\mu = 1, 2, 3, \dots).$$

Da hiernach $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = 0$ wird, so ergibt sich auf Grund der vorhergehenden Betrachtungen, daß die Entwicklung (2) in der Umgebung von $x = 0$ wirklich gültig ist und daß der in jedem endlichen Bereiche bis auf eine endliche Zahl außerwesentlicher Divergenz-Stellen konvergierende Kettenbruch als analytische Fortsetzung des obigen Reihen-Quotienten eine eindeutige, im Endlichen bis auf Pole reguläre Funktion definiert (und zwar mit der wesentlich singulären Stelle $x = \infty$, außer wenn der Kettenbruch sich auf einen endlichen reduziert, was allemal dann und nur dann der Fall ist, wenn $\alpha - \gamma$ positiv ganzzahlig bzw. $\beta - \gamma$ positiv ganzzahlig oder Null).

Es fragt sich nun, ob der analoge Funktions-Charakter auch der Reihe $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ an sich zukommt. Denn aus

¹⁾ Mitteilung des Resultates im Journ. f. Math. 32 (1846), p. 212; Herleitung ebendasselbst 34 (1847), p. 294; genauere Untersuchung der Näherungsbrüche ebendasselbst 57 (1860), p. 237 ff. Vgl. auch Handbuch der Kugelfunktionen I (2. Aufl. 1878), p. 284. — Die wirkliche Gültigkeit der Entwicklung (2) bzw. die Konvergenz des fraglichen Kettenbruchs scheint mir von Heine nicht bewiesen worden zu sein. So viel ich übersehen kann, finden sich die betreffenden Beweise in der Literatur überhaupt zum ersten Male in der oben (p. 7) bereits erwähnten Abhandlung des Herrn J. Thomae: Journ. f. Math. 70 (1864), p. 278, Art. 7 und zwar nur implicite, mit allgemeineren, äußerst verwickelten Untersuchungen verknüpft; in elementarer, auf den einfachen, auch hier benützten Prinzipien beruhender Form zuerst bei van Vleck (2), Nr. 13.

der eben erwiesenen Beschaffenheit des obigen Reihen-*Quotienten* könnte noch nicht einmal gefolgert werden, daß das Funktions-Element $\varphi(a, \beta, \gamma, x)$ eine *eindeutige* Funktion definiert.¹⁾ Das fragliche Resultat läßt sich aber in folgender Weise erschließen. Setzt man in (2): $\beta = 0$ und beachtet, daß $\varphi(a, 0, \gamma, q, x) \equiv 1$ wird, so folgt, wenn man noch γ statt $\gamma + 1$ substituiert:

$$(4) \quad \varphi(a, 1, \gamma, q, x) \equiv 1 + \sum_1^{\infty} \frac{(1-q^a) \dots (1-q^{a+r-1})}{(1-q^r) \dots (1-q^{r+\mu-1})} \cdot x^r = \left[1, \frac{a_r x}{1} \right]_2^{\infty},$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{2\mu} = -q^{a-1} \cdot \frac{(1-q^{a+\mu-1})(1-q^{\gamma+\mu-2})}{(1-q^{\gamma+2\mu-3})(1-q^{\gamma+2\mu-2})} \\ a_{2\mu+1} = -q^{a+\mu-1} \cdot \frac{(1-q^a)(1-q^{\gamma-a+\mu})}{(1-q^{\gamma+2\mu-2})(1-q^{\gamma+2\mu-1})} \end{array} \right. \quad (\mu = 1, 2, 3 \dots),$$

so daß also auch $\varphi(a, 1, \gamma, q, x)$ eine eindeutige, im Endlichen bis auf Pole reguläre Funktion definiert.

Das gleiche gilt dann aber offenbar von dem aus $\varphi(a, 1, \gamma, q, x)$ durch die Substitution $a = \beta, \gamma = 1$ hervorgehenden Funktions-Elemente:

$$(6) \quad \varphi(\beta, 1, 1, q, x) \equiv 1 + \sum_1^{\infty} \frac{(1-q^\beta) \dots (1-q^{\beta+r-1})}{(1-q) \dots (1-q^r)} \cdot x^r$$

und da die Multiplikation der Koeffizienten gleich hoher Potenzen der Reihen (4) und (6) die Koeffizienten von $\varphi(a, \beta, \gamma, q, x)$ liefert, so folgt aus einer Bemerkung des Herrn Borel²⁾ zu einem bekannten Hadamardschen Satze³⁾ über den Zusammenhang der Singularitäten der durch drei Funktions-Elemente von der Form $\sum A_r x^r, \sum B_r x^r, \sum A_r B_r x^r$ definierten analytischen Funktionen, daß auch $\varphi(a, \beta, \gamma, q, x)$ eine *eindeutige, im Endlichen bis auf Pole reguläre Funktion definiert*.

3. Nachdem die Natur der fraglichen Funktion so weit bestimmt ist, läßt sich Lage und Ordnung der Pole durch die

1) So ist z. B. $\frac{\sin a \sqrt{x}}{\sin b \sqrt{x}}$ eine ganze transzendente Funktion, obschon

Zähler und Nenner einzeln genommen zweiwertige Funktionen sind.

2) Bull. soc. math. de France 26 (1898), p. 241, 247.

3) Acta math. 22 (1899), p. 55.

folgende Überlegung vollständig ermitteln. Da die Koeffizienten der Reihe $\varphi(a, \beta, \gamma, q, x)$, wie schon oben bemerkt wurde, einem endlichen Grenzwerte zustreben und die Funktion auf dem Konvergenz-Kreise von $\varphi(a, \beta, \gamma, q, x)$ nur *Pole* besitzen kann, so müssen diese von der *ersten* Ordnung sein. Und da der Quotient zweier konsekutiver Koeffizienten den Grenzwert 1 besitzt, so muß $x = 1$ ein solcher Pol und zwar auf dem Konvergenz-Kreise der *einzigste* dieser Art sein (da das Vorhandensein von weiteren Polen erster Ordnung auf dem Einheitskreise die Existenz jenes Grenzwertes verhindern würde, andererseits das Auftreten von *niedrigeren* Singularitäten definitiv ausgeschlossen ist). Hieraus folgt aber, daß $(1 - x) \cdot \varphi(a, \beta, \gamma, q, x)$ innerhalb eines Kreises $|x| < r_1$, wo $r_1 > 1$, regulär sein muß und daß für die Bestimmung der — abgesehen von $x = 1$ — dem Nullpunkte *nächstgelegenen* Pole die Potenzreihe $(1 - x) \cdot \varphi(a, \beta, \gamma, q, x)$ maßgebend ist. Um das Bildungsgesetz dieser letzteren möglichst übersichtlich darstellen zu können, erweist es sich als zweckmäßig, statt der Reihe $\varphi(a, \beta, \gamma, q, x)$ eine noch etwas allgemeinere einzuführen, deren Koeffizienten statt der Faktoren $(1 - q)$, $(1 - q^2)$, . . . voller Symmetrie zu Liebe solche von der Form $(1 - q^\delta)$, $(1 - q^{\delta+1})$, . . . enthalten. Wir definieren hiernach:

$$(7) \quad \Phi(a, \beta, \gamma, \delta, q, x) = \sum_0^{\infty} f_\nu(a, \beta, \gamma, \delta, q) \cdot x^\nu,$$

wo:

$$(8) \quad \begin{aligned} f_0(a, \beta, \gamma, \delta, q) &= 1, & f_\nu(a, \beta, \gamma, \delta, q) \\ &= \frac{(1 - q^\alpha) \dots (1 - q^{\alpha+\nu-1}) (1 - q^\beta) \dots (1 - q^{\beta+\nu-1})}{(1 - q^\gamma) \dots (1 - q^{\gamma+\nu-1}) (1 - q^\delta) \dots (1 - q^{\delta+\nu-1})} \\ &\quad (\nu = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

so daß also speziell:

$$(9) \quad \Phi(a, \beta, \gamma, 1, q, x) \equiv \varphi(a, \beta, \gamma, q, x).$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise möge im folgenden das Element q , da es in allen Formeln unverändert bleibt, weggelassen werden. Man hat sodann:

$$(1-x) \cdot \Phi(a, \beta, \gamma, \delta, x) = 1 + \sum_1^{\infty} \{f_v(a, \beta, \gamma, \delta) - f_{v-1}(a, \beta, \gamma, \delta)\} \cdot x^v \\ = 1 + x \cdot \sum_0^{\infty} \{f_{v+1}(a, \beta, \gamma, \delta) - f_v(a, \beta, \gamma, \delta)\} \cdot x^v.$$

Nun ist:

$$f_{v+1}(a, \beta, \gamma, \delta) = f_v(a, \beta, \gamma, \delta) \cdot \frac{(1-q^{a+v})(1-q^{\beta+v})}{(1-q^{\gamma+v})(1-q^{\delta+v})},$$

also:

$$f_{v+1}(a, \beta, \gamma, \delta) - f_v(a, \beta, \gamma, \delta) \\ = f_v(a, \beta, \gamma, \delta) \frac{q^{\delta+v} + q^{\gamma+v} - q^{\beta+v} - q^{a+v} + q^{a+\beta+2v} - q^{\gamma+\delta+2v}}{(1-q^{\gamma+v})(1-q^{\delta+v})} \\ = \frac{f_v(a, \beta, \gamma+1, \delta+1)}{(1-q)^\gamma (1-q)^\delta} \{(q^\delta + q^\gamma - q^\beta - q^a) \cdot q^v + (q^{a+\beta} - q^{\gamma+\delta}) \cdot q^{2v}\},$$

so daß sich ergibt:

$$(1-x) \cdot \Phi(a, \beta, \gamma, \delta, x) \\ = 1 + \frac{q^\delta + q^\gamma - q^\beta - q^a}{(1-q^\gamma)(1-q^\delta)} \cdot x \cdot \sum_1^{\infty} f_v(a, \beta, \gamma+1, \delta+1) \cdot q^v x^v \\ + \frac{q^{a+\beta} - q^{\gamma+\delta}}{(1-q^\gamma)(1-q^\delta)} \cdot x \cdot \sum_0^{\infty} f_v(a, \beta, \gamma+1, \delta+1) \cdot q^{2v} x^v,$$

d. h. schließlich

$$(10) \quad (1-x) \cdot \Phi(a, \beta, \gamma, \delta, x) \\ = 1 + \frac{q^\delta + q^\gamma - q^\beta - q^a}{(1-q^\gamma)(1-q^\delta)} \cdot x \cdot \Phi(a, \beta, \gamma+1, \delta+1, qx) \\ + \frac{q^{a+\beta} - q^{\gamma+\delta}}{(1-q^\gamma)(1-q^\delta)} \cdot x \cdot \Phi(a, \beta, \gamma+1, \delta+1, q^2 x).$$

Da die erste der rechts auftretenden Φ -Reihen den Konvergenz-Radius $\left| \frac{1}{q} \right|$, die zweite sogar den Konvergenz-Radius $\left| \frac{1}{q^2} \right|$ besitzt, so zeigt diese Gleichung *erstens*, daß die Stelle $x = 1$ auch für diese etwas allgemeinere Reihe $\Phi(a, \beta, \gamma, \delta, x)$ die *einzig*e Singularität auf dem Einheitskreise und zwar ein *Pol erster Ordnung* ist. Und da $\Phi(a, \beta, \gamma+1, \delta+1, qx)$ auf

dem Kreise mit dem Radius $\left| \frac{1}{q} \right|$ sich ganz analog verhalten muß, $\Phi(\alpha, \beta, \gamma + 1, \delta + 1, q^2 x)$ daselbst noch konvergiert, so folgt aus Gl. (10) zweitens, daß die Stelle $x = \frac{1}{q}$ den nächsten Pol (außer $x = 1$) für $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x)$ liefert und zwar wiederum als einen solchen erster Ordnung. Derselbe kann offenbar eventuell fehlen, wenn nämlich der Koeffizient von $\Phi(\alpha, \beta, \delta + 1, q x)$ verschwindet, wenn also:

$$(11) \quad q^\alpha + q^\beta = q^\gamma + q^\delta.$$

Da alsdann der Koeffizient des letzten Gliedes von Gl. (10) keinesfalls gleichzeitig verschwinden kann, so folgt, daß dann mit Sicherheit $\frac{1}{q^2}$ als nächster Pol auftreten muß (außer wenn $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, in welchem Falle sich in der Tat $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x)$ auf $\sum_0^\infty x^r$, also auf $\frac{1}{1-x}$ reduziert). Findet die spezielle Relation (11) nicht statt, so liefert die Anwendung der Formel (10) auf $\Phi(\alpha, \beta, \gamma + 1, \delta + 1, q x)$ zur weiteren Transformation von $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x)$ die Beziehung:

$$(11) \quad (1 - qx) \cdot \Phi(\alpha, \beta, \gamma + 1, \delta + 1, qx) \\ = 1 + \frac{q^{\delta+1} + q^{\gamma+1} - q^\beta - q^\alpha}{(1 - q^{\gamma+1})(1 - q^{\delta+1})} \cdot x \cdot \Phi(\alpha, \beta, \gamma + 2, \delta + 2, q^2 x) \\ + \frac{q^{\alpha+\beta} - q^{\gamma+\delta+2}}{(1 - q^{\gamma+1})(1 - q^{\delta+1})} \cdot x \cdot \Phi(\alpha, \beta, \gamma + 2, \delta + 2, q^3 x),$$

an welche sich dann wieder die analogen Folgerungen knüpfen lassen, wie an Gl. (10). Durch Fortsetzung dieser Schlußweise ergibt sich also:

Die durch das Funktions-Element $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, x)$, also im Falle $\delta = 1$ durch die Heinesche Reihe $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ definierte, in der ganzen Ebene eindeutige, analytische Funktion besitzt außer dem einfachen Pole $x = 1$ nur noch gleichfalls durchweg einfache Pole aus der Reihe der Zahlen $\left(\frac{1}{q}\right)^r$ ($r = 1, 2, 3 \dots$).

Hieraus folgt, daß $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, x)$ durch Multiplikation mit dem konvergenten Produkte $\prod_0^{\infty} (1 - q^v x)$ in eine ganze transzendente Funktion übergeht (welche für diejenigen Stellen $\frac{1}{q^v}$, die infolge besonderer Beschaffenheit der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nicht Pole von $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, x)$ sein sollten, verschwinden würde). Da aber andererseits:¹⁾

$$\prod_0^{\infty} (1 - q^v x) = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^v \cdot \frac{q^{\frac{1}{2}(v-1) \cdot v}}{(1-q) \dots (1-q^v)} \cdot x^v,$$

so lassen sich die Koeffizienten c_v jener ganzen transzendenten Funktion unmittelbar aus der Gleichung bestimmen:

$$(12) \sum_0^{\infty} c_v x^v = \Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, x) \cdot \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^v \cdot q^{\frac{1}{2}(v-1) \cdot v}}{(1-q) \dots (1-q^v)} \cdot x^v \right\},$$

und man gewinnt also auf diese Weise für die durch $\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, x)$ (speziell auch durch $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$) definierte analytische Funktion eine, gerade so wie die Kettenbruch-Darstellung für $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, x)$, in der ganzen Ebene gültige Darstellung durch den Quotienten zweier ganzer transzendenten Funktionen:²⁾

$$(13) \quad \Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q, x) = \frac{\sum_0^{\infty} c_v x^v}{\prod_0^{\infty} (1 - q^v x)},$$

wo:

¹⁾ Euler, *Introductio in analysin infinitorum* (Lausanne 1748), T. I, Cap. XVI, p. 259. — Weitere Literatur s. Enzyklopädie der math. Wissenschaften, I, 1, p. 116, Fußn. 320.

²⁾ Eine mit Gl. (13) im wesentlichen gleichwertige Relation findet man in der oben zitierten Abhandlung des Herrn Thomae (a. a. O., p. 275 (22)). Es ist das gerade die in der Einleitung erwähnte Formel, aus welcher erschlossen werden kann, daß die Heinesche Reihe eine eindeutige analytische Funktion mit lauter einfachen Polen von der Form $\frac{1}{q^v}$ ($v = 0, 1, 2 \dots$) definiert.

$$(14) \quad c_\nu = \sum_0^\nu f_{\nu-\lambda}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, q) \cdot Q_\lambda$$

$$\left(Q_0 = 1, Q_\lambda = \frac{(-1)^\lambda \cdot q^{\frac{1}{2}(\lambda-1)\lambda}}{(1-q) \dots (1-q^\lambda)} \text{ für } \lambda \geq 1 \right).$$

4. Die Transformations-Formel (10) nimmt eine besonders einfache Gestalt an und gestattet sodann noch eine weitere zweckmäßige Umformung, wenn speziell $\beta = \gamma$ ist, in welchem Falle man, da die von β und γ abhängigen Faktoren ganz herausfallen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit geradezu $\beta = \gamma = 1$ setzen kann. Die betreffende Rechnung gestaltet sich übrigens etwas bequemer, wenn man, statt in Gl. (10) $\beta = \gamma = 1$ zu setzen, die betreffende Formel ganz direkt herleitet. Es ist

$$(15) \quad \Phi(\alpha, 1, 1, \delta, x) = \sum_0^\infty f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta) \cdot x^\nu,$$

wo:

$$(16) \quad f_0(\alpha, 1, 1, \delta) = 1, \quad f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta) = \frac{(1-q^\alpha) \dots (1-q^{\alpha+\nu-1})}{(1-q^\delta) \dots (1-q^{\delta+\nu-1})},$$

also:

$$f_{\nu+1}(\alpha, 1, 1, \delta) = \frac{1-q^{\alpha+\nu}}{1-q^{\delta+\nu}} \cdot f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta)$$

$$f_{\nu+1}(\alpha, 1, 1, \delta) - f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta) = \frac{q^{\delta+\nu} - q^{\alpha+\nu}}{1-q^{\delta+\nu}} \cdot f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta)$$

$$= \frac{q^\delta - q^\alpha}{1-q^\delta} \cdot f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta + 1) \cdot q^\nu.$$

Somit tritt hier an die Stelle von Gleichung (10) zunächst die folgende:

$$(17) \quad (1-x) \cdot \Phi(\alpha, 1, 1, \delta, x) = 1 + x \cdot \sum_0^\infty \{f_{\nu+1}(\alpha, 1, 1, \delta) - f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta)\} \cdot x^\nu$$

$$= 1 + \frac{q^\delta - q^\alpha}{1-q^\delta} \cdot \Phi(\alpha, 1, 1, \delta + 1, qx),$$

aus welcher hervorgeht, daß $\Phi(\alpha, 1, 1, \delta, x)$ stets sämtliche Zahlen $\frac{1}{q^\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2 \dots$) zu einfachen Polen hat, außer wenn

$\alpha = \delta + n$, wo $n = 0$ oder eine positive ganze Zahl, in welchem Falle offenbar $\Phi(\alpha, 1, 1, \delta, x)$ sich auf eine rationale Funktion mit den Polen $1, \dots, \frac{1}{q^n}$ reduziert.

Nun ist aber andererseits:

$$\begin{aligned}
 & (q^{\delta-1} - q^\alpha x) \cdot \Phi(\alpha, 1, 1, \delta, qx) \\
 &= q^{\delta-1} + x \sum_0^\infty \{q^\delta \cdot f_{\nu+1}(\alpha, 1, 1, \delta) - q^\alpha \cdot f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta)\} \cdot q^\nu x^\nu \\
 & \text{und} \\
 & q^\delta \cdot f_{\nu+1}(\alpha, 1, 1, \delta) - q^\alpha \cdot f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta) = \left(q^\delta \cdot \frac{1 - q^{\alpha+\nu}}{1 - q^{\delta+\nu}} - q^\alpha \right) \cdot f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta) \\
 & = \frac{q^\delta - q^\alpha}{1 - q^\delta} \cdot f_\nu(\alpha, 1, 1, \delta + 1),
 \end{aligned}$$

folglich:

$$(18) \quad (1-x) \Phi(\alpha, 1, 1, \delta, x) = 1 - q^{\delta-1} + (q^{\delta-1} - q^\alpha x) \cdot \Phi(\alpha, 1, 1, \delta, qx),$$

so daß sich durch Subtraktion der letzten Gleichung von Gl. (17) schließlich ergibt:

$$(19) \quad (1-x) \Phi(\alpha, 1, 1, \delta, x) = 1 - q^{\delta-1} + (q^{\delta-1} - q^\alpha x) \cdot \Phi(\alpha, 1, 1, \delta, qx).$$

Nimmt man hier speziell $\delta = 1$, so daß also $\Phi(\alpha, 1, 1, \delta, x)$ in die Heinesche Reihe

$$\varphi(\alpha, 1, 1, x) \equiv 1 + \sum_1^\infty \frac{(1 - q^\alpha) \dots (1 - q^{\alpha+r-1})}{(1 - q) \dots (1 - q^r)} \cdot x^r$$

übergeht, so liefert Gl. (19) die Beziehung:

$$\begin{aligned}
 \varphi(\alpha, 1, 1, x) &= \frac{1 - q^\alpha x}{1 - x} \varphi(\alpha, 1, 1, qx) \\
 &= \frac{1 - q^\alpha x}{1 - x} \cdot \frac{1 - q^{\alpha+1} x}{1 - qx} \cdot \varphi(\alpha, 1, 1, q^2 x) \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 &= \frac{(1 - q^\alpha x)}{1 - x} \cdot \frac{1 - q^{\alpha+1} x}{1 - qx} \dots \frac{1 - q^{\alpha+n} x}{1 - q^n x} \cdot \varphi(\alpha, 1, 1, q^{n+1} x)
 \end{aligned}$$

und somit, wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\alpha, 1, 1, q^{n+1} x) = 1$, schließlich: 1)

1) Vgl. Heine. Journ. f. Math. 34 (1847), p. 303, Formel 74.

$$(20) \quad 1 + \sum_1^{\infty} \frac{(1-q^{\alpha}) \dots (1-q^{\alpha+\nu-1})}{(1-q) \dots (1-q^{\nu})} \cdot x^{\nu} = \prod_0^{\infty} \frac{(1-q^{\alpha+\nu} x)}{(1-q^{\nu} x)},$$

eine Formel, aus der sich durch Spezialisierung von α , Ersatz von x durch $q^{\alpha} x$ etc. mannigfache andere für die Theorie der elliptischen Funktionen und die Zahlentheorie nützliche Beziehungen herleiten lassen.¹⁾

Setzt man in (19) $\alpha = 1$, $\delta = 2$, wobei also

$$\Phi(1, 1, 1, 2, x) \equiv 1 + \sum_1^{\infty} \frac{1-q}{1-q^{\nu+1}} \cdot x^{\nu}$$

resultiert, so ergibt sich aus Gl. (19), wenn man diese Reihe zur Abkürzung mit $\Phi(x)$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1-q}{1-x} + q \cdot \Phi(qx) \\ &= \frac{1-q}{1-x} + \frac{q \cdot (1-q)}{1-qx} + q^2 \cdot \Phi(q^2x) \end{aligned}$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens, mit Berücksichtigung von $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(q^n x) = 1$:

$$\Phi(x) = (1-q) \left\{ \frac{1}{1-x} + \frac{q}{1-qx} + \frac{q^2}{1-q^2x} + \dots \right\}$$

d. h. schließlich:

$$(21) \quad \sum_0^{\infty} \frac{x^{\nu}}{1-q^{\nu+1}} = \sum_0^{\infty} \frac{q^{\nu}}{1-q^{\nu} x} \cdot 2)$$

¹⁾ S. z. B. Heine, a. a. O., p. 304 ff.

²⁾ S. z. B. Heine, a. a. O., p. 307.

§ 4. Der Fall $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$, wo $|a| > 0$. — Der Poincarésche Satz. —

Der Gauss'sche Kettenbruch und die hypergeometrische Reihe.

1. Besitzen die Teilzähler des Kettenbruches $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_\nu x}{1} \right]_2^\infty$ einen von Null verschiedenen Grenzwert a , so gehört der Kettenbruch derjenigen Klasse an, die ich als (eingliedrig) *limitär-periodisch* bezeichne, da ein solcher Kettenbruch offenbar im Unendlichen näherungsweise wie der periodische Kettenbruch $\frac{ax}{1} + \frac{ax}{1} + \dots$ sich verhält.¹⁾ Das Vorbild für die Behandlung eines solchen Kettenbruches wird also zweckmäßig dieser letztere liefern. Zähler und Nenner der Näherungsbrüche genügen hier der gemeinsamen Rekursionsformel

$$(1) \quad D_{\nu+1} - D_\nu - ax D_{\nu-1} = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3 \dots),$$

deren Auflösung sich in folgender Weise bewerkstelligen läßt. Bestimmt man zwei Zahlen z und z' derart, daß:

$$(2) \quad z + z' = 1, \quad zz' = -ax,$$

mit anderen Worten, bezeichnet man mit z und z' die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(3) \quad y^2 - y - ax = 0,$$

wo $|z| > |z'|$ sein soll, sofern die Wurzeln dieser Gleichung überhaupt *verschiedene* absolute Beträge besitzen, so läßt sich die Rekursionsformel (1) auf die Form bringen:

$$D_{\nu+1} - (z + z') D_\nu + zz' D_{\nu-1} = 0,$$

andern geschrieben:

$$(4) \quad D_{\nu+1} - z D_\nu = z'(D_\nu - z D_{\nu-1}),$$

¹⁾ Der im vorigen Paragraphen bereits erledigte Fall $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$ nimmt offenbar von vornherein eine Ausnahme-Stellung ein, da der entsprechende periodische Kettenbruch identisch Null wäre. Dieser besondere Fall scheidet also für das folgende definitiv aus.

woraus durch Substitution von $\nu = 1, 2, \dots (n-1)$ und Multiplikation der betreffenden Gleichungen folgt:

$$(5) \quad D_n - z D_{n-1} = z'^{n-1} (D_1 - z D_0).$$

Ersetzt man hier n der Reihe nach durch $n-1, n-2, \dots, 1$, multipliziert die resultierenden Gleichungen bzw. mit z, z^2, \dots, z^{n-1} und addiert sie zu Gl. (4), so ergibt sich weiter:

$$(6) \quad \begin{aligned} D_n - z^n D_0 &= (z'^{n-1} + z'^{n-2} \cdot z + \dots + z' \cdot z^{n-2} + z^{n-1}) (D_1 - z D_0) \\ &= \frac{z^n - z'^n}{z - z'} \cdot (D_1 - z D_0). \end{aligned}$$

Bezeichnet man jetzt wieder die Näherungsbrüche des Kettenbruches mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, so hat man zu setzen:

$$\text{im Falle } D_\nu = A_\nu : D_0 = 0, D_1 = ax,$$

$$\text{im Falle } D_\nu = B_\nu : D_0 = 1, D_1 = 1.$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{z^n - z'^n}{z - z'} \cdot ax = - \frac{z^n - z'^n}{z - z'} \cdot z z' \\ B_n &= z^n + \frac{z^n - z'^n}{z - z'} \cdot z' = \frac{z^{n+1} - z'^{n+1}}{z - z'} \end{aligned}$$

und daher:

$$(7) \quad \frac{A_n}{B_n} = - \frac{z^n - z'^n}{z^{n+1} - z'^{n+1}} \cdot z z' = - \frac{1 - \zeta^n}{1 - \zeta^{n+1}} \cdot z', \text{ wo: } \zeta = \frac{z'}{z}.$$

Daraus folgt weiter:

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = - z'^1,$$

¹⁾ Die Form dieses Resultates ist von der zumeist üblichen durch das Vorzeichen verschieden. Bei der gewöhnlichen Behandlungsweise der periodischen Kettenbrüche erscheint nämlich als determinierende quadratische Gleichung statt Gl. (3) die folgende

$$y^2 + y - ax = 0,$$

und man findet sodann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = z_1,$$

sofern $|\zeta| < 1$, während im Falle $|\zeta| = 1$ der fragliche Grenzwert nicht existiert, der Kettenbruch also divergiert. Da aber:

$$(9) \quad \zeta = \frac{1 - \sqrt{4ax + 1}}{1 + \sqrt{4ax + 1}} \left(\text{wegen: } \begin{cases} z = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4ax + 1}) \\ z' = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4ax + 1}) \end{cases} \right),$$

(wenn man unter der Quadratwurzel deren Hauptwert versteht), so wird $|\zeta| = 1$ dann und nur dann, wenn $\sqrt{4ax + 1}$ verschwindet oder rein imaginär ausfällt, also wenn ax negativ reell und zwar:

$$(10) \quad ax \leq -\frac{1}{4},$$

geometrisch gesprochen, wenn x auf einer vom Punkte $-\frac{1}{4a}$ in der Richtung der Verbindungslinie $\left(0, -\frac{1}{4a}\right)$ ins Unendliche sich erstreckenden Geraden L liegt. Denkt man sich längs L die Ebene zerschnitten und bezeichnet den so geschaffenen Bereich mit T , so konvergiert der vorgelegte Kettenbruch mit der eingliedrigen Periode $\frac{ax}{1}$ für jeden endlichen Wert x im Innern von T . Er konvergiert übrigens, wie mit Hilfe von Gl. (7) leicht erkannt wird, für jeden im Innern von T liegenden abgeschlossenen Bereich T' gleichmäßig.

2. Dies vorausgeschickt betrachten wir den Kettenbruch $\left[\frac{a_v x}{1}\right]_1^x$, für welchen $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = a$, unter der Voraussetzung, daß x auf einen Bereich, wie er soeben mit T' bezeichnet wurde, eingeschränkt werde.¹⁾ Man hat dann durchweg $|\zeta| < 1$, also

wenn z_1 die absolut genommen kleinere Wurzel dieser Gleichung bedeutet. In der Tat ist aber:

$$z_1 = -z'.$$

¹⁾ Man denke sich etwa T' begrenzt durch einen Kreis mit beliebig großem Radius um den Nullpunkt, zwei in beliebig kleinem Abstände δ von der Geraden L zu dieser gezogenen Parallelen und einem Halbkreise um den Punkt $-\frac{1}{4a}$ mit dem Radius δ .

wenn das *Maximum* von $|\zeta|$ für alle x des Bereiches T' mit $\bar{\zeta}$ bezeichnet wird:

$$(11) \quad |\zeta| \leq \bar{\zeta} < 1.$$

Zähler und Nenner jenes Kettenbruches genügen jetzt der Rekursionsformel:

$$(12) \quad D_{\nu+1} - D_{\nu} - a_{\nu+1}x \cdot D_{\nu-1} = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3 \dots).$$

Um diese in analoger Weise behandeln zu können, wie die Rekursionsformel (1), definieren wir eine unbegrenzte Folge von Zahlen z_{ν} , z'_{ν} , von einem später noch genauer zu fixierenden Stellenzeiger $\nu = n_0$ anfangend, durch die Gleichungen:

$$(13) \quad z_{\nu} + z'_{\nu} = z_{\nu+1} + z'_{\nu+1} = 1 \quad z_{\nu} z'_{\nu+1} = -a_{\nu+1}x.$$

Alsdann läßt sich Gl. (12) in die Form setzen:

$$D_{\nu+1} - (z_{\nu+1} + z'_{\nu+1}) D_{\nu} + z_{\nu} z'_{\nu+1} D_{\nu-1} = 0,$$

andern geschrieben:

$$(14) \quad D_{\nu+1} - z_{\nu+1} D_{\nu} = z'_{\nu+1} (D_{\nu} - z_{\nu} D_{\nu-1}).$$

Ehe wir diese Formel auflösen, wollen wir zeigen, daß die Folge der z_{ν} , z'_{ν} bei geeigneter Fixierung eines Anfangswertes für z_{ν} aus eindeutig bestimmten Zahlen besteht und daß z_{ν} , z'_{ν} bei unbegrenzt wachsendem ν im Bereiche T' *gleichmäßig* gegen z , z' konvergieren.

3. Aus den Definitions-Gleichungen (13) folgt zunächst:

$$z_{\nu}(1 - z_{\nu+1}) = -a_{\nu+1}x,$$

also:

$$(15) \quad z_{\nu+1} = \frac{z_{\nu} + a_{\nu+1}x}{z_{\nu}}$$

und daher:

$$\begin{aligned} z - z_{\nu+1} &= \frac{z_{\nu}(z - 1) - a_{\nu+1}x}{z_{\nu}} \\ &= \frac{-z_{\nu}z' + z z' + ax - a_{\nu+1}x}{z_{\nu}} \quad (\text{s. Gl. (2)}) \\ &= \frac{z'(z - z_{\nu}) + (a - a_{\nu+1})x}{z - (z - z_{\nu})} \end{aligned}$$

$$1 - \frac{z_{v+1}}{z} = \frac{\zeta \left(1 - \frac{z_v}{z}\right) - \zeta \cdot \frac{a - a_{v+1}}{a}}{1 - \left(1 - \frac{z_v}{z}\right)} \quad \left(\text{wegen: } \frac{ax}{z^2} = -\frac{z'}{z} = -\zeta\right)$$

$$(16) \quad \left|1 - \frac{z_{v+1}}{z}\right| < \zeta \cdot \frac{\left|1 - \frac{z_v}{z}\right| + \left|1 - \frac{a_{v+1}}{a}\right|}{\left|1 - \left|1 - \frac{z_v}{z}\right|\right|}$$

Angenommen, es sei für irgend ein bestimmtes v :

$$(17) \quad \left|1 - \frac{z_v}{z}\right| \leq 1 - \vartheta, \text{ also: } 1 - \left|1 - \frac{z_v}{z}\right| \geq \vartheta,$$

wo:

$$(18) \quad \vartheta = \left|\bar{\zeta}^{\frac{1}{s}}\right|,$$

so geht die Ungleichung (16) in die folgende über:

$$(18) \quad \left|1 - \frac{z_{v+1}}{z}\right| \leq \vartheta^2 \left(\left|1 - \frac{z_v}{z}\right| + \left|1 - \frac{a_{v+1}}{a}\right|\right),$$

und, wenn man eine Reihe wachsender natürlicher Zahlen n_λ ($\lambda = 0, 1, 2 \dots$) so bestimmt, daß:

$$(19) \quad \left|1 - \frac{a_{v+1}}{a}\right| \leq \vartheta^{\lambda-1} (1 - \vartheta)^2 \text{ für } v > n_\lambda,$$

(was, wegen $\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = a$, stets möglich sein muß), so ergibt sich weiter:

$$(20) \quad \left|1 - \frac{z_{v+1}}{z}\right| \leq \vartheta^2 \left|1 - \frac{z_v}{z}\right| + \vartheta^{\lambda+1} (1 - \vartheta)^2 \quad (v \geq n_\lambda),$$

sofern nur z_v der Bedingung (17) genügt.

Als Anfangswert der z_v fixieren wir nun z_{n_0} durch die Gleichung:

$$(21) \quad z_{n_0} = \vartheta \cdot z,$$

so daß also:

$$\left|1 - \frac{z_{n_0}}{z}\right| = 1 - \frac{z_{n_0}}{z} = 1 - \vartheta$$

und somit zunächst für $\nu = n_0$ die Bedingung (17) wirklich erfüllt ist. Dann besteht aber für $\nu = n_0$ auch Ungl. (20), sofern man daselbst $\lambda = 0$ setzt, also:

$$\left| 1 - \frac{z_{n_0+1}}{z} \right| < \vartheta^2(1 - \vartheta) + \vartheta(1 - \vartheta)^2 = \vartheta(1 - \vartheta)$$

und *a fortiori*:

$$\left| 1 - \frac{z_{n_0+1}}{z} \right| < 1 - \vartheta.$$

Somit ergibt sich durch dieselbe Schlußweise:

$$\left| 1 - \frac{z_{n_0+2}}{z} \right| < \vartheta(1 - \vartheta) < (1 - \vartheta)$$

u. s. f. bis:

$$\left| 1 - \frac{z_{n_1}}{z} \right| < \vartheta(1 - \vartheta).$$

Sodann aber folgt aus (20) (bei $\lambda = 1$):

$$\left| 1 - \frac{z_{n_1+1}}{z} \right| < \vartheta^3(1 - \vartheta) + \vartheta^2(1 - \vartheta)^2 = \vartheta^2(1 - \vartheta)$$

und *a fortiori*:

$$\left| 1 - \frac{z_{n_1+1}}{z} \right| < \vartheta(1 - \vartheta),$$

somit auch wieder:

$$\left| 1 - \frac{z_{n_1+2}}{z} \right| < \vartheta^2(1 - \vartheta) < \vartheta(1 - \vartheta)$$

u. s. f. bis:

$$\left| 1 - \frac{z_{n_2}}{z} \right| < \vartheta^2(1 - \vartheta),$$

worauf dann wiederum Ungl. (20) bei $\lambda = 2$ ergibt:

$$\left| 1 - \frac{z_{n_2+1}}{z} \right| < \vartheta^3(1 - \vartheta).$$

So fortschließend findet man allgemein:

$$(22) \quad \left| 1 - \frac{z_{n_\lambda+\mu}}{z} \right| < \vartheta^{\lambda+1}(1 - \vartheta) \quad (\mu = 1, 2, \dots, (n_{\lambda+1} - n_\lambda)),$$

und daher, wenn das *Maximum* von z im Bereiche T' mit \bar{z} bezeichnet wird:

$$(23) \quad |z - z_\nu| < \vartheta^{\lambda+1} (1 - \vartheta) \cdot \bar{z} \quad (\nu > n_\lambda)$$

für alle Stellen des Bereiches T' , d. h. schließlich:

$$(24) \quad \lim_{\nu=\infty} z_\nu = z$$

und zwar *gleichmäßig* für den gesamten Bereich T' .

Man hat sodann:

$$z' - z_\nu = (1 - z) - (1 - z_\nu) = -(z - z_\nu)$$

und, wenn

$$(25) \quad \frac{z'_\nu}{z_\nu} = \zeta_\nu$$

gesetzt wird:

$$\zeta - \zeta_\nu = \frac{1 - z}{z} - \frac{1 - z_\nu}{z_\nu} = -\frac{z - z_\nu}{z z_\nu}, 1)$$

also auch:

$$(26) \quad \lim_{\nu=\infty} z'_\nu = z' \quad \lim_{\nu=\infty} \zeta_\nu = \zeta$$

und zwar ebenfalls *gleichmäßig* für den Bereich T' .

Hierzu sei noch bemerkt, daß die z_ν (also auch die z'_ν), welche nach dem bisher gesagten nur für $\nu \geq n_0$ als eindeutig bestimmte rationale Funktionen von x definiert sind, durch

1) Wegen:

$$\left| \frac{z'}{z} \right| = \left| \frac{1}{z} - 1 \right| < 1$$

ist *a fortiori*:

$$\left| \frac{1}{z} \right| - 1 < 1,$$

also stets:

$$\left| \frac{1}{z} \right| < 2,$$

und daher auch:

$$\left| \frac{1}{z_\nu} \right| < 2,$$

sofern nur ν eine für den ganzen Bereich T' gleich bleibende, passend gewählte Zahl n übersteigt.

Umkehrung der Rekursionsformel (15) eventuell auch für $\nu < n_0$ bestimmt werden können. Aus (15) ergibt sich nämlich, wenn man noch ν durch $\nu - 1$ ersetzt:

$$(27) \quad z_{\nu-1} = \frac{a_\nu x}{z_\nu - 1},$$

so daß gleichzeitig mit z_{n_0} auch $z_{n_0-1}, z_{n_0-2} \dots$ als eindeutig bestimmte Zahlen definiert sind, so lange $z_\nu - 1$ nicht verschwindet.

4. Nunmehr kehren wir zu unserer Rekursionsformel (14) zurück. Substituiert man der Reihe nach $\nu = m, (m+1), \dots (n-1)$, (wo $n-1 > m$ und m nur an die Bedingung geknüpft ist, daß die z_ν, z'_ν für $\nu \geq m$ existieren, was mit Sicherheit der Fall ist, wenn $m > n_0$), so folgt durch Multiplikation der resultierenden Gleichungen:

$$\prod_m^{n-1} (D_{\nu+1} - z_{\nu+1} D_\nu) = \prod_m^{n-1} z'_{\nu+1} \cdot \prod_m^{n-1} (D_\nu - z_\nu D_{\nu-1}),$$

d. h.

$$(28) \quad \begin{aligned} D_n - z_n D_{n-1} &= z'_{m+1} \dots z'_n \cdot (D_m - z_m D_{m-1}) \\ &= z_{m+1} \dots z_n \cdot (D_m - z_m D_{m-1}) \cdot \zeta_{m+1} \dots \zeta_n. \end{aligned}$$

Ersetzt man n der Reihe nach durch $(n-1), (n-2), \dots (m+1)$, multipliziert die resultierenden Gleichungen bzw. mit $z_n, (z_{n-1} z_n), \dots (z_{m+2} \dots z_n)$ und addiert sie zu Gl. (28), so findet man:

$$D_n - z_{m+1} \dots z_n \cdot D_m = z_{m+1} \dots z_n \cdot (D_m - z_m D_{m-1}) \cdot \sigma_{m,n},$$

wo:

$$(29) \quad \sigma_{m,n} = \zeta_{m+1} + \zeta_{m+1} \zeta_{m+2} + \dots + \zeta_{m+1} \zeta_{m+2} \dots \zeta_n,$$

anders geschrieben:

$$(30) \quad \frac{D_n}{z_{m+1} \dots z_n} = D_m + (D_m - z_m D_{m-1}) \cdot \sigma_{m,n}$$

als die gesuchte Lösung der Rekursionsformel (14) bzw. (12).

5. Ersetzt man in der letzten Formel D_v durch A_v bzw. B_v , so ergibt sich durch Division der betreffenden Gleichungen für den n^{ten} Näherungsbruch des Kettenbruches $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_v x}{1} \right]_2^\infty$ die Darstellung:

$$(31) \quad \frac{A_n}{B_n} = \frac{A_m + (A_m - z_m A_{m-1}) \cdot \sigma_{m,n}}{B_m + (B_m - z_m B_{m-1}) \cdot \sigma_{m,n}}.$$

Um seinen Grenzwert für $n = \infty$ zu bestimmen, hat man nur zu beachten, daß die mit $\sigma_{m,n}$ bezeichnete Summe (29) für $n = \infty$ in die konvergente Reihe:

$$(32) \quad \sigma_m = \sum_1^\infty \zeta_{m+1} \dots \zeta_{m+v}$$

(konvergent, wegen $\lim_{v \rightarrow \infty} \zeta_{m+v} \leq \bar{\zeta} < 1$) übergeht, und zwar nähert sich $\sigma_{m,n}$ dem Grenzwerte σ_m im Bereiche T' durchweg *gleichmäßig*. Man hat nämlich:

$$\sigma_{m,n+p} - \sigma_{m,n} = \zeta_{m+1} \dots \zeta_{n+1} + \dots + \zeta_{m+1} \dots \zeta_{n+p}.$$

Wird dann eine positive Zahl δ so klein angenommen, daß neben $\bar{\zeta} < 1$ auch noch:

$$\bar{\zeta} + \delta < 1,$$

so läßt sich mit Rücksicht auf die in T' *gleichmäßig* erfüllte Beziehung $\lim_{v \rightarrow \infty} \zeta_v = \bar{\zeta}$ ein m so fixieren, daß für $v > m$:

$$|\zeta_v| \leq |\bar{\zeta}| + \delta \leq \bar{\zeta} + \delta$$

und daher:

$$\begin{aligned} |\sigma_{m,n+p} - \sigma_{m,n}| &< (\bar{\zeta} + \delta)^{n-m+1} + \dots + (\bar{\zeta} + \delta)^{n-m+p} \\ &< \frac{(\bar{\zeta} + \delta)^{n-m+1}}{1 - (\bar{\zeta} + \delta)} \end{aligned}$$

d. h. durch Wahl einer passenden unteren Schranke für die Zahl n *beliebig klein* für den ganzen Bereich T' und unabhängig von p .

Somit ergibt sich aus Gl. (31):

$$(32) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{A_m + (A_m - z_m A_{m-1}) \cdot \sigma_m}{B_m + (B_m - z_m B_{m-1}) \cdot \sigma_m}$$

d. h. $\frac{A_n}{B_n}$ konvergiert in jedem T' angehörigen Bereiche, in welchem der Nenner des vorstehenden Ausdrucks nicht verschwindet, *gleichmäßig* gegen einen bestimmten Grenzwert.¹⁾

Im übrigen ist zunächst ersichtlich, daß Zähler und Nenner jenes Ausdrucks niemals gleichzeitig verschwinden können. Denn aus:

$$0 = A_m + (A_m - z_m A_{m-1}) \sigma_m = B_m + (B_m - z_m B_{m-1}) \cdot \sigma_m$$

würde im Falle $\sigma_m = 0$ folgen:

$$0 = A_m = B_m,$$

im Falle $|\sigma_m| > 0$:

$$\frac{A_m}{B_m} = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}},$$

was beides unmöglich ist.

¹⁾ Man bemerke, daß die Wahl des Index m höchstens an eine (die Existenz von z_m sichernde) untere Schranke gebunden, im übrigen völlig willkürlich ist. Diese aus dem Gange unserer Untersuchung mit Notwendigkeit sich ergebende Tatsache läßt sich übrigens durch die folgende einfache Rechnung noch direkt bestätigen. Setzt man zur Abkürzung:

$$D_m + (D_m - z_m D_{m-1}) \cdot \sigma_m = A_m,$$

so ergibt sich mit Benützung der Rekursionsformel:

$$D_{m+1} - z_{m+1} D_m = z'_{m+1} (D_m - z_m D_{m-1})$$

und der unmittelbar ersichtlichen Identität:

$$\sigma_m = \zeta_{m+1} (1 + \sigma_{m+1}) = \frac{z'_{m+1}}{z_{m+1}} (1 + \sigma_{m+1}),$$

daß:

$$\begin{aligned} A_m &= D_m + \frac{1}{z_{m+1}} (D_{m+1} - z_{m+1} D_m) + \frac{1}{z_{m+1}} (1 + \sigma_{m+1}) \\ &= \frac{1}{z_{m+1}} \{ D_{m+1} + (D_{m+1} - z_{m+1} D_m) \sigma_{m+1} \} \end{aligned}$$

d. h. schließlich:

$$A_m = \frac{1}{z_{m+1}} \cdot A_{m+1}.$$

Auch kann $B_m + (B_m - z_m B_{m-1}) \cdot \sigma_m$ in keinem Stücke des Bereiches T' *identisch* verschwinden. Denn da der Bereich T' ein zusammenhängender ist, so müßte in diesem Falle die eindeutige analytische Funktion $B_m + (B_m - z_m B_{m-1}) \cdot \sigma_m$ in dem gesamten Bereiche T' *identisch* verschwinden, was definitiv ausgeschlossen ist, da nach dem Hauptsatze des § 2 (p. 22) bereits feststeht, daß der Kettenbruch für $|x| \leq \frac{1}{4a + \delta}$ im wesentlichen gleichmäßig konvergiert, also $\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n}$ mit eventueller Ausnahme einer endlichen Anzahl von Stellen bestimmte, von Null verschiedene Zahlen vorstellt.

Da endlich B_{m-1} , B_m ganze rationale Funktionen von x , z_m eine in T' endlich bleibende gebrochene rationale Funktion, σ_m eine gleichmäßig konvergente Reihe ebensolcher Funktionen, so ist $B_m + (B_m - z_m B_{m-1}) \cdot \sigma_m$ eine in T' eindeutige analytische Funktion regulären Verhaltens, kann also daselbst höchstens eine endliche Anzahl gewöhnlicher Nullstellen besitzen.

Somit definiert $\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n}$ eine in T' bis auf etwaige Pole reguläre analytische Funktion, und man gewinnt daher das folgende Endresultat:

Ist $\lim_{v=\infty} a_v = a$, wo $|a| > 0$, so konvergiert der Kettenbruch $\left[\frac{a_1}{1}, \frac{a_v x}{1} \right]_2^x$, mit eventueller Ausnahme einer endlichen Anzahl außerwesentlicher Divergenzstellen, in jedem Bereiche T' im Innern des Bereichs T , welcher entsteht, wenn man in der Ebene einen geradlinigen Schnitt in der Richtung des Strahles $\left(0, -\frac{1}{4a} \right)$ vom Punkte $-\frac{1}{4a}$ ins Unendliche führt. Er definiert eine im Innern von T eindeutige, bis auf etwaige Pole¹⁾ reguläre analytische Funktion.²⁾

1) Hiermit ist schon gesagt, daß die Pole keine im Innern von T gelegene Häufungsstelle besitzen können, wohl aber auf dem Schnitte

$$\left(-\frac{1}{4a}, \infty \right).$$

2) Ich bemerke, daß der betreffende Kettenbruch an der Grenze

6. Ehe wir dieses Ergebnis auf den Gaußschen Kettenbruch und die hypergeometrische Reihe anwenden, soll noch gezeigt werden, wie aus den hier angestellten Betrachtungen eine vollständigere und präzisere Form des in der Einleitung erwähnten Poincaréschen Satzes sich ergibt.

Aus Gl. (30) folgt zunächst:

$$(33) \quad \frac{D_{n+1}}{D_n} = z_{n+1} \cdot \frac{D_m + (D_m - z_m D_{m-1}) \cdot \sigma_{m, n+1}}{D_m + (D_m - z_m D_{m-1}) \cdot \sigma_{m, n}}$$

und hieraus für $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ (wegen: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{m, n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{m, n+1} = \sigma_m$):

$$(34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = z$$

$x = -\frac{1}{4a}$ noch konvergieren kann. So ist z. B. der Kettenbruch:

$$K(x) = \left[\frac{1}{3}, \frac{-v^2 x}{4v^2 - 1} \right]_2^\infty$$

für welchen $a = -\frac{1}{4}$, also $-\frac{1}{4a} = 1$, noch konvergent für $x = 1$.

Dies folgt, wenn man ihn in die Form setzt:

$$K(x) = \left[\frac{1}{3}, \frac{-v^2 x}{2v + 1} \right]_2^\infty$$

unmittelbar aus einem früher von mir abgeleiteten Konvergenz-Kriterium (Sitz.-Ber. 35 (1905), p. 372, III). Sein Wert kann leicht mit Hilfe der Transformation bestimmt werden:

$$\sum_1^{n+1} \frac{1}{v} = \left[\frac{1}{1}, \frac{-v^2}{2v + 1} \right]_1^n$$

woraus sich ergibt:

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{-v^2}{2v + 1} \right]_2^n = 1 - \left(\sum_1^{n+1} \frac{1}{v} \right)^{-1}$$

also:

$$K(1) = 1.$$

Übrigens hat man allgemein (s. Gauß, Werke, Bd. 3, p. 136):

$$x K(x) = 1 - \frac{2\sqrt{x}}{\lg \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}}$$

also auch:

$$\lim_{x \rightarrow 1} K(x) = 1.$$

und zwar *gleichmäßig* für jeden T' angehörigen Bereich, in welchem der Ausdruck

$$(35) \quad \Delta_m(x) \equiv D_m(x) + (D_m(x) - z_m D_{m-1}(x)) \cdot \sigma_m(x)$$

nicht verschwindet. Findet das letztere hingegen statt, was nach dem bisher gesagten höchstens für eine endliche Anzahl dem Bereiche T' angehöriger Stellen x' der Fall sein kann, so hat man für *jedes* m von einem bestimmten ab:¹⁾

$$D_m(x') + (D_m(x') - z_m D_{m-1}(x')) \cdot \sigma_m(x') = 0,$$

anders geschrieben:

$$(36) \quad \frac{D_m(x')}{D_{m-1}(x')} = z_m \cdot \frac{\sigma_m(x')}{1 + \sigma_m(x')} = z'_m \cdot \frac{\sigma_m(x')}{\sigma_{m-1}(x')}$$

$$\left(\text{wegen: } 1 + \sigma_m = \frac{z_m}{z'_m} \cdot (\zeta_m + \zeta_m \sigma_m) = \frac{z_m}{z'_m} \cdot \sigma_{m-1} \right).$$

Läßt man hier m unendlich werden und beachtet, daß mit Rücksicht auf die *gleichmäßige* Konvergenz der Reihe σ_m bzw. σ_{m-1} und von $\lim_{m=\infty} \zeta_m = \zeta$ sich ergibt:

$$(37) \quad \lim_{m=\infty} \sigma_m = \lim_{m=\infty} \sigma_{m-1} = \sum_1^{\infty} \zeta^v = \frac{\zeta}{1 - \zeta},$$

so folgt aus (36), wenn man noch $n + 1$ statt m schreibt:

$$(38) \quad \lim_{n=\infty} \frac{D_{n+1}(x')}{D_n(x')} = z'.$$

Somit gewinnt man hier an Stelle der gewöhnlichen Form des Poincaréschen Satzes, bei welcher die Koeffizienten der Rekursionsformel lediglich als Funktionen des Index n betrachtet zu werden pflegen, hier die folgende:

Ist:

$$D_{v+1}(x) - D_v(x) - a_{v+1} x D_{v-1}(x) = 0, \quad \lim_{v=\infty} a_v = a \neq 0,$$

so hat man für alle x mit Ausschluß derjenigen, für welche $a x$ reell negativ und $|a x| > \frac{1}{4}$:

¹⁾ Vgl. die Fußnote 1) auf p. 45.

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_{n+1}(x)}{D_n(x)} = z,$$

wo z die numerisch größere Wurzel der quadratischen Gleichung $y^2 - y - ax = 0$ bedeutet, allenfalls abgesehen von einer Menge isolierter Stellen x' , für welche:

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_{n+1}(x')}{D_n(x')} = z' = 1 - z.$$

Setzt man $x = 1$ und schreibt D_v statt $D_v(1)$, so resultiert der gewöhnliche Poincarésche Satz in der präziseren Fassung, daß für die Lösungen der Rekursionsformel:¹⁾

$$D_{v+1} - D_v - a_{v+1} D_{v-1} = 0,$$

(wo $\lim_{v=\infty} a_v = a$ und a jede Zahl bedeuten kann mit Ausnahme der reellen negativen, die numerisch $\geq \frac{1}{4}$) die Relation besteht:

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = z;$$

nur in dem *einen* Falle, daß für *irgend ein* m — und zwar dann, wie aus den früheren Betrachtungen hervorgeht, für *jedes* m :

$$D_m + (D_m - z_m D_{m-1}) \cdot \sigma_m = 0,$$

tritt an die Stelle der obigen Beziehung die folgende:

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = z' = 1 - z.$$

1) Die scheinbar allgemeinere Beziehung:

$$C_{v+1} - b'_{v+1} C_v - a'_{v+1} C_{v-1} = 0$$

läßt sich durch die Substitution:

$$C_v = b'_m b'_{m+1} \dots b'_v D_v$$

stets auf die Form bringen:

$$D_{v+1} - D_v - a_{v+1} D_{v-1} = 0,$$

wo:

$$a_{v+1} = \frac{a'_{v+1}}{b'_v b'_{v+1}}.$$

Es existiert also stets *ein* und *nur* ein ganz spezieller Wert $\frac{D_{m-1}}{D_m}$, d. h. schließlich eine ganz spezielle Wahl des Anfangswert-Verhältnisses $\frac{D_1}{D_0}$, bei welcher jener *singuläre* Fall nicht nur eintreten *kann*, sondern auch wirklich allemal eintreten *muß*.

7. Setzt man, wie üblich:

$$(39) \quad F(a, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{\alpha \dots (\alpha + \nu - 1) \cdot \beta \dots (\beta + \nu - 1)}{\gamma \dots (\gamma + \nu - 1) \cdot 1 \dots \nu} x^{\nu},$$

so besteht für den Quotienten zweier solcher hypergeometrischer Reihen, wie Gauß¹⁾ lediglich rein formal abgeleitet hat, eine Kettenbruch-Entwicklung von der Form:

$$(40) \quad \frac{F(a, \beta + 1, \gamma + 1, x)}{F(a, \beta, \gamma, x)} = \left[\frac{1}{1}, \frac{a, x}{1} \right]_2^{\infty}$$

wo:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{2\mu} = -\frac{(\alpha + \mu - 1)(\gamma - \beta + \mu - 1)}{(\gamma + 2\mu - 2)(\gamma + 2\mu - 1)} \\ a_{2\mu+1} = -\frac{(\beta + \mu)(\gamma - \alpha + \mu)}{(\gamma + 2\mu - 1)(\gamma + 2\mu)} \end{array} \right.$$

Da hiernach $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_{\nu} = \frac{1}{4}$, so folgt zunächst, daß der Kettenbruch für $|x| \leq 1 - \delta$ im wesentlichen gleichmäßig konvergiert und sein Wert mit demjenigen des fraglichen Reihen-Quotienten übereinstimmt: sodann aber, daß, abgesehen von der Strecke, $(+1, +\infty)$ der reellen Achse und etwaigen isolierten Stellen eigentlicher Divergenz die im wesentlichen gleichmäßige Konvergenz des Kettenbruches bestehen bleibt, so daß also als analytische Fortsetzung jenes Reihen-Quotienten eine nach Einführung des Schnittes $(+1, +\infty)$ eindeutige und abgesehen von etwaigen Polen im Endlichen reguläre Funktion erscheint.

Diese Eigenschaft bleibt wiederum bestehen, wenn speziell $\beta = 0$ gesetzt und somit $F(a, \beta, \gamma, x) \equiv F(a, 0, \gamma, x) \equiv 1$ wird, d. h. sie gilt für die Reihe:

¹⁾ Werke, Bd. 3, p. 134.

$$(42) \quad F(a, 1, \gamma, x) \equiv 1 + \sum_1^{\infty} \frac{a \dots (a + \nu - 1)}{\gamma \dots (\gamma + \nu - 1)} \cdot x^{\nu}.$$

Es läßt sich aber zeigen, daß die letztere und ebenso die allgemeine hypergeometrische Reihe in Wahrheit überhaupt keine Pole (abgesehen von $x = 1$) besitzen kann. Man hat nämlich:

$$(43) \quad F(a, 1, 1, x) \equiv 1 + \sum_1^{\infty} \frac{a \dots (a + \nu - 1)}{1 \dots \nu} x^{\nu} = (1 - x)^{-a},$$

und diese Funktion hat lediglich die singulären Stellen $x = 1$ und $x = \infty$. Betrachtet man nun die Reihe mit den reziproken Koeffizienten, also:

$$(44) \quad F(1, 1, a, x) \equiv 1 + \sum_1^{\infty} \frac{1 \dots \nu}{a \dots (a + \nu - 1)} \cdot x^{\nu},$$

so kann deren analytische Fortsetzung keinesfalls irgend einen von 1 verschiedenen *Pol* x' haben. Denn nach einer von Herrn Faber¹⁾ herrührenden Ergänzung zu dem oben bereits benützten Hadamardschen Satze (§ 3, Nr. 2, p. 28) müßte dann mit Notwendigkeit $x' \cdot 1$, also x' , eine singuläre Stelle für diejenige Funktion sein, welche durch Multiplikation entsprechender Koeffizienten von $F(1, 1, a, x)$ und $F(a, 1, 1, x)$ zu Stande kommt, d. h. der Funktion $1 + \sum_1^{\infty} x^{\nu} = \frac{1}{1 - x}$.

Und da andererseits die Fortsetzung von $F(1, 1, a, x)$ nach dem oben bereits gefundenen Ergebnis außerhalb des Schnittes $(1, \infty)$ andere Singularitäten, als *Pole* nicht besitzen kann, so muß sie daselbst geradezu *regulär* sein. Schreibt man in der Reihe (44) γ statt a , so folgt nunmehr durch Kombination mit $F(a, 1, 1, x)$ (s. (43)) und der ganz analog beschaffenen Reihe $F(1, \beta, 1, x) = (1 - x)^{-\beta}$, daß auch die Fortsetzung der allgemeinen hypergeometrischen Reihe $F(a, \beta, \gamma, x)$ außerhalb des Schnittes $(1, \infty)$ durchaus regulären Verhaltens ist. Daß sie tatsächlich (im ersten Blatte) überhaupt nur die singulären Stellen $x = 1$ und $x = \infty$ (dazu eventuell noch in anderen

¹⁾ Jahrb. der D. M. V. 16 (1907), p. 298.

Blättern $x = 0$) besitzt,¹⁾ wie auf andere Weise z. B. durch Heranziehung der zugehörigen linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung erkannt wird, dürfte auf dem hier eingeschlagenen elementaren Wege nicht festzustellen sein: immerhin scheint mir nicht ohne Interesse, daß derselbe ausreicht, um die Natur der hypergeometrischen Funktionen wenigstens in dem hier gegebenen Umfange zu ergründen: wie man denn wohl überhaupt in der großen Einfachheit der Hilfsmittel, welche hier u. a. den Konvergenz-Beweis für den Gaußschen Kettenbruch geliefert haben, wenn man sie mit der Schwierigkeit des Riemannschen²⁾ Beweisfragmentes und den recht mühsamen Konvergenz-Untersuchungen des Herrn Thomé³⁾ vergleicht, einen gewissen Fortschritt wird erblicken dürfen.

1) Während die Heinesche Reihe $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ eine *eindeutige* Funktion definiert, so liefert die Gaußsche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, von speziellen Fällen abgesehen, stets eine mehrdeutige oder unendlich vieldeutige Funktion. Läßt man $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ durch den Grenzübergang $\lim q = 1$ aus $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ entstehen, so erzeugen also die *unendlich vielen* in den Punkt 1 hineinrückenden *Pole* von der Form $\frac{1}{q^r}$ an jener Stelle einen *Verzweigungspunkt*. Diese eigentümliche Erscheinung dürfte wohl eine passende Erklärung finden, wenn man das Verhalten von $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ als Funktion der *beiden* Veränderlichen x und q ins Auge faßt.

Der Grenzfall $\lim_{\alpha=\infty} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{\alpha}\right)$ liefert eine beständig konvergierende Reihe (insbesondere für $\beta = \gamma$ die Exponentialreihe), für deren Kettenbruch-Entwicklung, wie unmittelbar aus Gl. (41) entnommen werden kann, die Beziehung $\lim_{r=\infty} a_r = 0$ besteht. Der betreffende Kettenbruch muß dann zunächst nach § 3 in jedem endlichem Bereiche mit einzigem Ausschluß etwaiger Pole der Funktion konvergieren. Und da diese letzteren infolge der beständigen Konvergenz der erzeugenden Reihe gänzlich fehlen, so konvergiert er, abgesehen von $x = \infty$, *ausnahmslos*.

2) Werke, Abh. XXIII (erste Aufl. 1876, p. 400).

3) Journ. f. Math. 66 (1866), p. 322; 67 (1867), p. 299.

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch - physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 7. Abhandlung

Funkentelegraphische Empfangsstörung

von

Max Dieckmann

Vorgelegt am 7. Mai 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Der Nachrichtenaustausch mit Hilfe der drahtlosen Telegraphie ist bekanntlich periodischen und plötzlichen Störungen ausgesetzt, die nicht auf einem mangelhaften Arbeiten der Stationsanordnungen beruhen, sondern deren Ursache in atmosphärischen Vorgängen begründet erscheint.

Einmal ist die Reichweite ein und derselben Station bei ungeänderter Antenne und konstanter Primärenergie durchaus variabel. Die Praxis trägt diesem Umstand je nach den Verhältnissen auf zwei Arten Rechnung:

Entweder sie benützt überkonstruierte Stationen, so daß auch bei schlechter Übertragung die Gegenstation sicher erreicht wird,

oder sie wählt bei sehr weit entfernten Gegenstationen zur Telegrammübermittlung diejenigen Stunden, in denen erfahrungsgemäß die Übertragung am kräftigsten gelingt.

Zweitens treten beim Empfang der Zeichen bisweilen Störungen auf, derart, daß die Empfangsorgane ansprechen, auch wenn die Antenne gar nicht von funkentelegraphischen Wellen getroffen wurde. Wenn diese Störungen sehr stark werden, war die Praxis ihnen gegenüber bisher machtlos.

Da über die Natur dieser Störungen klare und experimentell begründete Ansichten nicht vorliegen, erscheint es zweckmäßig, zunächst eine reinliche Scheidung über den Sitz der Störungen vorzunehmen.

Die Störungen können

- A. in Vorgängen in unmittelbarer Nähe der Antenne ihre Ursache haben,
- B. sie können in einer Veränderung der Eigenschaften des Zwischenmittels, Atmosphäre oder Erdkörper begründet sein.
- C. sie können gleichzeitig, sowohl in der Nachbarschaft der Antenne als im Zwischenmittel, ihren Sitz haben.

Die Untersuchung des ersten dieser drei Fälle bildet den Gegenstand einer Experimentaluntersuchung, zu der dem Beobachter außer vom Verein Deutscher Ingenieure auch von der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften pekuniäre Beihilfen gewährt wurden. Der definitive Abschluß und damit die ausführliche Veröffentlichung des Beobachtungsmaterials soll nach dem Ablauf der diesjährigen Gewitterperiode erfolgen. Da die bisherigen Ergebnisse aber schon den Weg gezeigt haben, die Empfangsstörung praktisch zu beseitigen, so soll im folgenden kurz als vorläufige Mitteilung der Gang der Untersuchung und die ermittelte Methode des Antennenschutzes mitgeteilt werden.

Die Untersuchung ging von dem Plane aus, die Antennenstörung unter dem Gesichtspunkt atmosphärisch elektrischer Vorgänge zu betrachten. Es wurden in Gräfelfing bei München im Frühjahr 1909 eine drahtlos telegraphische Sendestation und — um den Einfluß des Zwischenmittels möglichst auszuschalten, in nur 360 m Entfernung — eine drahtlos telegraphische Empfangsstation eingerichtet. Die beiden bei Beginn der Versuche je ca. 37 m hohen Antennenmasten waren so eingerichtet, daß verschiedene Antennengebilde zur Verwendung gelangen konnten. Die Isarwerke besaßen das große Entgegenkommen, die elektrische Primärenergie kostenlos zur Verfügung zu stellen.

Die Arbeit gliedert sich zunächst in vier Teiluntersuchungen.

I. Wie stören die verschiedenen Antennengebilde das elektrostatische Erdfeld? Welche Spannungsgefälle herrschen in der Nachbarschaft der einzelnen Teile der Antenne?

II. Welche Leitfähigkeit hat die Luft in der Nachbarschaft der Antenne? Diese Leitfähigkeit muß wegen der auf den Antennendrähten niedergeschlagenen radioaktiven Induktionen erheblich größer als die normale sein. (Dieser Teil der Untersuchung wurde von Herrn cand. Kernstock selbständig ausgeführt.)

III. In welchem Betrage dient das Luftleitergebilde dazu, den vertikalen Leitungsstrom zu führen? Wie groß sind die gegen Erde gerichteten Stromstärken und wie hängen sie von I und II ab?

IV. Verursachen die aktiven Niederschläge von II eine Energieabsorption und ist diese auf Rechnung des Skineffektes zu setzen oder auf Kosten der erhöhten elektrischen Leitfähigkeit der Luftzylinder, die die Antennendrähte umgeben?

Das zum Teil durch fortlaufende photographische Registrierung erhaltene Beobachtungsmaterial ergab, daß die Verhältnisse in der Umgebung der Antenne höchstens in einem sehr geringen Betrag von Einfluß auf die Änderung der Reichweite sein können, dagegen scheinen sie fast ausschließlich verantwortlich zu sein für die obengenannte Empfangsstörung.

Auf Grund der Ergebnisse von I bis III läßt sich der Mechanismus dieser Störung so darstellen, daß gelegentlich vorkommende Schwankungen des dauernd aus der Atmosphäre gegen Erde gerichteten Stromes das Luftdrahtgebilde elektrisch anstoßen, so daß es mit seiner Eigenperiode und Dämpfung ausschwingt. Diese Schwingung setzt die direkt oder induktiv gekoppelten Empfangsapparate gerade so in Tätigkeit wie eine die Antenne treffende drahtlos telegraphische Welle.

Da es aussichtsvoll erschien, auf Grund dieser Kenntnis eine Schutzvorrichtung gegen Empfangsstörung an der Antenne auszubilden, so bezieht sich ein fünfter und letzter Teil

V. auf die experimentelle Untersuchung eines Antennenschutzsystemes.

Es hat sich hierbei als möglich herausgestellt, eine Antenne durch Einbau in einen Faradayschen Käfig hinreichend

6 7. Abh.: Max Dieckmann, Funkentelegraph. Empfangsstörung.

vor den Wirkungen des normalen und gestörten Erdfeldes zu schützen, ohne daß die eintreffenden funkentelegraphischen Wellen wesentliche Absorption erfahren. Der Faradaysche Käfig muß zu dem Zweck aus zwei Leitersystemen hergestellt sein. Das eine System, das die geometrische Gestalt des geschützten Raumes bestimmt, besteht aus Leitern, die alle so geführt sind, daß sie in Richtung des elektrischen Vektors der eintreffenden Wellen keine wesentliche Erstreckungskomponente haben. Eine durch Ohmsche und Selbstinduktionswiderstände schwingungsunfähig gemachte Verbindungsleitung ist an Erde gelegt und erhält so das ganze Schutzsystem auf Erdpotential. Auf einer so geschützten Antenne enden keine Kraftlinien des Erdfeldes; sie ist bei normalem und gestörtem Erdfeld stromlos. Die ankommenden Schwingungen dagegen werden durch das räumlich richtig orientierte Schutzsystem nicht merklich absorbiert.

Zu einer genaueren Untersuchung der günstigsten Leiterabstände etc. sollen noch die Sommermonate benützt werden.

Nach Abschluß dieser Versuche werden die Messungen B über den Einfluß des Zwischenmittels begonnen.

Die Vorarbeiten für diese Versuche sind bereits insoweit fertiggestellt, als die Sendestation für eine Reichweite von 400 bis 500 km umgebaut wurde und die K. B. Meteorologische Zentralstation das Zugspitzobservatorium als Gegenstation zur Verfügung stellte.

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 8. Abhandlung

Über die Ursachen des Kalifornischen Erdbebens von 1906

von

A. Rothpletz

Mit 2 Tafeln

Vorgetragen am 7. Mai 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Seit ungefähr 30 Jahren pflegt man die Erdbeben in drei Gruppen einzuteilen, die der Verschiedenartigkeit ihrer Entstehung entsprechen sollen. Begrifflich unterscheiden sich diese Abteilungen sehr gut. Der Einsturz unterirdischer Hohlräume, das Empordringen vulkanischer Massen in und durch die Erdkruste und Verschiebungen von Massenteilen innerhalb der Erdkruste sind die Vorgänge, welche man für die Erdbeben verantwortlich macht, und je nachdem spricht man von Einsturz-, vulkanischen und Dislokations- oder tektonischen Beben.

Der Klarheit und Schärfe dieser Unterscheidung entsprechen die Erfolge aber nicht ganz, die man bisher bei den Versuchen erzielt hat, die einzelnen Erdbeben, die zu unserer Kenntnis gekommen sind, nach diesem Schema in das ihnen zukommende Fach einzureihen. Die Meinungen gehen da oft recht auseinander und wenn in den meisten Fällen schließlich doch eine Einigkeit erzielt worden ist, so beruht das vielleicht mehr auf Übereinkunft als auf Sicherheit der Erkenntnis. So hat man sich, um nur ein Beispiel anzuführen, wohl ziemlich allgemein für die so häufigen kalabrischen Erdbeben der Auffassung von E. Suez angeschlossen, wonach die einen vulkanische, die sogenannten peripherischen aber Dislokations- und zwar Senkungsbeben sind. Es ist aber bisher bei keinem dieser Beben gelungen, eine wirkliche tektonische Bodensenkung nachzuweisen und damit für diese Einteilung statt der nur hypothetischen eine tatsächliche Grundlage zu schaffen.

Viel günstiger scheinen die Verhältnisse in Kalifornien zu liegen, wo fern von vulkanischen Erscheinungen bei dem Beben

von 1906 auf einer tektonischen Spalte in horizontaler Richtung Bodenverschiebungen eintraten im Ausmaße von 3—6 Metern und auf eine Erstreckung von 300 Kilometern. Die tektonische Natur dieses Bebens erschien von Anfang an klar zu sein. Auf einer schon vorhandenen Dislokationsspalte hatten tangentielle Spannungen in der Erdkruste zu einer Schollenverschiebung geführt, die plötzlich mit einem Ruck eintrat und so die Erdoberfläche ringsum erbeben machte. Das Erschütterungsgebiet hat ungefähr die doppelte Größe des Deutschen Reiches und steht in einer nicht zu verkennenden Beziehung zum Verlaufe jener Verwerfungsspalte, so daß man dieses Erdbeben geradezu als tektonisches Spaltenbeben bezeichnen könnte.

Indessen bestehen doch auch hier für diese Auffassung nicht unbedeutende Schwierigkeiten, die noch schärfer hervorgetreten sind, seitdem der I. Band von der State earthquake investigation Commission 1908 erschienen ist, in dem das Erdbeben von 1906 auf 450 Quartseiten und einem Atlas mit 40 Tafeln in Großfolio nach allen Richtungen hin zur Darstellung gekommen ist mit Ausnahme der instrumental-seismologischen Seite, welche dem zweiten noch nicht erschienenen Bande vorbehalten ist. Dieses ausgezeichnete und fundamentale Werk verdankt dem Zusammenwirken von acht amerikanischen Gelehrten seinen Ursprung, welche von der Regierung des Staates Kalifornien als staatliche Erdbeben-Untersuchungskommission unter dem Vorsitze von Andrew C. Lawson bestellt wurden und durch das Carnegie-Institut in Washington die zur Ausführung der ihnen gestellten Aufgaben erforderlichen Geldmittel erhielten.

Das Eigenartigste dieses Erdbebens liegt ohne Zweifel in der Bodenbewegung, welche in dieser Form bisher noch bei keinem anderen Beben beobachtet worden zu sein scheint. Von besonderem Interesse ist deshalb das Kapitel, in dem (S. 114—145 mit Tafel 24 und 25 des Atlas) die staatlichen Geodäten John F. Hayford und A. L. Baldwin die Ergebnisse mitteilen, zu denen eine erneute Triangulation des Erdbebengebietes (1906/07) und ein Vergleich mit den zwei früheren Aufnahmen (1854—66 und 1870—92) geführt haben. Hierdurch

erhalten wir für die Größe und Richtung der Ortsveränderungen bestimmte Angaben. Aber ein Vergleich der Messungen aus den zwei ersten Triangulationsperioden ergab, daß solche Veränderungen auch schon in deren Zwischenzeit eingetreten sind. Damit wird natürlich das Problem noch viel verwickelter, weil die Ortsveränderungen der ersten Zwischenzeit (1866—70) in Richtung und Größe vielfach von denen der zweiten Zwischenzeit (1892—1906) abweichen.

Die beiden Geodäten haben drei Annahmen gemacht, welche dieser Komplikation gewisse Grenzen setzen. Die alte Triangulationsbasis Mocho-Mont Diabolo blieb unverändert und Ortsveränderungen traten nur im April 1906 und im Oktober 1868 oder wenigstens um diese Zeit („about that time“) ein. Für die letzte Annahme war bestimmend, daß am 21. Oktober 1868 ein heftiges Erdbeben stattgefunden hat, dessen Erschütterungsgebiet in der Hauptsache mit dem von 1906 zusammenfiel, wenn es auch etwas kleiner war. Leider wissen wir von den Begleiterscheinungen dieses Bebens nur sehr wenig, weil ein eingehender, von einer Kommission von Gelehrten verfaßter Bericht nicht veröffentlicht worden und das Manuskript vollständig verloren gegangen ist — die Behörden befürchteten daß sein Bekanntwerden der Entwicklung der erst 18 Jahre alten Stadt schaden könne. Das Wenige, was heute noch festzustellen war, ist im Report 1908 auf S. 434—48 zusammengetragen. Eine alte Verwerfungsspalte auf der Westseite der Berkeley hills, die in einer Entfernung von 30 Kilometer der S. Andreas-Spalte parallel verläuft — auf der Ostseite der Bucht von S. Francisco —, öffnete sich in einer Länge von 32 Kilometer. Ob aber dabei vertikale oder horizontale Bodenverschiebungen eingetreten sind, ist unbekannt.

Lawson (Report, S. 149) ist der Meinung, daß die Ortsveränderungen der ersten Zwischenzeit (1866—70) nicht auf dies Erdbeben von 1868 bezogen werden dürfen, daß sie überhaupt nicht plötzlich, sondern ganz langsam in einem Zeitraume von vielleicht 32 Jahren entstanden seien und auch dann noch weiter anhielten 16 Jahre lang bis 1906. Zur Begründung

wird verschiedenes angeführt, worauf ich später eingehen werde. Man sieht aber schon jetzt, daß wenn die Annahme einer langsamen Bewegung zutreffen sollte, die Zahlen, welche die Geodäten für die zwei Bewegungsarten berechnet haben, nicht genau sein können. Wo nämlich beide dieselbe Richtung hatten, wird die Weite der letzten Bewegung auf Kosten der ersten zu groß, wo die Richtungen entgegengesetzt waren, werden die Zahlen für beide zu klein angegeben sein. Die absolute Bewegungsweite für 1906 wäre nur dann durch Triangulation genau festzustellen gewesen, wenn kurz vor dem Beben ebenfalls eine Vermessung vorgenommen worden wäre.

Auch die andere Voraussetzung, daß die Basis Mocho-Diablo als unverändert angenommen werden könne, wird von Lawson beanstandet. Er meint, ihre wirklich unveränderte Länge stünde nicht im Widerspruch mit einer gleichmäßigen Verlagerung beider Endpunkte nach SO, welches ja im Osten der Spalte die vorherrschende Bewegungsrichtung während des Bebens 1906 war. Eine solche Verlagerung hätte aber wiederum eine wichtige Folge für die Triangulation und ihrer Vernachlässigung wäre es zuzuschreiben, daß die südöstlichen Bewegungen durchschnittlich kürzer befunden wurden als die nordwestlichen. Der Betrag der Basisverschiebung müßte also danach den ersteren zu, den letzteren abgezählt werden. Hierdurch würde zwar die Erklärung der Bewegung von 1906 im Sinne Lawsons erleichtert werden, aber es scheint mir doch fraglich, ob eine solche Auslegung statthaft ist. Diablo liegt in einer Breite, die weiter im Westen nur nördliche, Mocho in einer solchen, wo nur südliche Bewegungen vor 1906 nachgewiesen sind. Eine gegenseitige Entfernung beider Punkte, die aber durch die Vermessung nicht nachgewiesen wurde und mithin wahrscheinlich auch nicht eingetreten ist, wäre deshalb eher zu vermuten als eine gleichsinnige Südbewegung und dies spricht also für die Annahme, daß überhaupt keine Veränderung vorliegt. Ansonst dürften ja doch auch die Punkte Red Hill und Rocky Mound sich nicht gleichzeitig, dieser nach Nordosten, jener nach Norden bewegt haben. Allerdings sagt der geo-

dätische Bericht, daß die Werte für diese Punkte etwas zweifelhaft sind, aber diese Zweifel beziehen sich weniger auf die Richtung als auf das Ausmaß der Bewegungen und sie berechtigen in keiner Weise das Gegenteil, nämlich eine südliche Bewegung als wahrscheinlicher anzusehen.

Wenn ich somit diese zweite Beanstandung nicht für genügend begründet erachten kann, so scheint mir der ersteren doch ein größerer Wert beigelegt werden zu müssen. Daß im Norden ein Gebiet von ungefähr 2500 Quadratkilometer, das durch die Stationen Mount Talmapais, Farallon Lighthouse, Ross Mountain und Chaparral begrenzt wird, um 1.6 Meter als Ganzes in Richtung N 11° W verlagert worden sei, daß zu dieser Scholle wahrscheinlich auch noch Sonoma Mountain zugehöre und daß dies alles ohne irgend eine innere Drehung oder Zerrung sich als ein einheitlicher Block vorwärts bewegt habe, haben die beiden Geodäten als ein Ergebnis ihrer Messungen (l. c., S. 132) mitgeteilt. Ich habe den Eindruck, daß sie dabei unter dem Einflusse einer Zwangsvorstellung standen, die ihnen durch die Bewegungsart von 1906 auferlegt worden war. Faßt man die Karte (Taf. I) ins Auge, so sieht man sofort, daß die Bewegungsrichtungen in diesem Block untereinander Winkel bis zu 30° aufweisen und daß sie ziemlich regelmäßig gegen NNW divergieren, denn die größte Ablenkung nach W liegt am SW-, die größte nach O am NO-Rande jenes Blockes. Die gemessenen Strahlen bilden einen Bündel, der die größte Ähnlichkeit mit dem Radienbüschel eines Kreisausschnittes von 30° hat. Mithin haben sich die einzelnen Punkte bei ihrer radialen Bewegung nach NW zugleich in peripherischer Richtung auseinander bewegt und es muß eine Art von Zerrung (Distortion) eingetreten sein.

Die hierfür maßgebenden Punkte sind in der Reihenfolge ihrer Bewegungsrichtung von W nach O

Farallon Light-house	N 27 W	^m 1.39	Bewegung
Talmapais	N 12 W	1.64	
Chaparral	N 7 W	1.83	

		m	
Bodega	N 4 W	1.62	Bewegung
Ross Mountain	N 2 O	1.70	
Sonoma Mountain	N 3 O	> 1.24	

Nehmen wir als mittleren Radius die Linie N 12 W und ziehen wir auf diese von den 6 Punkten aus senkrechte Linien, dann ergibt sich von S nach Nord fortschreitend als Aufeinanderfolge:

Farallon Light-house	1.39	N 27 W
Talmapais	1.64	N 12 W
Sonoma	> 1.24	N 3 O
Bodega	1.62	N 4 W
Chaparral	1.83	N 7 W
Ross Mountain	1.70	N 2 O

Sonoma ist mit 1.24 vielleicht etwas zu niedrig eingeschätzt, weil nur der Vergleich der Messungen von 1860—1906 die Zahl 1.24 gab, eine Trennung der älteren und jüngeren Bewegung aber nicht durchzuführen war, und es ungewiß ist, ob die von 1906, wie die Geodäten meinen, gleich O war.

Aus dieser Reihe ist deutlich zu erkennen, daß die Größe der Bewegung abnimmt in der Richtung von N nach S und gleichzeitig auch von dem mittleren Radius sowohl gegen O als auch nach W. Deshalb ist der Unterschied zwischen dem westlichen Farallon und Talmapais größer als zwischen diesem und Chaparral, obwohl für letzteres die Entfernung fast doppelt so groß ist. Das mag auch der Grund sein für die verhältnismäßig kleine Veränderung bei dem östlichen Sonoma. Eine Ausnahme macht nur Bodega mit 1.62, welches doppelt soweit von Talmapais als von Chaparral entfernt liegt, und doch nicht weiter als Talmapais selbst verschoben wurde. Zwischen diesen beiden Orten ist also eine Zerrung oder Distortion nicht eingetreten.

Mit Bezug auf die Karte ist noch darauf aufmerksam zu machen, daß die Messungen der ersten Bewegung für alle anderen Punkte teils nicht ganz sicher teils durch Interpolation gewonnen sind und darum für unsere Auffassung nicht maßgebend sein können.

Somit kommen wir zu dem Schlusse, daß die Ortsveränderungen im Norden von S. Francisco nicht das Bild einer einfachen Schollenverschiebung geben, sondern das einer durch Ausdehnung sich vergrößernden Fläche.

Die Ausdehnung selbst war ungleichmäßig, schritt in nach NW gerichteten und auseinandergehenden Linien fort, die aber wahrscheinlich nicht gerade, sondern gekrümmt sind und zwar gegen Osten konkav. Nach Westen jedoch kann ihre Krümmung nicht einmal vermutungsweise bestimmt werden.

Im Norden von S. Francisco liegt nur noch ein Punkt, für den eine Ortsveränderung vor der zweiten Triangulation nachgewiesen worden ist, das ist Rocky Mound. Die Bewegung ist kleiner als bei den anderen 6 Punkten und N 8 O gerichtet, also noch um 5° weiter nach O als bei Sonoma. Dies fügt sich sehr wohl in das vorige Bild ein, wonach gegen Osten die Bewegung an Stärke abnimmt und zugleich in dieser Richtung abgelenkt wird.

Wir wenden uns nun dem Süden von S. Francisco zu. Da ist Loma Prieta der einzige Punkt, für den mit Sicherheit die Verlagerung vor der zweiten Triangulation gemessen werden konnte mit 3 Meter in S 53° O. Aber annähernde Bestimmungen liegen für mehrere andere Punkte vor und die beiden Geodäten folgern daraus, daß die Entfernungen zwischen diesen Punkten und dem Mountain Talmapais im Norden von S. Francisco gewachsen sind, wodurch die Länge der Bucht von S. Francisco um ein 26 000^{stel} vergrößert wurde, und daß auch die Entfernung zwischen den einzelnen südlichen Punkten zunahm, so daß die Bucht von Monterey um ein 13 000^{stel} breiter wurde. Dieser Folgerung hat sich auch Lawson (S. 151) angeschlossen. Er knüpft daran die Bemerkung, daß die Gegensätzlichkeit der Bewegungen im Norden und im Süden von S. Francisco, die von keinen wahrnehmbaren Zerreißen des Bodens in der neutralen Region von S. Francisco und an der Bucht von Monterey begleitet war, auf einen distensiven Charakter der Bewegung schließen lasse, und daß wir damit vor einen höchst

interessanten mechanischen Vorgang in der Erdkruste gestellt sind. Für eine geeignete Diskussion dieses Problemcs bedürfe es aber noch langjähriger Studien und wiederholter Messungen.

Dieser Warnung vor Übereilung kann man gewiß zustimmen, besonders wenn sie auf die Absicht der kalifornischen Erdbeben-Kommission zu schließen berechtigt, die Ortsbewegungen in dieser Gegend weiterhin kontrollieren zu wollen, denn man kann ja vermuten, daß sie durch das Beben von 1906 nur eine vorübergehende Störung erfahren haben und in irgend einer Weise jetzt wieder im Gange sind.

Gleichwohl scheint es mir nicht nur möglich, sondern auch nützlich, die bisher festgestellten Tatsachen, trotz ihrer Unsicherheiten im einzelnen, schon jetzt einer Besprechung zu unterziehen, um die Wege, die zu einer Erklärung führen können, zu beleuchten.

1. Die Ausdehnung vor 1906.

Für die südlichen Verlagerungen vor dem Erdbeben kommen hauptsächlich 6 Punkte in Betracht, die ich zunächst in der Reihenfolge anführe, welche der zunehmenden Ablenkung ihrer Bewegungsrichtung nach O entspricht:

1 Sta Cruz Az. St.	S 15 O	> 2.52
2 Punta Pinos Lat. Stat.	S 33 O	> 5.89
3 „ „ Light-house	S 37 O	> 4.91
4 Black Mountain	S 44 O	< 2.11
5 Gavilan	S 51 O	> 5.22
6 Loma Prieta	S 53 O	3.03

Diese Linien liegen in einem Kreisabschnitt von 38° und wenn wir die Richtung von S 34 O als Mittellinie nehmen, dann liegt Punkt 4 ziemlich median, 1—3 im West- und 5—6 im Ostteil dieses Abschnittes. Auch hier wie im Norden strahlen die Bewegungsrichtungen somit radial auseinander. Für die seitlichen Stationen ist aber die Aufeinanderfolge, wenn man sie nach der Größe ihrer Entfernung von jener Mittel-

linie bemißt, nicht die gleiche wie in obiger Tabelle, sondern wir müßten sie so stellen:

3 2 1 4 6 5

Dieser Unterschied fällt jedoch hinweg, sobald man als Radien Kurven mit nach Ost gekehrter Konkavität annimmt. Nach der Bewegungsgröße geordnet gibt es folgende Reihe:

Black Mountain	2.11 (1.6)
Sta Cruz	2.52 (3.14)
Loma Prieta	3.03
Punta Pinos Lat. Stat.	4.91 (5.3)
Gavilan	5.22 (> 6.22)
Punta Pinos Light-house	5.89 (6.29)

Diese Zahlen bedürfen jedoch einer Korrektur. Nur für Loma Prieta ist die Zahl wirklich bestimmt. Für die anderen Stationen geben sie die Summe der zwei Bewegungen während und vor dem Beben. Da Black Mountain im Osten der S. Andreas-Spalte liegt, so muß ein Betrag abgezogen werden, der aber jedenfalls kleiner als 1 Meter ist, während bei Sta Cruz vielleicht 0.62 hinzuzählen ist, bei Gavilan jedenfalls mehr als 1 Meter, bei Punta Pinos aber weniger, weil es von der Mittellinie weiter weg liegt.

Wenn man diese in Klammern der obigen Tabelle beigegebenen Korrekturen berücksichtigt, dann tritt es mit vollkommener Klarheit in die Erscheinung, daß mit der Entfernung von S. Francisco die Ortsveränderungen ganz erheblich an Größe zunehmen und zwar viel bedeutender als dies im Norden von S. Francisco der Fall ist.

Nun liegen im Süden noch näher gegen S. Francisco vier weitere Stationen, für welche Bewegungen vor dem Beben in Betracht zu ziehen sind. Aber nur für eine derselben, nämlich für Red Hill ist der Betrag mit 0.65 bestimmt worden. Bei den anderen sind selbst die kombinierten Beträge so klein, daß sie zum Teil innerhalb der Fehlergrenzen der Vermessung liegen. Jedenfalls also sind wir damit bereits in eine Gegend verhältnismäßiger Ruhe eingetreten.

Dennoch ist es interessant, die Bewegungsrichtungen kennen zu lernen.

Guano J.	S 28 W	0.21 c
Pulga W Base	S 16 O	0.74 c
„ O Base	S 58 O	0.41 c
Red Hill	N 52 O	0.65

Die Richtungen drehen sich hier deutlich mit dem Fortschreiten von W und O im ganzen um einen Winkel von 156° . Wenn wir trotz der Unsicherheit, die diesen Messungen wegen ihrer geringen Größen anhängen müssen, dieselben gleichwohl hier, allerdings mit allem Vorbehalt, in Rechnung stellen, so geschieht dies nur deshalb, weil die Möglichkeit doch besteht, daß hier sehr kleine Bewegungen selbst in so unerwarteter Richtung stattgefunden haben. Unerwartet waren sie dem Geodäten ja hauptsächlich doch wohl nur deshalb, weil diese von theoretischen Erwägungen ausgingen, die solche Richtung ausschließen.

Wenn wir nun noch einmal alle Bewegungen vor 1906 zusammen betrachten, dann ergibt sich folgendes Bild: Rings um die Bucht von S. Francisco haben kleine aber meßbare Verschiebungen der Erdoberfläche stattgefunden. Nur die Halbinsel, auf der die Stadt steht, scheint daran keinen Anteil genommen zu haben. Von diesem Zentrum aus gingen die Bewegungen nach allen Richtungen auseinander, aber sie waren nur schwach gegen Osten und Nordosten und nahmen an Bedeutung zu gegen NW und SO, wo sie ihr Maximum erreichten. Gegen das Meer hinaus mögen sie auch vorhanden gewesen sein, aber hier fehlt natürlich ihr Nachweis. Dennoch ist Farallon Light-house ein Beweis für ihr Dasein, da dieser einzige Punkt, der im Meere draußen eine Messung gestattete, eine deutliche Verschiebung zeigt und zwar ganz in dem Sinne als ob die Bewegung von der Bucht von S. Francisco nach allen Himmelsrichtungen ausstrahlte.

Die von diesen Bewegungen betroffene Oberfläche hat sich also ausgedehnt, am meisten in der NW-SO-

Richtung, am wenigsten gegen NO und vielleicht auch gegen SW.

Von Ross Mountain im NW bis Gavilan im SO mißt dieses Feld etwa 250 000 Meter. Die Ausdehnung betrug rund 8 Meter, also ein Meter auf 30 000.

Die Form des Feldes könnte ungefähr die Form einer länglichen Ellipse haben, die aber zur Hälfte auf dem Meer liegt und die mindestens doppelt so lang als breit ist. Doch ist die Grenze auf dem Meer möglicherweise auch ausgedehnter und unregelmäßiger als es die Zeichnung andeutet.

Die Entfernung des Mittelpunktes gegen den Ostrand, also die eine Hälfte des kleineren Durchmesser, mißt etwa 51 000 m, die Ausdehnung, wenn man die bei Red-Hill zu Grunde legt, vielleicht 1.30, also 1 : 40 000.

Von den 8 Metern Ausdehnung fallen auf die nördliche Hälfte gegen 2 Meter, auf die südliche Hälfte 6 Meter. Hier hatte sie also einen dreimal so großen Betrag.

II. Die Ursachen der Ausdehnung vor 1906.

Mit dem Suchen nach diesen Ursachen betreten wir selbstverständlich den Boden der Hypothesen. Indessen läßt sich doch das eine mit ziemlicher Gewißheit behaupten, daß die Ursachen nicht in den oberflächlichen Festlandsschichten gesucht werden dürfen. Wie die Bucht von Monterey und die Insel des Farallon Light-house beweisen, hat auch der tieferliegende Meeresboden die Ausdehnung mitgemacht.

Die aktive Bewegung muß also in tieferen Horizonten liegen. Die oberen Schichten sind nur passiv in Bewegung gesetzt worden und folgten derjenigen ihrer Unterlage. Klaffende Spalten konnten bei der Geringfügigkeit der Bewegung an der Oberfläche dabei nicht entstehen. Wo lockeres Erdreich oder plastische Tone die Oberfläche bilden, konnten sich dünne Risse in der festen Gesteinsunterlage unmöglich bis herauf fort-pflanzen. Bei einer Ausdehnung von 1 : 30 000 wäre eine Spaltenbreite von höchstens 1 mm auf 30 Meter zu erwarten.

Für die Ausdehnung in tieferen Teilen der Erdkruste lassen sich verschiedene Ursachen als möglich denken.

1. Wenn infolge starken tangentialen Druckes in der Erdkruste ein Teil derselben — in unserem Falle der unter dem auf Tafel I rot umgrenzten elliptischen Felde liegende — wegen seiner besonderen physikalischen Beschaffenheit eine außergewöhnliche Zusammenpressung erlitten hat, dann kann sich dieser Teil wieder ausdehnen, wenn jener tangentielle Druck schwächer wird. Diese Möglichkeit wird kaum in Abrede gestellt werden können, aber die Wahrscheinlichkeit, daß sie in unserem Falle zuträfe, ist sehr gering, weil der geologische Aufbau der ellipsoiden Fläche keinerlei Verschiedenartigkeit von ihrer Umgebung aufweist. Man müßte jedenfalls diese erforderliche Verschiedenartigkeit in recht große Tiefe verlegen, aber dann wird es zweifelhaft, ob die Zusammenpressung nach oben sich noch fühlbar machen und beim Nachlassen des tangentialen Druckes in Ausdehnung übergehen könnte. Ich halte diese Hypothese deshalb für unseren Fall als wertlos.

2. Erwärmung führt zu Ausdehnung. Der verstorbene Mellard Reade hat durch Experimente für verschiedenartige Gesteine die lineare Ausdehnung bei Erwärmung festgestellt und daraus für 1° C. Wärmezunahme eine durchschnittliche Ausdehnung von beinahe 1 auf 100 000 berechnet. Wenn also die Isothermen unter unserem Ausdehnungsfeld langsam sich heben, so würde schon eine Hebung von 3—4° genügen, um die Ausdehnung 1 : 30 000 zu erzeugen. Ob freilich eine solche verhältnismäßig geringe Wärmeerhöhung in Wirklichkeit diesen Erfolg erzielen könnte, ist zweifelhaft, weil in der Erdkruste die Verhältnisse doch anders liegen, als beim Experiment im Laboratorium, wo man alle anderweitigen Hemmnisse ausschalten kann. Vielleicht also müßte man eine Hebung der Isothermen um mehr als 4° zu Hilfe nehmen. Weitere Annahmen für unseren besonderen Fall wären erforderlich, um die stärkere Ausdehnung gegen Süden und die schwächere gegen Norden und die noch schwächere gegen Osten und Westen zu erklären. Man könnte annehmen, erstens daß die vorhandene

S. Andreas-Spalte das Aufsteigen der Wärme in dieser Richtung begünstigt habe und zweitens daß die Leitungsfähigkeit der Gesteine im Süden von S. Francisco zufällig für Wärme größer als im Norden sei. Die erste dieser zwei Annahmen ist jedenfalls besser fundiert als die zweite, die durch den tatsächlichen Befund nicht gestützt werden kann.

Ein Einwand gegen diese Wärme-Hypothese kann gemacht und damit begründet werden, daß wenn Wärmezuführung die Gesteine in horizontaler Richtung ausdehnt, sie es gleichzeitig auch in vertikaler Richtung tun muß. Der Boden unserer Fläche müßte also neben Ortsverschiebungen auch Hebung vor dem Jahre 1906 erfahren haben. Dieser Einwand ist vollkommen berechtigt. Wenn wir auch nur mit einer Hebung der Isothermen um 4° C. und einer Erdkruste von nur 25000 Meter Dicke rechnen wollten, so ergäbe das schon eine Hebung von 1 Meter, die zwischen der ersten und letzten Triangulation nachzuweisen wäre. Eine solche Hebung innerhalb der letzten 60 Jahre hätte unmöglich verborgen bleiben können. Es ist aber nichts derartiges bekannt geworden.

Freilich ließe sich einwenden, daß die Experimente von Reade nur unter Atmosphärendruck vorgenommen wurden, daß aber unter hohem Druck der Expansionskoeffizient kleiner sein müsse. Rechnen wir mit einem spezifischen Gewicht von 2.5, so ergibt dies für die Tiefe von 25 km einen Druck von 4600 Atmosphären, unter dem eine Temperaturerhöhung von 4° vielleicht eine so geringe Ausdehnung brächte, daß wir sie fast gleich 0 setzen dürften. Aber auch dann noch ergäbe die gesamte Ausdehnung bis zur Oberfläche eine Größe von etwa 0.5 Meter. Wenn aber eine vertikale Bewegung überhaupt vor 1906 stattgefunden hat, was mit Sicherheit noch nicht festgestellt werden konnte, so ist es (s. Report, S. 140) eher eine Senkung als eine Hebung.

Somit besteht wenig Wahrscheinlichkeit, daß bloß lokale Erwärmung es war, welche die Expansion vor 1906 erzeugte.

Wenn wir das Ausmaß der Ausdehnung innerhalb dieses Gebietes für die einzelnen Teile genauer ins Auge fassen, so

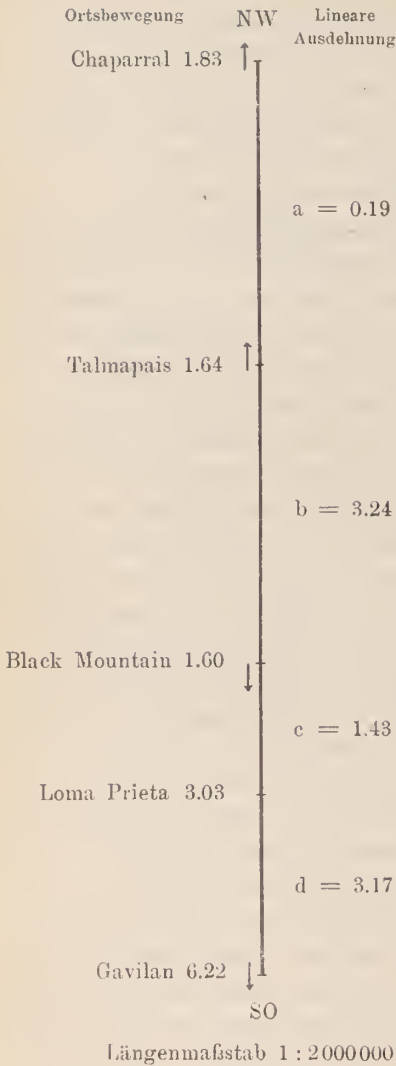


Fig. 1.

erkennen wir die Tatsache, auf die bereits hingewiesen worden ist, daß die Stärke der Ausdehnung eine sehr verschiedene war. Am besten läßt sich das für die Strecke nachweisen, die ungefähr die Längsachse des ellipsoiden Feldes bildet (Fig. 1).

Wir haben darauf fünf gemessene Punkte, zwischen denen die Strecken a—d liegen, deren Expansionen in folgendem Größenverhältnisse zueinander stehen:

$$2 \quad 32 \quad 31 \quad 52$$

Die relative Expansion in d war also 26 mal und in b 16 mal größer als in a. Wollte man dies nach Hypothese 2 erklären, so ließe sich die an sich jedoch recht unwahrscheinliche Annahme einer sehr ungleichmäßigen Erwärmung nicht vermeiden.

Für die einzelnen Strecken ist unter Hinweis auf das früher Gesagte folgendes als von Wichtigkeit hervorzuheben:

Strecke a hat sich als Ganzes um 1.6 Meter nach NW bewegt, zugleich aber auch um 0.2 ausgedehnt. Strecke b

hat sich als Ganzes nicht bewegt, sondern nur ausgedehnt. In ihrer Mitte wäre somit der ruhende Punkt zu suchen, von dem aus bei der Wärmehypothese die Bewegung in entgegen-

gesetzten Richtungen erfolgte. In diesem Falle müßten jedoch die Ortsveränderungen nach NW und SO an Größe zunehmen und das stünde dann mit der plötzlich verkleinerten Verschiebungsgröße im Süden der Station Talmapais in einem unauflöselichen Gegensatz. Dieselbe Schwierigkeit besteht, wenn auch in verminderten Maße, für die Strecke c, weil deren Ausdehnung etwas kleiner als in b ist, während sie eigentlich größer sein müßte.

3. Alle diese Schwierigkeiten werden überwunden, wenn man annimmt, daß in der die Oberflächenschichten tragenden Unterlage magmatische Intrusionen von unten her eingedrungen seien, durch die diese Unterlage in horizontaler Richtung auseinander getrieben wurde. Sie wären dann die eigentliche Ursache der Ausdehnung. Da aber solche Intrusionen zugleich ihrer Umgebung Wärme zuführen, so hätten sie auch Ausdehnung innerhalb der Krustenteile selbst zur Folge. Der Unterschied gegen Hypothese 2 liegt darin, daß Ausdehnung durch Wärme nicht ausschließlich in Betracht käme, daß man nicht mit einer allgemeinen und gleichmäßigen Hebung der Isothermen im ganzen Expansionsfelde zu rechnen hätte und daß die Wärmezunahme nur eine viel geringere zu sein brauchte, die eine vertikale Hebung des ganzen Bodens von beträchtlicher und durch geodätische Messungen leicht nachweisbarer Größe nicht bewirkt haben könnte.

Es ist bekannt, daß magmatische Intrusionen in früheren Zeiten in dem Coastrange eine große Rolle gespielt haben, und gerade für unser Gebiet haben die geologischen Aufnahmen, die Lawson in neuerer Zeit ausgeführt und geleitet hat, gelehrt, daß selbst noch im Pliocän Unmassen vulkanischer Produkte aufgestiegen sind und zu Tage gefördert wurden. Die Annahme, daß auch bis in die Gegenwart solche Massenbewegungen, wenn auch in geringerem Maße, hier vor sich gegangen seien, hat deshalb gar nichts Verwunderliches an sich und steht auch mit der Tatsache, daß die ganze Westküste Amerikas durch Vulkanreihen und -gruppen ausgezeichnet ist, von denen viele noch tätig sind, in gutem Einklang.

Die Form und Häufigkeit der Lagergänge, Lakkolithen und Batholithen weisen darauf hin, daß die magmatischen Intrusionen für ihr Zustandekommen nicht schon klaffende Spalten und Hohlräume nötig haben, sondern daß sie sich gewaltsam in die Erdkruste hereinzwängen und diese auseinanderschoben können. Wenn also innerhalb unseres Expansionsfeldes nur soviel Massen sich gangförmig eingeschoben haben, daß sie im Bereich der Längsachse, die in Fig. 3 dargestellt ist, zusammengenommen einen Raum von gegen 8 Metern einnehmen, dann genügt das vollkommen, um die Ausdehnung des ganzen Feldes zu erklären, denn nebenher geht ja noch die Ausdehnung durch die Wärmezuführung, die von den Intrusivgängen gebracht wird.

Wenn wir uns zunächst auf Fig. 1 beschränken, so würde ein in Mitte der Strecke b eindringender Gang von 3 Meter Breite bewirken, daß Talmapais sich um 1.5 nach links fortbewegt, ebenso natürlich auch Chaparral, während der Betrag von 0.1 für Tamalpais und 0.3 für Chaparral der Wärmeausdehnung zugeschrieben werden könnte. Das gleiche gilt natürlich auch für Black Mount auf der anderen Seite, was denn auch für Loma Prieta und Gavilan ein Vorrücken von 1.7 bzw. 1.8 zur Folge hätte. Da sich aber Loma Prieta in Wirklichkeit um 3 Meter bewegt hat, so wäre das einer anderen Intrusion in Strecke c von 1.2 Breite zuzuschreiben, die für Gavilan eine weitere Bewegung von 1.3, im ganzen also von 3.1 ergäbe. Gavilan hat sich aber in Wirklichkeit um 6.2 verlagert und dafür wäre dann nochmals für Strecke d eine Intrusion von 3 Meter erforderlich. Im ganzen macht das 7.2 Meter Intrusionen.

Diese Deduktion wurde unter der stillschweigenden Voraussetzung gemacht, daß die Ortsveränderungen mit den zwei äußersten Stationen ihr Ende noch nicht erreicht haben, denn die Bewegung kann nicht plötzlich zum Stillstand kommen. Sie muß in der Peripherie des Feldes langsam ausklingen. Messungsberichte liegen dafür allerdings nicht vor, aber das mag daran liegen, daß weiter draußen keine geeigneten Fix-

punkte lagen oder daß sie nicht kontrolliert wurden. Immerhin aber wäre es sehr wünschenswert, wenn durch weitere Triangulationen hierüber Aufklärung gegeben werden könnte für den Fall, daß dieselben nicht schon existieren und nur nicht zu meiner Kenntnis gelangt sind.

Diese supponierten Intrusionen unter dem ellipsoiden Feld noch weiter in ihrer Lage anzudeuten, dafür gibt es nur einige Anhaltspunkte. Der Verlauf der radialen Bewegungskurven im nördlichen Teile, deren Verlängerungen nach Süden sich erst in großer Entfernung schneiden würden, deutet wohl darauf hin, daß der Gang in Mitte der Strecke b, der gerade bei San Bruno auf der Karte zu suchen wäre, sich in ostwestlicher Richtung fortsetzt, also einerseits die Bucht von S. Francisco in der Breite von S. Bruno quert, anderseits unter der Halbinsel hinweg nach dem Stillen Ozean fortstreicht. Die von den beiden Geodäten festgestellte Vergrößerung jener Bucht um ein 26000^{stel} in ihrer Längsachse wäre somit ihm zuzuschreiben. Der Eruptivgang auf Strecke d könnte bei einem Streichen von SW—NO die Verbreiterung der Bucht von Monterey um ein 13000^{stel} verursacht haben. Selbstverständlich würde derselbe Effekt auch von einer Anzahl schmalerer Gänge erzielt werden und somit wäre es vielleicht ratsam, jeweils nicht von einem Gang, sondern von Gangzügen zu sprechen, von denen einige wohl auch in mehr nordsüdlicher Richtung angenommen werden könnten. Die schon früher erwähnten, von dem regelmäßig radialen Verlauf abweichenden Bewegungsrichtungen bei einigen Ortsveränderungen fänden dann in dem unregelmäßigen Verlauf der Gangzüge eine befriedigende Erklärung.

Für den Zeitpunkt dieser Intrusionen und für ihre Dauer sind wir nur auf vage Vermutungen angewiesen. Im Sinne der beiden Geodäten liegt es, dafür das Jahr 1868 in Anspruch zu nehmen und das Erdbeben vom 21. Oktober 1868 als eine Folgeerscheinung aufzufassen. Der Umstand, daß dabei eine Spalte im Osten der Bucht von S. Francisco aufriß, scheint mir keineswegs dagegen zu sprechen. Es wäre das eben in

diesem Falle ein Expansionsbeben gewesen. Somit gibt uns diese dritte Hypothese eine bessere Erklärung für die Ortsveränderungen vor 1906 als die zwei anderen, und solange es nicht gelingt, eine noch bessere vierte Hypothese aufzustellen oder neue Tatsachen vorzubringen, die sich nicht mit ihr vereinbaren lassen, sehe ich in ihr eine gute Arbeitshypothese von heuristischem Werte.

III. Die Ursache der Ortsveränderungen während des Erdbebens von 1906.

Für diese dauernden Ortsverlagerungen, von denen nicht alle so doch viele unzweifelhaft am 16. April 1906 mit einem Ruck eingetreten sind, besitzen wir ein viel größeres Beobachtungsmaterial als für die älteren Bewegungen. Es beschränkt sich nicht auf das Expansionsfeld von 1868, sondern greift noch 70 Kilometer gegen NW über dasselbe hinaus.

Von den älteren unterscheiden sich diese Bewegungen der Art nach ganz wesentlich nicht nur durch ihre Plötzlichkeit, vielfach auch durch ihre Richtung und Länge, sondern

insbesondere dadurch, daß sie in der auffälligsten Weise in Abhängigkeit zum Verlaufe der S. Andreas-Verwerfungs-Spalte stehen. Mit ganz wenigen Ausnahmen sind sie auf der Ostseite dieser Spalte nach SO, auf der Westseite nach NW gerichtet und sie nehmen mit Annäherung an die Spalte an Größe erheblich zu. Hätte man also vor dem 16. April eine gerade

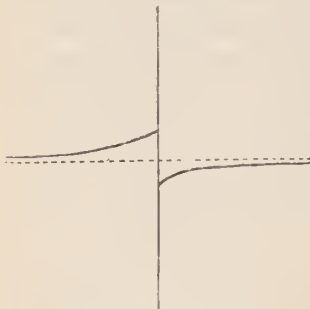


Fig. 2.

(in Fig. 2 schraffierte) Linie rechtwinkelig auf die S. Andreas-Spalte markiert, so würden diese auseinandergerissenen Teilstrecken jetzt nach dem Beben gekrümmt sein und zwar um so stärker, je näher sie an die Spalte herantreten.

Diese Feststellung ist eines der wichtigsten Ergebnisse der geodätischen Aufnahmen, denn sie beweist uns, daß wir keine gewöhnliche Spaltenverschiebung vor uns haben, bei denen die Verkrümmung gerade in entgegengesetzter Richtung eintritt, wo sie dann als Schleppung bezeichnet wird und uns als eine Reibungshemmung leicht verständlich ist. Wir müssen für ihre Erklärung nach anderen Ursachen suchen und Lawson (S. 150) findet sie in der Annahme, daß durch die vorausgegangenen, bereits besprochenen Expansionsbewegungen der Boden in eine elastische Spannung geraten war, durch welche die einzelnen Punkte der Oberfläche in eine Zwangslage kamen, aus der sich zu befreien und in ihre frühere Position zurückzukehren sie das Streben hatten. Sobald nun die Spalte aufriß, war es den Punkten unmittelbar zu beiden Seiten leichter, ihre ehemalige Stelle wieder zu erlangen als, den entfernteren, und deshalb war die Bewegung an der Spalte eine größere als weiter ab.

Diese Erklärung müßte zur Voraussetzung haben, daß die ursprüngliche Lage der Punkte vor den die Spannung erzeugenden älteren Bewegungen auf der Westseite der Spalte weiter im Süden, auf der Ostseite weiter im Norden war. Das trifft aber nicht zu. Denn die älteren Bewegungen waren alle im Norden nach Norden und im Süden nach Süden gerichtet gewesen. Ich kann mich deshalb dieser Deutung des Vorganges nicht anschließen.

Welches aber auch die richtige Erklärung sein möge, wir müssen jedenfalls von ihr verlangen, daß sie auch einige andere Merkwürdigkeiten aufkläre oder wenigstens nicht mit ihnen in Widerspruch stehe.

Dazu gehört erstens der Umstand, daß die Bewegungsgrößen zu beiden Seiten der Spalte trotz ihrer Widersinnigkeit im Norden von S. Francisco erheblich bedeutender sind als im Süden und zweitens, daß manche Punkte der herrschenden Richtung nicht folgten, sondern sich teils direkt auf die Spalte zu (Hans, Hammond, Montara, Mount Peak) teils von ihr weg (P^t Reyes Light-house, Farallon Light-house und Red Hill) bewegten.

Diese Merkwürdigkeiten, die allerdings das ganze Phänomen recht verwickelt erscheinen lassen, einfach als Messungsfehler zu erklären, halte ich, solange nicht gute Gründe dafür vorgebracht werden können, für gefährlich. Unser Wunsch, die Naturphänomene möglichst einfach zu sehen, verhindert uns erfahrungsgemäß häufig, dem wirklichen Tatbestand genügende Rechnung zu tragen.

Lawson faßt die Expansionsbewegungen vor 1906 so auf, daß durch sie erst die Spannungen in der Kruste erzeugt wurden, die dann zu einer plötzlichen Auslösung durch das Erdbeben von 1906 führten. Die Bewegungen während des Bebens erzeugten dann aber nicht erneute Spannungen, sondern stellten eine neue Gleichgewichtslage her; sie sollten also eher den Charakter von Kompressions- als von Expansionsbewegungen haben und die Verschiebungen auf der einen Seite der S. Andreas-Spalte müßten denen auf der anderen Seite ungefähr das Gleichgewicht halten.

Da aber die geodätischen Aufnahmen dies nicht bestätigen und nach ihnen die wirklichen Bewegungen im Westen erheblich größer als die im Osten waren, so sucht Lawson, wie schon eingangs erwähnt, dieses seiner Annahme widerstrebende Ergebnis dadurch zu entkräften, daß er auch der Vermessungsbasis, die auf der östlichen Seite liegt, eine südliche Verlagerung zuspricht, deren Berücksichtigung für alle südlichen Bewegungen einen größeren und für alle nördlichen einen kleineren Betrag ergäbe. Ganz abgesehen davon, daß diese Basis-Verschiebung nur eine unbewiesene Hypothese ist, wird damit aber noch lange nicht erklärt, weshalb die einzelnen sowohl nördlichen wie südlichen Ortsveränderungen unter sich sehr ungleiche Werte besitzen und wie es möglich war, daß mehrere Orte sogar eine starke Verschiebung in östlicher und westlicher Richtung erhielten.

Sobald wir die Bewegungen von 1906 für sich allein und ohne Rücksicht auf die vorausgegangenen älteren genauer analysieren, kommen wir zu dem Ergebnis, daß auch sie von Zerrungs- oder Expansionserscheinungen begleitet waren.

Fassen wir zunächst die Veränderungen auf der Ostseite der S. Andreas-Spalte ins Auge und vergleichen wir die Größe der Veränderungen von solchen Orten, deren Entfernung von der Spalte ungefähr eine gleiche ist, dann erhalten wir folgende Tabelle:

Entfernungen in Kilometern	Orte in Reihe von Nord nach Süd	Südbe- we- gungen in Metern	D = Dehnung K = Kürzung
57	0 Dunn	0.79	D 0.98
	2 Clark	0.83	
25	57 Lancaster	1.77	K 0.11
	67 Henry Hill	1.46	
	73 Dixon	1.37	
	75 Chaparral	1.34	
26	84 Peaked Hill	1.27	D 0.39
	102 Bodega	1.47	
64	110 Smith	1.66	K 1.26
	118 Talmapais	0.58	
90	174 Black Bluff	0.40	D 0.57
	264 Loma Prieta	0.97	

Hieraus ersehen wir unmittelbar, daß die 264 Kilometer lange Strecke sich mit ihrem Südende um beinahe einen Meter nach S bzw. SO bewegt hat, daß dabei aber das Nordende um 0.18 zurückblieb, was für die ganze Strecke eine Dehnung um diesen Betrag bedeutet. Kompression hat also sicher nicht stattgefunden. Aber außerdem sind auf den einzelnen Teilstrecken abwechselnd Dehnungen und Kürzungen eingetreten, aber im ganzen blieben letztere gegen die Dehnungen um 0.18 im Rückstand. Auffällig ist dabei, daß die nördlichste 57 km lange Teilstrecke allein schon eine Ausdehnung erlangt hat, die dem Betrage der Verlagerung von Loma Prieta gegen Süden gleichkommt.

Neben der allgemeinen Bewegung nach Süd hat somit die ganze Strecke noch gesonderte Bewegungen in zwei einander entgegengesetzten Richtungen erfahren, von denen die eine die allgemeine Bewegung verstärkten, die anderen ihr entgegenwirkten. Es könnte naheliegend erscheinen, in diesen gesonderten Differenzialbewegungen Äußerungen großer longitudinaler Schwingungen zu vermuten, die durch das explosionsartige Zerreißen der S. Andreas-Spalte entstanden und die zu abwechselnden Verdichtungen und Auflockerungen des Bodens führten. Da es sich dabei aber nur um elastische Schwingungen handeln kann, so ist nicht einzusehen, welche Kraft dieselben plötzlich mitten in der Bewegung erstarren machen konnte, so daß daraus dauernde Ortsveränderungen hervorgingen.

Ich halte es deshalb für viel wahrscheinlicher, daß ähnliche Ursachen wie die, welche vor 1906 Expansion hervorbrachten, auch hier tätig waren. Injektionsgänge in der Tiefe unter Mendocino und Sonoma County und einige kleinere bei Bodega und in der Breite von Sta Cruz würden zur Erklärung ausreichen.

Für die Westseite der S. Andreas-Spalte läßt sich eine ähnliche Tabelle aufstellen:

Entfernungen in Kilometern	Orte in Reihe von Nord nach Süd	Nordbe- we- gungen in Metern	D = Drehung K = Kürzung
0	Shoemaker	3.27	} D 0.77
62	Fort Ross	2.50	
51	{ 90 Bodega Head	3.60	} K 2.09
	{ 103 Tomales Port	3.59	
	{ 107 " Bay	3.89	
96	{ 113 Foster	4.59	} D 1.08
	{ 120 Point Reyes Hill	3.72	
	{ 180 Road	2.45	
	{ 183 Flat	2.33	
102	{ 209 Sierra Morena	1.68	} K 0.51
	{ 311 Gavilan	2.19	

Diese 311 Kilometer lange Strecke ist mit ihrem Nordende um 3.27 Meter nach Norden vorgerückt und hat sich dabei um 1.08 ausgedehnt, also pro Einheit fünfmal so stark als die 264 Kilometer lange Strecke auf der Ostseite.

Wir unterscheiden vier Teilstrecken, die abwechselnd Ausdehnung und Kürzung zeigen.

Stellen wir die Ergebnisse der beiderseitigen Verschiebungen in einer Zeichnung nebeneinander (siehe Fig. 3, S. 26), dann erkennt man sofort deren Verschiedenartigkeit. Nur am oberen Ende entsprechen sich die Ausdehnungs-Teilstrecken annähernd, dann aber greifen sie stets übereinander weg, so daß jeweils einer Teilstrecke links zwei Teile unter sich konträrer Strecken entsprechen.

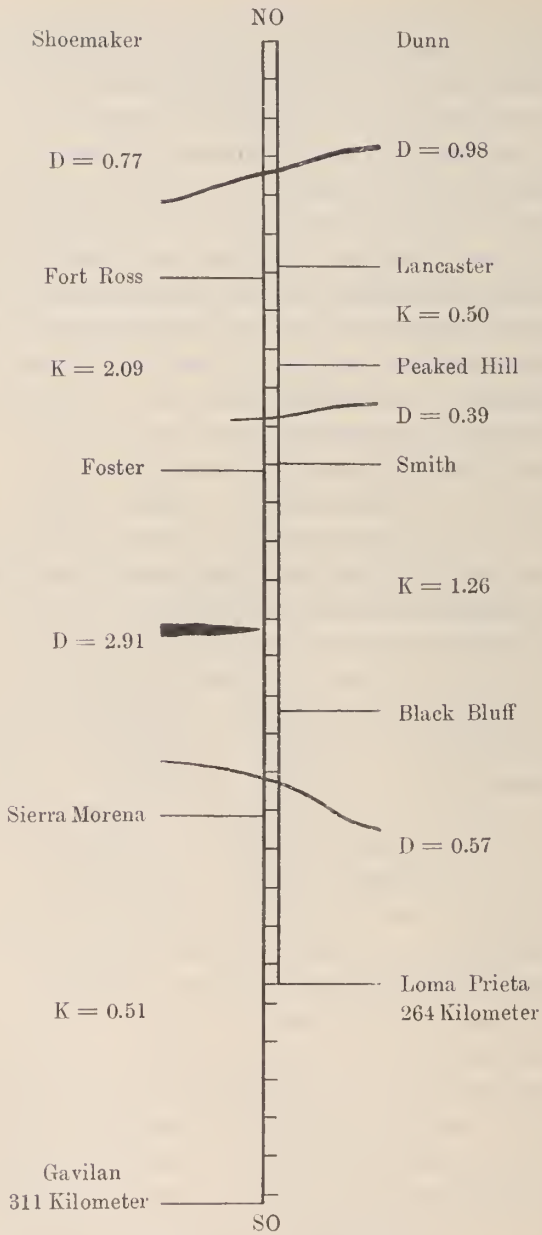
Links ist $D = 3.68$, rechts $D = 1.94$

$K = 2.60$ $K = 1.76$

Wenn die Ausdehnung durch Injektion in der Tiefe entstanden ist, dann muß nach diesen Gleichungen die Injektion im Westen mächtiger als im Osten gewesen sein und im Westen entstanden dadurch stärkere Spannungen als im Osten. Diese Differenz genügte wohl, um die bereits vorhandene Verwerfungsspalte aufzureißen und auf ihr die vorhandenen Spannungen auszulösen. Will man in den Ausdehnungsfeldern die Injektionsmassen andeuten, dann hat man zwei über die Spalte fortsetzende, die eine in der Grenzgegend von Sonoma und Mendocina und die andere etwa bei der Golden Gate. Letztere ist im Westen als aus 2 Gängen bestehend angenommen, von denen der stärkere Ast nicht über die Spalte nach O herübersetzt. Eine dritte gehört nur dem Osten an und mag unter der Bodega Bay liegen. Gleichwohl dürfte auch diese Injektion noch etwas nach Westen über die Spalte herübergegriffen haben, denn auf der vorstehenden Tabelle scheint eine ganz kleine Ausdehnung zwischen Tomales Point und Bodega Head angedeutet zu sein. Sie ist aber so unbedeutend, daß sie vielleicht auch auf Messungsfehler zurückgeführt werden könnte.

Die Injektionshypothese wird somit allen Unregelmäßigkeiten der Ortsveränderungen, wie sie die Triangulation zu

8. Abhandlung: A. Rothpletz



Längenmaßstab 1 : 2000000.

Fig. 3.

beiden Seiten der Riftspalte nachgewiesen hat, gerecht und wir haben es nicht notwendig, die Richtigkeit dieser Messungen anzuzweifeln.

Aber es gilt nun auch die Erscheinungen, die weiter seitwärts eingetreten sind, zu erklären.

Die Bewegung von Farallon Light-house (1.78) und Punta Reyes Light-house (1.09) hatte eine Richtung, die mit der S. Andreas-Spalte einen Winkel von $25-30^{\circ}$ bildet; beide Punkte haben sich damit von der Spalte entfernt. Die Punkte Hans und Hammond auf der Ostseite der Spalte haben sich derselben genähert, Hans unter einem Winkel von 44° um 1.95 Meter, Hammond unter einem solchen von 76° um 2.28. Red Hill hingegen entfernte sich um 0.30 unter einem rechten Winkel von ihr und Montara Mount Peak auf der westlichen Spaltenseite näherte sich ihr um 1.59 unter einem Winkel von 70° .

Wir haben bisher die Wirkungen der supponierten Injektionen nur mit Bezug auf die Bewegungen in der Nähe der S. Andreas-Spalte betrachtet, aber schon dabei erkannt, daß sie großem Wechsel unterliegen, daß die Verteilung der Injektionen in der Erdkruste keine gleichmäßige sein kann und von der Richtung der Spalte ganz unabhängig sein muß. Die Bedingung ist unabweisbar, daß die Injektionsmassen gegen Osten und Westen weiter fortsetzen und auch da zu Expansionen und Ortsveränderungen geführt haben, deren Richtung wesentlich von der Lage der Injektionen abhing.

Das durch die Messungen bewiesene Vorkommen von unter sich divergierenden Bewegungsrichtungen hat somit gar nichts Wunderbares und bedarf keiner besonderen Begründung, weil es gegen keine Regel verstößt. Unter den kontrollierten Punkten sind nicht weniger als 14, die unter Winkeln von 25 und mehr Graden und viele andere, die mit $10-25^{\circ}$ sich der Spalte genähert oder von ihr entfernt haben. Das Gegenteil trifft also zu und wer dennoch die Parallelität der Bewegungen mit der Spalte als Regel hinstellen will, der muß erst den Beweis dafür erbringen, daß es eine solche Regel gibt.

Auch ist es keineswegs ausgeschlossen, daß die Bewegungsrichtung, die wir jetzt aus der ursprünglichen und der gegenwärtigen Lage eines Punktes als eine zur Spalte parallelen bestimmen, in Wirklichkeit sich aus zwei Linien zusammensetzt, die untereinander einen mehr oder minder großen Winkel bilden und von denen nur die eine zur Spalte parallel ist. Diese entspräche dann der Bewegung beim Zerreißen der Spalte, die andere derjenigen durch die vorausgehende Expansion.

Schon vor der geodätischen Vermessung und zu einer Zeit, als man die Ortsveränderungen noch als Folgen einer einfachen Schollenverschiebung auffassen zu können glaubte, war die auffallende Tatsache festgestellt worden, daß wo deutlich markierte Linien, wie Wege, Zäune etc. von der Erdbebenspalte quer geschnitten wurden, die beiderseitigen Enden nicht jedesmal gleichweit auseinandergerückt sind und daß solche Verschiedenheiten bei nahe beieinanderliegenden Linien oft größer als bei weit voneinander entfernten vorkommen.

Man hat versucht, dies auf lokale Verhältnisse, insbesondere auf das Verhalten der lockeren Oberflächenschichten zurückzuführen und man mag in vielen Fällen damit auch das Richtige getroffen haben, aber wenn die Bewegungsgröße die Summe zweier Größen ist, von denen die der Spaltenverschiebung eine mehr konstante, die der Expansionsbewegung eine variabelere ist, dann können jene Verschiedenheiten auch darin allein schon eine genügende Erklärung finden.

Damit soll jedoch keineswegs in Abrede gestellt werden, daß die in der Tiefe ausgelösten Bewegungen bei ihrem Eintritt in die oberflächlichen Schichten nach Richtung und Stärke Veränderungen erlitten, besonders da, wo letztere eine ganz abweichende physikalische Beschaffenheit haben. In lockeren Sanden und Schottern oder in plastischen Tonen lösten sie Eigenbewegungen etwa in Form von Zusammensitzen oder Gleiten aus, wodurch die Bewegung je nach Umständen beschleunigt oder verlangsamt und deren Stärke vergrößert oder verringert werden konnte.

Die Vielfältigkeit der bewirkenden Ursachen und die Verschiedenartigkeit der Massen, auf welche diese Ursachen die Bewegungen übertrugen, zwingt uns zu größter Vorsicht bei der Deutung der Veränderungen, die als das Ergebnis der verwickelten Vorgänge jetzt vorliegen, und diese Vorsicht muß sich noch steigern in Anbetracht des Umstandes, daß eine sichere Feststellung dieser tatsächlichen Ergebnisse wegen der Geringfügigkeit der dabei zu messenden Grössen nicht immer zu erreichen ist.

Die von mir zur Deutung herangezogene Hypothese setzt voraus, daß die primäre Ursache der Ortsveränderungen in unterirdischen Injektionen liege. Es wird notwendig sein, zur Zeitdauer, die diese Injektionen erforderten, Stellung zu nehmen. Der vulkanische Herd, von dem sie aufstiegen, muß jedenfalls in bedeutender Tiefe liegen, und je nach Belieben kann man mit 20 oder mehr Kilometern rechnen. Gehen wir von dem allerdings nicht sehr wahrscheinlichen Minimum von 20000 m aus, so ergibt sich schon da, daß die Injektionsmassen den weiten Weg bis nahe an die Erdoberfläche keinesfalls in wenigen Sekunden zurücklegen konnten. Da das ganze Erdbeben nur eine Minute gedauert hat, so kann es gewiß nicht unmittelbar durch die Injektion selbst verursacht sein. Merkliehe Erderschütterungen gingen demselben aber nicht voraus und somit erscheint es wahrscheinlich, daß der Injektionsvorgang selbst nicht mit deutlich fühlbarem Erbeben der Erdkruste verknüpft war. Wäre er aber ein sehr rascher, gewissermaßen explosionsartiger gewesen, so hätte er sicherlich zu Erschütterungen führen müssen. Also dürfen wir annehmen — und das gilt natürlich auch für die Injektionen, die dem Erdbeben von 1868 vorausgingen, — daß die Injektionsmassen langsam aufstiegen und die damit verknüpfte Ausdehnung in der Erdkruste ebenfalls langsam zustande kam. Durch sie wurden die Druckspannungen in der Erdkruste erzeugt und das Erdbeben gewissermaßen vorbereitet, das erst eintrat, als durch Zerreißen der S. Andreas-Spalte die Spannungen ihre Auslösung fanden. Im Sinne der Injektions-Hypothese liegt

es somit, daß sowohl durch die Spaltenzerreißung als auch durch die vorhergehende Injektion Ortsveränderungen entstanden sind und daß sie sich zu den Verlagerungen summiert haben, welche nach dem Erdbeben gemessen worden sind.

IV. Der Erdbebenherd und seine Tiefe.

Obwohl die elastischen Schwingungen des Bebens gewiß dem plötzlichen Zerreißen der Spalte zuzuschreiben sind, so ist man doch nicht berechtigt, die ganze Fläche, auf der diese Zerreißung eintrat, als den eigentlichen Herd zu bezeichnen. Als solcher darf vielmehr nur der Teil gelten, wo die Zerreißung zuerst eingetreten ist. Nahe der Oberfläche kann er also nicht liegen, denn die Injektionen sind soweit nicht emporgedrungen. Auch ist es wahrscheinlich, daß deren Volumen gegen oben abnimmt. Von ihm ist aber die Ausdehnung in erster Linie abhängig und somit könnte man den Herd in der Wurzelregion der Injektionen, also nahe dem vulkanischen Herde suchen, von dem diese ausgingen. Gegeben wären dadurch Tiefen, die 20 km jedenfalls überschreiten. Indessen ist für diese noch die Erfüllung einer anderen Bedingung erforderlich, nämlich das Herabreichen der Verwerfungsspalte, von der es keineswegs feststeht, ob sie bis auf den vulkanischen Herd heruntergeht.

Nur soviel läßt sich also sagen, daß der Herd in der Tiefe liegt, wo auf der Spalte durch die Injektionen ein Maximum von Druckspannungen erzeugt worden ist. Da diese Gleichung zwei numerisch unbekannt GröÙen enthält, so läßt sich aus ihr ein zahlenmäßiger Wert für die Herdtiefe nicht ableiten. Ob das Studium der Seismogramme zu einer genauen Tiefenbestimmung führen kann, wird uns erst der noch nicht erschienene zweite Band des Reports lehren.

Es bedurfte einer gewissen Zeit, bis die in der Tiefe beginnende Zerreißung sich bis zur Erdoberfläche fortgepflanzt hatte und dann erst dort jene starken Bodenschwankungen um 5^b 12^m hervorrief. Das mit dem Geräusch von Donner, Hagel-

schauer oder Sturmwind verglichene Tönen, welches schon Sekunden, vielleicht sogar Minuten lang vor dem eigentlichen Eintritt der Erschütterung gehört wurde, könnte uns vielleicht, wenn genauere Zeitbeobachtungen vorlägen, zur Bestimmung der Zeit dienen, welche die Zerreißung in ihrem Fortgang von unten bis oben benötigte.

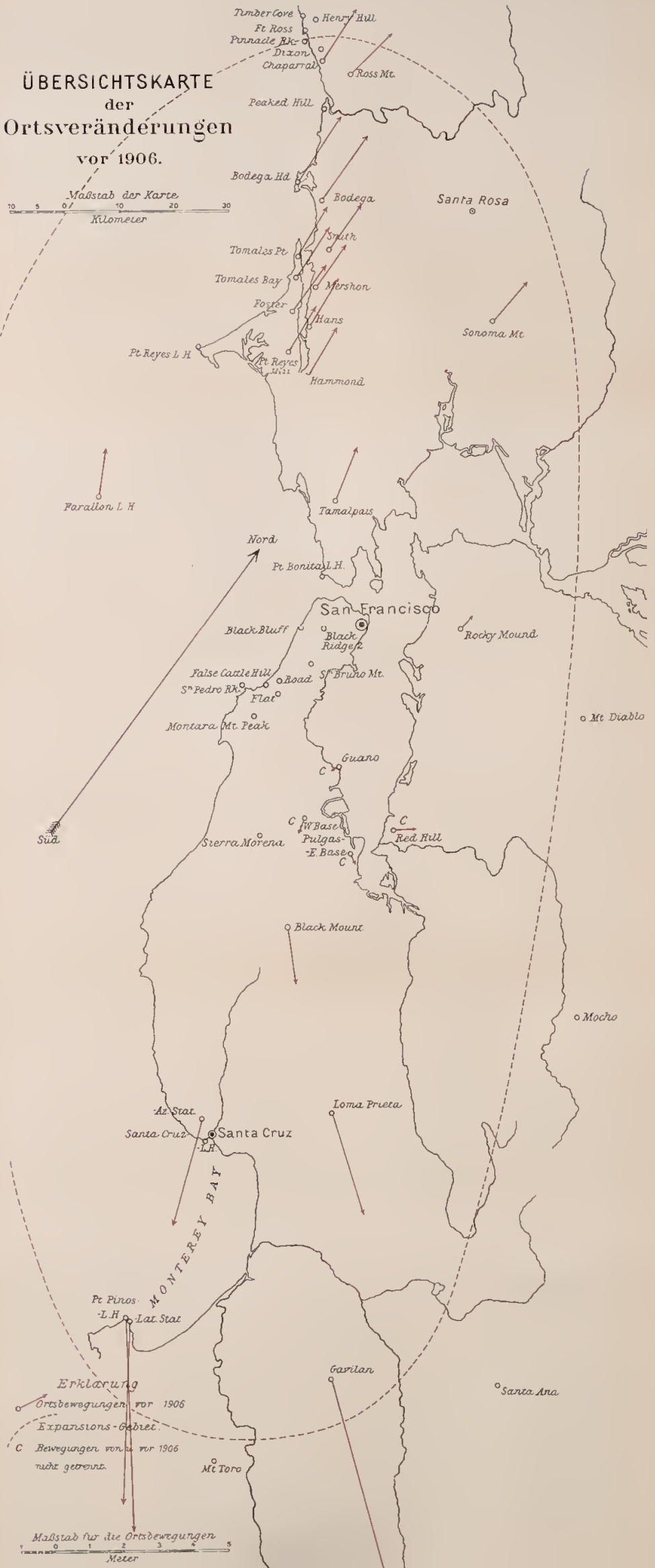
V. Klassifikation des Kalifornischen Erdbebens.

Wir kommen nun auf die eingangs erwähnte Einreihung dieses Bebens in die tektonische Rubrik zurück und müssen uns fragen, ob sich dieselbe vom Standpunkte unserer Hypothese aus noch aufrecht erhalten läßt. Man bezeichnet die tektonischen auch als Dislokationsbeben, wenn also Dislokationen magmatischer Massen hier vorliegen, könnte man ganz wohl von einem Dislokationsbeben sprechen. Solche Dislokationen hat Toula freilich nicht gemeint, als er jenen Namen für die tektonischen Beben münzte. Er hatte nur Dislokationen schon fester Krustenteile im Auge; aber auch solche haben ja beim Eindringen der magmatischen Massen stattgefunden und so ergibt sich daraus, daß die Benutzung des Wortes Dislokation eigentlich nicht recht geeignet ist, um eine bestimmte Klasse von Beben gegenüber den vulkanischen auszuzeichnen. Hörnes schlug vor eine besondere Gruppe der kryptovulkanischen Beben auszuscheiden (Erdbebenkunde, S. 255). „die mit Intrusionsvorgängen in der Tiefe zusammenhängen, die sich oberflächlich nur durch Erschütterungen verraten“. Er meint allerdings, daß sie „in ihrer eigentlichen Natur wohl sehr schwer — mit den uns zu Gebote stehenden Mitteln aber gewiß gar nicht zu erkennen seien; ein Mangel, über welchen uns allenfalls die Erwägung trösten mag, daß solche Fälle, in welchen große Intrusionen in der Tiefe stattfinden. ohne sich auch an der Oberfläche durch die gewöhnlichen Eruptionerscheinungen zu verraten, vergleichsweise ungemein selten sein mögen“. Das war 1893, also vor 17 Jahren geschrieben. Seitdem hat sich die Seismologie erstaunlich entwickelt. Gleichwohl würden

uns auch jetzt noch die Mittel fehlen, für das Kalifornische Erdbeben den kryptovulkanischen Ursprung wahrscheinlich zu machen, wenn dasselbe nicht durch jene ausgezeichnete Monographie in so gründlicher Weise beschrieben worden wäre. An Stelle des Wortes „kryptovulkanisch“ möchte ich freilich lieber Injektionsbeben setzen. Da es aber denkbar ist, daß sich solche Beben in der verschiedenartigsten Weise oberflächlich bemerkbar machen, und da für das Kalifornische jedenfalls die lineare oder, richtiger gesagt, die flächenhafte Entwicklung ein besonderes Charakteristikum ist, so kann dasselbe auch noch weiter als Spaltenbeben bezeichnet werden. Einer Verwechslung mit tektonischen Spaltenbeben wird leicht vorzubeugen sein durch Anwendung des Namens Injektions-Spaltenbeben.

ÜBERSICHTSKARTE der Ortsveränderungen vor 1906.

Maßstab der Karte
Kilometer



ÜBERSICHTSKARTE des kalifornischen Erdbebens von 1906.

Maßstab der Karte
10 5 0 10 20 30
Kilometer



Parallon L.H.

Nord

Süd

Mt. Diablo

Mocho

- Erklärung
- Ortsbewegungen von 1906
 - Erdbebenspalte von 1906
 - Triangulations-Basis
 - Bewegungen von u. vor 1906 nicht getrennt.

Maßstab für die Ortsbewegungen
1 2 3
Meter

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 9. Abhandlung

Das Schelfeis der Antarktis
am Gaussberg

von

Erich von Drygalski

Vorgetragen am 4. Juni 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Das Inlandeis strömt vom Lande ins Meer hinaus bis dahin, wo das Wasser so tief wird, daß jenes den Boden verliert. Hier endigt es mit einer steilen Mauer. Im Meer davor liegen Massen, die aus Land- und Meer-Eis gemischt sind und dem Inlandeise zunächst noch in vielen Dingen, bisweilen auch völlig gleichen. Sie strömen aber nicht mehr auf Grund, sondern schwimmen. Ihnen fehlt deshalb ein Gezeiten-Eisfuß, wie er sich am Inlandeis bildet. Ihnen fehlt auch die Weiterentwicklung der Oberflächen- und Strukturformen des Inlandeises, die durch dessen Strömen entstehen. Sie sind nur passiv bewegt und werden dabei von äußeren Kräften geformt.

Diese Massen bestehen aus Bergen und Schollen. Erstere brechen vom Inlandeis los, entstehen also aus Landeis; letztere werden auf dem Meer gebildet und sind Meereis. Freilich wird dieses vielfach so mächtig mit Schnee belastet und heruntergedrückt, daß das ursprüngliche, aus Meerwasser gefrorene Eis unten fortschmilzt. Dann bleiben nur die belastenden Schneemassen übrig, mehr oder weniger vereist. Nach Zusammensetzung und Bildung gleichen diese dem Inlandeis, das ja auch aus Schnee entstanden ist, doch haben wir sie zunächst, weil sie auf dem Meere entstehen, mit als Meereis den vom Inlandeise losgebrochenen Eisbergen gegenüberzustellen.

1. Hemmungen schwimmender Eismassen.

Wo die Inlandeismauern im Meere freiliegen, können Berge und Schollen davontreiben; wo Hindernisse vorhanden sind, bleiben sie liegen. Das allgemeinste Hindernis bereitet der Winter, der das Inlandeis der Antarktis, wohl überall, so fest mit

Meereis umbaut, daß dieses selbst und auch die während des Winters gebildeten Eisberge nicht fortreiben können. Stauungen, die hierauf beruhen, lösen sich im nächsten Sommer: ihre Dauer ist in der Antarktis bisweilen nur zwei bis drei Monate lang. Nach der Lösung treiben Berge und Schollen davon und die Inlandeismauer liegt wieder frei.

Eine andere Art von Stauungen rührt von den Küstenumrissen her. Sie ist in Grönland z. B. wohlbekannt, wo die Fjorde, in die das Inlandeis hinausströmt und seine Berge abschiebt, lang und eng, bisweilen auch durch Inseln gesperrt sind. Das Meereis wird dort im Winter gar nicht sehr dick, in 70° n. Br. kaum 1 m, kann aber, durch die Engen gehalten oder durch Winde zusammengetrieben, Hindernisse bilden, welche die Berge, die sich von den Inlandeismauern ablösen, bis in den Hochsommer fesseln. In der Antarktis sind solche Stauungen seltener, weil es an eisfreiem Land fehlt, und die Inlandeismauern unbeengt ins offene Meer hinaustreten. Aus den Gebieten südlich von Amerika und aus dem Roßmeer sind sie aber auch bekannt.

Eine dritte Art von Stauungen beruht auf den Vertikalformen des Meeresbodens, nämlich auf Untiefen und Bänken, durch welche Eisberge, die in tieferem Wasser herantreiben, aufgehalten werden, um dann ihrerseits horizontale Widerlager für andere Berge und Schollen zu bilden, also wie Küstenumrisse zu wirken. Stauungen dieser Art sind ebenfalls von den Küsten Nordgrönlands her bekannt. Sie können naturgemäß nur in flachen Meeren auftreten, da Erhebungen des Bodens nur in diesen nahe genug an die Meeresoberfläche herantreten und Eisberge aufhalten. Solche Flachmeere liegen auf den Sockeln oder Schelfen der Kontinente vor Beginn von deren steilerer Böschung zur Tiefsee. Der Schelf des antarktischen Kontinents hat nördlich vom Gaußberg zwischen 200 und 600 m Tiefe, doch darin ragen Bänke bis zu nur 100 m Tiefe empor. Da die großen Eisberge 200 m tief und mehr eintauchen, liegt für sie Gelegenheit genug zur Fesselung durch Untiefen vor.

2. Der Begriff des Schelfeises.

Diese dritte Art der Stauungen, die auf den Bodenformen des Kontinentalschelfs beruht, bildet eine Eisformation, die in der Antarktis große Bedeutung besitzt und als Schelfeis zu bezeichnen ist. Sie ist im allgemeinen an ihren Ort gebannt und unterscheidet sich dadurch vom Treibeis, doch sie ist, wie letzteres, zum größten Teil schwimmend und dadurch vom Inlandeis unterschieden. Ihre Bindung an den Ort ist freilich nicht vollständig, denn überall finden geringe horizontale Verschiebungen statt. Nur die Eisberge darin, die auf Grund liegen, sind für lange Zeiten absolut fest. Die Bewegungen der übrigen Massen bestehen nicht in einem stetigen Strömen, wie beim Inlandeis, sondern in unregelmäßigen, katastrophentartigen Verschiebungen. Die vertikalen Schwankungen des Meeresspiegels, z. B. Ebbe und Flut, macht das Schelfeis, abgesehen von seinen auf Grund gerateneu Eisbergen, im Gegensatz zum Inlandeis mit, da es schwimmt.

Aus dieser Begriffsbestimmung, die von den Bodenformen des Meeres ausgeht, folgt, daß Winterstauungen als solche nicht zum Schelfeis gehören, also in der Regel alle diejenigen nicht, welche den Sommer nicht überdauern. Schelfeis ist älter als ein Jahr. Ewige Dauer hingegen in dem Sinn, wie das Inlandeis, welches die Länder durch geologische Perioden bedeckt, hat das Schelfeis auch nicht. In jedem Sommer werden einzelne Teile abgelöst, um davon zu treiben, und andere neu hinzugefügt, nur nicht Teile von bestimmter Lage und Größe; es geschieht bald hier und bald dort. Ein Teil liegt vielleicht nur zwei Winter und einen Sommer und treibt im zweiten Sommer davon. Andere liegen viel länger, fast solange wie das Inlandeis. Die Gründe sind hierbei verschieden. Jedenfalls sind im Schelfeis sehr verschiedene Altersstufen vertreten. Es gibt auch junges, weniger als einjähriges Schelfeis, nämlich dort, wo es gerade entsteht, also wo ihm neue Berge zuwandern oder neues Scholleneis anfriert. Diese jüngsten Bestandteile haben aber noch nicht die Formen, die durch längeres Liegen

entstehen. Dazu gehört mindestens eine volle Jahresperiode. Weniger als einjähriges Eis ist deshalb nur ein Übergangsbilde: zum Begriff des Schelfeises gehört außer den genannten Merkmalen auch die Gestalt, die durch längeres Liegen an Ort und Stelle entsteht.

3. Die Entstehung der Formen des Schelfeises.

Diese charakteristischen Formen des Schelfeises entstehen wesentlich durch subaërische Verwitterung und sind um so ausgeprägter, je länger das Eis an Ort und Stelle liegt. Wasser spielt bei Entstehung dieser Formen nur eine untergeordnete Rolle, denn Schmelzwasser oder gar fließendes Wasser ist in der Antarktis sehr spärlich, und Meeresbrandung kann am Schelfeise nur wenig in Wirksamkeit treten, weil sie sich seiner Dichtigkeit wegen darin selten entwickeln kann. Deshalb sind die sichtbaren Formen des Schelfeises überwiegend unabhängig von Wasserwirkung. Nur wo Teile desselben, die früher unter oder in dem Meeresspiegel lagen, durch irgendwelche Vorgänge über ihn gehoben sind, sieht man Spül- oder Brandungswirkungen. Die ersteren treten vornehmlich an solchen Eisbergflächen auf, die ganz vorübergehend in das Meer eingetaucht haben, etwa während die betreffende Masse beim Schwimmen auf und nieder schwankte, die letzteren, wenn bleibende Lagenveränderungen dabei eingetreten sind, doch davon später.

Für das allgemeine Aussehen des Schelfeises bestimmend ist stets die Verwitterung, die bei Bergen wie bei Schollen vor allem zwei Typen schafft, die ich als Blaueis und als Mürbeis unterscheiden will. Blaueis liegt von der Küste an bis zu 50 bis 60 km Entfernung, Mürbeis liegt nördlich von ihm, also weiter draußen, soweit das Schelfeis reicht. Beide gehen aus frischem Eis, also aus neugebildeten Bergen oder neugefrorenen Schollen hervor. Beide unterscheiden sich von diesen durch rundere Formen, die sie beim Liegen an Ort und Stelle erhalten. Beide gehen durch einen Mischtypus, den ich Blau-

Mürbeis nennen will, ineinander über, der dort liegt, wo Blau eis in Küstenabstände gelangt, in denen Mürbeis entsteht (s. Karte). Den umgekehrten Fall, den man Mürb-Blau eis nennen müßte, wenn Mürbeis zu Blau eis wird, habe ich nicht gesehen, wohl weil das fernere Mürbeis nur ausnahmsweise wieder in die Küstennähe zurückgelangt, wo Blau eis entsteht. Auch würde es schwer sein, zu unterscheiden, wo Blau eis aus Mürbeis und wo es aus frischem Eis entstanden ist, während umgekehrt Mürbeis, das aus Blau eis hervorging, von dem aus frischem Eis entstandenen Blau eis zu unterscheiden ist. Das liegt daran, daß Blau eisbildung die früheren Formen verwischt, während Mürbeisbildung sie erhält und steigert.

Da sich neues Schelfeis wesentlich an den Rändern angliedert, sei es, daß dort junges Scholleneis anfriert, oder Berge antreiben, findet man an den Rändern frischere, weniger abgerundete Formen, als im Innern der Schelfeisgebiete. Dieses gilt auch vom Südrand, der unmittelbar vor der Inlandeismauer liegt, da sich hier durch das Strömen und Kalben des Inlandeis die neuen Berge bilden. Sie begleiten als eine frische, eckige Bergreihe die Küste (s. Karte) und werden, wenn wieder neue entstehen und nachdrängen, nordwärts geschoben, allmählich immer weiter, soweit Schelfeis liegt. Die nördlichsten Berge sind deshalb die ältesten und durch Verwitterung am meisten umgeformten. Das gleiche gilt von den Schollen, die mit ihnen nordwärts wanderten. Vor der Küste liegen die jüngsten und daher frischesten Bestandteile des Schelfeises.

Diese Regel erhält dadurch Ausnahmen, daß das Schelfeis im Norden weniger kompakt ist als im Süden, nämlich durch Waken, Spalten und Rinnen zerteilt, auf denen junges Scholleneis entstehen oder Eisberge von außen her einwandern können (s. Karte). Deshalb findet man im Norden neben sehr alten auch jüngere Formen, bei den Schollen auch ganz junge, da sie auf den Waken erst gefrieren, bei Bergen nicht ganz so frische, wie vor der Inlandeismauer, weil die von außen einwandernden Berge bereits mehr oder weniger lang umhergetrieben und dabei verändert sind. Um diese Neubildungen des Schelfeises herum

liegen seine alten Bestandteile. Diese Mischung findet fast in der ganzen Breite der nördlichen Schelfeiszone statt, in der die Mürbeisform herrscht. Altes, von Süden vorgeschobenes Eis liegt dort neben frisch zugewandertem oder neu gebildetem. Beides wird an Ort und Stelle zu Mürbeis gestaltet. Ersteres war Blau eis, als es näher an der Küste lag, letzteres kann frisch und eckig, kann aber auch alt und rund gewesen sein, je nachdem es vor der Einwanderung erst vor kurzem neu gebildet war, oder schon anderswo lange gelegen hatte. Im Mürbeisgebiet sind also besonders verschiedene Alters- und Verwitterungsstufen vertreten.

Durchweg altes Eis findet man in einer mittleren Zone, die ausschließlich durch langsamen Nachschub von Süden her Ersatz erhält und nicht auch durch Zuwanderung von außen auf Waken und Rinnen, weil diese dort nicht mehr hineinreichen. Diese Zone liegt nördlich vom Gaußberg etwa 60 km von der Küste entfernt. Sie enthält Blau eis und dazu Blau-Mürbeis (s. Karte), da ersteres hier in Gebiete hinaus schiebt, in denen schon Mürbeisbedingungen herrschen. Reines Mürbeis findet sich hier nicht, da frische Massen nicht dazukommen. Von hier an verjüngt sich das Eis nach Süden bis zur Inlandeis mauer allgemein und nach Norden durch Mischung mit den von außen zuwandernden Bergen.

Die Verschiedenheit der Formen von Blau eis und Mürbeis beruht auf der verschiedenen Art der Verwitterung. Ich glaube, daß ersteres wesentlich durch Verdunstung im Wind, letzteres durch Lockerung des Gefüges unter dessen Einfluß entsteht. Bei beiden wirkt die Korrasion des Treibsnees in den vielen Stürmen mit, um die Ecken und Kanten zu runden.

Daß in der Küstennähe Glättung durch Verdunstung und weiter draußen im Norden Lockerung und Zersetzung vorherrscht, dürfte teilweise daran liegen, daß die Winde im Süden relativ trockener sind als im Norden. Nach den meteorologischen Messungen gilt dies freilich deutlich merkbar nur für die unmittelbare Küstennähe, während schon in geringem Abstand, wo immer noch Glättung durch Verdunstung

vorherrscht, die relative Feuchtigkeit unwesentlich kleiner ist als weiter draußen, wo das Eis nicht mehr geglättet, sondern gelockert wird. Immerhin nimmt die relative Feuchtigkeit des Windes etwas nach der Küste hin ab, und das dürfte nicht ohne Einfluß sein.

Dazu kommt, daß die Winde im Süden stärker sind, oder richtiger gesagt, lokal stärker wirken, als im Norden. Da bei tiefen Temperaturen der Betrag der Verdunstung wesentlich von der Windstärke abhängt, wie W. Meinardus¹⁾ in Anlehnung an W. Trabert entwickelt, spielt die Windstärke bei der verschiedenen Gestaltung des Eises sicher eine bedeutsame Rolle. Ob sie nach Süden hin im Mittel zunimmt, kann ich freilich nicht sagen. In der unmittelbaren Küstennähe, wo die stärkste Verdunstung und Glättung erfolgt, ist sie sicher besonders groß, da hier Fallwinde auftreten. Ich möchte aber annehmen, daß auch bei gleicher mittlerer Windstärke im Norden und Süden die Windwirkungen auf das Eis doch allgemein nach Süden hin wachsen, da hier die Eisberge dichter liegen als im Norden und so durch ihre Lage und Form die Windstärken konzentrieren. Dadurch werden diese lokal gesteigert und damit auch die Verdunstungsgrößen, selbst wenn die mittlere Windstärke nicht größer ist. Diese Annahme wird dadurch gestützt, daß noch weit draußen im Norden, z. B. am Winterlager des „Gauß“, Glättungen auftraten, wo die Windkraft deutlich konzentriert war, während ringsherum Zersetzung erfolgte. Vor allem waren die Glättungen auf dem Scholleneis der Zone zwischen Mittel- und Nordfeld (s. Karte) sehr stark, wo die Winde zwischen zahlreichen Eisbergen hindurchfegten. Auch würde bei dieser Konzentration der Windkraft die Korrasion des Treibschnees lokal verstärkt werden müssen und die Glättung dadurch ebenfalls gesteigert werden.

¹⁾ Deutsche Südpolar-Expedition, Band III, Heft 2. Georg Reimer, Berlin 1910.

4. Blaueis und Mürbeis.

Blaueisberge sind allseitig sanft abfallende, flache, runde Kuppen, auf die man bisweilen hinaufgelangt, ohne es zu merken. Häufig ist eine Seite dieser Hügel steil geblieben, hat dann aber auch nicht mehr die frische Form von Inlandeismauern, sondern gerundete Ecken und Kanten. Ich sah solche Steilwände in jeder Exposition, ohne Bevorzugung bestimmter Richtungen. Die Oberflächen sind völlig poliert und geglättet, so daß kein Schnee darauf liegen bleibt. Auch die Ränder eingetiefter Luftporen sind abgeschliffen. Kuppen und Abhänge sind oft von Tälern durchzogen, doch niemals von steilwandigen. Jeder Hang und jede Neigung, groß und klein, ist gemildert und gerundet.

An den Kuppen und Steilwänden der Blaueisberge sieht man horizontale Schichtung, wie an den frischen, tafelförmigen Eisbergen vor der Inlandeismauer und an dieser selbst. Daraus folgt, daß die Blaueisberge noch in der gleichen aufrechten Stellung liegen wie die Tafeln. Sie gehen durch viele Übergänge aus ihnen hervor. Es sind umgeformte, aber nicht umgelagerte Tafeln. Auch Spalten kommen in den Blaueisbergen vor, doch mit abgerundeten Ecken und Kanten. Häufiger sieht man Spaltbänder, also geschlossene Spalten, in wechselvollen Formen und Richtungen. Die Blaueisberge erscheinen deshalb als die Kerne früherer Tafelberge. Die äußeren, oberen Teile der letzteren, wo die Spalten klafften, sind fortgeschliffen, und nur die inneren, wo jene nicht mehr offen hineinreichten, sondern schon zu Bändern zusammengedrückt oder ausgefüllt waren, sind übrig geblieben.

Hierauf beruht auch die blaue Farbe dieses Eises; es ist dichter und luftärmer als frisches Oberflächeneis, wie jedes Eis aus tieferen Inlandeislagen. Dazu kommt freilich, daß die Oberfläche im Sommer anschmilzt. Das Schmelzwasser füllt die Luftporen und gefriert darin. Das Eis wird dadurch luftärmer und dichter, also blauer. Der Wind dürfte zur Verdichtung auch dadurch beitragen, daß er im Sommer vom

offenen Wasser im Osten feuchten Schnee und Wasserteilchen mitbringt, die anfrieren und die Oberfläche ausglätten. Die Hauptsache bleibt aber doch wohl die Fortnahme des lockeren Oberflächenmaterials, da diesem Blau eis alle Ecken und Kanten, also die äußeren Teile frischer Berge fehlen, und es aus ihren freigelegten, dadurch entlasteten und emporgetauchten Kernen besteht. Die Berge drängen langsam nordwärts und werden dabei gerundet. Unmittelbar vor der Küste liegen die frisch gebildeten, noch unbearbeiteten Tafelberge, doch in 4 bis 5 km Abstand ist die runde Form schon erreicht (s. Karte).

Die Blau eisbildung findet auch beim Scholleneis statt. Schollenwälle in der Nähe des Gaußberges, die bei neuen Eisbergbildungen frisch zusammengeschoben wurden, waren rau und kantig, wie die neuen Eisberge selbst. Doch schon in 5 bis 10 km Entfernung von der Küste lag ganz glattes Scholleneis mit gerundeten Ecken und Kanten und mit ausgefüllten oder abgeschliffenen Luftporen, wie sie das Bergblau eis hat. Im Abstand von 30 bis 40 km lag viel welliges Scholleneis, das aus zusammengeschobenen und dann geglätteten, blauen Schollen bestand. Es lag zwischen zahlreichen Bergen, zwischen denen der Wind mit besonderer Kraft fegte und glättete. Die Berge selbst waren hier auch Blau eis, wo der Ostwind sie traf, während sie an den Leeseiten von Schneewehen verhüllt waren. Das Schollenblau eis reichte nach Norden ebenso weit hinauf, wie das Bergblau eis, trat nur weniger hervor, da auf den Schollenfeldern mehr Schnee liegen bleibt als auf und an den blauen Bergen.

Die Formen des Mürbeises in der nördlichen Zone des Schelfeises zeigen größeren Wechsel als die des Blau eises, weil es aus zerfallenden Bergen und Schollen jeglicher Lage und Form und jeglichen Alters besteht. Während beim Blau eis alle Unebenheiten gemildert und abgeschliffen sind, werden sie beim Mürbeis durch Verwitterung verstärkt. Spalten werden erweitert, Täler vertieft. Luftporen durch Zerfall der trennenden Wände zu Löchern verbunden. Das Mürbeis hat nicht sauftwellige, sondern steilere Formen. Die Ecken und Kanten sind

stumpfer als bei frischen Bergen und Schollen, doch nicht so völlig abgerundet, wie beim Blaueis. Die Oberflächen sind nicht glatt, sondern rauh, luftreich und porös, so daß sie Schneeansätze halten. Diese vereisen und schaffen neue Unebenheiten. Schmelzwasser rinnt an den Steilhängen hinab, gefriert und überkrustet sie. Im Frühjahr sind die Kanten mit Eiszapfen behangen: im Herbst sind diese und die Schmelzwasserkrusten zu Leisten und Säulen zerschnitten. Man merkt einerseits überall den oberflächlichen Zerfall und andererseits auch Neubildungen durch Gefrieren von Schmelzwasser.

Aus diesem Grunde, und wegen seiner Entstehung aus allen Eisarten, hat das Mürbeis keine einheitliche Form, wie das Blaueis. Es geht als Blau-Mürbeis aus Blaueis hervor und sieht dann von ferne noch wie letzteres aus, zeigt in der Nähe aber erweiterte Spalten und Löcher und Grotten. Weiter nördlich entsteht es aus Tafelbergen, die auf Bänken aufgetrieben sind und dann häufig Brandungskehlen oder sonstige Meereswirkungen zeigen, in schräger Lage über dem Wasserspiegel, wenn der Grund geneigt ist und sie ihm entsprechend geneigt aufsitzen. Vielfach sind diese Tafelberge von Eisblockhängen begleitet, wenn von ihren Wänden Blöcke herniederbrechen, die miteinander und mit dem Berge verkittet wurden. Bisweilen sind Berge auf Bänken ineinander geschoben. Häufig sieht man angefrorene Schollen oder angesetzte und vereiste Schneewehen um sie herum. Daneben kommen im Mürbeis auch viele nur aus Eisblöcken oder Schneewehen bestehende Hügel vor, die von ihrem Herkunftsberg abgelöst sind. Auch verwitterte Blaueisberge, die von anderswo herantrieben, sieht man im Mürbeis. Allen diesen Formen gemeinsam ist der Zerfall.

Das gleiche gilt von den Mürbeisschollen. Glatte Eisflächen sind bei diesen selten, rauhe, zersetzte, von Schneewehen überzogene die Regel. Die Kanten aufgerichteter Schollen sind nicht gerundet, sondern unregelmäßig ausgezackt und abgestumpft. Nur junge Glatteisansätze bilden hier schärfere Kanten. Glatte Eiswellen, wie im Schollenblaueis, kommen nicht vor. Aufgerichtete Schollenwälle sind locker und zerfallen

in Stücke. Schneewehen überziehen die Flächen und sind zu Zeiten oberflächlich vereist und gehärtet. Kurz, Mürbeis ist zerfallendes und daher in allen Formen und Eigenschaften differenziertes Eis. Es bildet die Nordregion des Schelfeises, wo nicht mehr die starke Verdunstung herrscht wie in der Küstennähe, in der das Blaueis entsteht.

5. Lage und Grenzen des Schelfeises.

Das Schelfeis der Posadowsky-Bai, das ich nun noch in Einzelheiten betrachten will, reicht vom Inlandeisrand etwa 100 km weit nach Norden herauf, bis dahin, wo der Kontinental-schelf sich steiler zur Tiefsee zu senken beginnt, und hat vor der Küste eine ostwestliche Breite von 60—80 km. Vom Gipfel des Gaußbergs (371 m), sowie vom Fesselballon aus, 500 m über dem Winterlager des Gauß, hatte ich einen guten Überblick über diesen Komplex (s. Karte).

Die Aussengrenze im Osten hatte einen zackigen Verlauf. Zwischen 5 und 15 km Abstand südlich vom Winterlager des Gauß, wo sie genauer verfolgt ist, waren Keile jungen Packeises hineingedrungen und auch einzelne Berge. Hier ist die Grenze sicher von Jahr zu Jahr wechselnd, da die jungen Keile im Laufe des Winters durch Schneewehen und durch Frost so völlig mit dem älteren Schelfeis verwachsen, daß sie ihm einverleibt bleiben. Dagegen brechen an anderen Stellen größere oder kleinere Komplexe aus dem Rande aus und treiben davon. Wir sahen am 21. Februar 1902, als wir an dieser Grenzzone entlang fuhren, daß sie aus dicht aneinander geschobenen, doch lose nebeneinander schwankenden Schollen bestand, die dann fest werden oder auch noch ganz oder teilweise abtreiben können, je nach Wetter und Wind. So wird die Außengrenze nur eine gewisse Mittellage haben. Eine Mischung von jungen und alten Berg- und Schollenformen wird sie charakterisieren, doch weit hinein reichen diese Schwankungen nicht.

Die Nordgrenze des Schelfeises lag im Osten 3 bis 4 km

südlich vom Winterlager des „Gauß“. also etwa 70 km von der Küste entfernt. Nördlich hiervon folgte das „Gaußfeld“, das nicht mehr zum Schelfeis gehörte, da es sich am 21. Februar 1902 um das Schiff zusammengeschlossen hatte und ein Jahr später, am 8. Februar 1903, wieder löste, also nur einjährig war. Westlich von diesem lag wieder Schelfeis, und reichte dort bis etwa 100 km Abstand von der Küste nach Norden hinauf.

Es endete im Norden zunächst in einer ausgezackten, von vielen Eisbergen, die auf Bänken festlagen, besetzten Grenze, und dann im Westabschnitt mit den gebuchteten Eismauern des Volleises, die zu schildern sein werden. Wie neben der Ostgrenze war auch im Norden mit Ausnahme der Zeit von Mitte Mai bis Mitte August den ganzen Winter hindurch ein mit treibenden Schollen und Bergen erfülltes, von offenen Waken durchzogenes Meer. Das Gaußfeld blieb dagegen fast ein volles Jahr fest, weil es in der Bucht in der Nordostecke des Schelfeises geschützt lag und durch die herrschenden Ostwinde gegen das letztere gedrückt wurde.

Die Südgrenze des Schelfeises bilden Inlandeismauern, die östlich vom Gaußberg zunächst 5—6 km ein wenig nördlich von Ost ziehen (s. Karte). Davor lagen im Schelfeis große Tafeln, die teilweise noch nicht ganz vom Inlandeis abgetrennt waren. Dann folgt östlich eine Einbuchtung der Mauer nach Süden, die Ostbucht, mit einem dichten Gewirre unregelmäßig verteilter, tafelförmiger Berge die wohl von einem stark zerklüfteten Streifen des Inlandeises herkamen, der in der Bucht mündete. Östlich von dieser Bucht biegt die Mauer ein wenig nach Norden um und verschwindet für den Blick vom Gaußberg, langsam ansteigend, in Ostnordost. Aus den frischen Formen der Eisberge in der Ostbucht sowie derer, die nördlich von ihr getroffen wurden, schließe ich, daß das Eis dort nicht mehr den ganzen Sommer hindurch festliegt. Sonst müßte es verwitterte Eisbergformen enthalten, die auf lange Lage an Ort und Stelle deuten, nicht aber so viele frische, die erst vor kurzem hinzu gewandert sein können. Sonach dürfte das Schelfeis etwa 20 km östlich vom Gaußberg endigen. Weiter östlich liegt im

Sommer offenes Meer, wie wir es im Februar 1902 auch bis zur Inlandeismauer getroffen haben, und im Winter junges Eis.

Westlich vom Gaußberg liegt das Schelfeis breiter und fester. Die Inlandeismauer tritt dort zunächst auf einer Strecke von $2\frac{1}{2}$ km etwa einen halben Kilometer nach Norden über die Breite des Berges hinaus. Vor ihr liegen im Schelfeis frische, tafelförmige Berge, von gleicher Höhe wie die Inlandeismauer, und meist aufrecht, also in derselben Stellung, die sie im Zusammenhang mit dem Inlandeis hatten. Dann biegt die Mauer rechtwinklig etwa einen halben Kilometer nach Süden zurück, auch hierbei von frischen Eisbergtafeln begleitet. Der Zwischenraum zwischen diesen und der Mauer ist hier breiter als vorher, solange die Mauer ostwestlich strich, doch meist von niedergestürzten Blöcken und von Schneewehen erfüllt, die im Schutz der nordsüdlich streichenden Mauerstrecke durch den Ostwind abgesetzt sind. Man könnte auf diesen Wehen und Eisbrüchen die Inlandeismauer, wenn auch mit Mühe, ersteigen.

Nun biegt die Mauer wieder rechtwinklig nach Westen um und zieht einige Kilometer etwas nördlich von West. Auf dieser Strecke durchschneidet sie zunächst das Brucheis, das in der ersten Kaskade westlich vom Gaußberg entsteht, und unterhalb derselben wieder vollkommen zusammengeschweißt wird, dann aber zerklüftete Eisstreifen, die von einer zweiten und dritten Kaskade bis zum Meere herabziehen. Davor lagen viele frische, eckige Berge, unter denen auch jener war, der sich zwischen Mai und September 1902 losgelöst und dabei um 45° gedreht hatte, so daß er nun eine Kante nach oben kehrte und damit das Inlandeis überragte.

Jenseits dieser Gebiete, also in 6—7 km Entfernung vom Gaußberg, folgt nach scharfer südlicher Umbiegung der Eismauer eine tiefere Bucht, die Westbucht, deren Südrand gerade westlich vom Gipfel des Gaußberges lag. Sie war mit vielen eckigen Bergen erfüllt und auch im Westen von Inlandeis begrenzt, das dort wieder nordwärts vortritt, und zwar mit ruhiger, spaltenfreier Oberfläche, soweit man das vom Gauß-

berg aus sehen konnte. Dieser vortretende Teil endigte im Norden an einer Linie, die westnordwestlich vom Gipfel des Gaußberges lag und wohl sicher auch eine Steilmauer war. Vor ihr lagen gewaltige Tafeln dicht gedrängt, so daß sie wie zusammenhängendes Inlandeis aussahen. Sie waren aber durch die Bruchlinie deutlich von diesem getrennt und bildeten das Volleis. Dieses Gebiet beginnt etwa 20 km westlich vom Gaußberg.

Wie breit diese nördlich vortretende Zunge des Inlandeises und die dichte Eisbergscharung davor ist, kann ich nicht sagen. Vom Gipfel des Gaußberges sah ich ihre Nordgrenze wieder südwärts umbiegen, fast bis zur Breite des Berges, und dann eine Strecke westlich verlaufen. Weiterhin schien sie noch mehr südwärts abzubiegen. Dort lagen vor ihr eckige Berge in größeren Abständen von einander, die von einem zerklüfteten Streifen des Inlandeises herzukommen schienen, der westlich von der Zunge mündet. Ich hatte den Eindruck, daß diese Berge von nicht gestautem, also jüngerem Meereis umgeben waren. Wir hätten es dann dort nicht mehr mit Schelfeis zu tun, sondern mit dem ebenen Wintereis einer Bucht, die nach Nordwesten oder gar nach Westen hin geöffnet ist. Das Schelfeis würde hier nach 60—80 km westlich vom Gaußberg mit der Tafelscharung des Volleises nördlich von der vorspringenden Zunge des Inlandeises endigen. Denn nur bis zu dieser einschließlich lagen die Massen vor der Inlandeismauer westlich vom Gaußberg sicher fest und von altem gestauten Meereis umbaut.

6. Bewegungen in der Südzone des Schelfeises.

In der südlichsten Zone des Schelfeises haben wir nach obigem eine Reihe frischer tafelförmiger Berge, die teilweise sogar noch mit dem Inlandeise zusammenhängen. Die Breite derselben wechselt etwas und ist vor der Westbucht am größten. Erst nördlich von dieser Reihe folgt überall älteres Schelfeis.

Nördlich vom Gaußberg ist in dieser Reihe eine Lücke, in der ein Scholleneisfeld liegt, das nur wenige Berge umschließt. Es ist sicher alt, doch werden darin infolge neuer Eisbergbildungen westlich und östlich vom Gaußberg und in-

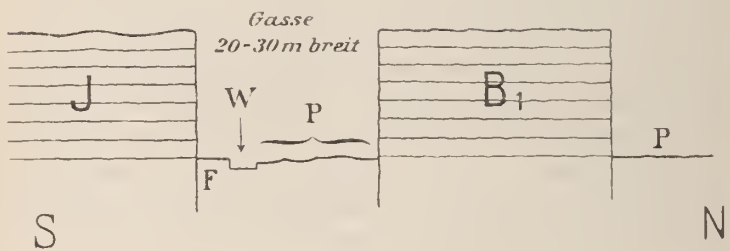
folge von Bewegungen der Eisberge neue Spalten geschlagen, so daß es nicht zur Ruhe kommt. In den Spalten hat es junges Scholleneis und an deren Rändern ebenso frische Formen, wie die Eisbergreihe, die es unterbricht.

In ihm zählte ich zwischen der Meeresbasis und der Nordwestecke des Gaußbergs 6—7 Wälle aufgetürmter Schollen, die nach Westen konvexe Bögen bildeten und an ihrer Außenseite von Spalten begleitet wurden. Die Wälle entstehen, wenn die Eisberge, in Ostwinden westwärts drängend, das Feld zusammenschieben, und die Spalten, wenn nach Aufhören der Winde eine Rückbewegung eintritt, denn dann müssen neben den Wällen Öffnungen bleiben, weil die vorher dort befindlichen Schollen zusammengeschoben wurden. Auf diesen Öffnungen entstand wieder schnell junges Eis, das bei neuen Schiebungen dem vordringenden Walle angegliedert oder von ihm überschritten wurde. Am Nordufer des Gaußberges lag der Südflügel eines solchen Walles. Augenscheinlich verbreiteten sich die Schiebungen radial von den Eisbergen, die östlich des Gaußberges lagen, her und waren deshalb vor diesem selbst nordsüdlichgerichtet. Dieser Schollenwall rückte auf den Gezeiteneisfuß des Gaußberges hinauf und trug Steine, Sand und Staub vom Boden des Meeres mit empor.

Außer solchen lokalen Schiebungen, die von Eisbergen ausgehen, bewegt sich die südlichste Schelfeiszone allgemein nach Norden hin. Dabei waren bis etwa 5 km Abstand vom Berge ostwestlich streichende Spalten entstanden, deren ich im Frühjahr, am 25. September 1902, zehn gezählt habe. Sie waren im letzten Herbst (Mai 1902) noch weniger zahlreich und auch schmaler gewesen, und beim Hinweg zum Berg im September waren sie weniger zahlreich und schmaler als beim Rückweg im Oktober. Das Eis zog sich also im Frühjahr nach Norden auseinander. Die Spalten waren damals stellenweise mehrere Meter breit und nur auf Schollen zu passieren, die darin schwammen, während sie im Herbst vorher auf Schneebrücken gut überschritten werden konnten.

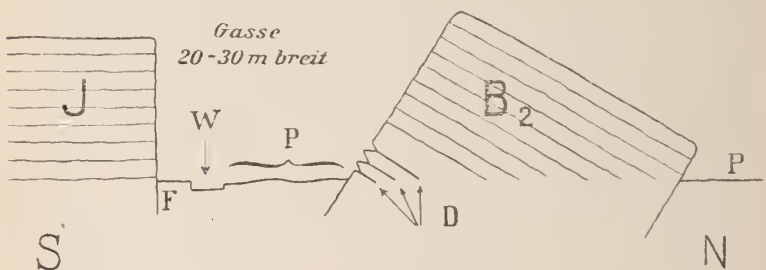
Ein nördliches Auseinanderziehen des Schelfeises sah man

vor allem in der Gasse, die es von der Inlandeismauer trennt (Fig. 1 und 2). I ist das Inlandeis, B_1 ein Eisberg im Schelfeis davor, beide mit senkrechten Wänden, deren Schichten sich völlig entsprechen. B_2 ist ein anderer Berg, der nordwärts niedergesunken und so mit seinem Südrand etwas emporgetaucht ist. Seine Schichtung ist nun geneigt. D sind braun gefärbte Lagen, die vorher etwas unter dem Meeresspiegel gelegen hatten und dabei von Diatomeen durchdrungen waren. Sie sind luftreicher und lockerer als die klaren Lagen dazwischen und so wohl deshalb, wie wegen ihrer dunkleren Färbung mehr verwittert und eingetieft als diese, so daß der Vertikalschnitt wie eine Säge aussieht. F ist der Gezeiteneisfuß, W ein teils ganz



Figur 1

Die Grenzzone zwischen Inlandeismauer und Schelfeis.



Figur 2

Die Grenzzone zwischen Inlandeismauer und Schelfeis.

offener teils mit dünnem Jungeis bedeckter Wasserstreifen: P ist Packeis, d. h. dicke, aufgerichtete und überschobene Schollen. Die Breite dieser Gasse betrug 20—30 m, ihre Tiefe zwischen den Mauern desgleichen. Im Frühjahr war sie etwas breiter als fünf Monate vorher im Herbst. Die Eisberge waren im Laufe des Winters also etwas weiter nordwärts gerückt. In dieser Zeit waren dort westlich vom Gaußberg auch zwei oder drei neue Eisberge entstanden.

Das Auseinanderziehen des Schelfeises sah man in der Gasse im Frühjahr an einer Anzahl neuer Risse, die teils um die Berge herum, teils parallel zum Inlandeisrand, teils quer durch die Gasse hindurchzogen. Sie durchschnitten die Schneewehen, die seit dem Herbst entstanden waren, hatten aber meist nur geringe Breite. Ebbe und Flut erweiterte sie, da die teils aus Schollen, teils aus Bergen, teils aus Packungen oder Schneewehen bestehenden Massen zwischen ihnen nicht gleichmäßig auf und nieder pendelten.

Neben dem Gezeiteneisfuß F der Inlandeismauer lag im Frühjahr eine etwa 6 m breite Spalte W, deren Jungeis zonal gebaut war und dadurch auch das Nordwärtsziehen des Schelfeises erkennen ließ. Die erste Zone dicht am Eisfuß war klares Jungeis mit niedrigen, weißen Wülsten, die parallel zum Rande des Eisfußes liefen und aus Jungeissplintern bestanden. Die mittlere Zone war durch Schnee getrübt und oben rauh, und die äußerste durchweg mit Schnee bedeckt. Augenscheinlich entfernte sich hier das schwimmende Schelfeis vom Inlandeise und nahm dabei das an ihm festsitzende Jungeis mit. So entstand zwischen diesem und dem Gezeiteneisfuß immer wieder ein offener Streifen, der sich dann mit Jungeis bedeckte, das damals im Oktober 4—10 cm Stärke pro Nacht erreichte. Es setzte sich an das nächst ältere Jungeis an und entfernte sich bald mit diesem vom Eisfuß, so daß von neuem ein offener Streifen entstand, und so fort. Dabei wurde der Rand des Jungeises von Wasser überrieselt und überfrozen, wodurch die parallelen Wülste entstanden, und so bildete sich Streifen neben Streifen, der jüngere von dem älteren durch

einen solchen Wulst getrennt. Der südlichste Streifen, dicht neben dem Eisfuß, war immer der jüngste, da die Spalte hier durch das Auf- und Niederpendeln des schwimmenden Eises neben dem festen offen gehalten wurde und sich von hier an aufzog. Die äußeren Streifen waren bereits älter und daher schneereicher. Alle zusammen bekundeten die Erweiterung der Gasse, also das Nordwärtsziehen des Schelfeises.

Stellenweise gingen auch Querrisse vom Eisfuß aus durch alle diese Zonen hindurch und letztere sah man an diesen Rissen mehrfach verworfen. Das kann daher rühren, daß die Inlandeismauer ungleichmäßig vorrückt und der schnellere Teil den ihm vorgelagerten Teil des Jungeisstreifens mehr vorschiebt, als der langsamere daneben den seinen; es kann aber auch von den Winden herrühren, die in der Gasse entlang fegen und, an vorspringenden Ecken der Inlandeismauer nördlich abgelenkt, das Schelfeis und das daran festsitzende dünne Jungeis partieweise nordwärts vorschieben. Die Risse liefen rechtweisend etwa von Südost nach Nordwest.

Ich möchte annehmen, daß die Winde bei diesen Bewegungen des Schelfeises die Hauptrolle spielen. Denn das Nachströmen des Inlandeises und neue Eisbergbildungen würden die Gasse verengen und nicht so erweitern, wie es zu beobachten ist. Die herrschenden Ostwinde aber drücken das Eis nach Westen und, an Vorsprüngen nordwärts abgelenkt, nach Norden. Auch sind im Westen Widerlager vorhanden, welche die Bewegung des Eises nach Norden ablenken. Das Nordwärtsziehen des Schelfeises läßt sich also durch die Winde erklären. Die Eisbergbildungen kommen hierbei mehr dadurch in Betracht, daß sie Spalten schlagen und damit neue Wege und Möglichkeiten, an denen Verschiebungen stattfinden können, eröffnen. Auch liefern sie, im Verein mit dem Scholleneis, das sich auf den neuen Spalten bildet, den Ersatz für die nordwärts rückenden Massen.

7. Mit Inlandeis verschmolzenes Schelfeis.

Es gilt nun auch Gebiete, wo das Schelfeis am Inlandeis festsetzt, z. B. unmittelbar östlich vom Gaußberg, wo neugebildete Tafeln des Schelfeises durch Schnee- oder Eisbrücken noch mit dem Inlandeis zusammenhängen. Ihre völlige Abtrennung ist indessen nur eine Frage der Zeit, zumal sie bei Ostwinden schon jenen Bewegungen unterliegen, welche die bogenförmigen Schollenwälle auf dem Felde nördlich vom Gaußberg bilden. Diese Tafeln sind also nur infolge der Tiefenverhältnisse des Meeres oder der Bewegungsvorgänge des Inlandeises oder wegen der Schneeverteilung noch nicht völlig abgetrennt, sonst aber von den Schelfeisbergen anderer Gebiete nach Lage und Verhalten nicht wesentlich unterschieden.

Die dichte Tafelscharung, das Volleis, vor der letzten Zunge des Inlandeises im Westen wird noch besprochen werden. Sie ist das inlandeisähnlichste Schelfeisgebiet, das ich gesehen habe, schien aber an der p. 16 erwähnten Bruchzone völlig abgelöst zu sein. Ich vermute, daß sie durch Untiefen gestützt und gehalten wird. Deshalb ist sie besonders dicht und wohl sehr wenig bewegt. Sie ist dadurch selbst zu einem jener Stützpunkte geworden, die das übrige Schelfeis halten, und fungiert als jenes Widerlager, welches die Bewegungen der östlicheren Schelfeismassen nach Norden ablenkt. Nach Lage, Verhalten und Form muß man sie selbst auch zum Schelfeis rechnen.

Eine völlige Verschmelzung von Schelfeis und Inlandeis liegt nordwestlich vom Gaußberg, soweit das Meer auf dessen Abhängen flach ist. An der dort vorspringenden Ecke der Inlandeismauer, die radial zerklüftet und aufgelöst ist, sieht man weder den Gezeiteneisfuß, noch die Zone von Jungeis davor. Schneewehen zogen aus den Spalten des Inlandeises auf das Meereis hinab. Sie waren von frischen Rissen durchschnitten, doch zeigte keiner derselben die Merkmale der Grenze zwischen Inlandeis und Meereis. Das Meer war flach und da sein Eis mit Schnee belastet war und bis zum Boden reichte, konnte es auch bei Hochwasser nicht mehr aufsteigen und

schwimmen. So blieb es mit dem Inlandeis völlig verbunden.

In einer breiten Spalte, die bis zum Boden reichte, sah ich, daß es unten aus Meereis mit Staubschichtung und darüber aus Schneeeis bestand; der Boden selbst war mit Moränenblöcken und gelblichem Staub bedeckt. Hier hatte also ehemals Inlandeis gelegen und diese Moränenblöcke, sowie die, welche noch etwas weiter draußen lagen und dort sogar über den Meeresspiegel emporragten, abgesetzt. Dann hatte sich das Inlandeis zurückgezogen; das Meer war vorgedrungen und mit Meereis bedeckt, das durch Frost und Belastung mit Schnee bis zum Boden gewachsen war. Es lag diesem nun auf, wie Inlandeis, und war auch äußerlich nicht von ihm getrennt. Es drang in die Inlandeisspalten hinein und aus diesen zogen sich Schneewehen auf seine Oberfläche hinab. Stellenweise war das Meereis auch zusammengeschoben, so daß seine untersten, von Staub erfüllten Lagen nun nach oben gekehrt, und der Inlandeismauer gleichsam angegliedert waren. Kurz, das Schelfeis war hier völlig mit dem Inlandeis verwachsen. Erst weiter draußen lag die Grenzspalte, von der an die Schollen sich mit den Gezeiten hoben und senkten und nordwärts auseinander zogen. Die Verschmelzung war nur durch die geringe Tiefe ermöglicht. Wo diese größer wurde, begann sogleich wieder Trennung.

8. Gliederung des Schelfeises nördlich von der Küstenzone.

Von der jungen Zone, welche die Küste begleitet, entwickelt sich das Schelfeis bis zu etwa 100 km Abstand nach Norden. Dabei wird die Zahl der Berge immer geringer und die der Schollenfelder relativ größer. Die Formen beider werden älter und runder, die Spalten und damit auch die inneren Verschiebungen seltener, das Ganze kompakter. Auf die frischen eckigen Formen vor der Küste folgt nach Norden das Blau eis und dann das Mürbeis.

Im einzelnen zeigen sich dabei Unterschiede von Osten nach Westen, die ich in drei auf der Küste senkrechte, also südnördlich gestreckte Streifen gruppieren möchte. Ich will diese von Osten nach Westen als den Schollen-, den Berg- und

den Volleis-Streifen unterscheiden. Der erste reicht von der Ostgrenze des Schelfeises, also vom Meridian der Ostbucht, bis zum Meridian des Gaußberges, der mittlere von hier bis zu der Zunge des Inlandeises etwa 20 km westlich vom Gaußberg, und der westliche oder der Volleis-Streifen liegt nördlich von dieser Zunge.

9. Der Ost- oder Scholleneis-Streifen.

Der erste Streifen besteht, wie sein Name besagt, überwiegend aus Scholleneisfeldern, in und zwischen denen Berge liegen, teils vereinzelt, teils in Reihen geordnet; es sind im wesentlichen drei Felder, das Süd-, das Mittel- und das Nord-Feld. Das Südfeld beginnt etwa 5 km nördlich von der Küste, nördlich von den Bergen, die diese blockieren und die in 5 km Abstand schon Blaueis sind; es erstreckt sich etwa 30 km lang nach Norden und ist im Durchschnitt etwa 10 km breit. Seine Nordgrenze bildet eine ostwestlich liegende, also den Oststreifen durchquerende Reihe von Bergen, die fast durchweg Blaueis sind. Nördlich von dieser ersten Querreihe liegt das Mittelfeld, etwa 20 km lang und 10 km breit und im Norden wiederum von einer ostwestlichen Bergreihe begrenzt, die schon aus Mürbeis besteht, der zweiten Querreihe, und nördlich von dieser liegt das Nordfeld, etwa 10 km lang und breit. Es bildet den nördlichsten Teil des Oststreifens des Schelfeises und hat im Norden keine Begrenzung durch Berge.

Süd- und Mittel-Feld grenzen im Westen an dichte Blau-eismassen, die zu dem Mittel- oder Berg-Streifen des Schelfeises gehören, während das Nordfeld im Westen an eine Reihe von Blaumürbeis- und Mürbeis-Bergen stößt. Alle drei haben also im Westen alte, lange festliegende, und je nach ihrem Küstenabstand in Blaueis oder Mürbeis verwandelte Berge.

Im Osten sind alle drei Felder von einer fortlaufenden Bergreihe begleitet, die am Südfeld dicht ist, am Mittelfeld lichter und noch lichter am Nordfeld. Sie besteht durchweg aus gemischten Formen, nämlich am Südfeld aus frischen Tafeln und Blaueisbergen, am Mittel- und Nordfeld aus frischen Tafeln

und Mürbeisbergen. Diese Reihe hat also nicht Berge von durchweg gleichem Alter, sondern ist überall auch durch frische Einwanderung ergänzt. Die eingewanderten Tafeln werden dann mit der Zeit an Ort und Stelle neben dem Südfeld zu Blaueis, neben dem Mittel- und Nord-Feld zu Mürbeis. Wahrscheinlich erfolgt aber bei dieser Reihe in jedem Jahr nicht allein Einwanderung, sondern auch Auswanderung einzelner Berge. Denn sie bildet die in Einzelheiten schwankende Ostgrenze des Schelfeises, neben der in jedem Sommer offenes Meer liegt, in welches einzelne Teile ausbrechen, während andere von dorthier angefügt werden.

Innerhalb der Felder liegen ebenfalls Berge, und zwar die meisten im Mittelfeld, im Südfeld wenige, und im Nordfeld nur ganz vereinzelt. Im Südfeld sind sie durchweg Blaueis, im Mittelfeld noch überwiegend, doch auch schon Blau-Mürbeis, und im Nordfeld Mürbeis. Die Berge, die ich im Nordfeld sah, waren sehr verwittert, woraus man ein Argument für ein höheres Alter des Feldes ableiten darf, das freilich nur neben anderen Gründen verwendbar ist, da die Berge vielleicht schon verwittert waren, als sie in ihm eingeschlossen wurden. Wahrscheinlich muß man annehmen, daß sie innerhalb ihrer Felder so lange liegen, wie diese selbst, da eine Einwanderung in bereits zusammengefügte Felder meistens ausgeschlossen ist, wie wir an unserem Winterlager erfuhren.

Die beiden Querreihen, welche die Felder trennen, halte ich dagegen für nachträglich von Osten her eingewanderte Berge. Eine andere Herkunftsrichtung ist ausgeschlossen; denn im Norden und Süden lagen die Felder davor, die nicht mehr durchdrungen werden konnten, und im Westen war festliegendes älteres Eis, das nicht mehr wanderte. Die Einwanderung von Osten entspricht auch den herrschenden Winden und ließ sich ähnlich nördlich vom Winterlager des Gauß beobachten. Vermutlich waren die drei Scholleneisfelder ursprünglich durch Waken getrennt, in die sich die Eisberge im Ostwind hineinschoben. Die vordersten stauten sich dann an dem Eis des mittleren Schelfeisstreifens, der bereits festlag, die nachrückenden

den an den ersten. So entstand eine feste Reihe, die nun an Ort und Stelle in Blau- bzw. Mürbeis verwandelt wurde. Vorübergehend hatten sich wohl später innerhalb der Reihen nochmals Waken gebildet, auf denen neue Zuwanderungen von Bergen in geringerer Zahl erfolgt sind, denn die Querreihen sind nicht gleichmäßig alt; man findet auch in der südlichen neben vollendetem Blaueis jüngere Berge.

Die westlichen Berge der südlichen Querreihe, also ihr Anschluß an den mittleren Schelfeisstreifen, besteht aus Blaueis wie dieser letztere: sie dürften nach der Einwanderung an Ort und Stelle dazu geworden sein, da in diesem Küstenabstand von 35 km noch überall Blaueis entsteht. Man braucht keine andere Erklärung. In der nördlichen Querreihe ist der entsprechende Anschluß dagegen wesentlich Mürbeis, während die mittlere Schelfeiszone daneben noch aus Blaueis und Blau-Mürbeis besteht; hier liegen also die beiden Arten der Umbildung frischen Eises in dem gleichen Küstenabstand nebeneinander.

Würde in diesem Abstand noch Blaueis entstehen, müßte auch die Querreihe solches enthalten, da ihre Berge teilweise sicher lange festliegen. Da sie keines enthält, müssen wir annehmen, daß sich hier kein Blaueis mehr bildet und daß das neben der Querreihe liegende Blaueis des mittleren Streifens von Süden vorgeschoben ist. Das Blaueis wird ja im Laufe der Zeiten nordwärts gedrängt. Dabei ist es hier über die Grenze hinausgerückt, südlich von der es entsteht. Es zerfällt auch teilweise schon in Blau-Mürbeis. Die Querreihe wanderte deshalb von Osten ein, also nicht aus Blaueis zonen, und wurde dagegen beim Liegen zu Mürbeis. Die Grenzen der Blaueisbildung liegen südlicher; sie reichen bis etwa 50 km Küstenabstand nach Norden.

Die Scholleneisfelder, die den größten Teil der östlichen Zone einnehmen, sind sicher altes Eis, also Schelfeis, da selbst das Nordfeld dicker und ebener war, als es im Laufe eines Jahres werden kann. Ein in seiner unmittelbaren Nähe neu gefrorenes Feld erreichte im Jahre unserer Anwesenheit nur 1—2 m, während das Nordfeld 3—4 m hatte. Auch blieb das

Feld, welches sich um den „Gauß“ aus älteren Schollen zusammenschloß, im Laufe des einen Jahres unserer Anwesenheit viel unebener, als es das Nordfeld war. So konnte also weder Stärke noch Form dieses letzteren im Laufe eines Jahres entstanden sein, sei es, daß es an Ort und Stelle gefroren, oder aus älteren Schollen zusammengeschoben war. Es war älter als einjährig und gehörte somit zum Schelfeis, und um so mehr die beiden anderen Felder, die noch südlicher lagen.

Die Oberflächenformen der Felder zeigten manche Verschiedenheiten, die zum Teil von der Verteilung des Schnees, zum anderen Teile von Verschiebungen und nachträglichen Umformungen herrührten.

Schnee lag auf allen dreien, doch im Norden mehr als im Süden. Das Nordfeld war ganz mit Schnee bedeckt, das Mittelfeld hatte viele glatte Partien, das Südfeld hatte in seinem nördlichen Teil mehr Schnee als das Mittelfeld, im südlichen weniger. Dieses letztere zeigte im Süden große Strecken ganz glatten Eises. Erst in unmittelbarer Küstennähe lag im Schutz von Bergen wieder mehr Schnee. Die schneefreie Teile der Felder waren blankes Schollenblau eis.

Diese Verteilung scheint die Regel von der Zunahme der Verdunstung gegen die Küste hin zu durchbrechen, da man hiernach am wenigsten Schnee in unmittelbarer Küstennähe erwarten sollte, und im Nordteil des Südfeldes z. B. weniger als im Mittelfeld, während es anders war. Diese Abweichungen hängen indessen mit den Ansatzmöglichkeiten des Schnees zusammen und diese mit der Verteilung der Berge. Man findet Schneeansätze im Schutz der Berge und schneefreie Stellen zwischen den Bergen, wo der Wind sozusagen eingengt wird und deshalb mit besonderer Kraft hindurchfegt. Da Ostwinde herrschen und alle Schneewehen und Ansätze sich nach diesen richten, kommt es für die Schneebedeckung der Felder stets darauf an, wie sie und die Berge relativ zu diesen Winden liegen.

So ist die unmittelbare Küstennähe schneereich, weil dort viele hohe Eisberge liegen, an die sich lange und oft sehr mächt-

tige Schneewehen ansetzen. Sie überziehen das Scholleneis mit einer Anzahl ostwestlich streichender Schneewälle, die man alle passieren muß, um zur Küste zu gelangen. Der Südteil des Südfeldes ist schneearm, weil die runden, niedrigen Blau eisberge dort wenig Möglichkeiten zum Ansatz gewähren. Im Nordteil des Südfeldes ist der Schnee wieder reicher, weil an seiner Ostgrenze eine dichte Gruppe von höheren Eisbergen liegt; mit wachsender Entfernung von dieser nach Westen nimmt die Schneemenge ab. Das Mittelfeld ist verhältnismäßig schneearm, weil die Bergreihe an der Ostgrenze licht ist und wenig Schutz gewährt. Im Schutz der in ihm eingeschlossenen Berge liegen hier auch größere Wehen. Das Nordfeld ist schneereich, weil in seiner Breite wohl allgemein mehr Schnee liegen bleibt als vor der Küste. So erklärt sich also die Schneeverteilung durch den Küstenabstand und durch die Ansatzmöglichkeiten, welche die Eisberge für die Ostwinde bieten (vgl. S. 8f.). Überall aber, wo Schnee liegen bleibt, bildet er Wehen und Wellen, die ostwestlich streichen. Gänzlich eben liegt der Schnee nie, wie es schon vom Inlandeise erwähnt ist.

10. Bewegungen im Oststreifen.

Die zweite Gruppe von Oberflächenformen der Felder ist durch Verschiebungen der Schollen bedingt, die in Zerungen und in Stauungen bestehen. Beide sind älter als in der Küstenzone, gehen aber, wie in dieser, meist von Eisbergen aus. Daneben erkennt man auch wieder das allgemeine Schieben geschlossener Massen nach Norden, z. B. darin, daß Blau eis und Mürbeis an der zweiten Querreihe neben einander liegen weil das erstere über das Gebiet, in dem es entsteht, nach Norden hinausgedrängt ist (vgl. S. 25).

Die Spalten sind die Folge von zerrenden Bewegungen, doch war eine einheitliche Richtung darin nicht zu erkennen. Mehrfach sah ich, daß die Spalten von Eisbergen ausgehen, bisweilen auch diese umkränzen. In der Südwestecke des Nordfeldes waren nordwestliche Spalten quer zu der Eisbergreihe, die

an der Westgrenze dieses Feldes liegt, und nahezu parallel zur östlichen Außengrenze des Schelfeises. Man konnte annehmen, daß das Schelfeis sich hier in Streifen, die parallel zu seinem östlichen Außenrand laufen, aufzieht; wahrscheinlicher war aber, daß auch dieses Spaltensystem von den Eisbergen ausgeht, die sich in Ebbe und Flut etwas anders bewegen als das Scholleneis und dabei dieses zerreißen.

Auch diese Spalten waren älter als die aus der Küstennähe erwähnten. Man sah das an ihren Schneefüllungen und an den Ketten und Trauben von Eiskristallen, die in ihnen ähnlich entwickelt waren, wie in den alten Inlandeisspalten. Vielfach reichten sie gar nicht bis zum Wasser hindurch, doch in anderen konnte man das Wasser unten sehen. Im Mittelfeld und im Nordteil des Südfeldes wurden neben den Spalten Robben gefunden, was ihre Öffnung bis zum Meere beweist; im Südteil des Südfeldes sahen wir keine Robben, wohl aber südlich hiervon an den Spalten in der Küstennähe. Diese waren die jüngsten, und darum war das Schelfeis hier am beweglichsten. Der Südteil des Südfeldes war ein zusammengeschobenes, sehr unbewegliches Gebiet. Dann nahm Zahl und Öffnung der Spalten und damit die Beweglichkeit nach Norden hin zu: doch war auch das Nordfeld noch starrer als die Küstenzone. Diese Bewegungen, die man aus den Spalten ersieht, dürften alle von den Eisbergen ausgehen und keine einheitliche Richtung haben.

Staunungen des Scholleneises habe ich besonders an der Ostseite des Mittelfeldes gesehen, das dort zwischen zahlreichen Eisbergen durchweg aus welligem Schollenblau eis bestand, nämlich aus zusammengeschobenen Schollen mit abgerundeten Ecken und Kanten. In den Wellentälern lag vielfach Frischwassereis, nämlich ausgefrorene Lachen sommerlichen Schmelzwassers, welches sich in den Vertiefungen gesammelt hatte.

Auch der Südteil des Südfeldes war wellig, doch nicht in dem Maße wie das Mittelfeld. Vermutlich waren die Wellen hier stärker abgetragen als auf dem letzteren, denn auch die Blau-

eisberge ringsumher waren stark erniedrigt. Zwischen den Wellen lagen hier ausgedehnte Bildungen von Frischwassereis, teils mit aufgetriebenen Eisdecken, wie sie die Staublöcher des Inlandeises haben. Wenn eine Wasserlache von oben nach unten ausfriert, wird die oben gebildete Eisdecke durch die Ausdehnung des unten eingeschlossenen Wassers beim Gefrieren gesprengt. Diese Auftreibungen lassen vermuten, daß die Wasserlachen hier inhaltsreicher gewesen sind als auf dem Mittelfeld und man könnte auch hieraus schließen, daß der Südteil des Südfeldes früher stärkere Unebenheiten und Wellen gehabt hat, als heute.

Auf dem Nordteil des Südfeldes habe ich kein welliges Scholleneis gesehen, doch kann es hier unter den reichlichen Schneewehen gelegen haben, und so darf man nicht schließen, daß die Schollen dort ungestaut lagen. Das gleiche gilt vom Nordfeld, wo die Schollen jedenfalls nicht ungestaut lagen, weil die Eisdicken ungleich waren, auch abzüglich der Ungleichmäßigkeiten, die auf den Schneewehen der Oberfläche beruhten.

Wo das Scholleneis freilag, war es also wellig und wohl durch Schiebungen gestaut. Während aber die Bewegungen, die man aus den Spalten des Oststreifens erkannte, lokal waren und von den Eisbergen ausgingen, hatten die Wellen häufig, z. B. im Mittelfelde, über größere Flächen die gleiche ostwestliche Richtung. Bei einem allgemeinen Nordwärtsdrängen des Schelfeises, wie es aus den Bewegungen der Küstenzone und aus dem Vorkommen von Blau eis nördlich von den Gebieten, in denen es entsteht, schon gefolgert werden mußte, sind diese ostwestlich streichenden Wellen verständlich.

11. Der Mittel- oder Berg-Streifen des Schelfeises.

Den mittleren Streifen kann man in zwei Abschnitte gliedern, deren Grenze ungefähr mit der Nordgrenze des Blau eis zusammenfällt und in 50--60 km Küstenabstand liegt. In beiden Abschnitten tritt das Scholleneis hinter dem Bergeis zurück, so daß der Name Bergstreifen gerechtfertigt

ist; der südliche Abschnitt besteht fast ganz aus Bergen, der nördliche aus Bergreihen und Gruppen, die auf Bänken festsitzen, oder sich zwischen solchen spannen, und aus kleineren Schollenfeldern dazwischen. Die Breite dieses Mittelstreifens beträgt 15—20 km im südlichen und 30—40 km im nördlichen Abschnitt, seine Gesamtlänge etwa 100 km. Ganz im Norden biegt er mit einer hakenförmig gekrümmten Reihe von Mürbeisbergen nach Osten herum und umfaßt damit das Gaußfeld, das sich im Herbst (Februar) 1902 legte und im nächsten Herbst (Februar) 1903 wieder löste, also nur einjährig war und daher nicht zum Schelfeis gehörte.

Der südliche Abschnitt war der größte und dichteste Komplex von Blau eisbergen, den ich gesehen habe. Diese bildeten hier stellenweise ein ganz undurchdringliches Gewirr. Berg lag an Berg, bisweilen der eine zum Teil auf dem nächsten, an anderen Stellen lagen dicht gedrängte, aufgerichtete, überschobene Schollen dazwischen, selbst auch zu Blau eis ge glättet. An anderen Orten konnte man auf den sanften Abhängen der Blau eisberge unschwer entlang gehen, nur durch die Glätte behindert und durch die Steilmauern, mit denen die Berge oft plötzlich abbrachen. Diese waren ohne bestimmte Exposition. Neben dem Mittelfeld des Oststreifens waren sie zu diesem, also nach Osten gekehrt, neben dem Südfeld nach Nord.

Am großartigsten war das Blau eisberggewirre zwischen 50 und 60 km Küstenentfernung. Man sah dort von Norden auf eine Menge von Steilwänden, die wie eine Riesentreppe südwärts aufzusteigen schienen, doch nicht in einer Linie hintereinander, sondern bald nach Osten bald nach Westen aus der Linie gerückt, wie gestaffelte Truppen. Bisweilen lagen auch mehrere Wände in derselben Breite, waren aber durch Senken voneinander getrennt. Tatsächlich stiegen die südlicheren Stufen nicht von der Höhe der vorhergehenden nördlicheren empor, sondern jede einzelne vom Meereisniveau, da die Oberfläche jeder Stufe sich von der Höhe ihrer nordwärts gekehrten Steilwand langsam nach Süden hin senkte, so daß sich die nächste südlichere Steilwand erst wieder

vom Fuße des nördlicheren Berges erhob. Das ganze war also eine dichte Gruppe von Blaueisbergen mit nordwärts gekehrten Steilwänden und langsam geneigten Südhängen, darunter einer von mindestens 10 km ostwestlicher Breite, dessen Steilwand wie eine Inlandeismauer aussah.

Im Osten grenzte dieses Blaueisgewirre an das Mittel- und Südfeld des östlichen Schelfeisstreifens und wurde von mir umgangen. Durch seinen westlichen Teil führte eine Schlittenreise von E. Philippi und W. Lerche hindurch. Ihrer Schilderung entnehme ich, daß die Passage nach Süden hin schwieriger wurde, weil die Zahl der Spalten zunahm. Man fand schon bei 10 km Entfernung von der Inlandeismauer und weiter südwärts, soweit man kam, nämlich bis 5 km Abstand von dieser, lange, ostwestlich, also parallel zur Küste streichende Spalten, an denen sich dieses Schelfeis ebenso nach Norden aufzog, wie in der Küstenzone. Die Spalten waren damals (Ende Oktober 1902) zum Teil unüberschreitbar breit. Sie rissen durch Schollen und Berge hindurch, ohne ihre Richtung zu verändern. Beide waren also zu einer kompakten Masse zusammengedrängt und unterlagen gleichmäßig den Bewegungen und Zerrungen. Im Oststreifen waren durch die Ungleichmäßigkeit der Bewegungen von Berg- und Schollen-Eis nur in letzterem Spalten entstanden. Er war weniger kompakt.

Der Südabschnitt des Mittelstreifens verbreitert sich im Norden etwas nach Westen, weil seine Westgrenze, das ist der Ostrand des West- oder Volleis-Streifens, nordwestlich abbiegt. Dadurch erhalten die Blaueisberge mehr Raum, und das Scholleneis zwischen ihnen ist nicht mehr durchweg gestaut und gedrängt, sondern liegt stellenweise auch eben. Im Nordabschnitt setzt sich diese Verbreiterung fort, nun aber nach beiden Seiten. Seine Breite beträgt im Süden etwa 30 und im Norden über 40 km.

Die Ostgrenze dieses nördlichen Abschnitts bildet eine Bergkette, die sich etwas östlich vom Meridian des Gaußberges fast 40 km hindurch verfolgen läßt. Sie beginnt an der Nordostecke jenes Blaueisbergewirrs, mit dem der südliche

Abschnitt endigt, und besteht dort aus Blau-Mürbeis. Sie stützt sich dann auf Rusers-Bank, westlich vom Gaußfeld und vom Winterlager des Gauß, die nur 120 m Tiefe besitzt und eine Gruppe von großen Eisbergen gefesselt hat. Sie setzt sich dann nordwärts fort und krümmt sich zuletzt in etwa 100 km Küstenabstand hakenförmig nach Osten herum, das junge Gaußfeld umfassend.

Westlich von dieser Bergreihe besteht der Nordabschnitt des Mittelstreifens aus ebenen Scholleneisfeldern mit vielen teils isoliert teils in Gruppen eingeschlossenen Bergen. Eine dichte Berggruppe liegt auf Lerches-Bank, wo nur 119 m Tiefe erlotet sind. Eine andere lag nördlich hiervon auf Otts-Bank (102 m Tiefe), die wahrscheinlich mit Lerches-Bank zusammenhängt, da die Eisberge beider Bänke sich begegneten und das Schollenfeld des Nordabschnitts in zwei Teile spalteten. Von Otts-Bank zog eine Eisbergreihe nach Westen und lag bei Meerestiefen von 139 und 164 m sicher fest, dort die Nordgrenze des Mittelstreifens bildend. Von Rusers-Bank zweigte eine nordwestliche Bergreihe ab. Von Lerches-Bank zog eine Reihe gegen Südwesten und das ganz Feld war auch sonst von Reihen, Gruppen und einzelnen Bergen durchsetzt.

Das Scholleneis zwischen den Bergen war überall mit Schnee bedeckt, der in diesem Küstenabstand nicht mehr durch Verdunstung entfernt wurde und auch an den Bergen zahlreiche Ansatzstellen gefunden hatte. Besonders dichte Wehen lagen ganz im Süden des nördlichen Abschnitts im Schutz des Blau-Mürbeises der östlichen Grenzreihe. Sie hatten Berge und Schollen fast völlig verkleidet. Da die Berge dicht gedrängt und die Schollen dazwischen aufgerichtet waren, konnte man sie innerhalb der dichten und zum Teil vereisten Schneewehen schwer unterscheiden. So hatte man hier den Eindruck einer völligen Vermengung von Länd- und Meer-Eis, und ich prüfte mehrfach vergeblich, ob ich mich auf einem Eisberg oder auf zusammengeschobenen Schollen befand. Berge und Schollen waren hier alt, sie waren von Süden her im Laufe langer Zeiten vorgerückt und deshalb besonders stark abgerundet und erniedrigt (vgl. S. 25).

Zu beiden Seiten der Bergreihe, die sich von Lerches- zu Otts-Bank erstreckte, waren die Schollen jung. Am 29. März 1902 sah ich vom Fesselballon aus hier zwei offene Waken, die sich vom Meere nördlich der Schelfeisberge her südwärts abzweigten. Die Eisdicken, die neun Monate später hier gemessen wurden, betrug nur 1—2 m, hatten also den Betrag, der im Laufe eines Winters entsteht. Sonach gehörten diese Felder um Lerches-Bank nicht mehr zum Schelfeis, sondern füllten Lücken darin und desgleichen ihnen im Norden angegliederte, zusammengeschobene Schollen, die im Dezember 1902 noch ebensowenig ausgeebnet waren wie die Schollen des Gaußfeldes, also ebenso wie diese erst einen Winter gelegen hatten.

Im Frühjahr (November-Dezember 1902) zogen sich diese Felder an langen Spalten, die parallel zum nördlichen Rande des Schelfeises strichen, auseinander. Vermutlich löst sich das Eis westlich von Lerches-Bank im Sommer nahezu bis zur Blau eisgrenze hin, östlich etwas weniger weit südlich. Ob es in jedem Sommer so ist, kann ich freilich nicht sagen. Jedenfalls war aber der Nordabschnitt des Mittelstreifens nicht durchweg Schelfeis, sondern teilweise nur einjährig.

Die Eisberge dieses Abschnitts hatten auch verschiedenes Alter. Auf den Bänken waren sie teilweise völlig zerfallen, lagen also schon lange fest. Dazwischen lagen aber jüngere Berge sogar bis auf 10 km an die ganz alten vor der Blau eisgrenze heran. Ihre Einwanderung muß man von Norden her annehmen, da alle anderen Richtungen dauernd versperrt sind, also durch die Waken, auf denen sie auch wieder hinausgelangen können, wenn diese aufgehen.

12. Der West- oder Volleis-Streifen des Schelfeises.

Während der Ost- oder Schollen-Streifen des Schelfeises schon in 75 km Entfernung von der Küste endet und der Mittelstreifen erst in 100 km Abstand, hier aber schon in Gruppen und Reihen von Bergen aufgelöst, bleibt der letzte, also der West- oder Volleis-Streifen ebensoweit völlig geschlossen.

auch im Sommer. Er liegt nördlich von der Inlandeiszunge, die 20 km westlich vom Gaußberg die Westbucht begrenzt und ist von jener Zunge durch eine Bruchzone getrennt. Sein Ostrand begleitet die Felder und Berge des mittleren Streifens in geschwungenen und gebuchteten Linien, die zuerst nördlich, dann nordwestlich streichen.

Seine Breite konnte ich nicht feststellen. Seinen Außenrand im Meer verfolgten wir bei der Fahrt mit dem Schiff durch zwei Längengrade hindurch. Er zog von Südosten nach Nordwesten, also nahezu in Fortsetzung des letzten Teils der Grenze des Volleises gegen den Mittelstreifen. Dann bog er südwärts um. Es wäre möglich, daß die Längsachse des Volleises nicht meridional liegt, wie die der beiden östlichen Streifen, sondern von Südosten nach Nordwesten. Es würde dann auch auf der Küste senkrecht stehen, da diese an seiner Ansatzstelle südwestlich abbiegt (p 16). Seine Breite wäre dann aber nicht auf einem ostwestlichen Schnitt zu bemessen, sondern auf einem von Nordost nach Südwest. Sie würde also nicht zwei Längengrade oder 90 km, sondern weniger betragen. Hierfür spricht auch die Schätzung, die ich dafür im Süden vom Gaußberg aus gewann (p 16). doch muß ich die Einzelheiten der Begrenzung im Westen dahingestellt sein lassen.

Das Volleis ist im Süden nahe der Küste betreten worden und im Norden in 80 km Entfernung von ihr. Seine Ostgrenze ist mit Schlitten verfolgt worden und seine Außen- grenze im Norden bei der Fahrt mit dem Schiff. Jene liegt am Scholleneis des Mittelstreifens, diese im offenen Meer, das viel Treibeis hat, aber dazwischen auch im Winter offene Stellen. Wir fanden solche im März und wieder im November, und dürfen sie auch für die Winterzeit dazwischen annehmen, da vom Winterlager des „Gauß“ dort häufig der sogenannte Wasserhimmel, also der Widerschein offenen dunklen Wassers an Wolken zu sehen war. Im Sommer dringt das Meer vermutlich an der Ostgrenze des Volleises auch südwärts vor (p 33).

Die Ostseite des Volleises senkt sich meist allmählich

zum Meereis hinab und geht fast unmerklich in dieses über. Auf weiten Strecken ist zwischen beiden nicht einmal eine Spalte, und wo eine vorhanden ist, sieht man keine Eisfußbildung daran. Volleis und Meereis bewegen sich gleichmäßig neben einander auf und ab, bei Flut und Ebbe. Im Norden, wo viel Schnee lag, war die Grenzlinie durch Wellen verhüllt, in denen man einen feinen Riß und bisweilen auch eine geringe Senkung der Schneeoberfläche an dessen Rändern sah, doch sonst keinen Unterschied der Höhen zu beiden Seiten. Hierin liegt der Beweis, daß das Volleis schwimmt, wie das Meereis daneben.

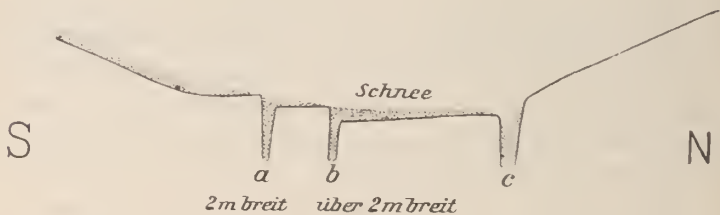
Der Außenrand im Meer hat eine steile Mauer von 20—30 m Höhe mit vorspringenden Ecken und größeren oder kleineren Buchten dazwischen. Die Steilmauer zieht streckenweise auch noch neben dem Scholleneis des Mittelstreifens südwärts, wohl dort, wo dieses im Sommer aufgeht. Weiter südwärts treten die sanften Böschungen auf. An den Steilmauern sieht man Schichtung wie an Inlandeismauern, doch die Mauern sind lange nicht so frisch, wie die des Inlandeises. In der Außenmauer sahen wir Scharten und Risse mit Blockhalden, doch vor ihr keine Eisbergreihen, wie vor der Inlandeismauer. Die Eisberge, die dort zerstreut umherlagen, waren ohne Beziehung zur Mauer, d. h. ohne die dieser entsprechende Stellung und Schichtung. Es waren fremde, von anderswoher herangetriebene Gebilde, die nun zufällig neben der Mauer lagen, aber nicht von ihr selbst abgelöst waren. Die Mauer des Volleises bildet keine Eisberge.

Die Oberfläche des Volleises sieht im Norden und im Süden verschieden aus. Ich entnehme der Schilderung E. Philippis, der sie im Süden beging, daß sie sich dort nicht wesentlich von Blaueis unterscheidet. Er spricht von runden Kuppen die er bestieg und Senken die er durchfuhr, sowie von Steilmauern, die bald hierhin, bald dorthin gekehrt waren. Es war der gleiche Charakter wie in den Blauemassen, an denen er gleich darnach, vom Volleis südöstlich auf den Gaußberg zu abbiegend, entlang fuhr (p 30). Im Norden hatte

man dagegen den Eindruck besonders dicht gedrängter Blau-eisbergmassen nur noch der Form nach, der Beschaffenheit nach von weit vorgeschrittenen Mürbeisbildungen. Man sah hier kaum noch etwas von Blaueisstruktur, weit weniger z. B. als im Blau-Mürbeis des Mittelstreifens.

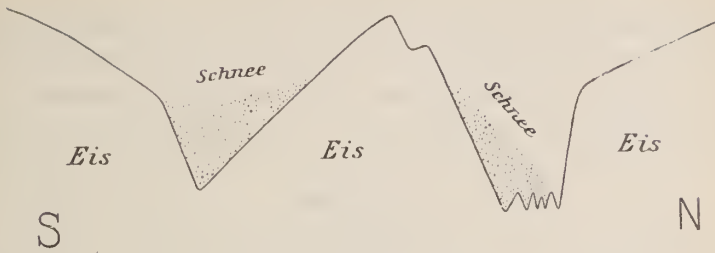
Die Oberfläche war im Norden fußtief zersetzt. Die Eiskörner lagen locker nebeneinander, und man sank darin ein. Breite Spalten strichen parallel zum nahen äußeren Rand und waren mit Kristallketten und Gruppen dicht erfüllt, also sehr alt. Neue Risse fanden sich auch, doch ohne bestimmte Richtungen und ohne jede Weiterbildung durch Wasser oder durch Bewegung; sie waren aus zufälligen Spannungen entstanden.

Bemerkenswert waren die Formen, die ich in den Profilen dargestellt habe. Figur 3 ist der Querschnitt durch einen Graben, der eine von Osten her in das Volleis eingreifende Bucht nach Westen fortsetzt; a, b und c sind Spalten. Der Teil zwischen b und c ist tiefer gesunken als der zwischen a und b. Der Graben bc war mit Schnee erfüllt, und auch die Stufe ab war noch teilweise bedeckt. Die Spaltenränder waren frei.



Figur 3
Grabenbruch im Volleis.

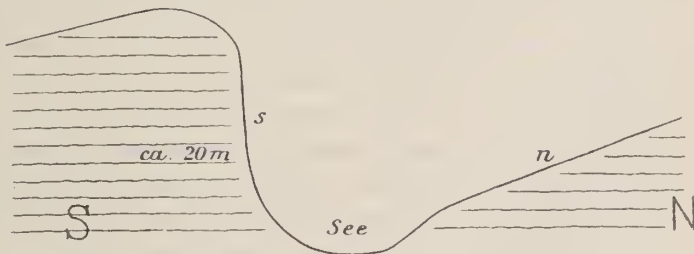
Figur 4 dürfte auch ein Grabenbruch sein, in dem die Südseite des Grabenbodens tiefer sank als die Nordseite. Die Schichtung war der Zersetzung wegen leider nicht mehr zu sehen, so daß man die früheren Zusammenhänge nicht fest-



Figur 4
Grabenbruch im Volleis

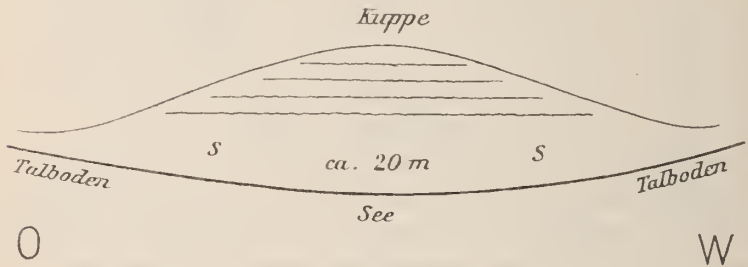
stellen konnte. Die südliche Senke war tief mit Schnee erfüllt, die nördliche nur teilweise. An ihrem Boden kam man auf Brucheis. Dieser Graben lag nahe am Ostrand des Volleises und strich auch senkrecht zu ihm. Er setzte sich noch weit nach Westen hin fort, freilich stellenweise nur als ein Schneestreifen kenntlich, wo er ausgefüllt war, stellenweise eingetieft und von den Rändern her überwächtet.

Figur 5 gibt den Querschnitt durch ein Tal und Figur 6 dessen Längsschnitt senkrecht zu ersterem, entlang der südlichen Talwand *s* und entlang dem Talboden davor. Die Nordwand *n* ist sanft geneigt, die Südwand *s* steil. Am Boden des Tals liegt ein ausgefrorener See, zu dem im Dezember 1902 von Osten und Westen her Wasser rieselte. Man steigt in beiden



Figur 5
Querschnitt durch ein Tal des Volleises.

Richtungen auf, wenn auch wenig (Figur 6). Von solchen Tälern sah man eine ganze Anzahl. Sie waren für den Norden des Volleises charakteristisch. Immer waren die Nordwände sanft geneigt und die Südwände steil, ihre Höhe schwankt um 20 m herum.



Figur 6

Längsschnitt durch ein Tal und durch eine dahinter liegende Kuppe des Volleises.

Diese Oberflächenformen erklären die Natur des Volleises. Die Gräben zeigen, daß wir es nicht mit einer einheitlichen, homogenen Masse zu tun haben, wie es das Inlandeis ist, sondern mit aneinander gebauten Stücken; denn das Inlandeis hat wohl Spalten, die seine Oberfläche auseinander reißen, doch nicht Gräben, an denen Teile derselben zur Tiefe gesunken sind. Bei ihm handelt es sich um die Auslösung oberflächlicher Spannungen, wobei zusammengehörige Teile auseinanderklaffen, beim Volleis um vertikale Verwerfungen.

Die Täler zeigen, daß die aneinander gebauten Stücke des Volleises Blau eisberge waren: denn die Längsschnitte (Figur 6) zeigen typische Blau eisformen, nämlich die des Talbodens die Form einer Senke zwischen zwei Blau eis kuppen, und der Wandschnitt die Form einer Kuppe. Der Querschnitt (Figur 5) durch die Nordwand des Tals *n* entspricht dem Profil durch den Anstieg zu einer Blau eis kuppe, und der durch die Süd wand *s* dem Profil senkrecht zu einer Blau eis steilwand, die bei

Exposition gegen die Sonne nach Norden auch konkave Formen annehmen kann.

Sonach möchte ich im nördlichen Teil des Volleises eine dicht gedrängte und dann völlig vermürbte Gruppe von Blau-eisbergen erblicken, gleichwie E. Philippi den südlichen Teil wie eine Scharung von Blau-eisrücken schildert. Der Süden war nicht vermürbt, sondern glatt, wie es seiner Küstennähe zukommt. Der Norden ist vermürbt und dazu treten Schneefüllungen in Brüchen und Senken, welche die Unebenheiten noch weiter mildern. Wenn jenes dichte Blau-eis aus der Mitte des Mittelstreifens bis in den Küstenabstand versetzt werden würde, in dem der Norden des Volleises liegt, würde es werden wie dieses. Seine nordwärts gekehrten Steilwände würden die Südwände solcher Täler sein, wie sie das Volleis hat.

Den gleichen Eindruck vom Charakter des Volleises hatte ich vom 12. bis 19. Februar 1903 bei der Fahrt mit dem Schiff an seinem Außenrand entlang. An der Oberfläche sah man sanfte Böschungen und runde Kuppen, am Meer Steilmauern. Die absoluten Höhen blieben dem Anscheine nach auf der ganzen Strecke gleich, und die relativen Höhenunterschiede zwischen Kuppen und Senken waren überall gering. Nur die Steilheit der Mauern am Meer wechselte, da sie durchtalt und neben den Tälern abgeböschert waren. Stellenweise sah man auch vortretende Zungen, die sich sanft geböschert bis zum Meeresniveau senkten. Eine große, tiefe Bucht war in ihren äußeren Teilen von Steilmauern eingefasst, im Hintergrunde von Böschungen. Im allgemeinen überwogen aber Steilmauern und manche Strecke schien wohl nur bis zum Meere herab geböschert zu sein, weil sie ferner lag und deshalb nur noch die Oberflächenböschung zu sehen war, während die Steilmauer darunter schon unter dem Horizont lag. Die vortretenden Ecken lagen näher und waren deshalb als imposante Eiskaps bis unten hin sichtbar.

Wie oft das Volleis sich auf Untiefen stützt, vermag ich nicht anzugeben. E. Philippi erlotete eine Bank von 20—60 m Tiefe in kurzem Küstenabstand an seinem Ostrand. Eine 164 m

tiefe Bank, mit Eisbergen fest besetzt, lag nahe an seiner Nordostecke. Doch neben dieser selbst wurden über 600 m Tiefe erlotet, und ähnliche Tiefen herrschten neben seinem Ostrand auch weiter südlich, halbwegs bis zum Inlandeis. Bei diesen Tiefen muß das Volleis schwimmen und desgleichen bei denen, welche vor seinem Außenrand erlotet wurden. Wir dürfen daher annehmen, daß es zum größten Teil schwimmt und nur an einigen Stützpunkten aufliegt. Vielleicht setzt sich die Bankreihe, die den Mittelstreifen des Schelfeises im Norden hält, als Stütze des Volleises nach Westen hin fort. Diese Frage bleibt aber offen; nur Philippis Bank im Süden ist als Stützpunkt sicher bekannt.

Ich glaube jedoch nicht, daß sich das Volleis ohne Stützpunkte geschlossen hält und eine ins Meer hinausgeströmte, schwimmende Inlandeismasse ist. Denn wo Inlandeis ins Meer hinausströmt und den Boden verliert, zerbricht es und auch das Volleis ist im Süden gegen das Inlandeis durch eine Bruchzone abgegrenzt. Daß es sich trotzdem nicht in Eisberge auflöst, wie sonst das vom Inlandeis losgebrochene Eis und im besonderen das Schelfeis der beiden östlichen Streifen, muß an äußeren Hemmungen liegen, die es ganz zusammenhalten und die Auflösung hindern. Ich halte es für eine Packung von Eisbergen hinter Hindernissen, die so dicht geworden ist, daß man die Berge meist nicht mehr von einander unterscheiden kann. Nur die Gräben und Täler zeigen noch ihre Grenzen.

Eine ähnlich dichte Packung hatten wir in der Mitte des Mittelstreifens kennen gelernt, ohne darüber in Zweifel zu sein, daß sie nicht zusammenhängend schwimmendes, sondern in Berge aufgelöstes Inlandeis ist, zumal zwischen ihr und dem Inlandeis weiter südlich die Auflösung noch größer und die Abtrennung von Inlandeis vollkommener war. Diese Packung war deutlich durch einen erneuten Zusammenschluß vom Inlandeis losgelöster Berge entstanden. In gleicher Weise ist das Volleis zu verstehen, nur daß seine Packung noch dichter ist und den ganzen Streifen vom Inlandeis bis zum Meer erfüllt.

Da das ganze Schelfeis nordwärts drängt, müssen seine äußersten Teile mit der Zeit über die heutige Grenze ins Meer gestoßen werden, und das ist auch der Fall. Wir trafen vor seinem Außenrand Eisberge an, die wie Teile des Volleises aussahen, gewaltig große, runde, zermürbte Kolosse, die uns Land vorgetäuscht haben. Sie schwammen im offenen Wasser und wurden an den uns zugekehrten Mauern durch dessen Reflexe verdunkelt, so daß diese wie Landbänge aussahen. Eisbergbildungen wie das Inlandeis hat das Volleis dabei aber nicht. Da es nicht strömt, sondern schwimmt, kann es nicht durch den Auftrieb des Wassers zerbrechen, wie das Inlandeis, wenn es den Boden verliert. Das Volleis löst sich nur wieder in seine Bestandteile auf, wenn es nicht mehr von außen zusammengehalten wird. Es zerfällt in die Teile, aus denen es lange bestand, und die sich früher einzeln durch Eisbergbildung vom Organismus des Inlandeises abgetrennt haben. Es ist ein passives Ausbrechen, bald hier und bald dort, wie auch sonst an den Außenrändern des Schelfeises.

13. Zusammenfassung.

Meine Ausführungen über das Schelfeis lassen sich in folgende Punkte zusammenfassen.

1. Vor der Inlandeismauer, östlich und westlich vom Gaußberg, liegt eine alte, aus Bergen und Schollen gemischte Masse, die sich in der Horizontalen nur wenig verschiebt, in der Vertikalen aber zum größten Teil mit Ebbe und Flut schwankt.

2. Die Formen dieser Eismassen werden durch äußere Kräfte gestaltet, unter denen die subaërische Verwitterung die Hauptrolle spielt. Dieselbe wirkt in dem küstennahen Gebiete anders, als jenseits etwa 50 km Entfernung, indem dort das Blaueis durch überwiegende Verdunstung, hier das Mürbeis durch überwiegende Zersetzung entsteht.

3. Die Ursache dieser Verschiedenheiten scheint in der durch Verteilung und Formen des Eises lokal gesteigerten Stärke der Luftströmungen in der Küstennähe zu liegen, welche hier die Größe der Verdunstung und auch der Korrasion durch Treib-

schnee steigert. Dazu dürfte eine größere relative Trockenheit der Winde in der Küstennähe kommen, doch ist diese nur für die unmittelbare Küstennähe deutlich erwiesen.

4. Je älter das Schelfeis ist, sei es, daß es als Scholleneis auf dem Meere entstand, sei es, daß es aus Eisbergen besteht, die vom Inlandeise losbrachen, desto mehr ist es durch die Verwitterung umgeformt. Infolgedessen findet man an den Rändern des Schelfeisgebietes, wo neues Eis angegliedert wird, die jüngsten Formen. Vor der Inlandeismauer im Süden liegen die jüngsten Berge und an den Außenrändern die jüngsten Schollen.

5. Die Massen, welche noch nicht eine Jahresperiode im Schelfeis überdauert haben, können nur als ein Übergangsgebilde zu diesem betrachtet werden, weil ihre Formen dann noch wesentlich von denen abweichen, die nach Ablauf einer Jahresperiode auftreten und für das Schelfeis charakteristisch sind.

6. Das Schelfeis stützt sich auf Untiefen und wird durch sie in seiner Lage gehalten. Seine auf Untiefen feststehenden Teile, wesentlich Berge, machen die Schwankungen des Meeresspiegels in den Gezeiten nicht mit.

7. Im Schelfeisgebiete nördlich vom Gaußberg ist eine Reihe solcher Untiefen nachgewiesen worden und die Gestaltung des Meeresbodens macht es wahrscheinlich, daß noch weitere vorhanden sind, die nur nicht erlotet wurden. Einen Zusammenhalt des Schelfeises ohne solche Stützpunkte, also den Bestand einer zusammenhängend schwimmenden Inlandeismasse, nehme ich nicht an.

8. Von den fest auf Grund liegenden Eismassen, Inlandeis oder festgekommenen Berge, ist das Schelfeis durch Bruchzonen getrennt und von seinen Außenrändern lösen sich bald hier, bald dort größere oder kleinere Bestandteile ab.

9. Das Schelfeis hat horizontale Bewegungen lokaler Art, welche meist von den Eisbergen ausgehen, da diese sich bei Ebbe und Flut etwas anders bewegen, wie das Scholleneis, und in diesem dabei Spalten schlagen. Von den Winden geschoben türmen sie das Scholleneis vor sich zu Wällen auf.

10. Das Schelfeis hat auch allgemeine Bewegungen, die nordwärts gerichtet sind. Man erkennt sie an der Öffnung und Erweiterung parallel zur Küste streichender Spaltensysteme, sowie an parallelen Wellungen und Stauungen des Scholleneises und an dichten Packungen von Eisbergen, die von Süden kommen, in den äußeren Zonen im Norden. Auch das Vorkommen von Blaueis nördlich von den Küstenabständen, in denen es sich bildet, bekundet ein allgemeines Schieben des Schelfeises nach Norden.

11. Die Hauptursache dieser allgemeinen Bewegungen sind die Winde, während Eisbergbildungen von den Inlandeismauern mehr dadurch wirken, daß sie Spalten schlagen und damit neue Wege und Möglichkeiten für Verschiebungen schaffen, als dadurch, daß sie das Schelfeis wirksam nordwärts drängen. Sie liefern aber im Verein mit den auf Spalten neu gefrierenden Schollen den Ersatz für die nordwärts drängenden Massen.

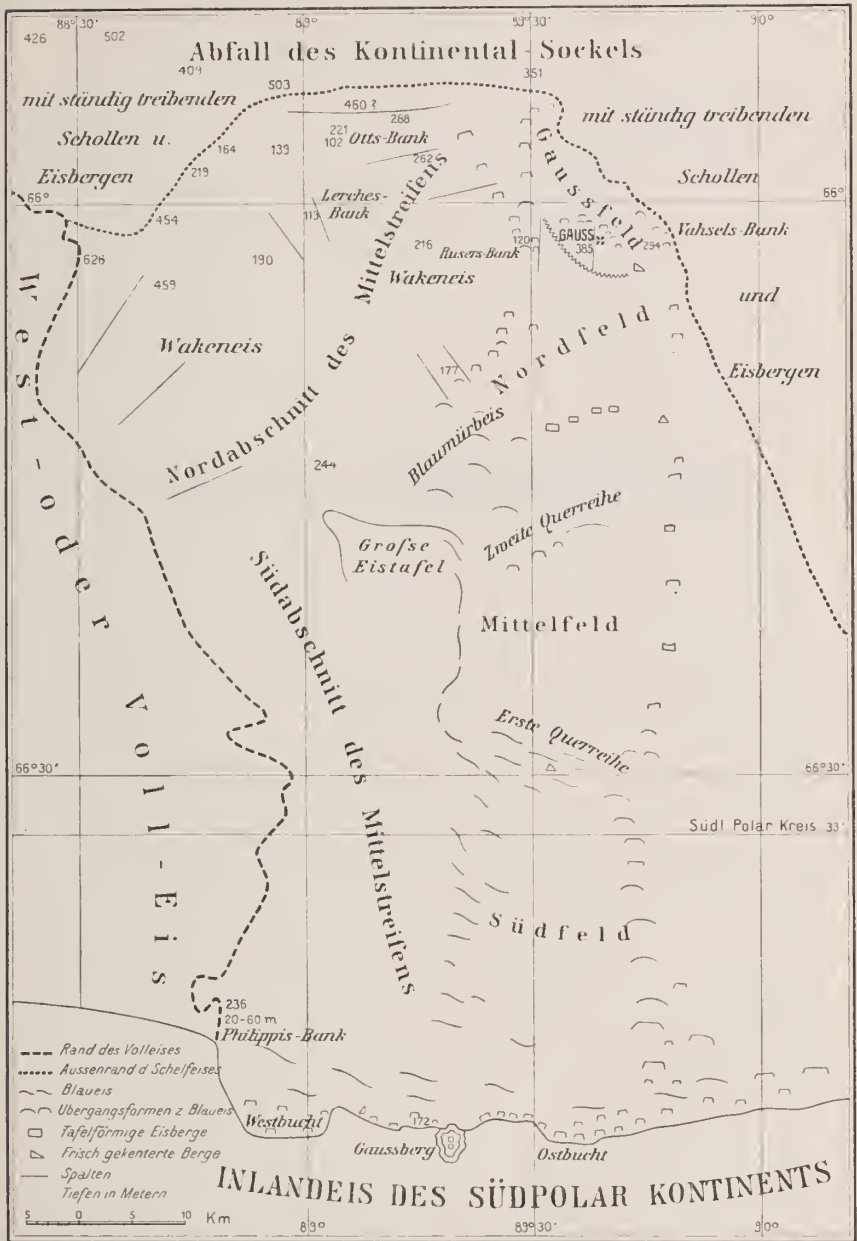
12. Die herrschenden Winde sind östlich, doch die Schiebungen des Schelfeises nordwärts, weil ihm im Westen Hemmungen vorliegen, welche die Bewegungen nordwärts lenken.

13. In dem flachen Wasser nordwestlich vom Gaußberg liegt das Schelfeis auf Grund. Nur hier geht es völlig in das Inlandeis über.

14. Das Schelfeis gliedert sich in eine jüngere Küstenzone und nördlich von dieser in drei senkrecht zu ihr, also nahezu südnördlich gelagerte Streifen, die als Schollen-, Berg- und Volleis-Streifen unterschieden wurden. Der erste besteht aus drei alten Scholleneisfeldern, die durch zwei Bergreihen von einander getrennt werden und selbst nur wenige Berge umschließen. Der Bergstreifen zerfällt in einen aus dichten Blaueisbergpackungen bestehenden Südb Abschnitt und in einen breiteren Nordabschnitt, der durch Berge, die auf Bänken festsitzen, gestützt wird, dazwischen aber neben alten Massen auch junge Scholleneisfelder und neu zugewanderte Berge enthält. Der Volleisstreifen ist eine so dichte Packung von Bergen, daß man eine einheitliche, schwimmende Inlandeismasse darin ver-

mutet. Bruchlinien und Täler weisen aber darauf hin, daß er eine Bergpackung ist. Das Volleis stößt seine äußersten Teile gelegentlich ab, hier Berge, dort Schollen, bildet aber nicht in gleicher Weise, wie das Inlandeis, Eisberge.

15. Das Gaußfeld gehörte nicht zum Schelfeis, da es nur für ein Jahr eine Bucht in der Nordostecke des Schelfeises füllte und sich dann wieder löste. Es hatte in dieser Zeit auch noch nicht die charakteristischen Formen des Schelfeises angenommen. Es hätte jedoch dem Schelfeise ganz oder teilweise auch für längere Zeiten eingefügt bleiben können, da seine Lösung ein Jahr nach seiner Fesselung mehr oder weniger auf Zufälligkeiten beruht hat.



Das Schelfeis nördlich vom Gaussberg.

Das West- oder Volleis gehört dauernd, das Gaussfeld vorübergehend zum Schelfeis. Die Grenze zwischen Blaueis und Würbeis liegt etwas südlich vom Breitengrad der grossen Eistafel.

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 10. Abhandlung

Über

die Verbiegung geodätischer Netze

von

M. Lagally

Vorgelegt am 2. Juli 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Im Anschluß an eine Abhandlung über „Geodätische Netze auf Rotationsflächen“¹⁾ soll hier die Frage nach der Verbiegungsfähigkeit geodätischer Netze auf beliebigen Flächen untersucht werden; dabei soll die Eigenschaft jeder Linie des Netzes, geodätisch zu sein, bei der Verbiegung erhalten bleiben.

Die Voraussetzung, daß bei der Verbiegung des Netzes sämtliche Knotenpunkte, in denen sich zwei Netzlinien schneiden, erhalten bleiben und die Längen der einzelnen Maschen sich nicht ändern, während die Winkel, unter denen sich die einzelnen geodätischen Linien schneiden, veränderlich gedacht sind, verlangt, daß in dem auf die beiden Scharen von geodätischen Linien als Parameterkurven bezogenen Linienelement der Fläche, auf der das Netz liegt:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

E und G bei der Verbiegung des Netzes unverändert bleiben, während F andere Werte annehmen kann.

Wenn die Differentialgleichung der geodätischen Linien, bekanntlich von der Form

$$du d^2 v - dv d^2 u + A du^3 + B du^2 dv + C du dv^2 + D dv^3 = 0$$

durch die Parameterkurven $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ erfüllt sein soll, müssen die Koeffizienten A und D verschwinden.

Das führt auf die beiden Gleichungen zwischen E , F und G :

$$(1) \quad \begin{cases} 2E \frac{\partial F}{\partial u} - F \frac{\partial E}{\partial u} = E \frac{\partial E}{\partial v} \\ 2G \frac{\partial F}{\partial v} - F \frac{\partial G}{\partial v} = G \frac{\partial G}{\partial u}, \end{cases}$$

¹⁾ Diese Berichte, Jahrgang 1909.

die den Ausgangspunkt der folgenden Untersuchung bilden. Zunächst lassen sich, nach Multiplikation mit $E^{-\frac{3}{2}}$, bzw. $G^{-\frac{3}{2}}$ die Gleichungen in folgende Form bringen:

$$\frac{\partial}{\partial u} (F E^{-\frac{3}{2}}) = \frac{\partial}{\partial v} E^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} (F G^{-\frac{3}{2}}) = \frac{\partial}{\partial u} G^{\frac{1}{2}}.$$

Daraus ergeben sich für F zwei verschiedene Ausdrücke:

$$(2) \quad \begin{cases} F = E^{\frac{1}{2}} \left[\int \frac{\partial E^{\frac{1}{2}}}{\partial v} du + \Psi(v) \right] \\ F = G^{\frac{1}{2}} \left[\int \frac{\partial G^{\frac{1}{2}}}{\partial u} dv + \Phi(u) \right], \end{cases}$$

deren Gleichsetzung eine Bedingung zwischen E und G gibt und in denen $\Phi(u)$ und $\Psi(v)$ zunächst willkürliche Funktionen sind.

Da bei einer Verbiegung des Netzes E und G erhalten bleiben, F aber, wenn man von einer Deformation der Fläche unter Konstanterhaltung des Linienelementes absieht, in einen andern Wert F_1 übergeht, kann diese Veränderung von F nur darin ihren analytischen Ausdruck finden, daß an Stelle von $\Phi(u)$ und $\Psi(v)$ nach der Verbiegung zwei neue Funktionen $\Phi_1(u)$ und $\Psi_1(v)$ getreten sind. Folglich ergeben sich zwei Gleichungen

$$F_1 = E^{\frac{1}{2}} \left[\int \frac{\partial E^{\frac{1}{2}}}{\partial v} du + \Psi_1(v) \right]$$

$$F_1 = G^{\frac{1}{2}} \left[\int \frac{\partial G^{\frac{1}{2}}}{\partial u} dv + \Phi_1(u) \right].$$

Subtrahiert man diese beiden Ausdrücke für F_1 von den entsprechenden für F , so folgt

$$F - F_1 = E^{\frac{1}{2}} [\Psi(v) - \Psi_1(v)]$$

$$F - F_1 = G^{\frac{1}{2}} [\Phi(u) - \Phi_1(u)].$$

Also besteht zwischen E und G eine Beziehung von der Form

$$E^{\frac{1}{2}} [\Psi(v) - \Psi_1(v)] = G^{\frac{1}{2}} [\Phi(u) - \Phi_1(u)].$$

Da man aber durch Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen $\bar{u} = f(u)$ das Linienelement der Parameterkurven $u = \text{const}$ um einen beliebigen, von u allein abhängigen Faktor ändern kann, und ähnliches für die Kurven $v = \text{const}$ bezüglich v gilt, geht die vorige Bedingung bei geeigneter Wahl der unabhängigen Veränderlichen in die einfache Gestalt

$$(3) \quad E = G$$

über. Es ergibt sich also der Satz:

Soll ein geodätisches Netz überhaupt eine Verbiegung zulassen, bei der es geodätisch bleibt und bei der nicht die Fläche, auf der es liegt, unter Konstanterhaltung des Linienelementes mitverbogen wird, so müssen — bei geeigneter Wahl der Parameter — seine sämtlichen Maschen Rhomben sein.

Die bloße Gleichsetzung der beiden Ausdrücke (2) für F hätte die Bedingung dafür ergeben, daß ein beliebiges Netz mit den Linienelementen $\sqrt{E} du$ und $\sqrt{G} dv$ der Netzkurven in ein geodätisches Netz verbogen werden kann. Man findet, wenn die willkürlichen Funktionen $\psi(v)$ und $\varphi(u)$ zu den Integralen genommen werden, aus (2) die Bedingungsgleichung

$$(2a) \quad E^{\frac{1}{2}} \int \frac{\partial E^{\frac{1}{2}}}{\partial v} du = G^{\frac{1}{2}} \int \frac{\partial G^{\frac{1}{2}}}{\partial u} dv,$$

aus der sich durch je zweimalige Differentiation nach u und v und Elimination leicht eine wenig übersichtliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ableiten läßt.

Es gibt also im allgemeinen keine liniengleiche Deformation, welche ein beliebig gegebenes Netz in ein geodätisches Netz überführt. Nur wenn die Gleichung (2a) erfüllt ist, gibt es ein und nur ein geodätisches Netz, das aus dem gegebenen durch Ver-

biegung hervorgeht; ist auch noch die Gleichung (3) erfüllt und das Netz ein Rhombennetz, so kann es nach dem vorigen Satz weiter so verbogen werden, daß es geodätisch bleibt.

Es entsteht nun die Frage nach den Flächen, auf welchen ein geodätisches Rhombennetz existiert. Diese Frage ist von Herrn Professor A. Voss¹⁾ untersucht und in folgender Weise beantwortet worden: Jede Fläche, welche durch zwei Scharen geodätischer Linien rhombisch geteilt wird, ist eine Liouvillesche Fläche; umgekehrt kann man auf jeder Liouvilleschen Fläche ∞^1 Kurvenscharen der genannten Art angeben. Auch die Deformationsmöglichkeit dieser doppelten Scharen von geodätischen Linien ist von ihm erkannt und aus der Differentialgleichung für den Koordinatenwinkel abgeleitet worden.

Im folgenden gebe ich einen anderen Beweis, der noch einige weitere Schlüsse zuläßt. Setzt man nach (3)

$$E^{\frac{1}{2}} = G^{\frac{1}{2}} = P(u, v),$$

so erhält man nach (2) für F die beiden Ausdrücke:

$$F = P \cdot \left[\int \frac{\partial P}{\partial v} du + \Psi(v) \right] = P \cdot \left[\int \frac{\partial P}{\partial u} dv + \Phi(u) \right].$$

Daraus folgt durch Differentiation nach u und v

$$\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}.$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist

$$P = P_1(u + v) + P_2(u - v),$$

wo P_1 und P_2 Funktionen von $(u + v)$ bzw. $(u - v)$ allein sind.

¹⁾ A. Voss, Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. Sitzungsber. der math.-phys. Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München, Bd. 36, Jahrg. 1906, pag. 247 u. f. insbesondere 268—272.

Es sind nun noch die in F eingehenden Funktionen $\Psi(v)$ und $\Phi(u)$ zu bestimmen. Man erhält:

$$\int \left(\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial P_2}{\partial v} \right) du + \Psi(v) = \int \left(\frac{\partial P_1}{\partial u} + \frac{\partial P_2}{\partial u} \right) dv + \Phi(u),$$

da

$$\frac{\partial P_1}{\partial u} = \frac{\partial P_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial v} = - \frac{\partial P_2}{\partial v}$$

ist, ergibt sich folgende Umformung:

$$\int \left(\frac{\partial P_1}{\partial u} - \frac{\partial P_2}{\partial u} \right) du + \Psi(v) = \int \left(\frac{\partial P_1}{\partial v} - \frac{\partial P_2}{\partial v} \right) dv + \Phi(u).$$

Schlägt man die jeweils nur von einer Veränderlichen, v oder u abhängigen Werte der Integrale an der unteren Grenze zu den additiven Funktionen, so folgt

$$P_1 - P_2 + \Psi(v) = P_1 - P_2 + \Phi(u),$$

also

$$\Psi(v) = \Phi(u) = c = \text{const};$$

so ist damit das Linienelement der Flächen, auf denen ein verbiegbares geodätisches Netz existiert, bestimmt:

$$(4) \quad \begin{cases} F = (P_1(u+v) + P_2(u-v))(P_1(u+v) - P_2(u-v) + c \\ E = G = (P_1(u+v) + P_2(u-v))^2. \end{cases}$$

Jedem beliebigen anderen Wert von c entspricht das Linienelement einer Fläche, auf welche das geodätische Netz aufgelegt werden kann, so daß also die Frage nach den Verbiegungen eines solchen Netzes gleichzeitig mit seiner Auffindung gelöst ist. Die Anzahl der Biegunetze beträgt ∞^1 .

Bevor diese Flächen, die durch das Linienelement (4) definiert sind, weiter untersucht werden sollen, sei eine andere Möglichkeit, die bisherigen Ergebnisse rein analytisch abzuleiten, kurz angedeutet. Da die beiden Differentialgleichungen (1) ein integrables System bilden sollen, müssen die beiden zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}$$

einander gleich sein. Bildet man diese beiden Ausdrücke aus den beiden Gleichungen (1) und setzt sie einander gleich, so erhält man nach einer einfachen Umformung mittels der Gleichungen (1) selbst folgende Integrabilitätsbedingung:

$$2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial \lg E}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial \lg G}{\partial v} = 2F \left(\frac{\partial^2 \lg G}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 \lg E}{\partial u \partial v} \right).$$

Da diese Gleichung ohne Änderung von E und G für verschiedene Werte von F erfüllt sein soll, müssen ihre beiden Seiten für sich verschwinden. Die rechte ergibt

$$\frac{\partial^2 \lg \frac{E}{G}}{\partial u \partial v} = 0$$

und bei geeigneter Wahl der unabhängigen Veränderlichen:

$$E = G;$$

hierauf folgt durch Nullsetzen der linken Seite der oben erhaltene Wert

$$E = G = (P_1(u + v) + P_2(u - v))^2.$$

Um nun die Natur der Flächen, auf denen ein verbiegbares geodätisches Netz möglich ist, zu erkennen, soll das bisher auf die Netzkurven als Parameterlinien bezogene Linien-element der Fläche

$$ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2,$$

wo E , F , G die durch (4) bestimmten Werte haben, auf die Diagonalkurven als Parameterlinien transformiert werden. Diese bilden, da sämtliche Maschen des Netzes Rhomben sind, ein Orthogonalsystem und genügen den Gleichungen

$$u + v = \alpha, \quad u - v = \beta.$$

Also ist

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad v = \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad du = \frac{d\alpha + d\beta}{2}, \quad dv = \frac{d\alpha - d\beta}{2};$$

$$ds^2 = E \frac{d\alpha^2 + 2d\alpha d\beta + d\beta^2}{4} + 2F \frac{d\alpha^2 - d\beta^2}{4} \\ + G \frac{d\alpha^2 - 2d\alpha d\beta + d\beta^2}{4}$$

oder unter Berücksichtigung von $E = G$:

$$ds^2 = \frac{E + F}{2} d\alpha^2 + \frac{E - F}{2} d\beta^2.$$

Durch Einsetzen der Werte (4) ergibt sich nach kurzer Umformung:

$$(5) \quad ds^2 = (P_1(\alpha) + P_2(\beta)) \left[\left(P_1(\alpha) + \frac{c}{2} \right) d\alpha^2 + \left(P_2(\beta) - \frac{c}{2} \right) d\beta^2 \right].$$

Dieses Linienelement gehört dem Liouvilleschen Typus an und kann durch Einführung neuer Parameter

$$\lambda = \int \sqrt{P_1(\alpha) + \frac{c}{2}} d\alpha, \quad \mu = \int \sqrt{P_2(\beta) - \frac{c}{2}} d\beta$$

auf die bekannte isometrische Form

$$(6) \quad ds^2 = (F_1(\lambda) + F_2(\mu)) (d\lambda^2 + d\mu^2)$$

gebracht werden, wobei $F_1(\lambda)$ und $F_2(\mu)$ Funktionen von λ bzw. μ allein sind.

Durch Einführung von zwei neuen Größen

$$\varphi_1(u + v) = P_1(u + v) + \frac{c}{2}, \quad \varphi_2(u - v) = P_2(u - v) - \frac{c}{2}$$

werden die beiden Formen (4) und (5) des Linienelementes etwas einfacher:

$$(4a) \quad ds^2 = (\varphi_1(u + v) + \varphi_2(u - v))^2 (du^2 + dv^2) \\ + 2(\varphi_1(u + v)^2 - \varphi_2(u - v)^2) du dv,$$

$$(5a) \quad ds^2 = (\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\beta)) (\varphi_1(\alpha) d\alpha^2 + \varphi_2(\beta) d\beta^2).$$

Durch Änderung von φ_1 und φ_2 um zwei gleiche, aber dem Vorzeichen nach verschiedene additive Konstante erhält man sämtliche Biegungsnetze.

Bezeichnet man nun mit ω den Winkel der Parameterkurven u und v , so ist

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin \omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Daraus folgt

$$\cos^2 \frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{EG} + F}{\sqrt{EG}} = \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}$$

$$\sin^2 \frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{EG} - F}{\sqrt{EG}} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}$$

und

$$ds^2 = \frac{\varphi_1^2(a)}{\cos^2 \frac{\omega}{2}} da^2 + \frac{\varphi_2^2(\beta)}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} d\beta^2.$$

Durch Änderung der unabhängigen Veränderlichen:

$$a = \int \varphi_1(a) da, \quad b = \int \varphi_2(\beta) d\beta$$

kann man dem Linienelement die folgende Form geben

$$ds^2 = \frac{da^2}{\cos^2 \frac{\omega}{2}} + \frac{db^2}{\sin^2 \frac{\omega}{2}},$$

welche für Systeme geodätischer Ellipsen und Hyperbeln charakteristisch ist.

Aus (5) und (6) folgt der Satz: Wenn ein geodätisches Netz verbiegbar ist, liegt es auf einer Liouvilleschen Fläche; seine Diagonalkurven bilden dasjenige Orthogonalsystem der Fläche, welches aus den ausgezeichneten geodätischen Ellipsen und Hyperbeln besteht, und diejenigen geodätischen Linien, deren Bogenlängen für sämtliche Ellipsen und Hyperbeln des Or-

thogonalsystems konstante Summen oder Differenzen haben, sind gerade die Kurven des Netzes.

Es ist nun noch die Frage zu lösen, ob jedes Netz, welches den Bedingungen des obigen Satzes genügt, in der Tat verbiegbar ist. Hiezu muß untersucht werden, ob es möglich ist, ein gegebenes Liouvillesches Linienelement

$$ds^2 = (F_1(\lambda) + F_2(\mu)) (d\lambda^2 + d\mu^2)$$

auf die Form (5a)

$$ds^2 = (\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\beta)) (\varphi_1(\alpha) d\alpha^2 + \varphi_2(\beta) d\beta^2)$$

zu transformieren. Die Möglichkeit dieser Umwandlung hängt von dem gleichzeitigen Bestehen folgender vier Gleichungen ab:

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) &= \varphi_1(\alpha) + \varkappa & d\lambda^2 &= \varphi_1(\alpha) d\alpha^2 \\ F_2(\mu) &= \varphi_2(\beta) - \varkappa & d\mu^2 &= \varphi_2(\beta) d\beta^2. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet \varkappa eine Konstante. Die Transformation hängt nur von der Auswertung der durch die Gleichungen

$$d\lambda^2 = (F_1(\lambda) - \varkappa) d\alpha^2, \quad d\mu^2 = (F_2(\mu) + \varkappa) d\beta^2$$

gegebenen Integrale ab, und ist wegen der Konstanten \varkappa auf ∞ viele Weise möglich.

Führt man wieder den Winkel $\frac{\omega}{2}$ ein, welchen eine geodätische Linie mit einem geodätischen Kegelschnitt bildet, so ist

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\omega}{2} &= \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2} = \frac{F_1(\lambda) - \varkappa}{F_1 + F_2} \\ \sin^2 \frac{\omega}{2} &= \frac{\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2} = \frac{F_2(\mu) + \varkappa}{F_1 + F_2}, \end{aligned}$$

also

$$(7) \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} = \frac{F_2(\mu) + \varkappa}{F_1(\lambda) - \varkappa}.$$

Diese Gleichung gestattet, zu jeder Konstanten \varkappa einen Winkel ω zu finden. Es gibt also auf jeder Liouvilleschen Fläche ∞^1 geodätische Netze, die verbiegbar sind und die alle das nämliche System geodätischer Ellipsen und Hyperbeln zu Diagonalkurven haben.

Setzt man in (7) $\frac{\omega}{2} = 0$ oder $\frac{\omega}{2} = 90^\circ$, so muß $F_2(\mu) + z = 0$ oder $F_1(\lambda) - z = 0$ sein; d. h. sämtliche Kurven des geodätischen Netzes berühren einzelne geodätische Ellipsen und Hyperbeln, deren Parameter durch die Wurzeln obiger Gleichungen gegeben sind, und welche die Enveloppe des Netzes bilden. Diese Enveloppe ist für jedes auf der Fläche liegende verbiegbare geodätische Netz eine andere; umgekehrt kann jede geodätische Ellipse oder Hyperbel als Teil der Enveloppe eines solchen Netzes aufgefaßt werden. — Da die einzelnen Zweige der Enveloppe eines Netzes sich senkrecht schneiden, muß eine geodätische Linie, welche eine geodätische Ellipse und eine geodätische Hyperbel in unmittelbarer Nähe des Schnittpunktes berührt, an dieser Stelle die geodätische Krümmung ∞ haben, was der Definition der geodätischen Linien zu widersprechen scheint. Setzt man jedoch $F_2(\mu) = -z$, $F_1(\lambda) = z$ in das Linienelement (6) der Fläche ein, so findet man $ds^2 = 0$; die einzelnen Teile der Enveloppe schneiden sich also in solchen Punkten der Fläche, in denen diese von einer Minimalebene berührt wird. Dort fällt die Flächennormale und mithin auf die Schmiegungeebene der geodätischen Linien mit der Tangentialebene der Fläche zusammen. Da sich in einem imaginären Flächenpunkt nicht zwei reelle Flächenkurven schneiden können, kann von den beiden Teilen der Enveloppe, einer geodätischen Ellipse und Hyperbel, höchstens der eine reell sein. Daß auch die ganze Enveloppe imaginär sein kann, lehrt das Beispiel der geradlinigen Erzeugenden eines Hyperboloids.

Setzt man in (7) $F_1(\lambda) = \infty$ oder $F_2(\mu) = \infty$, so wird ebenfalls $\frac{\omega}{2}$ zu Null oder 90° . In allen Punkten der geodätischen Ellipsen und Hyperbeln also, welche den Wurzelwerten λ und μ der obigen Gleichungen entsprechen und die für alle verbiegbaren geodätischen Netze einer Fläche die gleichen sind, werden die Kurven der ihnen orthogonalen Schar von den geodätischen Linien berührt. Die so bestimmten

geodätischen Ellipsen und Hyperbeln sind dann Kurven von Spitzen oder Selbstberührungspunkten der geodätischen Linien sämtlicher Netze. In allen Punkten dieser Kurven ist nach (6) $ds^2 = \infty$, was außer in etwaigen besonderen Punkten der Fläche in ihrer unendlich fernen Kurve der Fall ist.

Bei den Rotationsflächen als speziellem Fall der Liouvilleschen Flächen ist eine der Funktionen $F_1(\lambda)$ oder $F_2(\mu)$ eine Konstante. Die Enveloppe eines geodätischen Netzes besteht also nur aus einem oder mehreren Parallelkreisen von gleichem Radius, und kann reell oder imaginär sein. Während zu jedem Parallelkreis als Enveloppe ein anderes geodätisches Netz gehört, ist die Spitzenkurve sämtlicher Netze nach dem Clairautschen Satz der ∞ ferne Parallelkreis.

In der Ebene sind die einzigen Kurvensysteme mit Liouvilleschem Linienelement die Systeme konfokaler Ellipsen und Hyperbeln mit einigen Spezialfällen (konfokale Parabeln, konzentrische Kreise und Geradenbüschel). Zu jedem konfokalen System gehören ∞^1 von Geraden gebildete Rhombennetze, deren sämtliche Gerade eine reelle Ellipse oder Hyperbel des konfokalen Systems berühren. Den Übergangsfall bildet das bekannte Rhombennetz, dessen beide Geradenscharen die durch die beiden Brennpunkte gehenden Strahlenbüschel bilden.¹⁾

Ein ebenes geodätisches Rhombennetz ist in der Ebene selbst starr,²⁾ kam aber bekanntlich in das Netz der geradlinigen Erzeugenden eines einschaligen Hyperboloids verbogen werden. Die Diagonalkurven dieses Netzes, die Krümmungslinien der Fläche zweiter Ordnung bilden also ein System geodätischer Ellipsen und Hyperbeln, was auch aus dem Linienelement ersichtlich ist. Es gibt also auf jeder Fläche zweiter Ordnung ∞ viele deformierbare geodätische Netze; jedes von ihnen hat zwei symmetrisch gelegene, reelle oder imaginäre

¹⁾ Vgl. S. Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächen-deformation. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 6. Bd., 1897, pag. 55, 56.

²⁾ Ausgenommen ein von zwei Scharen paralleler Geraden gebildetes Netz.

Krümmungslinien der anderen Schar zur Enveloppe; die unendlich ferne Spitzenkurve ist je nach der Art der Fläche reell oder imaginär. — Es läßt sich übrigens leicht zeigen, daß das von den geradlinigen Erzeugenden gebildete Netz das einzige geodätische Netz einer Fläche zweiter Ordnung ist, welches noch auf andere Flächen zweiter Ordnung als geodätisches Netz aufgelegt werden kann.

Die Frage nach solchen Flächen, auf denen es mehr als ∞^1 verbiegbare geodätische Netze gibt, ist gleichbedeutend mit der Frage nach solchen Liouvilleschen Flächen, auf denen es mehr als ein System geodätischer Ellipsen und Hyperbeln gibt. Mit dieser haben sich u. a. S. Lie und G. Darboux beschäftigt, ohne sie jedoch vollständig zu lösen.¹⁾ Gibt es auf einer Fläche zwei Systeme geodätischer Ellipsen und Hyperbeln, so gibt es ∞ viele; mithin ∞^2 verbiegbare geodätische Netze. Von ihnen ist noch ein weiter Schritt bis zu den Flächen konstanter Krümmung und zur Ebene, die 8^4 Systeme von geodätischen Ellipsen und Hyperbeln und folglich ∞^5 verbiegbare geodätische Netze besitzen.

¹⁾ Darboux, leçons sur la théorie des surfaces, III, No. 588, 595, 596.

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch - physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 11. Abhandlung

Koordinatenberechnung und Netzanschlüsse
der südbayerischen Dreieckskette

von

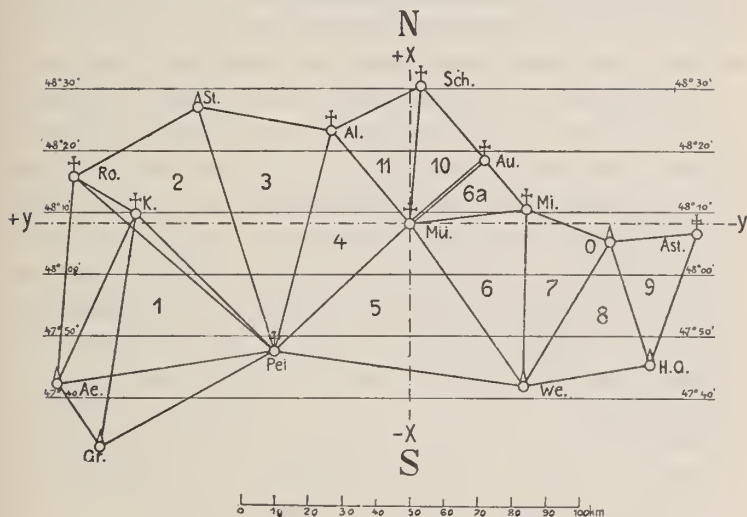
M. Schmidt

Vorgelegt am 5. November 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Südbayerische Dreiecks-kette.



In den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Klasse der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften, Band 36, 1906, Heft 1 sind die Ergebnisse der Winkelmessung und Seitenberechnung einer im südlichen Bayern längs des 48. Breitenparallels in den Jahren 1901 bis 1904 gemessenen Hauptdreiecks-kette mitgeteilt worden, welche zur Verbindung des bayerischen Hauptdreiecksnetzes mit der österreichischen Triangulierung bei Salzburg und mit der an das rheinische Dreiecksnetz angeschlossenen württembergischen Dreiecks-kette von Hammer dient und ein Glied der auf dem genannten Parallel in Ausführung begriffenen Längengradmessung bildet. Der Berechnung dieser Dreiecks-kette liegt die vom Oberst Bonne im Jahre 1801 zwischen München und Aufkirchen gemessene altbayerische Basis zu Grunde, welche auch bei der in amtlichem Auftrag durch Karl v. Orff im Jahre 1873 ausgeführten wissenschaftlichen Bearbeitung des bayerischen Hauptdreiecksnetzes Verwendung gefunden hat.

Die altbayerische Grundlinie ist nur einmal mittelst eines

Basisapparates gemessen worden, der aus fünf an den Enden mit Metallkappen versehenen Holzstangen von je fünf Meter Länge besteht, die bei der Messung in wagrechte Lage gebracht und mit ihren ebenen Endflächen aneinander gelegt wurden.

Um für die Richtigkeit dieser Messung die erforderliche Probe zu erhalten, ist bei der Weiterführung der Landestriangulierung bis an die nördliche Landesgrenze im Jahre 1807 durch die bayerische Katasterkommission eine zweite, sogenannte Verifikationsbasis, in der Gegend von Nürnberg mit einem aus fünf eisernen Stäben von je vier Meter Länge bestehenden Basisapparat gemessen worden, der von Reichenbach in München angefertigt war. Da die aus dieser Messung abgeleiteten Hauptdreiecksseiten mit den entsprechenden, aus der altbayerischen Grundlinie berechneten Werten gute Übereinstimmung zeigten, so wurden beide Grundlinienmessungen als zuverlässig angesehen und der endgültigen Berechnung des bayerischen Hauptdreiecksnetzes zu Grunde gelegt.

Die Seitenberechnung für den südlich der Donau gelegenen Teil des Hauptdreiecksnetzes geht von der Grundlinie bei München aus, jene des nördlichen Netztheiles von der fränkischen Grundlinie bei Nürnberg.

Beide Netztheile stehen durch das Ausgleichungspolygon XII der v. Orff'schen Bearbeitung der Bayerischen Landesvermessung (B. L. V.) miteinander in Beziehung, in welchem sich bei der Seitengleichung I (B. L. V., S. 393) der logarithmische Widerspruch zwischen den aus den beiderseitigen Grundlinien hergeleiteten Dreiecksseiten Wülzburg—Habsberg und Altomünster—Schweitenkirchen zu 30 Einheiten der 7. Logarithmenstelle ergab, welcher durch entsprechende Verbesserung der beteiligten Winkel ausgeglichen wurde.

Für die Ausführung einer neuen Berechnung der Seiten und Koordinaten der in der südbayerischen Dreieckskette zusammengefaßten Dreiecke kommt zunächst nur die altbayerische Grundlinie in Betracht, wenn man deren Werte mit jenen der Landesvermessung vergleichen will. In dieser Absicht wurde bei Berechnung der südbayerischen Kette auch das Soldnersche

Tabelle I.

Zusammenstellung der ausgeglichenen Winkel und Seiten der südbayerischen Dreieckskette.

Dreieck Nr.	Eckpunkte	Ausgeglichenen Winkel	Logarithmen der Gegenseiten
1	Ro.	53 ⁰ 00' 39"93	4.810 2266.5
	Pei.	50 16 40.43	4.793 8268.9
	Ae.	76 42 49.52	4.896 0355.7
		180 ⁰ 00' 9"88	
1 a	Ro.	62 ⁰ 50' 26"87	4.746 4113.4
	Ae.	20 04 56.53	4.332 9061.5
	K.	97 04 39.61	4.793 8268.9
		180 ⁰ 00' 3"01	
1 b	Ae.	56 ⁰ 37' 53"00	4.760 5814.1
	K.	69 26 11.80	4.810 2266.5
	Pei.	53 56 2.81	4.746 4113.4
		180 ⁰ 00' 7"61	
1 c	Ae.	64 ⁰ 49' 13"84	4.768 9945.3
	Pei.	19 30 34.77	4.336 0525.0
	Gr.	95 40 14.59	4.810 2266.5
		180 ⁰ 00' 3"20	
1 d	Ae.	121 ⁰ 27' 06"84	4.842 5223.9
	K.	15 24 48.49	4.336 0525.0
	Gr.	43 08 7.29	4.746 4113.4
		180 ⁰ 00' 2"62	
1 e	Gr.	52 ⁰ 32' 7"30	4.760 5814.1
	K.	54 01 23.31	4.768 9945.3
	Pei.	73 26 37.58	4.842 5223.9
		180 ⁰ 00' 8"19	

Dreieck Nr.	Eck- punkte	Ausgegliche ne Winkel	Logarithmen der Gegenseiten
2	Pei.	30° 33' 38"84	4.610 2282.1
	Ro.	69 31 53.63	4.874 5940.5
	St.	79 49 35.13	4.896 0355.7
		180° 00' 7"60	
3	Pei.	32° 33' 28"21	4.608 3376.7
	St.	63 59 49.93	4.831 0888.6
	Al.	83 26 48.77	4.874 5940.5
		180° 00' 6"91	
4	Pei.	32° 22' 55"01	4.560 0587.8
	Al.	56 01 50.33	4.749 9840.9
	Mü.	91 35 19.82	4.831 0888.6
		180° 00' 5"16	
5	Pei.	49° 57' 55"94	4.766 9387.2
	Mü.	82 36 57.21	4.879 2915.1
	We.	47 25 15.09	4.749 9840.9
		180° 00' 8"24	
6	We.	35° 26' 32"03	4.532 7460.9
	Mü.	60 39 58.64	4.709 8166.6
	Mi.	83 53 33.72	4.766 9387.2
		180° 00' 4"39	
6 a	Mü.	36° 01' 14"33	4.302 6326.2
	Au.	87 22 51.43	4.532 7460.9
	Mi.	56 35 55.68	4 454 8006.7
		180° 00' 1"44	

Koordinatenberechnung und Netzanschlüsse.

7

Dreieck Nr.	Eck- punkte	Ausgeglichene Winkel	Logarithmen der Gegenseiten
7	We.	30 ⁰ 24' 0"36	4.423 2231.7
	Mi.	71 22 15.86	4.695 6738.4
	O.	78 13 47.03	4.709 8166.6
		180 ⁰ 00' 3"25	
8	We.	50 ⁰ 00' 5"24	4.585 8519.6
	O.	49 26 8.75	4.582 2178.3
	H. G.	80 33 49.68	4.695 6738.4
		180 ⁰ 00' 3"67	
9	H. G.	39 ⁰ 03' 2"02	4.430 7252.7
	O.	76 43 48.08	4.619 6288.4
	Ast.	64 13 12.45	4.585 8519.6
		180 ⁰ 00' 2"55	
10	Mü.	45 ⁰ 29' 38"09	4.464 7222.8
	Sch.	44 11 32.08	4.454 8006.7
	Au.	90 18 51.93	4.611 5204.7
		180 ⁰ 00' 2"10	
11	Mü.	43 ⁰ 36' 51"91	4.462 2190.3
	Al.	76 36 22.96	4.611 5204.7
	Sch.	59 46 47.72	4.560 0587.8
		180 ⁰ 00' 2"59	

Koordinatensystem mit der Spitze des Nordturmes der Frauenkirche in München als Nullpunkt sowie der Halbmesser der von Soldner gewählten Projektionskugel $R = 6388172\text{ m}$, der Logarithmus der Seite München—Aufkirchen mit dem Werte 4.454 8006.7 und der aus der Azimutmessung Henrys folgende Direktionswinkel dieser Seite $138^{\circ} 59' 53''.00$ (B. L. V., S. 501) unverändert beibehalten.

Tabelle I enthält die Zusammenstellung der für die Koordinatenberechnung verwendeten ausgeglichenen Winkel und der Seitenlogarithmen mit Hinzufügung der entsprechenden Werte der beiden Dreiecke 10 und 11, welche für den Anschluß der fränkischen Grundlinie und einer über Nürnberg zur nördlichen Landesgrenze führenden Dreieckskette erforderlich sind. Durch Einfügen dieser beiden Dreiecke erhält man für den mittleren Teil der südbayerischen Kette ein geschlossenes Kranzsystem von 6 Dreiecken mit München als Zentralpunkt, das unter Annahme gleicher Winkelgewichte ausgeglichen worden ist.

Die Ausgleichung ist mit acht Bedingungsgleichungen und zwar sechs Dreieckswinkelgleichungen, einer Stationsgleichung und einer Seitengleichung durchgeführt worden und hat den mittleren Winkelfehler $\pm 0''.82$ ergeben.

Als Beobachtungswerte wurden hierbei außer den in Sitzgsb. 1906, Band 36, Heft 1 zusammengestellten Winkeln die der B. L. V., S. 349 und 350 entnommenen Winkel der Dreiecke 10 und 11 eingeführt.

Mit den in Tabelle I enthaltenen ausgeglichenen Winkeln und Seitenlogarithmen ist sodann die Berechnung der rechtwinkligen sphärischen Koordinaten der Dreieckspunkte ausgeführt, deren Werte neben den ursprünglichen Koordinaten der Landesvermessung in Tabelle II angegeben sind. Hiezu ist noch zu bemerken, daß die Koordinaten der beiden Punkte Kirchheim und Grünten nach dem für Doppelpunkteinschaltungen gebräuchlichen Verfahren berechnet wurden.

In den beiden letzten Spalten der Tabelle II sind die auf den Schwerpunkt des Systems bezogenen Koordinaten auf-

Koordinatenberechnung und Netzanschlüsse.

Tabelle II.
Sphärische rechtwinklige Koordinaten für die Punkte der südbayerischen Dreiecksreihe

Nr.	Stationen	nach der Landesvermessung		nach der Neuberechnung		bezogen auf den Schwerpunkt des Systems	
		x	y	x'	y'	(x)	(y)
1	Aenger	- 45 909,45	+ 106 021,72	- 45 909,40	+ 106 022,59	- 40 139,43	+ 88 641,41
2	Roggenburg	+ 15 993,12	+ 99 813,94	+ 15 993,27	+ 99 814,29	+ 21 763,24	+ 82 433,11
3	Peissenberg	- 37 406,92	+ 41 985,02	- 37 407,17	+ 41 985,35	- 31 637,20	+ 24 604,17
4	Staufersberg	+ 34 377,91	+ 63 435,94	+ 34 378,18	+ 63 435,96	+ 40 148,15	+ 46 054,78
5	Altomünster	+ 27 772,15	+ 23 394,70	+ 27 772,31	+ 23 394,79	+ 33 542,28	+ 6 013,61
6	München, nördlicher Franenturm	0,00	0,00	0,00	0,00	+ 5 769,97	- 17 351,18
7	Aufkirchen	+ 18 696,58	- 21 506,37	+ 18 696,58	- 21 506,37	+ 24 466,55	- 38 887,55
8	Mitbach	+ 2 960,82	- 33 970,63	+ 2 960,89	- 33 970,55	+ 8 730,86	- 51 351,73
9	Wendelstein	- 48 294,72	- 32 962,63	- 48 294,39	- 32 962,15	- 42 524,42	- 50 343,33
10	Hochgern	- 42 665,58	- 70 759,91	- 42 665,48	- 70 758,91	+ 36 895,51	- 88 139,09
11	Asten	- 3 814,77	- 85 782,52	- 3 814,73	- 85 781,59	+ 1 955,24	- 103 162,77
12	Schweitenkirchen	+ 40 804,36	- 2 498,69	+ 40 804,48	- 2 498,65	+ 46 574,45	- 19 879,83
13	Kirchheim	+ 4 304,22	+ 81 741,05	+ 4 304,18	+ 81 741,12	+ 10 074,15	+ 64 359,94
14	Grünten	- 64 146,21	+ 94 295,61	- 64 146,37	+ 94 296,45	- 58 376,40	+ 76 915,27
15	München, Sternwarte	+ 778,18	- 2 494,58	+ 778,11	- 2 494,60	+ 6 548,08	- 19 875,78
16	Oberhof	-	-	- 5 995,91	- 58 909,62	-	-

Tabelle III.

Koordinatunterschiede der Stationenpunkte der südbayerischen Dreieckskette und der Landesvermessung.

Nr.	Stationen	$dx = x' - x$ cm	$dy = y' - y$ cm	$rx = x'' - x$ cm	$ry = y'' - y$ cm	$rx = dx - vx$ cm	$ry = dy - vy$ cm
1	Aenger Pyr. . .	+ 5	+ 87	+ 10	+ 31	- 5	+ 56
2	Roggenburg Tm. .	+ 15	+ 35	+ 9	+ 33	+ 6	+ 2
3	Peissenberg Tm. .	- 25	+ 33	+ 6	+ 32	- 31	+ 1
4	Staufersberg Pyr. .	+ 27	+ 2	+ 7	+ 36	+ 20	- 34
5	Allomünster Tm. .	+ 16	+ 9	+ 5	+ 36	+ 11	- 25
6	München, n. Fr.-Tm.	0	0	+ 4	+ 31	- 4	- 34
7	Anfkirchen Tm. .	0	0	+ 3	+ 35	- 3	- 35
8	Mitbach Tm. . .	+ 7	+ 8	+ 2	+ 34	+ 5	- 26
9	Wendelstein Pyr. .	+ 33	+ 48	+ 2	+ 32	+ 31	+ 16
10	Hochgern Pyr. . .	+ 10	+ 100	0	+ 36	+ 10	+ 64
11	Asten Tm. . . .	+ 4	+ 93	0	+ 34	+ 4	+ 59
12	Schweitenkirchen Tm.	+ 12	+ 4	+ 4	+ 36	+ 8	- 32
13	Kirchheim Tm. . .	- 4	+ 7	+ 8	+ 35	- 12	- 28
14	Grünten Pyr. . .	- 16	+ 84	+ 9	+ 31	- 25	+ 53
15	München, Sternw. .	- 7	- 2	+ 4	+ 34	- 11	- 36

$$[dx] = + 77 \text{ cm} \quad [dy] = + 508 \text{ cm}$$

$$dx_0 = + 5 \text{ cm}$$

$$dy_0 = + 34 \text{ cm}$$

$$m_x = \pm 16 \text{ cm} \quad m_y = \pm 38 \text{ cm}$$

geführt, dessen Lage gegen den Koordinatenursprung der Landesvermessung durch die unter Nr. 6 angegebenen Koordinatenwerte bestimmt ist.

Zum Zwecke der Vergleichung der neu berechneten Koordinatenwerte mit jenen der Landesvermessung sind ferner die Unterschiede

$$x' - x = dx \quad \text{und} \quad y' - y = dy$$

gebildet und in Tabelle III zusammengestellt worden.

Um beide Punktsysteme in möglichst gute Übereinstimmung zu bringen, denkt man sich dieselben nach Helmert (Längengradmessung I, 1893, S. 47) so aufeinander gelegt und gegenseitig verschoben, daß die Quadratsumme der Abstände gleichnamiger Punkte ein Minimum ist.

Man verfährt dabei in der Weise, daß der Schwerpunkt der in Betracht kommenden Punkte der einen Figur als Anfangspunkt rechtwinkliger Koordinaten (x) , (y) gewählt wird deren Werte man für alle diese Punkte berechnet.

Dreht man nun die zweite Figur um den Koordinatenanfang im Sinne wachsender Direktionswinkel um δ , verschiebt dieselbe um δx und δy und ändert man zugleich ihren Maßstab durch Multiplikation mit dem Faktor $(1 - \mu)$, so lassen sich die Variablen δ , μ und die Koordinatenänderungen des Nullpunktes dx_0 und dy_0 derart bestimmen, daß die Quadratsumme der Abstände gleichnamiger Punkte ein Minimum ist.

Dieser Bedingung genügen im vorliegenden Falle die Werte der Variablen

$$dx_0 = + \frac{[dx]}{n} = + 0,05 \text{ m}; \quad dy_0 = + \frac{[dy]}{n} = + 0,34 \text{ m}$$

$$\delta = - \rho'' \frac{[(x) dy - (y) dx]}{[(x)^2 + (y)^2]} = + 0,11;$$

$$\mu = - \frac{[(x) dx + (y) dy]}{[(x)^2 + (y)^2]} = - 24,6 \times 10^{-9}.$$

Die berechneten Größen dx_0 , dy_0 , δ und μ sind bei den hier betrachteten beiden Punktsystemen als Verbesserungen der Koordinatenwerte der Landesvermessung zu nehmen.

Die wegen der Nullpunktverschiebung, Orientierungs- und Maßstabänderung verbesserten Koordinatenwerte der Landesvermessung sind sodann:

$$\begin{aligned}x'' &= x + dx_0 + (y) \delta - (x) \cdot \mu \\y'' &= y + dy_0 - (x) \delta - (y) \cdot \mu.\end{aligned}$$

Hiermit erhält man die in Tabelle III eingetragenen Koordinatenverbesserungen

$$v_x = x'' - x \quad \text{und} \quad v_y = y'' - y$$

und die Restfehler

$$r_x = dx - v_x; \quad r_y = dy - v_y.$$

Aus diesen ergeben sich schließlich die mittleren Koordinatenfehler der Punkte der Landesvermessung

$$m_x = \pm 16 \text{ cm}; \quad m_y = \pm 38 \text{ cm}$$

sowie der mittlere lineare Abstand der gleichnamigen Punkte in beiden Systemen

$$m_r = \pm 41 \text{ cm}.$$

Die größten Restfehler mit den Werten + 64, + 59, + 56 und + 53 cm zeigen die Punkte Hochgern, Asten, Aenger und Grünten, welche mit Ausnahme des Turmpunktes Asten mit Pyramidensignalen bebaut waren, deren Spitzen den Dreieckspunkt bezeichneten. Diese nicht unbeträchtlichen Fehler erklären sich zum Teil dadurch, daß die genaue örtliche Festlegung der Pyramidenspitzen in der Bodenfläche zur Zeit der Ausführung der Winkelmessungen unterblieb und daß bei der nachträglich vorgenommenen Versicherung der Dreieckspunkte mit Marksteinen die ursprüngliche Lage dieser Punkte sich nicht mehr mit voller Sicherheit bestimmen ließ, sondern nur nach den im Boden noch vorgefundenen Resten des Holzwerkes der Pyramiden ermittelt wurde, da die Pyramiden inzwischen beseitigt oder verfallen waren.

Berechnet man die den Werten m_x und m_y entsprechenden Richtungsfehler $d\varphi$ für die Seiten der Dreieckskette auf Grund der Beziehung

$$d\varphi = \rho'' \left(\frac{\sin \varphi}{s} \cdot m_y - \frac{\cos \varphi}{s} m_x \right),$$

in welcher s die Längen und φ die Direktionswinkel der Seiten bezeichnen, so findet sich, wenn nur das eine Seitenende als unsicher betrachtet wird, im Mittel

$$m\varphi_y = \pm 1.17; \quad m\varphi_x = \pm 0.55 \quad \text{und} \quad m\varphi_r = \sqrt{m\varphi_y^2 + m\varphi_x^2} \\ = \pm 1.29.$$

Nimmt man beide Endpunkte der Dreiecksseiten als veränderlich an und führt die Richtungsfehler in Winkelfehler über, so erhält man den mittleren Winkelfehler

$$m_w = \pm 2 m\varphi_r = \pm 2.58.$$

Nach B. L. V., S. 483 hat sich der mittlere Fehler der auf eine 10 fache Repetition gestützten Bestimmung des Winkels zweier Richtungen aus der Netzausgleichung zu $e = \pm 2.45$ ergeben. Beide Werte stimmen also recht gut überein und es kann somit mit großer Wahrscheinlichkeit angenommen werden, daß die in Tabelle III nachgewiesenen Koordinatenrestfehler zufälliger Natur sind und außerdem in den Fehlern der älteren Winkelmessungen nach dem Repetitionsverfahren, in der Unsicherheit der Festlegung und Wiederherstellung der ursprünglichen Dreieckspunkte, sowie in den im Laufe der Zeit eingetretenen Lageänderungen ihren Grund haben, welchen die als Zielpunkte benützten Spitzen hoher Türme mit aus Holz gezimmerten Helmen unter dem Einfluß von Wind und Wetter unterliegen.

Hiezu kommt noch, daß bei der Zentrierung älterer Winkelmessungen auf Türmen die von der Mitte des Turm-mauerwerks abweichende Lage der Turmspitzen in der Regel keine entsprechende Berücksichtigung gefunden hat.

Die Größe der derzeitigen Abweichung der Turmspitzen von den Turmachsen läßt sich zwar nachträglich ermitteln, allein es bleibt zweifelhaft, ob nicht im Laufe der inzwischen verflissenen langen Zeit durch äußere Einflüsse, wie z. B. durch Stürme, merkliche Verschiebungen im Zimmerwerk der Turm-

helme und infolgedessen Lageänderungen der Turmspitzen eingetreten sind.

Auf Vorgänge dieser Art könnte aus den für die Spitze des 98 m hohen Nordturmes der Frauenkirche in München gefundenen Koordinatenänderungen $dx_0 = +0.05$ m und $dy_0 = +0.34$ m geschlossen werden, welchen eine Verschiebung der Turmspitze nach Osten, d. i. in der Richtung der vorherrschenden Winde, entspricht.

Bei der großen Angriffsfläche, welche die hölzerne Kuppel des Turmes bei 11 m Höhe und 14,5 m Durchmesser dem Winddruck darbietet, ist dieselbe jedenfalls der Wirkung großer Schubkräfte ausgesetzt, aber gleichwohl kann eine so beträchtliche Verschiebung in dem gut gefügten und verstrebtten Zimmerwerk der Turmkuppel nicht als wahrscheinlich angesehen werden, da dasselbe überdies durch die allseitig geschlossene Dachverschalung und ihre Verkleidung mit Kupferblech eine sehr große Widerstandsfähigkeit gegen Formänderung erhalten hat.

Zudem haben sehr sorgfältig ausgeführte Messungen ergeben, daß das untere Ende der 6 m langen und 27 cm starken Helmsäule der Turmkuppel gegen das die Kugel tragende Kopfende gegenwärtig die Koordinaten $+0,07$ m und $-+0,03$ m besitzt und mit dem geometrischen Mittelpunkte des Mauerpolygons in der Turmstube, in welcher die Winkelmessungen ausgeführt sind, genau zusammenfällt. Wenn also eine östliche Verschiebung der Turmspitze seit der Ausführung der bei der Berechnung der Landesvermessung benützten Winkelmessungen eingetreten sein sollte, so müßte die Turmspitze früher 0,34 m westlich von der Achse des Mauerwerks gelegen sein, was kaum anzunehmen ist.

Für die Erklärung der rechnerisch ermittelten Koordinatenänderungen der Spitze des Nordturmes der Frauenkirche in München könnte noch eine im Laufe des vergangenen Jahrhunderts eingetretene Abweichung der Turmachse von der lotrechten Stellung in Betracht kommen. Einer solchen Neigung des Turmes nach Osten wirkt aber die nördliche Langmauer

des Kirchenschiffes als mächtiger Strebe Pfeiler entgegen, in deren Verbindung mit dem Turmmauerwerk keinerlei Risse oder Sprünge zu bemerken sind; auch konnte in der Ebene des Fußbodens der Turmstube eine merkliche Neigung gegen Osten durch Nivellement nicht festgestellt werden.

Schließlich ließe sich noch an eine Verschiebung des ganzen Bauwerkes durch tektonische Kräfte denken, die im nördlichen Vorlande der bayerischen Alpen eine wichtige Rolle spielen und sich noch in jüngster Zeit durch eine Höhenstörung bei Laufen an der Salzach¹⁾ sowie durch Gipfespaltungen am Watzmann und Hochkalter augenfällig bemerkbar gemacht haben.

Sollten durch derartige Ursachen Lageänderungen einzelner Dreieckspunkte eingetreten sein, so müßten sich aus den im Laufe des letzten Jahrhunderts daselbst wiederholt ausgeführten Winkelmessungen Richtungsänderungen gegen die unverändert gebliebenen Nachbarpunkte nachweisen lassen, aus welchen die Größe der Koordinatenänderungen der verschobenen Punkte hergeleitet werden könnte.

Für den Nordturm der Frauenkirche in München sowie für die Hauptdreieckspunkte Aenger, Peissenberg, Watzmann und Rettenstein, auf welchen zu verschiedenen Zeiten des vergangenen Jahrhunderts wiederholt genaue Winkelmessungen zwischen benachbarten Dreieckspunkten vorgenommen wurden, sind derartige Änderungen mit einiger Sicherheit nicht nachzuweisen, wie die zu diesem Zweck ausgeführten Berechnungen ergeben haben.

Das gleiche negative Ergebnis haben die mit besonderer Gründlichkeit geführten Untersuchungen für den Hauptdreieckspunkt München geliefert. Die ältesten für diesen Punkt hier in Betracht kommenden Winkelmessungen sind von Bonne und seinen Offizieren im Jahre 1801 in der Turmstube des Nordturmes der Frauenkirche ausgeführt worden. Ihre Ergebnisse

¹⁾ Vgl. M. Schmidt, Ergänzungsmessungen zum Bayer. Präzisionsnivellement. München 1908, Heft 1, S. 40.

finden sich in voller Ausführlichkeit in den durch das K. Topographische Bureau des K. Bayer. Generalstabes aufbewahrten Abschriften der Originalwinkelbücher, sodann in dem die Winkelmessungen enthaltenden Abschnitt des Landesvermessungswerkes S. 168, sowie auch in einem Bericht Bonnes an den Direktor des Dépôt general de la Guerre in Paris, welcher im „Kritischen Wegweiser im Gebiet der Landkartenkunde“ V. Bd., Berlin 1833, S. 224 veröffentlicht ist.

Von den 1801/05 bei diesen Winkelmessungen benützten und den HDNP München kranzförmig umgebenden Zielpunkten sind sechs unverändert erhalten geblieben und bei den neueren Winkelmessungen in den Jahren 1855 und 1904 wieder verwendet worden, so daß die alten und neuen Winkelwerte unmittelbar vergleichbar sind.

Berechnet man nun die für die drei Beobachtungsreihen aus den Jahren 1801/05, 1855,57 und 1904 sich ergebenden wahrscheinlichsten Koordinaten- und Richtungsänderungen dx , dy und m , so erhält man hiefür die Werte

Zeitraum	dx cm	dy cm	m''
1801/1855	— 14,1 ± 7,6	+ 18,9 ± 10,3	± 0,85
1801/1904	— 11,4 ± 10,9	— 0,2 ± 15,0	± 0,87

während sich für die mittleren Koordinatenfehler der die südbayerische Dreieckskette bildenden Hauptnetzpunkte aus den Restfehlern der Netzeinpassung die Werte ergeben

$$m_x = \pm 16 \text{ cm} \quad \text{und} \quad m_y = \pm 38 \text{ cm}.$$

Eine Lageänderung des Hauptdreieckspunktes München gegen die ihm benachbarten Hauptnetzpunkte läßt sich hieraus somit nicht mit Bestimmtheit folgern.

Zum Nachweis der Identität der Scheitelpunkte, auf welche die auf dem nördlichen Turm der Frauenkirche zu verschiedenen Zeiten gemessenen Winkel bezogen wurden, mag noch bemerkt werden, daß die Messungen Bonnes in der unmittelbar unter der Kuppel gelegenen, mit acht doppelten Fensteröffnungen versehenen Turmstube in verschiedenen Standorten

ausgeführt und auf die geometrische Mitte dieses die Form eines regelmäßigen Achtecks besitzenden Raumes reduziert sind.

Wie bereits erwähnt, weicht die vertikale Achse dieses Raumes gegenwärtig nur um wenige Zentimeter von der Projektion des oberen Endes der Helmsäule des Turmes ab, auf deren Mitte alle späteren Winkelmessungen bezogen worden sind. Daß diese gute Übereinstimmung bereits seit Jahrzehnten bestanden hat und Verschiebungen im Zimmerwerk der Turmkuppel in der letzten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts nicht eingetreten sind, läßt sich aus den im Jahre 1904 ausgeführten Zentrierungsmessungen mit großer Sicherheit schließen.

Bei den im Jahre 1855 durch den Trigonometer der K. B. Katasterkommission Jakob Rathmayer auf dem nördlichen Frauenturm ausgeführten Winkelmessungen war der aus einer Metallkugel von 1 m Durchmesser bestehende Turmknopf abgehoben und der Theodolit zentrisch über der Helmsäule in 97 m Höhe über der Bodenfläche am Fuß des Turmes aufgestellt.

Da diese zentrische Aufstellung kostspielige Gerüstbauten erfordert und nicht ohne Gefahr ist, wurde bei den Messungen im Jahre 1904 der exzentrischen Aufstellung in den Fensterischen der unter der Kuppel gelegenen Turmstube von 9,5 m lichter Weite der Vorzug gegeben. Hier wurden nach Herausnahme der eisernen Fensterstücke in drei nach Osten, Süden und Westen gelegenen 1,0 m weiten und 1,5 m tiefen Fensterischen Beobachtungspfeiler von 1,20 m Höhe aufgemauert und auf deren Oberfläche sowie in den darüber gewölbten Fensterbögen die Stationspunkte durch eingelassene Messingbolzen markiert.

Zur Bestimmung der Lage dieser Beobachtungspunkte gegen die Turmspitze ist die Helmsstangenmitte unter der Kugel von zwei auf dem Turmpfeiler des neuen Katasterbureaugebäudes an der Alexandrastraße und auf dem Umgang des Turmes der St. Peterskirche gewählten Theodolitstandorten aus auf den Fußboden der Turmstube heruntergelotet und der Durchschnitt der beiden Lotebenen in einem starken Durchzug-

balken der Turmstubendecke mit einer eisernen Schraube festgelegt worden.

Die Einmessung dieses Punktes auf die in den Fensterischen markierten Theodolitstandorte erfolgte mittelst eines innerhalb der Turmstube abgesteckten Liniennetzes, das so angelegt war, daß die linearen Abstände des Lotpunktes von den drei Pfeilerpunkten aus einfachen Linienverbindungen scharf berechnet werden konnten.

Die wahrscheinlichsten Werte der Koordinaten der drei Pfeilerpunkte sind durch Rückwärtseinschneiden mit überschüssigen Richtungen aus 10 Dreieckspunkten III. Ordnung ermittelt, die mit wenigen Ausnahmen im Anschluß an die nächstliegenden Haupt- und Sekundärnetzpunkte bei den in den Jahren 1855/57 und 1876/79 im Stadtbezirk von München ausgeführten Katastertriangulierungen festgelegt wurden. Nur drei dieser Ausgangspunkte sind erst in neuerer Zeit in das bestehende Netz eingeschaltet worden. Als Zielpunkte dienten folgende Türme. Auf Pfeiler I (Südpfeiler): Heilige Geistkirche, St. Peterskirche, Auer Kirche, Kreuzkirche; auf Pfeiler II (Westpfeiler): Kreuzkirche, St. Matthäuskirche, Justizpalast, St. Bennokirche; auf Pfeiler III (Ostpfeiler): St. Ludwigskirche, Bogenhauser Kirche, St. Annakirche, Haidhauser Kirche, St. Peterskirche, St. Matthäuskirche. Die zur Ermittlung der Pfeilerkoordinaten benützten Ausgangswerte, die sämtlich den Triangulierungsakten des K. Katasterbureaus entnommen sind, entsprechen somit jener örtlichen Lage der Dreieckspunkte, welche diese zur oben angegebenen Zeit der Ausführung der Winkelmessungen besaßen.

Hat die örtliche Lage dieser Zielpunkte in den letzten Jahrzehnten keine Änderung erfahren, so müssen auch die im Jahre 1904 auf den drei Pfeilern ausgeführten Winkelmessungen die Abstände der Pfeilerpunkte von der früher als Koordinatennullpunkt angenommenen Helmsäulenmitte unverändert ergeben und die mit den im Jahre 1904 auf den Fensterpfeilern gemessenen Winkeln abgeleiteten Koordinaten desselben Punktes dürfen sich nur wenig von Null unterscheiden.

Die Ausgleichung ergab die Koordinatenwerte der drei Pfeilerpunkte

$$\begin{aligned}x_1 &= -5,73 \pm 0,01 \text{ m} & x_2 &= +1,03 \pm 0,005 \text{ m} \\y_1 &= +0,92 \pm 0,02 \text{ m} & y_2 &= +5,89 \pm 0,004 \text{ m} \\& & x_3 &= -0,75 \pm 0,0004 \text{ m} \\& & y_3 &= -5,96 \pm 0,0004 \text{ m}.\end{aligned}$$

Aus den in diesen Punkten vorgenommenen Winkelmessungen folgen für die nach dem Lotpunkt der Helmsäulenmitte gerichteten Strahlen die Direktionswinkel

$$\varphi_1 = 99^\circ 7' 18'' \quad \varphi_2 = 189^\circ 55' 9'' \quad \varphi_3 = 7^\circ 10' 20'',$$

während die in der Turmstube ausgeführten Liniennetzmessungen die Längen dieser Strahlen ergaben

$$s_1 = 5,840 \text{ m} \quad s_2 = 5,980 \text{ m} \quad s_3 = 6,021 \text{ m}.$$

Mit diesen Zahlenwerten finden sich die wahrscheinlichsten Koordinatenwerte der Helmsäulenmitte

$$x_0 = +0,013 \text{ m} \quad y_0 = +0,003 \text{ m}.$$

Es können somit größere Lageänderungen oder örtliche Verschiebungen des Hauptdreieckspunktes München gegen benachbarte, dem Stadtbezirk angehörende Dreieckspunkte ebenso wenig nachgewiesen werden, wie gegen die in bedeutenderen Entfernungen gelegenen Hauptnetzpunkte.

Die bei der Einpassung der südbayerischen Dreieckskette in das Netz der Landestriangulierung hervortretende Verschiebung des Koordinatennullpunktes kann somit nicht durch eine Lageänderung des Hauptdreieckspunktes München, sondern nur durch die Fehler der älteren Winkelmessungen und die bei größeren Dreiecksnetzen vorkommenden, sogenannten Netzverschiebungsfehler ihre Erklärung finden, welche nicht selten durch den bei partiellen Netzausgleichungen unvermeidlichen Anschlußzwang hervorgerufen werden.

Die Ausführung und Reduktion der Winkelmessungen auf dem Turm der Frauenkirche besorgte Katastergeometer Netzsch. die Koordinatenberechnung und Ausgleichung Assistent Dr. Näbauer unter meiner Leitung und Mitwirkung.

Netzanschlüsse der südbayerischen Dreieckskette.

Nach B. L. V., S. 34 beträgt die unter Verwendung von Bessels Erddimensionen auf die Meeresfläche projizierte Länge der altbayerischen Grundlinie zwischen ihren nordöstlich von München bei Oberföhring und Aufkirchen gelegenen und mit mächtigen Steinpyramiden überbauten Endpunkten nach der unter der Oberleitung des Oberst Bonne im Jahre 1801 ausgeführten einmaligen Messung 21653,96 m.

Die trigonometrische Verbindung dieser unmittelbar gemessenen Linie mit der Hauptnetzseite München (M)-Aufkirchen (Au) ist im Jahre 1870 durch die K. B. Katasterkommission neu ausgeführt worden und hat nach B. L. V., S. 349 den Logarithmus Sinus der Seite MAu in bayerischen Ruten zu 3.989 6259 ergeben.

Fügt man diesem Wert zur Überführung in Metermaß gemäß einer K. Verordnung vom 28. Februar 1809, durch welche das Verhältnis der bayerischen Rute zur legalen Meterlänge bei $13^\circ R$ auf $k = 1293.8 : 443.296$ festgesetzt ist, den Verwandlungslogarithmus $Lg k = 0.465\ 1733.3^1$), sowie das dem Krümmungshalbmesser der Projektionskugel $R = 2.188\ 786$ Ruten entsprechende Additament 14.4 Einheiten der 7. Logarithmenstelle hinzu, so ergibt sich der bei der sphärischen Seiten- und Koordinatenberechnung der südbayerischen Dreieckskette als Ausgangswert benützte Logarithmus der Bogenlänge der Seite München—Aufkirchen $Lg. MAu = 4.454\ 8006.7$.

Die in dem Verwandlungslogarithmus enthaltene und auch bei der Abgleichung des Basisapparates benützte Länge des legalen Meters $1\ m = 443.296$ Par. Lin. bedingt zur Zurückführung der Maßeinheit auf die internationale Meterlänge nach Helmert: „Die europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite“, 1. Heft, Berlin 1893, S. 230 eine Vergrößerung der Seitenlogarithmen von $57,7$ Einheiten der 7. Logarithmenstelle,

¹⁾ Vgl. die zum dienstlichen Gebrauch vom K. B. Katasterbureau bearbeitete Umwandlungstabelle von bayerischen Ruten in Meter.

welche dem Verwandlungslogarithmus hinzugefügt, für diesen den Wert ergibt

$$\text{Lg } k' = 0.465\ 1791.0.$$

Um den gleichen Betrag von $57.7 \cdot 10^{-7}$ sind infolgedessen auch sämtliche aus Lg. $MAu = 4.454\ 8006.7$ berechneten Dreiecksseiten und Koordinaten der südbayerischen Dreieckskette zu vergrößern, um dieselben auf die internationale Meterlänge zurückzuführen.

Daß bei der Abgleichung der bei der Messung der alt-bayerischen Grundlinie an der Goldach von Bonne benützten Basisstangen das legale Meter tatsächlich die Maßeinheit bildete, geht aus einem ausführlichen Bericht Bonnes über die unter seiner Leitung ausgeführte Triangulierung von Bayern hervor, den er an seinen Brigadegeneral Sanson in Paris am 11. Februar 1803 aus München erstattet hat.

Dieser Bericht, welcher sich heute noch in den Archiven des französischen Kriegsministeriums befindet und mir in einer wörtlichen Abschrift vorliegt, ist später mit einigen Kürzungen im „Kritischen Wegweiser im Gebiete der Landkartenkunde Bd. V, Berlin 1833, bei Simon Schropp & Co.“, unter dem Titel „Documens relatifs à l'histoire de la Triangulation de Bavière, exécutée par les Ingénieurs-geographes français“ veröffentlicht worden.

Der Abschnitt 3 dieses Berichtes enthält die Beschreibung der Hilfsmittel, welche zur Messung der Basis an der Goldach bei München angewendet wurden. Hier führt Bonne zunächst an, daß sich alle seine Messungen auf ein mètre provisoire de laiton stützen, das er vom Maß- und Gewichts-bureau in Paris erhalten habe und die Nr. 67, den Namen Lenoir und in der Mitte einen ovalen Stempel mit der Aufschrift „modèle“ trage. Über die bei der Maßabgleichung der Basisstangen verwendete Längeneinheit sagt dann Bonne a. a. O., S. 174 wörtlich: „Le mètre provisoire de laiton étant à la température de 10° (8° R) a été rendu égal à 443.44 lignes de la toise du Perou, celleci étant à $16^{\circ}25$ (13° R). Le mètre définitif de

platine, fixé à la température de la glace fondante et représentant le mètre mathématique égal à la dix-millionième partie du quart du méridien, est égal à 443.296 lignes de la même toise. d'où il suit, que le mètre provisoire vaut 1.000325 du mètre définitif.*

Da Bonne nach diesem Messingstab unter Berücksichtigung des erwähnten Verhältnisses die Längen der zur Basismessung verwendeten Meßstangen wirklich abgeglichen hat, so dürfte über die Herleitung der bei der altbayerischen Grundlinie benützten Maßeinheit und über die Notwendigkeit ihrer Zurückführung auf die internationale Meterlänge durch Hinzufügen der logarithmischen Verbesserung von rund 58 Einheiten der 7. Logarithmenstelle kein Zweifel bestehen.

Der von Bonne benützte Meterstab von Lenoir Nr. 67 konnte leider bis jetzt weder in München noch in Paris aufgefunden werden.

Österreichischer und württembergischer Anschluss.

Der Anschluß der südbayerischen Dreieckskette an das österreichische Netz bei Salzburg wird durch die beiden Seiten Wendelstein (*We*) — Hochgern (*Hg*) und Hochgern (*Hg*) — Asten (*Ast*) vermittelt. Die Längen derselben sind nach der Neuberechnung vom Jahre 1910 reduziert auf internationales Maß

Lg. *WeHg* = 4.582 2178.3 + 57.7 = 4.582 2336.0 (bayer.)
und

Lg. *HgAst* = 4.619 6288.4 + 57.7 = 4.619 6346.1 (bayer.).

Der im Jahre 1904 durch das K. K. Militärgeographische Institut in Wien handschriftlich mitgeteilte Wert des Seitenlogarithmus *Hg—Ast* ist ebenfalls in internationalem Maß

Lg. *HgAst* = 4.619 6344.6 (österr.).

Die Anschlußdifferenz Lg. bayer. — Lg. österr. beträgt somit in Einheiten der 7. Logarithmenstelle

$$\Delta_1 = \text{Lg}_b - \text{Lg}_o = + 1.5 \times 10^{-7}.$$

Da der österreichische Wert der Seitenlänge Wendelstein—Hochgern nicht mitgeteilt war, mußte derselbe mit den im Jahre 1904 in Rettenstein (*Re*) und Wendelstein (*We*) von Österreich und in *Hg* von Bayern beobachteten und auf 180° abgeglichenen Dreieckswinkeln aus der mitgeteilten Seitenlänge *Re—Hg* berechnet werden. Die Rechnungsergebnisse sind

Eckpunkt	Ausgeglichene Winkel	Logarithmen der Gegenseiten
<i>Hg</i>	$62^\circ 29' 45''32$	4.666 5650.9
<i>Re</i>	$46^\circ 55' 16''54$	<u>4.582 2224.2</u>
<i>We</i>	$70^\circ 34' 58''14$	4.693 2205.6

Der Anschlußwiderspruch (bayer.—österr.) beträgt somit für die Seite Wendelstein—Hochgern

$$\Delta_2 = \text{Lg}_b - \text{Lg}_c = + 11.8 \times 10^{-7}$$

oder im Mittel

$$\Delta_m = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} = + 6.65 \times 10^{-7},$$

das ist 1,5 mm pro km = 1 : 650 000.

Nach meiner ersten Mitteilung über die südbayerische Dreieckskette in den Sitzungsberichten vom 3. Februar 1906, S. 144/145 ist der auf internationales Maß reduzierte Logarithmus der Seite Aenger—Roggenburg (*Th*) durch Vermittelung der von Hammer 1892 bearbeiteten württembergischen Dreieckskette aus den Seiten Donon—Straßburg und Ballon—Donon (Rhein. Netz, S. 127) doppelt berechnet worden und zwar aus *Do—Str*

$$\text{Lg. } Ae \text{ Rog}(Th) = 4.793\ 8339.0$$

und aus *Ba—Do*

$$\text{Lg. } Ae \text{ Rog}(Th) = 4.793\ 8336.6.$$

Die Neuberechnung der südbayerischen Dreieckskette hat in $\triangle 1$ (Tab. I) für die Seite Aenger—Roggenburg den auf internationales Maß reduzierten Wert gegeben

$$\text{Lg. } Ae \text{ Rog}(Th) = 4.793\ 8268.9 + 57.7 = 4.793\ 8326.6 \text{ (bayer.)}$$

Vergleicht man hiemit den Mittelwert der beiden oben angegebenen, auf die Basis von Oberhergheim bezogenen Seitenlogarithmen

$$\text{Lg. } Ae \text{ Rog}(Th) = 4.793 \text{ 8337.8 (Mittel),}$$

so erhält man die logarithmische Anschlußdifferenz Lg. bayer. — Lg. württ.

$$\text{Lg}_b - \text{Lg}_w = -11.2 \times 10^{-7},$$

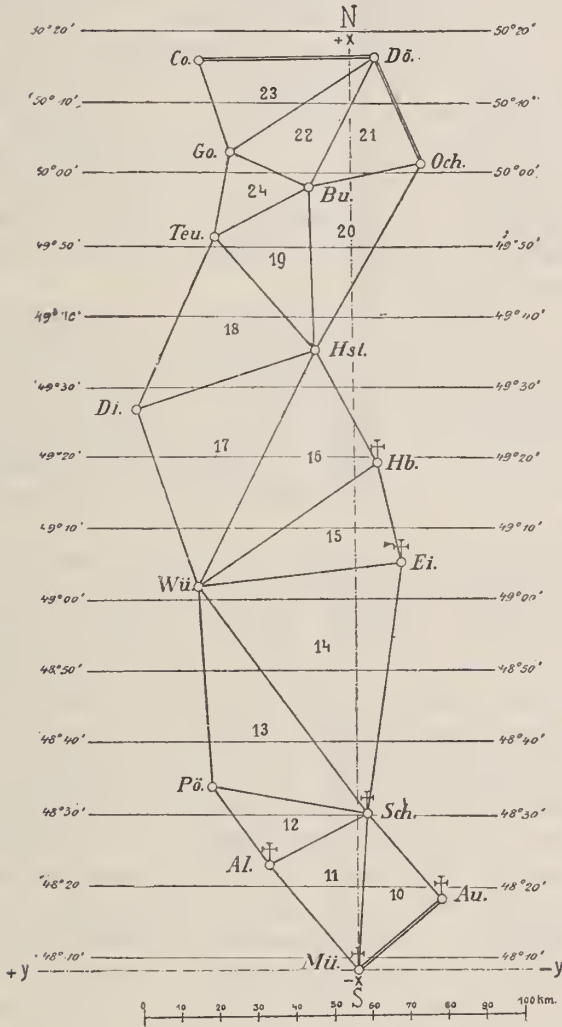
$$\text{das ist } 2,6 \text{ mm pro km} = 1 : 385 \text{ 000.}$$

Die Meridiankette von München—Aufkirchen bis Coburg—Döbra.

Die mit der Messung der fränkischen Grundlinie bei Nürnberg ursprünglich verfolgte Absicht ging dahin, eine zuverlässige Probe für die nur einmalige Messung der altbayerischen Grundlinie zu erhalten. Diese Absicht ist bei der Neuberechnung der südbayerischen Dreieckskette im Auge behalten und dahin erweitert worden, daß durch eine dem Hauptdreiecksnetz der Landesvermessung entnommene Kette guter Dreiecke nicht allein eine Verbindung zwischen der altbayerischen und fränkischen Grundlinie, sondern auch eine solche mit den an der Nordgrenze des Landes liegenden Dreiecksseiten Döbra—Ochsenkopf und Coburg—Döbra des sächsischen bzw. thüringischen Hauptdreiecksnetzes hergestellt werden sollte.

Diese im Verlauf des Meridians von München gewählte, aus 15 Dreiecken bestehende „Fränkische Kette“ hat an ihrem südlichen Ende mit der südbayerischen Dreieckskette die beiden Dreiecke Altomünster (*Al*) — München (*Mü*) — Schweitenkirchen (*Sch*) und Aufkirchen (*Au*) — München (*Mü*) — Schweitenkirchen (*Sch*) gemeinsam und steht durch die Seite Dillenberg (*Di*) — Hohenstein (*Hst*) mit dem Basisnetz der fränkischen Grundlinie bei Nürnberg in Verbindung. An ihrem nördlichen Ende schließt sie sich in der Seite Döbra (*Dö*) — Ochsenkopf (*Och*) an das trigonometrische Netz des Königreichs Sachsen und in der Seite Döbra (*Dö*) — Coburg (*Co*) an das thüringische Dreiecksnetz der K. Preußischen Landesaufnahme an. Die Längen dieser

Fränkische Dreieckskette.



beiden Anschlußseiten sind aus der von A. Nagel bearbeiteten „Veröffentlichung des K. Sächsischen Finanzministeriums über das sächsische Hauptdreiecksnetz“ und aus „Hauptdreiecke VII Teil“ der K. Preußischen Landestriangulation bekannt.

Die in Tabelle IV zusammengestellten Winkel und Seitenlogarithmen der fränkischen Kette sind den in §§ 52 bis 57 des IV. Abschnitts der B. L. V. enthaltenen Ergebnissen der Netzausgleichung der bayerischen Haupttriangulierung entnommen, nur sind hier die Seitenlängen in Bogen- und Metermaß übergeführt. Der Logarithmus der Seite München – Aufkirchen ist unverändert geblieben.

Einer sorgfältigen Nachprüfung ist die Zuverlässigkeit der im Jahre 1807 ausgeführten Messung der 13796,56 m langen fränkischen Grundlinie bei Nürnberg unterzogen worden, die mit einem aus 5 Eisenstangen von je 4 m Länge bestehenden, von Reichenbach in München angefertigten Basisapparate unter der Leitung des Astronomen Professor Schiegg ausgeführt ist.

Zur Abgleichung der mit schneidenförmigen Enden versehenen fünf Meßstangen hatte ein von Lenoir in Paris angefertigter eiserner Meterstab mit dem Zeichen $A \frac{8}{2}$ gedient, dessen Länge nach der von Bouvard unterfertigten Beglaubigung bei zehnmaliger Vergleichung mit dem eisernen Meterprototyp der Pariser Sternwarte nur eine Abweichung von einem Milliontel der ganzen Länge vom richtigen Maße ergab. Der vorgenannte Meterstab ist gegenwärtig im Deutschen Museum in München in der Abteilung „Geodäsie“ unter Inv.-Nr. 1463 aufbewahrt und wurde auf meine Veranlassung im Mai 1910 durch die Kaiserliche Normal-Eichungskommission in Berlin-Charlottenburg mit dem internationalen Meter bei 14°C verglichen. Dabei ist unter Benützung des seinerzeit von Borda gefundenen Ausdehnungskoeffizienten $\alpha = 11.56 \mu$ für 1°C ermittelt worden, daß seine Länge nur um 0.5μ größer als das internationale Meter ist und mit diesem daher innerhalb der auf $\pm 3 \mu$ zu schätzenden Messungsgenauigkeit übereinstimmt.

Tabelle IV.

Zusammenstellung der ausgeglichenen Winkel und Seiten der fränkischen Dreieckskette.

Dreieck Nr.	Eck- punkte	Ausgegliche- ne Winkel	Logarithmen der Gegenseiten
10	Mü.	45 ⁰ 29' 38.09	4.464 7222.8
	Sch.	44 11 32.08	4.454 8006.7
	Au.	90 18 51.93	4.611 5204.7
		180 ⁰ 00' 2'10	
11	Mü.	43 ⁰ 36' 51.91	4.462 2190.3
	Al.	76 36 22.96	4.611 5204.7
	Sch.	59 46 47.72	4.560 0587.8
		180 ⁰ 00' 2'59	
12	Al.	99 ⁰ 38' 59.99	4.615 7800.3
	Pö.	43 48 25.26	4.462 2190.3
	Sch.	36 32 36.55	4.396 7999.3
		180 ⁰ 00' 1'80	
13	Pö.	103 ⁰ 39' 9.81	4.862 0290.3
	Wü.	33 26 57.79	4.615 7800.3
	Sch.	42 53 57.57	4.707 4358.3
		180 ⁰ 00' 5'17	
14	Sch.	44 ⁰ 08' 32.86	4.717 9736.3
	Wü.	59 50 31.77	4.811 9273.3
	Ei.	76 01 3.68	4.862 0290.3
		180 ⁰ 00' 8'31	

Dreieck Nr.	Eck- punkte	Ausgeglichene Winkel	Logarithmen der Gegenseiten
15	Ei.	83 ⁰ 53' 43.36	4.747 1357.3
	Wü.	27 42 31.66	4.417 0335.3
	Hb.	68 23 48.41	4.717 9736.3
		180 ⁰ 00' 3.43	
16	Wü.	28 ⁰ 58' 10.24	4.531 3274.3
	Hst.	52 45 28.02	4.747 1357.3
	Hb.	98 16 26.49	4.841 6356.3
		180 ⁰ 00' 4.75	
17	Wü.	44 ⁰ 41' 44.48	4.688 8687.3
	Di.	88 57 37.14	4.841 6356.3
	Hst.	46 20 44.58	4.701 1524.3
		180 ⁰ 00' 6.20	
18	Hst.	68 ⁰ 05' 55.53	4.699 5158.3
	Di.	47 01 51.19	4.596 3922.3
	Teu.	64 52 17.80	4.688 8687.3
		180 ⁰ 00' 4.52	
19	Hst.	38 ⁰ 25' 1.59	4.437 7235.3
	Teu.	78 01 17.34	4.634 8059.3
	Bu.	63 33 43.74	4.596 3922.3
		180 ⁰ 00' 2.67	
20	Hst.	30 ⁰ 19' 49.15	4.465 9553.3
	Bu.	101 30 30.34	4.753 8112.3
	Och.	48 09 43.63	4.634 8059.3
		180 ⁰ 00' 3.12	

Dreieck-Nr.	Eckpunkte	Ausgeglichene Winkel	Logarithmen der Gegenseiten
21	Bu.	51° 24' 37.69	4.476 9565.3
	Dö.	49 38 25.69	4.465 9053.3
	Och.	78 56 58.80	4.575 8260.3
		180° 00' 2.18	
22	Bu.	91° 20' 44.00	4.647 1106.3
	Go.	58 02 13.99	4.575 8260.3
	Dö.	30 37 4.16	4.354 2093.3
		180° 00' 2.15	
23	Go.	78° 39' 55.11	4.666 4488.3
	Co.	69 41 4.09	4.647 1106.3
	Dö.	31 39 3.53	4.374 9475.3
		180° 00' 2.73	
24	Teu.	52° 50' 10.74	4.354 2093.3
	Go.	74 59 26.26	4.437 7235.3
	Bu.	52 10 24.24	4.350 3512.3
		180° 00' 1.24	

Begründete Bedenken erregte dagegen die in B. L. V., S. 41 bis 45 beschriebene Abgleichung der Meßstangen und die Ermittlung ihrer Ausdehnung durch die Wärme, weil hiebei die Temperaturexpansion und Formänderung des benützten Mauerkomparators keine Berücksichtigung gefunden haben. Die mit diesem Komparator für ein Temperaturintervall von 7,3 bis 18,3° R ermittelte Ausdehnung der Meßstangen für 1 m und 1° R beträgt 0.007168 P. L. = 0,01617 mm oder 0,01293 mm für 1° C. Dieser auch bei der Temperaturreduktion der Grundlinienmessung verwendete Wert ist wesentlich größer, als die sonst für die Ausdehnung des Schmiedeeisens gebräuchliche Annahme von 0,01375 mm für 1° R oder 0,011 mm für 1° C.

Da die Meßstangen seit ihrer ersten Verwendung im Jahre 1807 unverändert belassen und durch die K. Katasterkommission sorgfältig aufbewahrt worden sind, war es möglich, ihre Temperaturexpansion neuerdings zu bestimmen. Im Januar 1910 ist diese Bestimmung auf dem Viermeterkomparator des geodätischen Instituts der Technischen Hochschule für das Temperaturintervall von 0° bis 21° mit Hilfe zweier Glaskeile durchgeführt worden und hat für die fünf Stangen für 1° C die völlig normalen Werte ergeben:

I	II	III	IV	V	Mittel
$\alpha = 11.4$	10.9	11.3	10.9	11.1	11.12 μ .

Bei diesen Messungen blieb die Temperatur des Komparators unverändert und betrug mit geringen Schwankungen 21° C, während die Temperatur der Eisenstangen durch Einlegen derselben in einen mit schmelzendem Schnee gefüllten Holzkasten von der Zimmertemperatur von 21° auf 0° vermindert und nach dem Herausnehmen durch längeres Lagern im warmen Zimmer wieder auf 21° erhöht wurde. Die Vergleichung der Stangen bei 0° ist selbstverständlich zwischen zwei Vergleichungen bei 21° vorgenommen worden, deren Mittelwert zur Ableitung der Ausdehnungskoeffizienten benützt wurde.

Die Abweichung des neu ermittelten Wertes $\alpha = 11.12 \mu$ für 1° C oder $= 13.90 \mu$ für 1° R gegen den alten Wert $\alpha = 12.93 \mu$ für 1° C bzw. 16.17μ für 1° R erklärt sich dadurch, daß bei der früheren Koeffizientenbestimmung die Ausdehnung und Formänderung des damals benützten Mauerkomparators keine Berücksichtigung gefunden haben.

Um diese Fehlerquelle näher zu untersuchen, ist unter Einführung des neuen Koeffizienten aus den B. L. V., S. 43 angegebenen Beobachtungswerten die Ausdehnung des Mauerkomparators rechnerisch bestimmt worden. Sie fand sich mit negativem Vorzeichen, was darauf hindeutet, daß bei steigender Wärme die Komparatorlänge bzw. die lichte Weite der Mauernische, an deren beiderseitigen Vorderkanten die Komparatorenden befestigt waren, geringer geworden ist. Eine Erschei-

nung, deren Auftreten durch die Wärmeausdehnung des die Nische seitlich begrenzenden Mauerwerkes bedingt erscheint.

Nach Angabe B. L. V., S. 44 wurde die Länge der Meßstangen mehrmals bei fast konstanter Temperatur von im Mittel $11,4^{\circ}$ R mit dem Normalmeter von Lenoir abgeglichen und hiebei unter Annahme einer Ausdehnung von $16,17 \mu$ für 1 m und 1° R die Lagenlänge ermittelt

$$L_0 = 20,000\ 0482 \text{ m bei } 0^{\circ}$$

$$L_{13} = 20,004\ 2522 \text{ m bei } 13^{\circ} \text{ R.}$$

Ersetzt man den dabei verwendeten zu großen Ausdehnungskoeffizient durch den neu bestimmten Wert von 13,90 für 1° R, indem man zunächst die vorstehenden beiden Werte der Lagenlänge mit dem Koeffizient 16,17 auf die mittlere Vergleichstemperatur $11,4^{\circ}$ R zurückführt, so erhält man die Lagenlänge bei $11,4^{\circ}$ R übereinstimmend zu

$$L_{11,4} = 20.003\ 7348$$

und hieraus mit dem neuen Koeffizienten 13,90 die Lagenlänge bei 0°

$$L'_0 = 20.000\ 5657 \text{ m.}$$

Der Unterschied gegen den Wert der B. L. V. beträgt $517,5 \mu$, das sind $25,9 \mu$ pro Meter oder 112,4 Einheiten der 7 Logarithmenstelle, um welche der Logarithmus der fränkischen Grundlinie zu vergrößern ist, wenn die neue Lagenlänge zu Grunde gelegt wird.

Zugleich mit den Ausdehnungskoeffizienten sind auch die Längen der fünf Meßstangen auf dem Viermeterkomparator des geodätischen Instituts neu bestimmt worden und zwar durch Abgleichen mit vier eisernen Meterstäben des Instituts, welche schneidenförmige Enden besitzen und die Bezeichnung

$$C, D, \frac{5}{00} 1, \frac{5}{00} 2$$

tragen.

Die Abstände der Mitten der Endschnitten dieser im Dezember 1900 durch die Kaiserliche Normal-Eichungskommission geprüften Stäbe besitzen die Werte

$$\text{Stab } C = 1 \text{ m} + 0,01 \text{ mm} + 0,011 T \text{ mm}$$

$$\text{Stab } D = 1 \text{ m} - 0,02 \text{ mm} + 0,011 T \text{ mm}$$

$$\text{Stab } \frac{5}{00} 1 = 1 \text{ m} - 0,03 \text{ mm} + 0,011 T \text{ mm}$$

$$\text{Stab } \frac{5}{00} 2 = 1 \text{ m} - 0,07 \text{ mm} + 0,011 T \text{ mm.}$$

Bei der Vergleichung mit den 5 Meßstangen des Basisapparates wurden diese 4 Stäbe auf dem Viermeterkomparator hintereinander gereiht und der Unterschied ihrer Gesamtlänge gegen die einzelnen Meßstangen mit zwei Glaskeilen bestimmt und zwar einmal bei 0° und zweimal bei 21° C Stangentemperatur.

Die auf 0° reduzierten Lagenlängen sind

$$20,000\ 418 \text{ m aus der Vergleichung bei } 0^{\circ}$$

$$20,000\ 426 \text{ m " " " " } 21^{\circ}$$

$$20,000\ 391 \text{ m " " " " } 21^{\circ}$$

$$\underline{20,000\ 412 \text{ m im Mittel bei } 0^{\circ}.$$

Die von dem Fehler des Ausdehnungskoeffizienten befreite Lagenlänge hat nach der Vergleichung vom Jahre 1807 den Wert 20,000482 m. Der Unterschied der beiden letzten Werte beträgt für die einzelne Meßstangenlänge von 4 m nur 14μ und liegt innerhalb der Grenzen der Genauigkeit der Vergleichung, da die Unsicherheit der Gesamtlänge der vier hintereinander gereihten Meterstäbe auf $10\sqrt{4} = 20 \mu$ zu schätzen ist.

Als endgültiger Wert der Lagenlänge kann das Mittel aus der älteren und neueren Bestimmung = 20,000447 m genommen werden.

Beachtenswert ist noch, daß die beiden in einem Zeitintervall von über 100 Jahren unter Verwendung der gleichen Maßeinheit ausgeführten Bestimmungen der Lagenlänge eine geringe Verkürzung der Meßstangen von $3,5 \mu$ für ein Meter erkennen lassen, die allerdings so gering ist, daß über ihre Reellität Zweifel bestehen können.

Es ist nun noch der Einfluß des verändert gefundenen Wertes des Ausdehnungskoeffizienten der Meßstangen auf die Berechnung der Grundlinienlänge in Betracht zu ziehen.

Die Folge der Anwendung eines zu großen Temperaturkoeffizienten ist offenbar die, daß die Stangenlängen bei den an den Thermometern abgelesenen Messungstemperaturen zu groß erhalten wurden. Dieser Vergrößerung entspricht für die Länge l , die mittlere Stangentemperatur t_m und den Unterschied $(\alpha - \alpha')$ des unrichtigen und richtigen Ausdehnungskoeffizienten die Verbesserung

$$v = -l \cdot t_m (\alpha - \alpha').$$

Um die mittlere Stangentemperatur bei der Grundlinienmessung zu finden, ist aus den damals geführten Tagebüchern die Zahl der annähernd gleiche Temperaturen zeigenden Stangenlagen festgestellt und mit Einführung dieser Zahlen als Gewichtskoeffizienten das allgemeine Temperaturmittel $t_m = 13.9^\circ \text{ R}$ berechnet worden.

Läßt man ferner den mit dem neu ermittelten Ausdehnungskoeffizienten berechneten Wert der Lagenlänge als richtig gelten, so ergibt sich ein weiterer Fehler der 1807 ausgeführten Basisberechnung durch die Verwendung der B. L. V., S. 45 angeführten Reduktionstafel, aus welcher nur die der damaligen Vergleichstemperatur $t_0 = 11.4^\circ \text{ R}$ entsprechenden Stangenlängen richtig zu entnehmen sind. Die Fehler der für alle anderen Temperaturen in der Tabelle angegebenen Stangenlängen sind den Temperaturdifferenzen $t - t_0$ proportional. Man erhält somit durch Beifügen des Faktors $(t - t_0)$ die aus dem Zusammenwirken beider Fehler folgende Gesamtverbesserung der gemessenen Länge l

$$v = -l(t - t_0)(\alpha - \alpha').$$

Setzt man in dieser Gleichung

$l = 1 \text{ m}$, $t = t_m = 13.9$, $t_0 = 11.4$. $\alpha = 16.17$, $\alpha' = 13.90 \mu$,
so wird

$$v = -2.5 \times 2.27 = -5.7 \mu \text{ pro Meter}$$

oder = -24,74 Einheiten der 7. Logarithmenstelle der gemessenen Länge l ,

das ist -5,7 mm pro km oder = 1 : 175 000.

Die mit Rücksicht auf die vorerwähnten beiden Fehler verbesserten Logarithmen der aus der fränkischen Grundlinie hergeleiteten Dreiecksseiten ergeben sich somit in der einfachsten Weise durch Hinzufügen der Verbesserung

$$- 24.7 \times 10^{-7}.$$

Für die Anschlußseite *Dö—Och* der fränkischen Kette an das Dreiecksnetz des Königreichs Sachsen hat man somit nach Tabelle IV

$$\text{Lg. } D\ddot{o} Och = 4.476\ 9565.3 - 24.7 = 4.476\ 9540.6 \text{ (bayer.)}.$$

Der für diese Seite in der Veröffentlichung Nagels, S. 659 angegebene Wert bedarf noch einer Zurückführung auf den vom sächsischen Dreieckspunkt Ochsenkopf 22,26 m entfernten bayerischen Punkt gleichen Namens, welche mit den in Tafel V des Nagelschen Werkes angegebenen Zentrierungselementen leicht und sicher ausgeführt werden kann. Man erhält nach Durchführung dieser Rechnung den Wert

$$\text{Lg. } D\ddot{o} Och = 4.476\ 9552.2 \text{ (sächs.)}.$$

Nach Helmert, Längengradmessung Heft I, S. 239 ist zur Umwandlung in internationales Maß noch ein Zuschlag von $+ 50.4 \times 10^{-7}$ erforderlich und man erhält hierauf, für die Seite *Dö—Och* die logarithmische Anschlußdifferenz

$$\text{Lg}_b - \text{Lg}_s = - 62.0 \times 10^{-7}.$$

Für die zweite Anschlußseite Coburg—Döbra ist

$$\text{Lg. } D\ddot{o} Co = 4.666\ 4488.3 - 24.7 = 4.666\ 4463.6 \text{ (bayer.)}.$$

In K. Preußische Landestriangulation, Hauptdreiecke VII. Tl. S. 71 findet sich für die mit der bayerischen Dreiecksseite vollkommen identische preußische Seite Coburg—Döbra

$$\text{Lg. } D\ddot{o} Co = 4.666\ 4464.3 + 54.9 = 4.666\ 4519.2 \text{ (preuß.)},$$

wenn die in Helmert, Längengradmessung Heft I, S. 240 hergeleitete Verbesserung für internationales Maß von $+ 54.9$ hinzugefügt wird.

Man erhält somit für die Seite Coburg – Döbra die logarithmische Anschlußdifferenz

$$\text{Lg}_b - \text{Lg}_p = - 55.6 \times 10^{-7},$$

also im Mittel für beide Anschlußseiten

$$-\frac{62.0 + 55.6}{2} = - 58.8 \times 10^{-7}.$$

Der Anschlußwiderspruch zwischen der altbayerischen und fränkischen Grundlinie kommt in der Netzausgleichung des bayerischen Hauptdreiecksnetzes in Polygon XII zum Ausdruck durch die Seitengleichung *I* (B. L.V, S. 393)

$$1 = \frac{\sin WH \cdot \sin EHW \cdot \sin DEW \dots}{\sin AS \cdot \sin WEH \cdot \sin WeDE \dots} = \frac{Z}{N},$$

in welcher mit den Sinuswerten der beobachteten und auf der Station ausgeglichenen Dreieckswinkeln

$$\text{Lg } Z - \text{Lg } N = + 30.04 \times 10^{-7}$$

wird.

Bringt man am Log. der Seite *WH*, der aus der fränkischen Grundlinie abgeleitet ist, die Verbesserung -24.7×10^{-7} und am Log. der aus der oberbayerischen Grundlinie berechneten Seite *AS* die für diese geltende Verbesserung $+ 57.7 \times 10^{-7}$ an, so erhält man den neuen Widerspruch

$$\text{Lg } Z' - \text{Lg } N' = - 54.9 \cdot 10^{-7},$$

welcher, wenn die altbayerische Grundlinienmessung als fehlerfrei angenommen wird, der Ungenauigkeit der Messung der fränkischen Grundlinie und den Fehlern der Winkelmessung der fränkischen Dreieckskette zuzuschreiben ist, wobei der mittlere Fehler der Winkelmessung des bayerischen Hauptdreiecksnetzes nach Ferreros Bericht über die Triangulationen in den Erdmessungsverhandlungen vom Jahre 1898, Bd. II, S. 31 zu ± 1.778 angenommen wurde.

Mit diesem Winkelfehler kann man auch den Längenübertragungsfehler zwischen der der fränkischen und südbayerischen Kette gemeinsamen Anschlußseite Altomünster – Schweiten-

kirchen und der dem Basisnetz der fränkischen Grundlinie angehörenden Seite Dillenberg—Hohenstein berechnen und erhält als logarithmischen Längenübertragungsfehler $\pm 103 \times 10^{-7}$.

Für den Teil der Kette von dieser Seite bis zum sächsisch-thüringischen Anschluß findet sich der entsprechende Fehler zu $\pm 85.8 \cdot 10^{-7}$.

Um sichere Anhaltspunkte bezüglich der Genauigkeit der Längenmessung mit dem Reichenbachschen Basisapparat zu gewinnen, hat der ehemalige Assistent des geodätischen Instituts der Technischen Hochschule in München, Dr. Otto Decher, im Winterhalbjahr 1880/81 mit diesem Apparat die rund 160 m betragende Länge einer im Hofraum der Technischen Hochschule in ihren Endpunkten mit zwei 6 m tief gegründeten massiven Steinpfählern von 1 m Mittelstärke versicherten Linie 10 mal, bei verschiedenen zwischen -4° und $+16^{\circ}$ R liegenden Temperaturen gemessen.

Die Ergebnisse dieser Messung sind jetzt mit dem neu ermittelten Ausdehnungskoeffizienten der Eisenstangen 11.12μ für 1 m und 1° C neu berechnet worden und haben den mittleren unregelmäßigen Fehler einer einmaligen Messung zu $1:180\,000$ oder ± 24.1 Einheiten der 7. Logarithmenstelle ergeben.

Das starke Überwiegen des Längenübertragungsfehlers über den Längenmessungsfehler ist der geringen Genauigkeit der Winkelmessung, infolge deren Dreiecksschlußfehler bis zu $5''$ vorkommen, zuzuschreiben. Es sollten daher, bevor eine weitere Verwertung der fränkischen Grundlinienmessung stattfinden kann, in ähnlicher Weise, wie das bei der südbayerischen Dreieckskette geschehen ist, die Dreieckswinkel der fränkischen Kette mit größerer Genauigkeit neu gemessen werden.

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 12. Abhandlung

Über

einige spezielle Bieungsgruppen

von

E. Stübler

Vorgelegt am 5. November 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

I.

1. L. Bianchi nennt zwei Flächen zueinander assoziiert, wenn sie sich so punktweise zuordnen lassen, daß in entsprechenden Punkten die Normalen parallel sind und den Haupttangentenkurven der einen ein konjugiertes System der andern entspricht. Sind die Gleichungen der einen Fläche auf die Haupttangentenkurven ($u = \text{const}$, $v = \text{const}$) als Parameterlinien bezogen, dann ergibt sich eine assoziierte Fläche als Hüllfläche der Ebene:

$$Xx + Yy + Zz = \frac{\vartheta}{V_\varrho}$$

(vgl. L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 1. Aufl., § 155 und § 158), wo $X Y Z$ die Richtungskosinus der Normale, $-\varrho^2$ das Produkt der Hauptkrümmungsradien der gegebenen Fläche bedeutet und ϑ eine Funktion ist, welche der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = \left(\frac{1}{V_\varrho} \frac{\partial^2 V_\varrho}{\partial u \partial v} - f \right) \vartheta$$

genügt, unter f die Fundamentalgröße

$$\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v}$$

verstanden.

Wendet man dies an auf die Konoidflächen, deren Gleichungen in den besagten Parametern sich ausdrücken lassen:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= \frac{u}{V} \sin v \\ y &= \frac{u}{V} \cos v \\ z &= \int \frac{dv}{V^2}, \end{aligned}$$

wo unter V eine beliebige Funktion von v zu verstehen ist, so erhält man

$$\rho = u^2 + \frac{1}{V^2} \quad f = \frac{u V V'}{(u^2 V^2 + 1)^2},$$

also:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = 0$$

und daher:

$$\vartheta = U_1 + V_1.$$

Die zu den Konoidflächen assoziierten Flächen sind daher die Hüllflächen der Ebene:

$$x \sin v - y \cos v + u V z = V(U_1 + V_1).$$

Man findet, wenn man zuerst nach u differenziert:

$$x \sin v - y \cos v = V(U_1 + V_1 - u U_1') \\ z = U_1'.$$

Durch diese Gleichungen wird für einen bestimmten Wert von v eine Zylinderfläche dargestellt, deren Erzeugende $u = \text{const}$ senkrecht zur z -Achse liegen. Ändert sich v , dann bewegt sich die Zylinderfläche senkrecht zur z -Achse und ändert sich zugleich, aber so, daß sie zu sich selbst affin bleibt. Dabei umhüllt sie die Fläche mit den Gleichungen:

$$x = (V' \cos v + V \sin v)(U_1 + V_1 - u U_1') + V V_1' \cos v \\ (2) \quad y = (V' \sin v - V \cos v)(U_1 + V_1 - u U_1') + V V_1' \sin v \\ z = U_1'.$$

Nun weiß man.¹⁾ daß immer, wenn ρ wie hier, die Summe einer Funktion von u und einer Funktion von v ist, die assoziierten Flächen, also hier (2), sich so verbiegen lassen, daß die konjugierten Systeme (u, v) konjugiert bleiben. Zwei besondere Fälle, wo V bzw. V_1 eine Konstante bedeutet, seien hervorgehoben. Ist V konstant, so erhält man die Gesimsflächen, die sich mit Erhaltung der Krümmungslinien verbiegen lassen. Sie sind zur Minimalschraubenregelfläche assoziiert.

¹⁾ L. Bianchi, Annali di Mat. (2), 18 (1890), p. 337. Vgl. Vorles. über Differentialgeom., übers. v. Lukas. 1. Aufl., p. 337, 2. Aufl., p. 343.

Ist V_1 konstant, dann gehen die Ebenen, in welchen die Kurven $v = \text{const}$ liegen, alle durch die z -Achse. Die Berührungsebenen längs der Kurven $u = \text{const}$ werden durch Kegelflächen eingehüllt, während diejenigen längs $v = \text{const}$ wie im allgemeinen Fall von Zylinderflächen umhüllt werden. Sie gehören daher zu den von Peterson betrachteten und nach ihm P -Flächen genannten¹⁾ Flächen.

2. Die Verbiegungen von (2) sind nun auch wirklich angegeben worden und zwar von Herrn B. Młodziejowski, Bull. des Sc. Math. (Darboux) 2. Serie, 15. p. 101, ohne daß ihr Zusammenhang mit den Konoidflächen bekannt wäre. Wir schreiben ihre Gleichungen in etwas abgeänderter Form:

$$\begin{aligned} x &= (U + V) \sqrt{V_1 + a} \cos \varphi - \int V' \sqrt{V_1 + a} \cos \varphi \, dv \\ y &= (U + V) \sqrt{V_1 + a} \sin \varphi - \int V' \sqrt{V_1 + a} \sin \varphi \, dv \\ (3) \quad z &= \int \sqrt{1 - a U'^2} \, du \\ \varphi &= \int \frac{\sqrt{(V_1 + a) V_2 - \frac{1}{4} V_1'^2}}{V_1 + a} \, dv. \end{aligned}$$

Die U und V sind wieder Funktionen von u bzw. v allein, haben aber eine andere Bedeutung als in (2).

Das Quadrat des Linienelements wird

$$ds^2 = (1 + U'^2 V_1) du^2 + U' V_1' (U + V) du \, dv + V_2 (U + V)^2 dv^2.$$

Man kann die Biegungsgruppe aus dem besonderen Fall, wo V einen konstanten Wert hat, nach dem von K. Peterson angegebenen Verfahren (vgl. P. Stäckel, Biegungen und konjugierte Systeme, Math. Ann. 49 [1897], p. 256) ableiten. Dieser besondere Fall gehört zu den von Peterson (Über Kurven und Flächen, p. 72) angegebenen Biegungen der Flächenklasse

$$x = UV \quad y = UV_1 \quad z = U_1.$$

Vgl. B. Młodziejowski, Math. Ann. 63 (1906), p. 82. Nimmt man in (3) V_1 konstant, dann kommt man auf die Biegungsgruppe der Gesimsflächen.

¹⁾ A. Voss, Math. Ann. 39, S. 205.

Will man rückwärts die zu (3) assoziierten Konoidflächen aufsuchen, so braucht man die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L und N (D und D'' in der Bianchischen Bezeichnung). Bedeuten nämlich x_0, y_0, z_0 die Koordinaten der assoziierten Fläche, dann wird (Bianchi, Vorl., 1. Aufl., p. 294; 2. Aufl., p. 300)

$$(4) \quad \frac{\partial x_0}{\partial u} = \frac{M_0}{N} \frac{\partial x}{\partial v} \quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = \frac{M_0}{L} \frac{\partial x}{\partial u}$$

nebst entsprechenden Gleichungen für y_0 und z_0 . Aus diesen Gleichungen folgt, wenn $EG - F^2 = D^2$ gesetzt wird, und D_0 die analoge Bedeutung hat,

$$D_0^2 = \frac{M_0^2}{LN} D^2.$$

Für die assoziierte Fläche ist daher das Krümmungsmaß

$$K_0 = - \frac{M_0^2}{D_0^2} = - \frac{L^2 N^2}{M_0^2 D^2}.$$

Setzt man aber $K_0 = - \frac{1}{\varrho^2}$, dann läßt sich nach Bianchi, Vorl., 1. Aufl., p. 125; 2. Aufl., p. 126 ϱ also M_0 bestimmen durch die Gleichungen:

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial u} \log \varrho = - 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\}' \quad \frac{\partial}{\partial v} \log \varrho = - 2 \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\}'.$$

Das Christoffelsche Symbol $\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\}'$ bezieht sich hier auf das Bogenelement der sphärischen Abbildung; man kann dafür (Bianchi, p. 135 bzw. 134) auch $-\frac{N}{L} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix} \right\}$ oder nach den Codazzischen Fundamentalgleichungen $\frac{\partial}{\partial v} \log L - \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\}$ schreiben. Entsprechendes gilt von $\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\}'$.

In unserem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{M_0}{L} &= \frac{U''}{2(U+V) \sqrt{(1-aU'^2)^3 [(V_1+a) + V_2 - V_1'^2]}} \\ \frac{M_0}{N} &= \frac{V_2 V_1'' - \frac{1}{2} V_1' V_2' - 2 V_2^2}{\sqrt{(1-aU'^2) [(V_1+a) + V_2 - V_1'^2]^3}} \end{aligned}$$

und damit $x_0 y_0 z_0$. Die Form (1) erhält man, wenn man an Stelle von u und v die neuen Veränderlichen u_1 und v_1 einführt mittels:

$$u_1 = \frac{U'}{2 \sqrt{1 - a U'^2}}$$

$$tg(v_1 - \varphi) = \frac{\sqrt{(V^2 + a) 4 V_2 - V_1'^2}}{V_1'}$$

und man erhält für V in (1):

$$V = \sqrt{\frac{(V_1 + a) 4 V_2 - V_1'^2}{V_2}}$$

II.

3. Während durch das Petersonsche Verfahren nur eine gegebene Biegungsgruppe, bei der ein konjugiertes System erhalten bleibt, sich verallgemeinern läßt, gestattet eine von Herrn J. Weingarten in den Göttinger Nachrichten 1878, p. 28 zum erstenmal verwendete Methode Biegungsgruppen zu finden, sobald man eine Flächenschar kennt, für welche das Produkt und die Summe der Krümmungshalbmesser durch eine lineare Beziehung verbunden ist, in welcher noch die Entfernung eines Flächenpunkts und der Abstand seiner Tangentialebene vom Anfangspunkt auftritt. Kennt man alle Flächen, welche einer solchen Beziehung genügen, dann erhält man eine vollständige Flächenklasse (Weingarten und E. Goursat, Comptes rendues 112 (1891), p. 607 und 707; Darboux, Leçons 4, p. 308); aber auch partikuläre Lösungen können zu beachtenswerten Ergebnissen führen.

Aus den Gleichungen:

$$dx + \varrho dX = 0$$

$$(6) \quad dy + \varrho dY = 0$$

$$dz + \varrho dZ = 0,$$

wo X, Y, Z die Richtungskosinus der Flächennormale bedeuten, leitet man ab:

$$(7) \quad dq + \varrho dp = 0,$$

wenn

$$p = Xx + Yy + Zz$$

$$q = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

ist. Sieht man $x y z$ als Funktionen von p und q an, so liefert die erste Gleichung von (6) und (7):

$$\frac{\partial x}{\partial p} - \varrho \left(\frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial X}{\partial p} \right) - \varrho^2 \frac{\partial X}{\partial q} = 0.$$

Deshalb ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial p} &= -\varrho_1 \varrho_2 \frac{\partial X}{\partial q} & \frac{\partial x}{\partial q} &= \frac{\partial X}{\partial p} - (\varrho_1 + \varrho_2) \frac{\partial X}{\partial q} \\ (8a) \quad \frac{\partial y}{\partial p} &= -\varrho_1 \varrho_2 \frac{\partial Y}{\partial q} & (8b) \quad \frac{\partial y}{\partial q} &= \frac{\partial Y}{\partial p} - (\varrho_1 + \varrho_2) \frac{\partial Y}{\partial q} \\ \frac{\partial z}{\partial p} &= -\varrho_1 \varrho_2 \frac{\partial Z}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial q} &= \frac{\partial Z}{\partial p} - (\varrho_1 + \varrho_2) \frac{\partial Z}{\partial q}, \end{aligned}$$

wo ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Hauptkrümmungsradien bedeuten.

Diese Formeln sind von Weingarten und nach ihm von Goursat und Darboux zur Herstellung von Biegungsgruppen verwendet worden.

So liefern die auf der linken Seite stehenden Formeln, sobald man das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\varrho_1 \varrho_2 = -\frac{P}{Q}$$

kennt, wo P eine beliebige Funktion von p , Q eine solche von q sein soll, die vollständigen Differentiale:

$$\begin{aligned} d\xi &= PX dp + Qx dq \\ d\eta &= PY dp + Qy dq \\ d\zeta &= PZ dp + Qz dq \end{aligned}$$

und damit alle Flächen, für welche das Quadrat des Linienelements:

$$d\sigma^2 = P^2 dp^2 + 2PQp dp dq + 2Q^2 q dq^2.$$

Dies soll angewendet werden auf die Differentialgleichung:

$$(9) \quad \varrho_1 \varrho_2 = \frac{C}{p^4},$$

von der ein partikuläres Integral wohl bekannt ist. Für die Mittelpunktsfläche zweiten Grads mit der Gleichung:

$$(10) \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

ist nämlich:

$$(11) \quad \varrho_1 \varrho_2 = \frac{abc}{p^4}$$

und (10) ist daher ein Integral von (9), wenn $abc = C$ ist.

Nun ist für die Fläche (10):

$$X = \frac{px}{a}$$

und:

$$(12) \quad x = a \sqrt{\frac{\frac{bc}{p^2} + 2q - b - c}{(a-b)(a-c)}}.$$

Tatsächlich wird $-\frac{C}{p^4} X dp + x dq$ damit ein vollständiges Differential und man erhält durch Integration

$$\xi = \frac{a}{3} \sqrt{\frac{\left(\frac{bc}{p^2} + 2q - b - c\right)^3}{(a-b)(a-c)}}.$$

Oder man hat das Ergebnis:

Durch die Gleichungen

$$(13) \quad \begin{aligned} x &= a \sqrt{\frac{(bcu + v - b - c)^3}{(a-b)(a-c)}} \\ y &= b \sqrt{\frac{(cau + v - c - a)^3}{(b-c)(b-a)}} \\ z &= c \sqrt{\frac{(abu + v - a - b)^3}{(c-a)(c-b)}} \end{aligned}$$

werden tetraedrale Flächen dargestellt, für welche das Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = \frac{9}{4}(C^2 u du^2 + 2 C du dv + v dv^2)$$

gemeinschaftlich ist, wenn die Biegungsparameter abc an die Bedingung gebunden sind, daß ihr Produkt konstant gleich C ist.

4. Für die Summe der Hauptkrümmungsradien der Mittelpunktsfläche zweiten Grads mit der Gleichung (10) findet man:

$$(14) \quad p(\varrho_1 + \varrho_2) + 2q - a - b - c = 0.$$

Nun sind (vgl. Weingarten, Paris, Comptes Rendus 112 (1891), p. 607)

$$(15) \quad d\xi = X d \frac{\partial \varphi}{\partial p} + x d \frac{\partial \varphi}{\partial q}$$

und die entsprechenden Ausdrücke in y und z vollständige Differentiale nach (8), wenn φ eine Funktion von p und q ist, welche der Differentialgleichung genügt:

$$(16) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + (\varrho_1 + \varrho_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} + \varrho_1 \varrho_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0.$$

Für die durch (15) bestimmten Flächen ist dann:

$$(17) \quad \begin{aligned} d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 &= d\sigma^2 \\ &= d \frac{\partial \varphi^2}{\partial p} + 2p d \frac{\partial \varphi}{\partial p} d \frac{\partial \varphi}{\partial q} + 2q d \frac{\partial \varphi^2}{\partial q}. \end{aligned}$$

Setzt man nun $a + b + c = C_1$ und

$$\varphi = p^3 (q - \frac{1}{2} C_1),$$

so geht (16) in (14) über und man findet nach (15):

$$\xi = \sqrt{\frac{p^2(2q - b - c) + bc}{(a - b)(a - c)}}.$$

Die Substitution

$$p^2 = v$$

$$2q - C_1 = \frac{u}{v} - \frac{1}{2}v$$

führt schließlich zu dem Ergebnis:

Die Flächen, welche durch die Gleichungen

$$(18) \quad \begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{(bc + u + av - \frac{1}{2}v^2)^3}{(a-b)(a-c)}} \\ y &= \sqrt{\frac{(ca + u + bv - \frac{1}{2}v^2)^3}{(b-c)(b-a)}} \\ z &= \sqrt{\frac{(ab + u + cv - \frac{1}{2}v^2)^3}{(c-a)(c-b)}} \end{aligned}$$

dargestellt werden, haben das folgende Quadrat des Linienelements gemeinsam:

$$ds^2 = \frac{9}{4} [du^2 + (u + C_1 v - \frac{3}{2}v^2) dv^2],$$

wenn die Biegungsparameter abc an die Bedingung gebunden sind, daß ihre Summe konstant gleich C_1 ist.

5. In Comptes rendus t. 112, p. 707 hat M. Goursat Flächen verwendet, für welche $\varrho_1 + \varrho_2 + \lambda p = 0$ ist und stößt dabei auf Biegungsgruppen, deren Linienelement für $\lambda = 4$ mit dem obigen übereinstimmt. Umgekehrt muß man also aus der Biegungsgruppe (18) Integralfächen der Differentialgleichung

$$\varrho_1 + \varrho_2 + 4p = 0,$$

deren allgemeines Integral nach der Goursatschen Methode sich nicht angeben läßt, finden können. Man kommt so auf Flächen, für welche

$$(19) \quad \begin{aligned} x &= (a - p) X \\ y &= (b - p) Y \\ z &= (c - p) Z \end{aligned}$$

ist (die Werte von abc in (18) sind hier durch

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \quad \frac{b}{\sqrt{2}} \quad \frac{c}{\sqrt{2}}$$

ersetzt). Die Abschnitte der Flächenornamente zwischen den Koordinatenebenen sind konstant. (Vgl. auch Darboux, Leçons I, 159) und man findet leicht für die Koordinaten eines Flächenpunkts:

$$\begin{aligned}
 x &= (a - p) \sqrt{\frac{bc - 2p(b+c) + 3p^2 + 2q}{(a-b)(a-c)}} \\
 (20) \quad y &= (b - p) \sqrt{\frac{ca - 2p(c+a) + 3p^2 + 2q}{(b-c)(b-a)}} \\
 z &= (c - p) \sqrt{\frac{ab - 2p(a+b) + 3p^2 + 2q}{(c-a)(c-b)}}.
 \end{aligned}$$

Tatsächlich wird nach (8 b)

$$(21) \quad \varrho_1 + \varrho_2 + 4p - a - b - c = 0$$

und ferner nach (8 a):

$$\varrho_1 \varrho_2 = bc + ca + ab - 3p(a+b+c) + 6p^2 + 2q.$$

Nimmt man also $bc + ca + ab$ konstant gleich C_2 , so muß sich aus der Beziehung

$$(22) \quad C_2 - 6p^2 + 2q - 3p(\varrho_1 + \varrho_2) - \varrho_1 \varrho_2 = 0$$

eine neue Biegungsgruppe ableiten lassen. Durch Division mit $(C_2 + 3p^2 + 2q)^{\frac{5}{2}}$ läßt sich die letzte Gleichung auf die Form (16) bringen und man findet nach derselben Methode wie früher

$$\xi = - \frac{1}{3(b+c) \sqrt{(a-b)(a-c)}} \sqrt{\left[\frac{bc - 2p(b+c) + 3p^2 + 2q}{C_2 + 2q + 3p^2} \right]^3}$$

oder wenn man geeignete Parameter einführt:

Die Flächen

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{\frac{[1 - (b+c)(u+av)]^3}{(b+c)^2(a-b)(a-c)}} \\
 (23) \quad y &= \sqrt{\frac{[1 - (c+a)(u+bv)]^3}{(c+a)^2(b-a)(b-c)}} \\
 z &= \sqrt{\frac{[1 - (a+b)(u+cv)]^3}{(a+b)^2(c-a)(c-b)}}
 \end{aligned}$$

haben das Linienelement gemeinsam, wenn $ab + bc + ca$ konstant bleibt. Es wird:

$$ds^2 = \frac{3}{4} [-v du^2 - 2u du dv + [1 - C_2 v] dv^2].$$

Irgend welche Kombinationen der Gleichungen (11) und (14) oder (21) und (22) liefern nur besondere Fälle der von Th. Egorow, Comptes rendus 132, 1901, p. 302 angegebenen Biegungsgruppe:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = A \sqrt{(u-a)(v-a)^3} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} = A \sqrt{(u-a)^3(v-a)} \frac{\partial \vartheta}{\partial v}.$$

Analog sind die Differentialquotienten von y und z gebildet. ϑ erfüllt die Differentialgleichung

$$(u-v) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u} - \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right) = 0$$

und es gilt:

$$A^2 a^i + B^2 b^i + C^2 c^i = m_i; \quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Die Parameterlinien bilden konjugierte Systeme, und die Flächen sind im Bianchischen Sinne assoziiert zu der Fläche, für welche

$$x = \frac{A [2uv - (b+c)(u+v) + bc]}{(b-c)^2 \sqrt{(u-b)(u-c)(v-b)(v-c)}}$$

und entsprechend y und z gebildet ist. (Nach den Gleichungen (4) und (5)).

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch - physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 13. Abhandlung

Metamorphe Fremdlinge in Erstarrungsgesteinen

von

M. Weber

Mit 2 Tafeln

Vorgelegt am 3. Dezember 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

An Stellen, wo die alte geologische Karte von Gumbel einförmige Gneiß- und Granitmassen und etwas Diorit zeigt, hat der Bahnbau der Linie Waldkirchen—Neureichenau—Haidmühle neuerdings ganz andere interessante Gesteine erschlossen, die ich in ihrer Bedeutung für die Bildungsweise des Granulites und weiterhin für die Auffassung gewisser anderer Gesteine für sehr interessant halte.

I.

Fängt man mit der Begehung der Bahnlinie bei der Station Waldkirchen an, so hat man zunächst in den ersten Einschnitten das gleiche Gestein vor sich, das die ganze nördliche Umgebung zu bilden scheint.

Es ist das ein dunkles feinkörniges Gestein, das meist kleine Butzen von Hornblende mit Schwefelkies einschließt. Sehr reichlich wird schon bei Waldkirchen, besonders im Steinbruche des Herrn Penn, dieses dunkle Gestein durchzogen von Gängen eines etwas porphyrischen Granites, der manchmal akzessorisch schon makroskopisch sichtbar auch Braunsparat, Kalkspat, und darin eingelagert einzelne bis 2 cm lange Prismen von Quarz führt. Das dunkle Gestein fällt wohl unter den Begriff des Gumbel'schen Diorites; schon lange wurden Findlinge davon zu Schottern verarbeitet, aber die Eröffnung des Bruches stammt erst aus neuerer Zeit und er ist bei Gumbel noch nicht verzeichnet.

U. d. M. findet man Oligoklas mit viel Orthoklas, Quarz, Biotit zackig gegeneinander und rundlich ineinander verwachsen, besonders die Feldspäte zeigen schön die gegensei-

tige Störung während der Wachstumsperiode. Die Quarze sind fast immer gerundet und bilden gerne Einschlüsse, nicht selten treten sie auch in granophyrische Verwachsungen ein. Dazu kommt viel grünlich-brauner Biotit, reichlich Nadelchen von Apatit und viele kleine Oktaëder von Magneteisen. Sekundärer Epidot ist allenthalben verstreut. Die Plagioklase haben bei divergentstrahliger Anordnung Neigung zur Bildung von Einsprenglingen, die dann randlich ebenso zackig begrenzt sind; sie gehören dem Oligoklas bis Andesin an. Die makroskopisch sichtbaren dunklen Butzen bestehen aus Anhäufungen von grüner Hornblende; sie finden sich nicht an allen Stellen des Stockes und sind vielleicht zurückzuführen auf kontaktmetamorphe Beeinflussung durch die Granitgänge oder auf Aufnahme fremder Gemengteile.

Die Struktur erinnert in der Kleinheit der Gemengteile zunächst an kataklastische Phänomene. Aber weder die Glimmer noch der Quarz noch auch die größeren Feldspäte zeigen irgendwo Spuren von Schleppung oder undulöser Auslöschung, sodaß hier nur eine primäre und zwar, abgesehen von den Feldspateinsprenglingen und den Glimmern, die panidiomorphkörnige Struktur vorliegt. Das Gestein ist in die Nähe der von Rosenbusch sogenannten Glimmermalchite zu stellen; es fehlt hier die fluidale Anordnung, wie am Melibocus, auch überwiegt der Orthoklas bei weitem, sodaß man hier wohl von Orthoklasmalchit sprechen muß ¹⁾

Die injizierenden Gänge vom Granit sind meist nur fingerstark, werden aber auch größer. Die Durchäderung des malchitischen Gesteines ist so weit gegangen, daß man oft direkt breccienartig die scharf begrenzten Schollen im Granit schwimmen sieht.

Der Granit ist im allgemeinen feinkörnig und ziemlich reich an Biotit; werden aber die Adern schmal, so entwickelt der Granit am Salband gegen den Malchit eine aplitische Grenzfazies und in den ganz feinen Gängen ist der Glimmer überhaupt vollständig verschwunden.

Bei mikroskopischer Betrachtung hat man dann das Bild eines porphyrischen Granitaplitites mit viel Mikroklin, etwas Oligoklas, dann Orthoklas und Quarz. Myrmekite sitzen para-

¹⁾ Ich ziehe diesen Namen der Bezeichnung Biotitaplit von Andrae vor, weil er viel prägnanter ist.

sitenähnlich an den eingebuchteten Rändern der größeren Feldspäte. Die größeren Quarze sind stets in mehrere Trümmer zerbrochen, auch einzelne größere Feldspäte haben dieses Schicksal gehabt. Da sich nirgends Spuren von Pressung in den Gesteinen der Gegend nachweisen lassen, muß diese Tatsache als ein Beweis für die Existenz der von mancher Seite noch bestrittenen Protoklase angesehen werden.

Die aplitische Randfazies um die eckigen Einschlüsse ist natürlich nichts Neues; immerhin gibt sie einen Fingerzeig für das Verständnis der Tatsache, daß die durch Injektion entstehenden Mischgesteine stets nur aplitische Schnüre führen, sofern die granitischen Adern nicht gar zu mächtig werden.

Verfolgt man das Profil von Waldkirchen ausgehend weiter, so werden die granitischen Gänge immer mächtiger und schließlich sieht man nur mehr kugelig ausgewitterte Formen des Malchites mit etwa 1 m Durchmesser aus dem Granite herausragen. Bei Erlauzwiesel besteht aber eine derartige Kugel aus unfrischem, etwas schieferigem Hornblende-gabbro (gabbroides Gestein aus Labradorit, farblosem, monoklinem Augit und brauner Hornblende zusammengesetzt, welche letztere immer enge mit dem Pyroxen verwachsen ist).

Hinter der Reichermühle ändert sich das Bild. Nun beginnen mittelkörnige helle Gesteine, meist frei von dunklen Gemengteilen, dafür aber Granaten in zunehmender Menge führend. Vielfach treten kleine dunkle Schlieren, manchmal auch eckige Schollen in ihnen auf; Gänge (oder Schlieren?) von feinerem und gröberem Granit dringen gelegentlich in das Ganze ein.

Den schönsten Aufschluß gewährt der Bahneinschnitt am Spitzenberg, nordöstlich von Jandelsbrunn.

Hier sieht man in bunter Mannigfaltigkeit schlierig durcheinander gemengt in den obengenannten leukokraten Granatgesteinen glimmerreichere Lagen ohne scharfe Grenze, die an die schieferigen Cordieritgneisse von Bodenmais erinnern. An anderen Stellen mischen sich in das Gemenge dichte dunkle Gesteine, in deren Umgebung dann der Granat ziemlich selten

wird; diese dunklen Partien sind eckig oder auch gerundet, oft durch einen eigenen Biotithof von ihrer Umgebung getrennt; anderswo werden sie lang ausgezogen und geschwänzt. An anderer Stelle treten streifige Bildungen auf, die an Flaser-gabbro erinnern. Auch einzelne Gänge oder Schlieren von feinkörnigem Granit stellen sich ein.

Untersucht man nun zunächst mikroskopisch die glimmerfreien, nur Granat bis zu Haselnußgröße führenden Varietäten, so bestehen sie vorherrschend aus Plagioklasen (Andesin und Oligoklas), eingebettet in Quarz. In den Feldspäten viel sekundärer Muskovit, oft Büschel bildend, ferner reichlich runde Körner von Quarz als Einschlüsse (structure granulitique). Die Grenzen der Feldspäte gegen die Quarze sind meist scharf (Taf. I Fig. 1) und gerade; aber vielfach sendet der Quarz auch runde oder warzige Ausläufer in die Feldspäte hinein (Taf. I Fig. 2). Der Quarz, mit Ausnahme der schon genannten granulitischen Einschlußbildungen als letzte Ausfüllung stets allotriomorph, hat stark undulöse Auslöschung und die einzelnen Körner sind wieder umgeben von einem feinkörnigen Hofe meist zackig ineinander verfilzter kleinster Quarzaggregate (Taf. II Fig. 3). Die Struktur ist demnach zunächst granulitisch, dann aber auch hypidiomorph-körnig; von den kleinsten Quarzkörnern ist es fraglich, ob sie in ihrem verzackten Gefüge nur an Mörtelstruktur und nicht auch an malchitischen Bau erinnern.¹⁾ — Orthoklas fehlt vollständig. Die Granaten finden sich als größere gerundete Einsprenglinge an Feldspat sowie an Quarz angrenzend; meist sind sie randlich und auf den Rissen begleitet von schwach pleochroitischem Biotit und Chlorit mit pleochroitischen Höfen und kleinen Zirkonen, die auch isoliert in den Feldspäten auftreten. In den chloritischen Partien gesellt sich auch Schwefelkies bei, ferner manchmal gelbe quadratische, stark lichtbrechende Kristalldurchschnitte; letztere zeigen feine Zwillinglamellen parallel der Begrenzung, wie sie Lasaulx vom Rutil beschrieben hat, und gehören sicher diesem Mineral an. Als Einschlüsse in Granat: Biotit, Zirkon und seltener auch runde Körner von Quarz.

In glimmerreicheren Modifikationen ist es wesentlich Biotit, der sich in Butzen und Schlieren einigermaßen beim Aufbau

¹⁾ Man vgl. diesbezüglich die Ausführungen von Uhlig (Zeitschr. D. G. G. 1907, p. 35), wo auch einschlägige Beobachtungen von Bonney und Geikie zitiert sind.

beteiligt. Muskovit ist nicht ganz selten, aber wohl stets sekundär aus Feldspat (Cordierit?) und aus Biotit. Hier gesellt sich auch mehr Orthoklas bei, teils in wenigen größeren Individuen zwischen die Plagioklase gedrängt, teils als diffuse Flecken im Plagioklas, teils endlich auch in granophyrischen Verwachsungen mit Quarz, welcher auch rundliche Partien in den Andesinen bildet. Trotz der vielfach ungleichen Auslöschung ist deutlich kennbar, daß die Quarze auch in ihrem oft gewundenen Verlaufe um die Feldspäte herum einheitliche Individuen sind. — Die Struktur ist also wesentlich hypidiomorph, aber die rundlichen Myrmekite und Quarze in den Andesinen deuten zugleich auf panidiomorphe oder granulitische Ausbildung. — Die zahlreichen Granaten sind sehr klein, mit freiem Auge nur schwer zu sehen; sie sind stets mit dem Biotit verknüpft, ebenso wie die kleinen Erzpartikeln sich fast nur im Inneren und auch auf den Rändern der Glimmer finden.

Bei anderen helleren Typen, welche etwas schlierige dunkle Partien einschließen, ist mikroskopisch der Biotit vertreten durch schlecht begrenzte grüne Hornblende, deren randliche Entstehung aus farblosem Pyroxen erfolgt ist; daneben ist idiomorpher Titanit, ferner sekundärer Chlorit und Epidot vorhanden. Zu dem herrschenden Andesin tritt sehr wenig Mikroklin; Orthoklas höchstens in Form von perthitischen Flecken im Andesin. Der Quarz ist wieder letzte Ausfüllung, hat Mikrolithen von Rutil(?) und in den feinsten Umrandungspartien wieder den verzahnten Bau der Quarzkörnchen, von dem es zweifelhaft bleibt, ob er primären oder sekundären Ursprunges ist. Runde Quarzeinschlüsse sind in den Feldspäten sehr häufig, die Struktur ist also die nämliche wie oben.

Dichtere, glimmerreiche Schlieren zeigen im Dünnschliff einen Aufbau aus monoklinem Augit und Biotit, dazu Oligoklas und Andesin, etwas Labradorit scheint sich einzustellen (La Auslöschung 25°); Orthoklas und Mikroklin fehlen; Quarz als letzte Ausscheidung und auch wieder in gerundeten Körnern als Einschlüsse im Feldspat. — Diese dichten dunklen Augit und Biotit führenden Varietäten treten in rundlichen Butzen und in faserigen an Bändergabbro erinnernden Partien innerhalb der granatführenden Zonen auf, wobei die streifigen Formen sicher durch primäre Druckphänomene vor der Erstarrung aus den runden sich herausgebildet haben, weil außer seltener ungleicher Auslöschung keine Spur von Kataklyse nachweisbar ist.

Weiter zu den ganz dichten dunklen Flecken und oft aus-

geschweiften Schlieren, welche manchmal randlich Biotit um sich angehäuft haben, und ähnlich wie der Pyroxengranulit für das freie Auge keinen einzigen Gemengteil mehr hervortreten lassen. Sie haben neben farblosen rhombischen Pyroxenen auch farblose monokline mit $c:c = 43^\circ$, letztere oft mit den stäbchenförmigen, offensichtlich aus Erz bestehenden Interpositionen und den feinen Lamellen des Diallages; eine farblose, nicht pleochroitische Umsäumung der monoklinen Augite hat schwächere Doppelbrechung und gehört wahrscheinlich einem rhombischen Pyroxen an. Diese Pyroxene liegen in typischer Gabbrostruktur zwischen Plagioklasen, meistens Anorthit mit relativ wenig Zwillingslamellen. Die Feldspäte führen nun wieder massenhaft eiförmige Einschlüsse, nicht von Quarz, sondern von einem Feldspat, der stets höhere Lichtbrechung hat als Kanadabalsam und keine Zwillingsbildungen zeigt; er ist nicht näher zu bestimmen. Ein wenig Erz und Spuren von Biotit vervollständigen das Bild.

Und nun noch zu dem feinkörnigen Granite, der am Südwesteingang des Einschnittes auftritt, ob gang- oder schlierenförmig, ist nicht zu entscheiden. Es ist ein Zweiglimmergranit mit aplitischer panidiomorpher Struktur; auch länglich gestreckte Feldspäte sind ganz myrmekitisch von Quarz durchwachsen; es sind vorherrschend Mikroklin und Orthoklas, dazu etwas Oligoklas und Oligoklas-Albit (Ca — Gehalt nach Analyse von Dr. Hoppe 1,78%).

Überblickt man nun die ganze Reihe von verschiedenen Gesteinsarten, welche größtenteils schlierig miteinander verknüpft sind (nur zu den Orthoklasalchiten ist der Zusammenhang nicht aufgeschlossen), so wird man schon aus der Art ihrer Verknüpfung allein nur den Schluß ziehen können, daß es sich hier um magmatische Differenzierungsprodukte handelt.

Weiter wird das begründet durch die Struktur. Wohl könnte man bei den granat- und glimmerreichen schlierigen Gesteinen makroskopisch etwa an Gneisse denken oder auch sonst manchmal an kristalline Schiefer der Tiefenstufe, die in der Regel keine oder nur geringe Schieferung aufweisen. Allein aus den mikroskopischen Befunden geht klar hervor, daß es sich hier nirgends um kristalloblastische, sondern um stets echte

Tiefengesteinsstrukturen handelt, um hypidiomorphe bei den granitischen und dioritischen Gesteinen, um Gabbrostruktur bei den ganz dichten gabbroiden Varietäten.

Aber Eines ist bei diesen Strukturen auffällig: daß stets zu gleicher Zeit Anzeichen von mehr oder minder bestimmender Art für eine gleichzeitige Auskristallisation einzelner Komponenten gegeben sind. Mag man die daraus resultierende Struktur panidiomorph-körnig oder malchitisch oder aplitisch oder granulitisch nennen, immer ist es dieselbe Erscheinung, daß Gemengteile, die gemäß den bekannten Ausscheidungsgesetzen erst viel später ihre Kristallisation hätten beginnen sollen, mit der Erstarrung zum Teil schon früher oder mindestens gleichzeitig mit anderen Komponenten einsetzen, deren Ausscheidungsbeginn gemäß ihrer chemischen Zusammensetzung vor ihre fällt.

Diese beiden Arten der Struktur, die regelmäßige sowohl wie die unregelmäßige, sind nun in ihrem Zusammenbestehen bei all den vorher beschriebenen Gesteinen Anzeichen genug dafür, daß alle einem gemeinsamen Schmelzflusse entstammen, weil ja die physikalischen Bedingungen bei der Abkühlung die gleichen gewesen sein müssen.

Ich stehe nun nicht an, das räumlich am weitesten verbreitete, im ganzen leukokrate granatführende Gestein als Granulit zu bezeichnen, und zwar wesentlich auch wegen seiner structure granitique. Daß es entgegen allen sonstigen Definitionen von Granulit oft keinen Alkalifeldspat enthält, macht das Vorkommen nur um so interessanter. Ich nenne es darum Dioritgranulit, und es steht genau in dem gleichen Verhältnis zum Diorit wie der gewöhnliche Granulit zum Granit, d. h. es ist nur eine bestimmte Modifikation des normalen Gesteinstypus.

Wir haben demnach eine fast lückenlose Reihe von Differenzierungspunkten aus dem gleichen Schmelzflusse: Zweiglimmergranit, Orthoklasmalchit, Quarzdiorit in der Fazies des Dioritgranulites, dann Quarz-Augitdiorit und endlich Anorthitnorit.

Da die Alkalifeldspäte wenigstens in Spuren noch bis zum Augitdiorit herunterreichen, entsprechen diese Gesteine so ziemlich den Mangeriten von Rosenbusch und es ist sehr interessant, daß er in seiner Reihe Charnockit-Mangerit-Anorthosit gleichfalls einen granatführenden, also anormalen Vertreter hat, nur ist es dort der Granit und hier der Diorit, der in einer besonderen Fazies auftritt. Obgleich nun hier kein Anorthosit vorhanden ist, so zögere ich doch nicht, meine Gesteine seiner obigen Reihe anzugliedern, der sie ja im allgemeinen wenigstens ganz gut entsprechen.

II.

Seit man den Granulit auch aus anderen Gegenden kennen lernte, als aus dem sächsischen Granulitgebirge, so aus Ceylon und Ostindien, ferner aus Böhmen, ist man allmählich zu der Ansicht gekommen, daß in diesem Gesteine nicht bloß ein kristalliner Schiefer vorliegen könne, auf sedimentärer Basis entstanden, sondern daß es ein Eruptivgebilde darstelle, dessen besondere Eigenheit (Granatführung etc.) man noch verschieden erklärt. Besonders die Führung von Cyanit, Rutil, Sillimanit wird von einer Seite auf Wirkungen von Dynamometamorphose zurückgeführt; auf der anderen Seite ist besonders Lepsius (Geol. v. Deutschl. 1902) dafür eingetreten, daß die Granaten und damit wahrscheinlich auch die übrigen seltsamen Gemengteile im Granulit nichts anderes darstellen als umgeschmolzene Reste assimilierter Sedimentbrocken. Er geht sogar so weit, die Flasegabbro des sächsischen Granulitgebirges als auf diese Weise umgewandelte Diabase oder deren Tuffe zu betrachten. Petrographische Beweise für seine Ansichten hat Lepsius nicht erbracht.

Nun glaube ich aber aus meinen Funden petrographisch ziemlich beweiskräftige Argumente dafür liefern zu können, daß in der Tat die Granaten nichts anderes sind, als in dieser Form abgeschiedene oder ausgeschiedene metamorphe Sedimentreste.

Um den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Dif-

ferenzierungsprodukten eines, wie ich glaube, einheitlichen Magmas möglichst klar zu stellen, habe ich bisher absichtlich aus dem Aufschlusse am Spitzenberg eine gleichfalls schlierige Abart, welche für das freie Auge aussieht wie ein Granatglimmergneis, nicht erwähnt.

U. d. M. sieht man nun, daß die hellen Lagen genau die mineralogische Zusammensetzung und die Struktur der früher beschriebenen Dioritgranulite haben. Die dunklen Lagen werden von Biotit beherrscht; dieser sammelt sich nicht nur um die Granaten an, sondern von ihnen ausgehend greift er zwischen die Feldspäte hinaus und umklammert sie (Taf. II Fig. 4), sodaß man den Eindruck gewinnt, die Feldspäte hätten wie Fremdkörper als Anziehungszentren für die Glimmeraggregate gewirkt.¹⁾ Eine Radialstellung der Glimmerblättchen ist ja bei ihrer hohen Elastizität natürlich nicht denkbar. Dabei sind absolut keine Pressungserscheinungen nachzuweisen, welche etwa nachträglich den Glimmer um die Feldspäte herumgelegt hätten. Das Ganze ist demnach eine primäre Strukturform, wonach die Glimmer und die Feldspäte sich ursprünglich fremd gegenüber standen, und erst nach der völligen Auskristallisation der Feldspatindividuen die Ausscheidung und damit die Orientierung der Glimmer rings um die Feldspäte herum erfolgte, gerade wie wenn die Feldspäte die Einsprenglinge und die Biotite eine Grundmasse bilden sollten. Das ist also eine Umkehrung der normalen Ausscheidungsfolge, ohne daß Porphystruktur hier vorhanden wäre. Diese Änderung in der Ausscheidungsfolge kann nur durch besondere Faktoren bewirkt worden sein: sie ist nur denkbar so, daß zwei verschiedene Komponentenreihen vor der Erstarrung einander gegenüber bestanden, nämlich einerseits der Feldspat und der Quarz, andererseits der Granat und Biotit, welche letztere also wohl nur aus fremden Substanzen, die in den Schmelzfluß geraten waren und sich dort nach der Zerstückelung durch Untersinken ausbreiteten, herausgebildet haben können; der Glimmer ging mit den Feldspäten diese im wörtlichen Sinne verzwickte strukturelle Verbindung ein, die man sogar makroskopisch am Handstück sehen kann. — Als weiteres Moment wäre noch anzuführen, daß das Erz stets saumförmig die einzelnen Glim-

¹⁾ Das erinnert sehr an die „durchflochtene Textur“ Becke's (T. M. P. M. IV, p. 257).

merblättchen umfaßt, also wohl später ausgebildet wurde als die Glimmer; denn von einer sekundären Entstehung des Erzes aus dem Glimmer kann bei der völligen Frische des letzteren nicht die Rede sein.¹⁾

Sollte man trotz dieser merkwürdigen Texturverhältnisse, die also ganz ähnlich sind denen, wie ich sie. als für die Auffassung gewisser Pfahlgesteine wichtig, seinerzeit schon beschrieben habe (Studien an den Pfahlschiefern, Geogn. Jhrsh. 1909) die Mischung mit fremden, wohl sedimentären Materiale in den Granuliten noch nicht zugeben, so liefert dieser kleine

¹⁾ Ich war, offen gesagt, erst im Zweifel, ob ich diese Art von Gesteinen nicht auch nach ihrer mikroskopischen Struktur einfach unter die Cordierit-Granatgneiße einreihen solle, wie Gumbel das zweifellos getan hätte. Vor allem diese Verbindung von hypidiomorph-körniger und gleichzeitig panidiomorph-körniger Struktur findet sich andeutungsweise auch in gewissen Gesteinen, die man zurzeit sämtlich als Gneiße bezeichnet, z. B. im Schwarzwalde. Auch ist das Verhalten der dunklen Gemengteile merkwürdig: Biotit ist durch Feldspat beeinflusst, wäre also wohl wesentlich nach ihm erst gebildet, Erz hat sich erst an den Saum der ganz frischen Biotite geheftet; dagegen entspricht die Ausscheidungsfolge der hellen Gemengteile unter sich sehr gut einer Erstarrung aus Schmelzfluß. Aber im ganzen genommen sind das doch Verhältnisse, welche einer Ausscheidung aus gewöhnlichem Magma unbedingt widersprechen und daher anders erklärt werden müssen. Ich habe das oben, wie ich glaube, zur Genüge aufgeklärt und kann mich unmöglich zu der Ansicht bekennen, daß hier eine sogen. kristalloblastische Reihe, d. h. ein kristalliner Schiefer vorliege, und zwar aus Gründen, die wohl unwiderleglich sind. Das ist wesentlich das Verhalten dieses merkwürdigen Gesteines zu den anderen meist dunkleren Abarten: wohl ist es vielfach schlierig mit ihnen verknüpft, aber stellenweise sind die dunklen Massen von dioritischer und gabbroider Zusammensetzung auch in scharf begrenzten Putzen und schmalen eckigen Schollen bis zu 40 cm Länge darin eingeschlossen; ja gegen einen etwa 10 cm dicken Gabbroputzen wurde sogar ein Biotitring als endogenes Kontaktprodukt ausgebildet! Aus dem geologischen Verbande geht also unzweifelhaft hervor, daß dieses das Verhalten eines echten Erstarrungsgesteines ist.

Ob das nicht auch von anderen Gesteinen gilt, die man bisher schlankweg als Granat- oder Cordieritgneiße bezeichnet hat, ob nicht auch diese quantitativ viel mehr Ortho- als Paragesteine sind, läßt sich noch nicht absehen; mir wenigstens verursachen die Gesteine bei Bodenmais bezüglich ihrer Deutung immer noch einige Schwierigkeiten.

Aufschluß im Böhmerwalde noch ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmoment: Die eben beschriebenen glimmerreichen Varietäten dieses granatführenden Gesteines enthalten nämlich auch noch allotriomorphen Cordierit, meist an Granat gebunden, vielfach auch mit Quarz myrmekitisch durchwachsen. Daß der Cordierit hier ein echtes Kontaktmineral darstellt, wird wohl kaum zweifelhaft sein, zumal da die siebartige Durchwachsung mit Quarz bisher nur aus echten Hornfelsen bekannt geworden ist. Dann spricht aber doch zum mindesten eine große Wahrscheinlichkeit dafür, daß auch der Granat, der doch sonst sogar als häufigstes Kontaktprodukt auftritt, in diesen Granuliten keinen ursprünglich autigenen Gemengteil darstellt. Und wenn der Granat und der Cordierit als Umwandlungsprodukte in den Hornfelsen keiner Beimengung eruptiven Materiales zu ihrer Bildung bedürfen, so wird auch zur Erklärung ihres Auftretens im Granulite ein derartige Beihilfe nicht angenommen werden müssen.

Nun kennt man allerdings aus dem sächsischen Granulitgebirge Cordieritkontaktfelse, die z. B. bei Rochsburg dem Granulite zungenartig an- und auflagern. Aber im dortigen Granulitgesteine selbst, ferne von einer solchen Kontaktstelle, hat man, soweit ich die Literatur übersehe, Cordierit mikroskopisch noch niemals gefunden.

Nach meinen neuen Funden wird man also wohl sich der Annahme nicht verschließen können, daß zwischen dem randlichen Kontaktfelse und dem eigentlichen Granulite nur Unterschiede bestehen im quantitativen Verhältnisse der Gesteinskomponenten,¹⁾ daß es also eigentlich eine kontinuierliche Reihe von Übergängen zwischen beiden geben muß; oder umgekehrt ausgedrückt: ebenso wie Partien aller Kontakthöfe stets deutliche Mengen aus dem innelagernden Eruptivgesteine in sich fassen, seien es größere oder kleinere, oft mikroskopische Gänge, oder seien es Mineralien wie Turmalin, oder chemische Stoffe wie das Natrium in den Adinolen, so fassen wenigstens

¹⁾ Auch der Gehalt an Granat ist sehr schwankend bis zum völligen Fehlen.

die granulitischen Magmen noch letzte Reste der Sedimente in sich, in welche sie zertrümmernd eindringen; die kleinen Bruchstücke sanken im Schmelzflusse unter, und wurden umkristallisiert in Form teils echter Kontaktminerale wie Granat, Cordierit und Biotit, teils als Relikte aus den alten Tonschiefern, wie Rutil, im erstarrenden Eruptivgesteine selbst ausgeschieden. Daher stammen auch die eigentümlichen Verbandsverhältnisse der granulitischen Gesteinskomponenten untereinander. —

So glaube ich durch die neuen Aufschlüsse im Böhmerwalde auch den früher fehlenden petrographischen Beweis geliefert zu haben, daß granulitische Gesteine sich nur durch innige Vermengung mit fremdem, meist wahrscheinlich sedimentärem Materiale herausbilden können, und zwar geht das hervor 1. aus dem Auftreten eines neuen Kontaktminerales neben dem Granate, nämlich des Cordierites, wobei wegen der echten Massengesteinsstruktur an kristalline Schiefer oder Kontakthornfelse nicht zu denken ist, 2. aus den eigentümlichen Verbandsverhältnissen der Gesteinsgemengteile, 3. aus der bisher unbekanntem Möglichkeit der Granulitbildung auch aus einem ursprünglich dioritischen Schmelzflusse.

Aber ich kann nicht soweit gehen, wie Lepsius, der Alles durch Kontaktmetamorphose entstanden erklärt, und die Dynamometamorphose vollständig leugnet (Geol. v. Deutschl. II p. 171, Fußnote). Im sächsischen Granulitgebiete hat wohl auch Dynamometamorphose mitgewirkt, aber erst nach der Verfestigung, und Berg (Monatsber. D. G. G. 1910, Nr. 4) u. A. haben, wie ich glaube, teilweise recht, wenn sie Umformung und Kristallneubildung auf Rechnung von Kristallisationsschieferung setzen. So erklärt sich vielleicht das dortige Auftreten des Cyanites, der am Spitzenberg, wo keine nachträgliche Störung stattfand, bisher nicht gefunden wurde; Sillimanit stammt wahrscheinlich meistens neben Muskovit aus zeretztem Cordierit.

Auch die Gabbros als umgewandelte Diabase oder deren Tuffe zu erklären, wie Lepsius das tut, ist mir nicht möglich; denn 1. bietet sich nirgends eine Spur eines petrographischen Beleges dafür, und 2. sprechen im Böhmerwalde die geologischen Verhältnisse sogar direkt dagegen; denn aus der weiten Umgebung kennt man überhaupt keinen Diabas, wohl aber Gabbros in Menge.

III.

Überblickt man die Verhältnisse der aus der Eruptivmasse einerseits und der vom Nebengestein andererseits abstammenden Komponenten des Granulites, so ergeben sich interessante Beziehungen und Folgerungen.

Es drängt sich die Frage auf: welchen Einfluß äußern fremde Massen von Nebengestein, welche in engere Beziehung mit dem Erstarrungsgesteine treten, auf die chemische Zusammensetzung des letzteren?

Hier sind wesentlich einschlägig Hypothesen, wie sie z. B. von Johnston-Lavis (Geol. Mag. 1894 und Report of Brit. Assoc. 1896) und von R. A. Daly (Secondary origin of certain granites, Am. Journ. 1905) bezüglich der Entstehung von Gesteinsdifferenzierungen aufgestellt worden sind.

Nach dem ersteren Autor soll ein Eruptivgestein beim Aufdringen durch basische Sedimente aus diesen besonders Magnesium und Kalk aufnehmen, während es Kieselsäure, Tonerde und Alkalien an sie abgebe („osmotische Hypothese“); so seien besonders die basischen Grenzfaziesbildungen der Tiefengesteine entstanden zu denken, wie z. B. des Essexites im Kirchenspiel Gran. C. W. Broegger (Eruptivgest. d. Kristianiageb. III, p. 348) hat diese Erklärung für die norwegischen Vorkommnisse widerlegt.

Daly glaubt andernteils gezeigt zu haben, daß Granit aus nichtgranitischen Schmelzflüssen durch Assimilation eingeschmolzener Sedimente, etwa von Sandstein, entstehen könne.

In beiden Fällen muß notwendig eine vollständige Verdauung des Nebengesteines angenommen werden, und die Mi-

neralien, die sich dann aus dem Schmelzflusse ausscheiden, müssen unbedingt der durch die Einschmelzung veränderten chemischen Zusammensetzung des Eruptivgesteines entsprechen.

Nun finden wir hier bei den Granuliten relativ winzige Reste des Nebengesteines in einer verhältnismäßig großen Menge eruptiven Materiales ausgestreut. Die Angriffsfläche für den Schmelzfluß in dem oben angedeuteten Sinne eines Austausches wäre also sehr groß gewesen. Ist nun ein solcher erfolgt?

Diese Frage muß hier wohl entschieden verneint werden; denn einmal bilden sich anerkanntermaßen Granat und Cordierit allenthalben im Kontaktgestein, ohne daß bis jetzt die geringste Wahrscheinlichkeit vorliegt, daß Substanzzufuhr aus dem Schmelzflusse dabei mitgewirkt habe. Nach allgemeiner Annahme sind diese Kontaktminerale aus den chemischen Verbindungsmöglichkeiten, die in der Art der Zusammensetzung des Nebengesteines allein begründet waren, durch Umkrystallisation herausgebildet worden. Und weiterhin sind im Verhältnisse hier die Granaten und Cordierite so wenig zahlreich, daß man sich bei der großen Angriffsfläche gegenüber dem Magma wundern müßte, daß sie nicht einfach vollständig assimiliert wurden, wobei dann nur eine größere allgemeine Basizität des Gesteines von ihrer einstigen Existenz eventuell zeugen könnte.

Aber wie steht es mit dieser Basizität? Vergleicht man die Analysen bei Rosenbusch (Elem. 1910), so ergibt sich daß die Granulite in der Regel saurer sind, als die normalen Granite, sich sogar den Apliten bedeutend nähern, daß also trotz der darin enthaltenen Granaten eine Zufuhr von Tonerde, Kalk oder Magnesium auf keinen Fall stattgefunden hat. Im Gegenteil sind sie meist ärmer an Ca und Mg.

Eher würde an Aufnahme von Kieselsäure aus dem Nebengesteine zu denken sein, im Sinne der Annahme von Daly; aber hierfür gibt es eine, wie ich glaube, viel annehmbarere Erklärung, wie ich im Folgenden ausführen will.

Die Granulite liefern demnach trotz der günstigen Mischungsverhältnisse für die Annahme magmatischer

Differenzierung infolge von Assimilation fremder Nebengesteine nicht nur keine Stütze, sondern sprechen sogar direkt entgegen.

Die schon erwähnte größere Azidität der Granulite, das stärkere Zurücktreten von Ca und Mg im Verhältnisse zu Granit und Quarzdiorit, von denen sie sich herleiten müssen, erklärt sich dadurch, daß diese Massengesteine in das Gemenge mit Granat, Cordierit etc. immer nur verstümmelt eingetreten sind, es ist eigentlich stets nur ihr aplitisches Radikal, was zum Aufbau verwendet wurde. Das trifft aber nicht nur für die Granulite zu, sondern überall da, wo saures eruptives Magma in innige Berührung mit fremdem Gesteine getreten ist, sofern dieses, etwa infolge von Aufblätterung, eine sehr große Oberfläche bot, wie bei den injizierten Schiefen; denn deren eruptive Adern weisen, wenn sie nicht zu mächtig werden, ohne Ausnahme aplitische Zusammensetzung ohne dunkle Gemengteile auf.

Diese merkwürdige Erscheinung läßt sich zunächst so erklären, daß zwischen beiden Gesteinsarten eine Art Austausch eingetreten ist, wobei Basisches zu Basischem und Sauerer zu Sauerem sich gesellt hätte: also eine Art osmotischen Vorganges, aber in etwas anderer Form als bei Johnston-Lavis. Ich habe für die Bildung gewisser Pfahlgesteine diese Erklärung angenommen, und es hat mich sehr gefreut, daß Herr Ch. Barrois gelegentlich einer Exkursion bei Stockholm im Sommer 1910 mir mitteilte, wenn ich ihn recht verstanden habe, daß er schon seit Jahren die gleiche Ansicht habe.

Bei den Pfahlgesteinen war aber neben den Feldspäten und Quarzen nur Glimmer vorhanden, und es war dadurch schwer, wenn nicht unmöglich, zu sagen, wieviel von dem Glimmer aus dem Granite oder aus dem Nebengesteine stammte. Hier liegen die Verhältnisse aber anders: Granat, Cordierit, Biotit stammen alle aus dem fremden Nebengesteine, folglich kann obige Erklärung nicht mehr genügen.

Es ist also bei Granulit sowohl wie bei den injizierten Mischgesteinen stets zur Bildung von aplitischer Randfazies

schon im Schmelzflusse gekommen, worin also entgegen dem Soretischen Prinzipie die saueren Komponenten sich an der Peripherie angesammelt haben, die basischen aber in das Innere sich zurückzogen und dort, wo sie ferne von der Berührung mit fremden Gemengteilen sich ungestört entwickeln konnten, Anlaß zur Ausbildung mehr oder minder basischer Gesteinsvarietäten gaben. So würde sich auch das Auftreten des Gabbros innerhalb des Bereiches der Granulite besser erklären, als durch Umwandlung von Diabastuffen.

Bei der Bildung dieser aplitischen Randzone müssen demnach andere Kräfte mitgewirkt haben, als die Abkühlung bei dem Soretischen Prinzipie. Es liegt hier nahe, an elektrische Kräfte zu denken, wiewohl wir darüber eigentlich noch gar nichts wissen. Ich stelle mir die Sache so vor: die Fe- und Al-reichen Bestandmassen in dem fremden Nebengesteine sind chemisch ungefähr gleich zusammengesetzt wie die farbigen Gemengteile im Eruptivgesteine; bei den wenn auch schwachen elektrischen Strömungen, die sich zwischen dem schmelzflüssigen Magma und der kälteren Umgebung notwendig entwickeln müssen, erhalten chemisch gleich zusammengesetzte Körper auch gleichsinnige elektrische Ladung, folglich stoßen sie einander ab, d. h. das basischere Nebengestein wird in seiner Nähe die helleren saueren Gemengteile des Schmelzflusses ansammeln. Das ist vielleicht physikalisch etwas roh erklärt, die Vorgänge werden wohl kompliziertere sein, aber die Gesamtauffassung wird sich doch vielleicht nur wenig von der Wahrheit entfernen.

Damit wäre also die Art der Bildung einer abnormen Randfazies ihrer chemischen Zusammensetzung nach nicht bloß mit der physikalischen Bedingung der Abkühlungsfläche in Verbindung gebracht, sondern vielmehr mit der jeweiligen chemischen Zusammensetzung des Nebengesteines und den elektrischen und magnetischen Strömungen, welche daraus resultieren.¹⁾

¹⁾ Es wäre von Interesse, diese Erscheinung längs eines Kontaktes, der sehr verschiedenartige Gesteine getroffen hat, chemisch zu verfolgen

Es scheint aber sicher, daß die auf diesem Wege entstehenden saueren Randfaziesbildungen niemals die Mächtigkeit von basischen Randzonen erreichen. Es ist also eine sehr innige Berührung, d. h. eine große Oberflächenwirkung nötig, um einigermaßen ausgedehntere aplitische Differenzierungsprodukte hervorzubringen und diese ist nur gegeben bei der Aufblätterung und Injektion von Schiefnern, oder bei der reichlichen Aufnahme von fremden, wenn auch kleinen, Bruchstücken wie bei Granulit.

Bei der Einbettung fremder Einschlüsse in ganz basischen Gesteinen, wie in gewissen Peridotiten, scheinen sich die Verhältnisse umzukehren. Hier wirkt das gewissermaßen intermediäre Nebengestein sozusagen als saurerer Pol. Daher sammeln sich dann z. B. um Granat stets Pyroxene und Amphibole an und bewirken jene bekannten zentrischen Strukturformen. —

So lange man die Kristallisationsvorgänge in quartären und noch mehr zusammengesetzten Systemen nicht genügend kennt, wird man jede einigermaßen plausible Hypothese für Differenzierung etc. annehmen können. Und selbst dann wird ja bei der Unzulänglichkeit der Laboratoriumsresultate dem Zweifel noch stets Tür und Tor offen bleiben.

IV.

Es liegt nahe, die bei dem Granulite gewonnenen Erfahrungen zu verallgemeinern, und einen Überblick zu suchen über alle Formen von Eruptivgesteinen, soweit fremde Beimischungen in ihnen schon erkannt sind oder auch nach Analogieschlüssen angenommen werden können. Selbstverständlich sind es nicht mehr bloß Granat, Cordierit und Biotit, die hier als Fremdkörper figurieren können, sondern als solche sind schon längst auch Quarz, Andalusit, Spinell, Wol-

und damit eine Probe aufs Exempel zu machen; weiterhin entsteht die Frage, ob etwa ein Einfluß der verschiedenen Bestandteile des Nebengesteines auf die Breite des aplitischen Hofes nachgewiesen werden kann.

lastonit, Kalkspat und Pyroxen u. s. w. bekannt geworden. Von anderen bisher nicht dafür angesehenen Mineralien hoffe ich das am Schlusse meiner Ausführungen mindestens wahrscheinlich gemacht zu haben.

Bei manchen Ergußgesteinen liegen diesbezüglich die Verhältnisse schon hinreichend klar. Seit Szabó Granat und Cordierit aus ungarischen Trachyten (N. I. B. B. 1881), und besonders Osann Cordierit aus gewissen Andesiten (Z. D. G. G. 1888) beschrieben haben (viele derartige Vorkommen noch zitiert bei Rosenbusch II, 2, 1052), hat sich stets die Ansicht erhalten, daß hier fremdes Material dem Schmelzflusse zugeführt worden sei. Die beiden zitierten Arbeiten liefern nun für diese Anschauung wichtige Details. Weil z. B. der Granat im Trachyte von Karancs Gemengteile des Trachytes selbst einschließt, meint Szabó, er allein könne nicht fremden Ursprunges sein, sondern das ganze Gestein sei metamorph. Derartige Einschlüsse sind aber im Granat allenthalben bekannt und erklären sich leicht durch seine bekannt starke Kristallisationskraft, die leicht zur Bildung von Perimorphosen führt, wohl dadurch, daß mehrere kleine Granätchen während ihres Wachstums zu einem größeren Individuum verschmelzen; daher stammt vielleicht auch die so oft nachweisbare sphärische und Sektorenstruktur der Granaten. — Osann will nur für junge Ergußgesteine und für den Kersantit vom Michaelstein im Harz die Cordierite aus akzessorischen Bestandmassen herleiten: „in den Graniten, welche Cordierit führen, hat dieser meist die Form unregelmäßiger Körner und dürfte ein normaler Gesteinsgemengteil sein“. — Ich hoffe es an dem neuen Granulitvorkommen vom Spitzenberg klar gemacht zu haben, daß auch derartige Cordierite aus dem Nebengesteine stammen, wenn sie auch im Schmelzflusse umkristallisiert worden sind. Näheres hierüber später. —

Über die längst bekannten Fremdlingsquarze in gewissen Trachyten und Diabasen (Rosenbusch, p. 902) ist nichts weiter zu sagen. Anders ist es wieder mit dem Auftreten des Andalusites in gewissen Graniten. Erdmannsdörffer

(Petrogr. Mitt. aus dem Harz, Jahrb. K. Pr. geol. Landesanst. 1908, II, 1) hat die diesbezügliche Literatur zusammengetragen. Rosenbusch hält diesen Gemengteil im Granit für normal; dagegen betrachten K. Regelman, Gäbert, Ransome, Milch und, wie es scheint, auch Erdmannsdörffer derartige Andalusite wie auch Granate im Granite als Endprodukte der Kontaktmetamorphose winziger aufgenommener Schieferstäubchen. Interessant ist dabei wieder, daß dann der Granit entweder direkt aplitisch (Gäbert) oder wenigstens Muskowitgranit ist, während die Granitite davon frei sind. —

Von anderen Tiefengesteinen sind es besonders nephelin- und leuzitführende Typen, welche außer gelegentlichen Kalkbröckchen¹⁾ (Jaczewski und Stutzer, Zeitschr. f. prakt. Geol. 1910, 1) auch Granaten beherbergen. Man hält diese Granaten auch jetzt noch größtenteils für autochthon; nach meiner Ansicht sind sie es schwerlich. Daß die Granaten unter dem Einfluß der Ti- und Zr-reichen foyaitischen Magmen in Form von Melaniten (am Kaiserstuhl sogar mit 1.28% Zr O²) ausgebildet wurden, wie bei Oberschaffhausen im Phonolith oder am Horberig im Leucitophyr, kann nicht wundernehmen.

So stammt auch der Melanit im Borolanit wahrscheinlich von eingestreuten Körnern des durchbrochenen kambrischen Mergels. Als Beweis dafür kann man betrachten, daß der Orthoklas besonders in der Nähe des Melanites zahlreiche wurmförmige und spindelförmige Gebilde umschließt, welche sehr den myrmekitischen Quarz-Feldspat-Aggregaten der Granite ähneln (Rosenbusch II, 1, p. 242). Das fremde Melanitkorn bildet hier gewissermaßen ein Strukturzentrum.

Im Ijolith von Jiwaara in Finnland verrät schon der Begleiter des Melanites, der Wollastonit, die Beimengung fremden Materiales.

Vermutlich gehört hierher auch der Granat-Pyroxen-Malig-

¹⁾ Vgl. auch Rimann, Der kalkspatführende Granit von Schmiedeberg (Zentr.-Bl. f. Min. 1909), und Högbom, Untersuchungen über das Nephelinsyenitgebiet von Alnö. (Stockholm Geol. For. Förh. 1895). Ihre Ergebnisse widersprechen meiner Deutung nicht.

nit. den Lawson aus Canada beschrieben hat (Univ. of. Cal. Bull. of. the Dep. of. Geol. I, 357, Berkeley 1896).

Für Melilith in gewissen Basalten hat Becker (Zeitschr. D. G. G. 1907) die Vermutung aufgestellt, daß seine Bildung durch von dem basaltischen Magma durchbrochene Sedimente von vorzugsweise kalkiger Natur wesentlich begünstigt wurde. Der Melilith, dessen Vertreter in kontaktmetamorphen Gesteinen die nahestehenden Mineralien Gehlenit und Fuggerit sind, zeigt manchmal, z. B. am Herchenberge bei Brohl, die Eigentümlichkeit, daß er nur auf Klüften sich einstellt, in Nephelinbasalte selbst aber fehlt. Das erinnert sehr an Kluffüllungen des Kontaktminerales Fassait (Traversellit) auf den Sprüngen des Monzonites, noch mehr aber an die wahrscheinlich pneumatolytisch erfolgten Ablagerungen gewisser Stoffe auf Klüften und Lithophysen saurer Ergußgesteine; neben Topas und Tridymit sind das stets Mineralien, die für die Kontaktmetamorphose als charakteristisch gelten, nämlich Granat und Cordierit. —

Ähnlich steht es wohl auch mit Perowskit, soweit er sich nicht aus Titanit entwickelt hat. Denn einerseits findet er sich auch in metamorphen Kalken am Monzoni, wo ich ihn seinerzeit auffand (Zentr.-Bl. 1901, p. 678), andererseits wurde er durch Mügge (N. J. B., Beil. Bd. IV, 581) auch als akzesorischer Gemengteil eines quarzhaltigen, hypersthenführenden Gneisgesteines bekannt, wo er Granat und Rutil begleitet. —

Wahrscheinlich sind nach Rosenbusch auch als metamorphe Fremdlinge hierher zu zählen, die Knollen etc. mit Hercynit von Ronsperg in Böhmen, die dunklen Einschlüsse im Klausener Diorit mit Eisenerzen, Spinell, Granat, Sillimanit und etwas Korund, ähnliche Bildungen in den Corlandt Series, sowie im Odenwalde (vgl. Rosenbusch, Physiogr. II, 1, p. 309, 337 und 363). —

Auch gewisse Sodalithvorkommen, zumal wenn gute Kristalle frühzeitig ausgeschieden wurden, können als verdächtig angesehen werden, da ein Glied der Mischungsreihe, der Lasurstein, bisher nur als Kontaktmineral gefunden wurde. Daneben soll aber nicht bestritten werden, daß Sodalith auch primär

aus Schmelzfluß sich bilden könne; denn die von Brögger beobachtete Umwandlung von Nephelin in Sodalith spricht unbedingt dafür. —

Hierher möchte ich aber auch zählen die granatführenden Serpentine. Der geringe Cr-Gehalt der Pyropen ist aus dem peridotitischen Schmelzflusse akquiriert. Den Kelyphit fasse ich dabei als magmatische Ausscheidung auf, gleich Schrauf, der ihn als pyrogene Kontaktbildung zwischen Pyrop und Olivin ansprach. Seine Zusammensetzung ist allerdings eine kompliziertere als Schrauf glaubte; den Picotit der inneren Zone wird man dabei gleichfalls als Fremdling ansprechen dürfen.

Wäre das Ganze nur gegenseitige Reaktion von Pyrop und Olivin, hervorgerufen im erstarrten Gesteine durch Verminderung des Druckes, wie Mrha annimmt, so müßte man doch auch schon unveränderte Typen gefunden haben, was bis jetzt nicht der Fall zu sein scheint.

Nötig ist die zentrische Struktur für die Charakterisierung eines Minerals als fremden Gemengteiles überhaupt nicht; ist sie aber da, wie stets in den basischen Gesteinen, so ist sie auch beweisend, und der Kelyphit gehört meiner Ansicht nach dazu.¹⁾ —

Mit Serpentin so häufig verbunden sind die Eklogite. Über ihr Entstehen sind die Ansichten noch sehr geteilt. Sauer scheint anzunehmen (C. R. Congr. Int., Wien 1903), daß die

¹⁾ Daß auch manche olivinführende Abarten der Gabbrogesteine eine Kelyphitzone um Olivine, Eisenerze und Biotite ausgebildet haben, wo sich diese Mineralien mit Feldspat berühren, widerspricht meiner Annahme nur scheinbar. Diese sind eben wahrscheinlich nicht aus dem Schmelzflusse direkt ausgeschieden, sondern es ist schon ein früherer Erstarrungsakt für diese Mineralien denkbar, und bei ihrer Wiedereinbettung in das Magma haben sie als Fremdkörper gewirkt, darum sind sie auch oft stark corrodirt. Ein Fremdkörper kann also aus einem früheren Erstarrungsakte des Magmas selbst stammen (wie vielleicht größtenteils auch die Olivinfelsbrocken in Basalten); wenn aber z. B. zum Olivin auch Granaten in den Kelyphitzonen treten, wird man an nebenbei aufgenommenes fremdes Material zum mindesten denken können.

Eklogite in Amphibolite und weiterhin in Diorite oder Gabbro übergehen, nicht aber aus ihnen sich herleiten; er betont auch, daß es sedimentäre Eklogite gebe. Andererseits wird durch L. Hezner (T. M. P. M. 1903) und Grubenmann (Krist. Schief., 1904) der Standpunkt vertreten, daß wohl die Amphibolgesteine aus dem Pyroxengestein entstehen können, daß diese selbst aber sich herleiten aus Gabbros oder Diabasen, wenn dieselben in die Tiefe unter großen Druck gebracht würden, wobei sich zunächst Grünschiefer, dann Granatamphibolite und endlich in der tiefsten Zone Eklogite bilden würden. Der Granat entstünde dabei durch Zusammenstreuen der Olivine mit den Anorthitmolekülen der basischen Plagioklase. — Eine andere Ansicht, daß Eklogit durch saueres Granitbad umgewandelter Gabbro sei, ist wohl endgültig aufgegeben.

L. Hezner gesteht offen zu, daß Übergänge zwischen Gabbro und Eklogit, wie sie so vielfach zwischen Gabbro und Amphibolit bestehen, bisher nicht bekannt wurden, so sehr auch der Chemismus der Eklogite ihren Zusammenhang mit gabbroiden Gesteinen bestätige.¹⁾

Granat bildet sich nun aus den verschiedensten Gemengteilen, so aus Pyroxen, ferner aus Plagioklas als Kalktongranat bei der Saussuritisierung z. B. im Wurlitzit, vielleicht auch durch Wechselwirkung von Olivin und Plagioklas. Und so mag in der Tat ein großer Teil der Granaten in den Eklogiten auf letztere Weise sich herausgebildet haben. Aber ob auch die Kelyphiteklogite stets auf diese Weise entstanden sind, ob wirklich die radialstrahlige Hornblende erst bei der Umwandlung aus Omphacit sich eingestellt hat, wie wohl zuerst Lacroix an der unteren Loire konstatierte, oder ob nicht die Pyroxene schon ursprünglich radial und kelyphitartig um den Granat als Fremdkörper sich herumge-

¹⁾ Zu dem letzteren Gedanken möchte ich bemerken, daß man mit chemischen Ableitungen von Gesteinsreihen meiner Ansicht nach künftig noch viel mehr Vorsicht walten lassen muß, wie bisher; denn je mehr sich fremde Beimischungen herausstellen, desto wechselnder und damit wertloser werden die chemischen Analysen sein.

stellt haben, erscheint mir noch nicht genügend klar-geleget, wohl weil niemand mit dem Gedanken rechnete, der Granat könne hier ein Fremdling sein.

Und doch ist die Idee schwer von der Hand zu weisen, wenn man die geologisch nachgewiesenen Verbindungen des Eklogites mit anderen Gesteinen ins Auge faßt, welche höchst wahrscheinlich fremdes Material führen. So schreibt Zirkel (III. p. 365): „Die innerhalb der sächsischen Granulitformation vorkommenden, ganz isolierten und räumlich beschränkten Eklogite können nach Credner (Granulitgeb., 1884) als quarz- und feldspatfreie extreme Modifikationen des Pyroxengranulites aufgefaßt werden, welche überall mit Einlagerungen von letzteren oder von Granatserpentin oder mit solchen von beiden vergesellschaftet sind.“ Gerade die Pyroxengranulite zeigen aber nach Bergt (Monatsber. D. G. G. 1904. 4) sehr häufig zentrische Struktur, in Form von strahligem Ansatz von Pyroxen- und Amphibolstengeln um Granat.

Sehr wichtig ist diesbezüglich auch der enge Verband von Eklogiten und Granatamphiboliten mit Serpentin. Solche sind z. B. bekannt vom Galgenberge bei Winklarn in der Oberpfalz. Hier habe ich direkt den Eindruck gehabt, als ob die Granatamphibolite nur eine Art Kelyphitbildung im großen darstellten. — H. Traube (N. Jahrb. 1889, I) beschreibt solchen Verband auch aus den Härtekämmen bei Frankenstein in Schlesien. Die petrographischen Verhältnisse sind hier besonders interessant: Die Eklogite stehen in Verbindung mit Serpentin, granathaltigem Gabbro (also auch im Gabbro Granat, wenn es nicht ein Granulit ist!) und Amphiboliten. Der Eklogit bildet Einlagerungen im Serpentin; er besteht aus Granat, Diallag-Omphacit und Zoisit, und wichtig ist, daß der Omphacit von Schnüren des Granates durchwachsen ist, wie man das auch von den Pyroxenen des blue ground in Südafrika kennt.

Ferner lagern die Eklogite von Karlstätten und Gurhof in Niederösterreich mit Serpentin verbunden im Gra-

nulit. Becke beschreibt (T. M. P. M. IV) ein eklogitisches Gestein, welches aus Granat und diallagähnlichem Pyroxen besteht: „die Zwischenräume sind ausgefüllt von einem sehr feinkörnigen Gemenge von schwarzem Erz, tief braunroter, lebhaft pleochroitischer Hornblende, welche oft regelmäßig radial um den Granat herumgestellt ist, und Plagioklas“. Diese Hornblende ist wohl schwerlich sekundär wie die von Lacroix beschriebene, sondern das ganze Gestein ist wohl ursprünglich ein granatführender Hornblendegabbro gewesen, in welchem der Granat als Fremdkörper orientierend auf die Hornblende gewirkt hat. —

Damit habe ich auch aus der Literatur einige Beispiele dafür erbracht, daß Eklogit sich wenigstens teilweise auf anderem Wege gebildet haben kann als auf dynamischem, wie man neuerdings allgemein annimmt. Auch hier scheinen gelegentlich fremde Bestandteile mitzuwirken. — Bemerkenswert ist auch, daß in der Literatur so oft von Chromdiopsid und chromhaltigem Omphacit gesprochen wird, was, wenn nicht die Herausbildung aus Serpentin-Magma, so doch Beeinflussung durch es bedeuten dürfte. —

Aus dem südafrikanischen Kimberliten kennt man massenhaft sogenannte Eklogitknauern, die allgemein für ältere Ausscheidungen aus dem Magma des blue ground erklärt werden. Sie bestehen nach Corstorphine aus Chromdiopsid und Pyrop mit Kelyphitschalen und enthalten Diamant und zuweilen Graphit. Mit ihrer Entstehung werde ich mich später zu beschäftigen haben, zunächst möchte ich auf etwas anderes Gewicht legen.

Rosenbusch (II, 2, p. 1510) bemerkt nämlich dazu, daß Eklogite keinen Pyrop führen, und daß die hier beschriebenen Eklogite vielleicht zum Ariégit von Lacroix gehören könnten. Der Einwand ist heute wohl nicht mehr stichhaltig, weil, wie Grubenmann (Kryst. Sch. II., p. 82) anführt, auch in den Eklogiten Granatvarietäten vorkommen, welche stark nach einem Pyrop hintendieren. Aber der Hinweis auf Ariégit ist wichtig.

Man versteht darunter nach Lacroix (zit. Rosenbusch II, 1, p. 481 und II, 2, p. 1511) schlierige und gangförmig im Lherzololith von Südfrankreich auftretende pyroxenitartige Gesteine, welche in den rostbraunen Lherzolithen oft eine gebänderte Struktur hervorbringen durch lagerartige Anhäufung von smaragdgrünem Chromdiopsid und schwarzem Picotit; in anderen Fällen bilden sich bis zu 1 m mächtige Lagen hauptsächlich von einem anderen Pyroxene (auch Diallag), als dem der Lherzolithe, oder auch schwarzem Amphibol und bisweilen einem blaßroten Granat; immer sind derartige Lagen und Gänge reich an Spinell. Vielfach ist dabei die Kelyphitstruktur schön ausgebildet, die Pyroxene (!) sind dann von einem spitzenartigem Gewebe aus farblosem Pyroxen mit Spinelltröpfchen in einem einheitlichen Untergrunde von Anorthit oder Bytownit umrandet. Wenn das Gestein Granaten enthält, ist auch dieser mit dem Kelyphitmantel umgeben.

Der Tonerdegehalt aller dieser Formen ist ausnahmsweise hoch, geht bis zu 20%. Das erinnert sehr an eine Granulitart, welche F. Suesß aus Mähren beschrieben hat, die 18% Tonerde enthält und mikroskopisch sich durch hohen Gehalt an Disthen, Spinell und Cordierit auszeichnet. F. Suesß und mit ihm Rosenbusch sehen darin ein uraltes Kontaktprodukt des normalen Granulites. Nach meiner Auffassung aber sind darin eben nur die aus dem fremden Nebengesteine stammenden Gesteinskomponenten ausnahmsweise stark in Schlieren und Lagern angehäuft. Das Gleiche wird wohl auch für die Ariégite gelten: Es hat hier eine starke Durchtränkung mit fremdem Materiale stattgefunden, daher der hohe Tonerdegehalt; die Granaten und Pyroxene¹⁾ mit ihren Kelyphitsäumen, die sie als Fremdkörper bezeichnen, ferner die zahlreichen Spinelle und vielleicht auch die braunen Hornblenden sind mikroskopisch die Zeugen davon.

Die bei dem Ariégit so häufige Kelyphitbildung um

¹⁾ Sonach hat Haüy doch für gewisse Fälle recht behalten, daß der Augit ein „Fremdling im Schmelzflusse“ sei.

Pyroxen ist meines Wissens bis jetzt noch nicht zum Vergleich für die Kelyphitentstehung herangezogen worden. Sie legt doch unwiderleglich Zeugnis dafür ab, daß in dieser eigentümlichen Schalenbildung nicht bloß der Ausdruck einer gegenseitigen Reaktion von Granat und Olivin zu erblicken ist. —

Hier ist endlich der Ort, auf die Zusammensetzung und damit die Bildungsform der südafrikanischen diamantführenden Gesteine einzugehen. Einschlägig sind hier die Arbeiten von Carvill Lewis (*On a diamantiferous peridotite and the genesis of the diamond*, *Geol. Mag.* 1887), ferner von Lacroix (*Gisement diamantifère de Monastery*, *Bull. soc. min. Fr.* 1898), weiter von Geo W. Card (*An Eklogit bearing breccia from the Bingera Diamond Field*, *Rec. of Geol. Surv. of N. S. Wales* 1902), dann von R. Beck (*Untersuchung über einige südafrikanische Diamantlagerstätten*, *Zeitschr. D. G. G.* 1907) und endlich von Corstorphine (*Occurrence in Kimberlite of Garnet-Pyroxene nodules carrying Diamonds*, *Trans. Geol. Soc. S. Africa* 1907).

Nach diesen Autoren ist das Hauptgestein der peridotitische Kimberlit, ein Gestein, dessen Grundmasse aus Serpentin oder serpentinisiertem Glase mit Biotit, Ilmenit, Chromit, Magnetit, Perowskit und Nephelin sich aufbaut (daher alnötähnlich nach Lacroix), und dessen Einsprenglinge Olivin, Pyrop, Pyroxen, Biotit, Ilmenit und Perowskit sind.

Nach Beck ist der Pyrop im blue ground weinrot gefärbt und findet sich oft in ganz abgerundeten Körnern mit glatter (!) Oberfläche, die von einem grünlich schwarzen faserigen Kelyphitsaume umgeben sind. Der Kelyphitsaum ist gegen die Serpentingrundmasse scharf abgesetzt, und besteht aus radiär gestellten, stark doppelbrechenden Fasern mit stärkerer Lichtbrechung als Canadabalsam und gerader oder nur wenig schiefer Auslöschung.

In dem blue ground finden sich, außer groben sedimentären Schollen, nach Beck, dem ich hier folge, weiterhin eingeschlossen:

1. Peridotite, Olivin, teilweise mit Enstatit.
2. Biotitfetzen (mit Apatit und Ilmenit).
3. Gabbro, Norite und Labradoritfelse.
4. Granat-Pyroxenfelse und „Eklogite“, z. T. mit Diamanten.
5. Granat-Cyanitgesteine (bei Damplaats).

Davon interessieren hier nur die beiden letzten Arten.

Die Granat-Pyroxenfelse sind unter den Knollen die häufigsten. Von stumpfeckiger, ellipsoidischer oder unregelmäßig kugeligter Form haben sie zuweilen eine Oberfläche, die so glatt ist, wie die eines Flußgerölles. Ihre Größe geht bis zu 40 cm im Durchmesser. Auf Rissen hat sich manchmal eine biotitreiche kimberlitähnliche Gesteinsmasse ausgebildet. — Die Knollen bestehen teils aus grünem Diopsid mit etwas Bronzit, teilweise überwiegt der Granat (es fand sich ein reiner Granatklumpen von 30 cm Durchmesser); dazwischen kommen alle Übergänge vor. Die meisten Knollen bestehen aus drei Viertel Diopsid, zu ein Viertel aus Granat.

Der Granat bildet gewöhnlich rundliche oder polygonale Körner inmitten eines Aggregates von unregelmäßigen Pyroxenkörnern. Manchmal ist der Diopsid durchwachsen von Stäbchen oder Lamellen von Granat, oder dieser bildet schriftgranitähnliche Einwachsungen im Pyroxen. Auch Adern von Granat finden sich in Bastit; ferner schließt der Granat manchmal Spinelle ein.

Die meist diamantreichen Eklogite sind nach Beck nicht als Gerölle, wie Bonney annahm, sondern wegen ihrer stofflich nahen Verwandtschaft mit dem Kimberlite als intratellurische Ausscheidungen innerhalb des peridotitischen Schmelzflusses zu betrachten. Sie bestehen aus Chromdiopsid, Granat mit untergeordnet Biotit und Diamant, sekundärer Hornblende und Calcit, dazu vermutlich Korund, ferner Ilmenit, Perowskit, Zirkon, Rutil, Graphit. Der Granat hat stets einen schmalen dunklen Saum nicht von Kelyphit, sondern von Glimmer und Erz.

Diese „Eklogit“-Knollen im Kimberlit sind nach Beck ganz analog den Olivinknollen im Basalt. Da sie „genetisch

mit den Eklogitlinsen des Gneisgebirges nichts gemein haben, auch in der Zusammensetzung von ihnen abweichen“, gibt er ihnen den neuen Namen Griquaite.

Als weitere Einschlüsse im Kimberlit zitiert Beck noch gewisse Granat-Cyanitgesteine. „Diese beide Mineralien bilden zerspratzte Einschlüsse in einem Plagioklas-Augitgesteine, das zugleich viele kleine grüne Spinelle und einzelne dunkelblaue Körner von Korund enthält.“

Wie es, ausgehend von dem neuen Granulitvorkommen und von anderen längst dafür angesehenen Gesteinen, auch für verschiedene andere Gesteine wahrscheinlich geworden ist, daß die darin enthaltenen Granaten etc. nichts anderes darstellen, als unkristallisierte Partikeln des zertrümmerten Nebengesteines, so ist das wohl auch für den Pyrop der Diamantlagerstätten anzunehmen. In den Knollen liegt er inmitten von Pyroxenkörnern, gegen Serpentin hat er einen Kelyphitsaum, an dessen Bildung er sich wegen seiner glatten Oberfläche unmöglich beteiligt haben kann; manchmal umrandet ihn Biotit mit Erz. Das sind Momente genug, um ihn als Fremdling gegenüber dem Schmelzflusse anzusprechen. Ist das richtig, so muß man aber noch unbedingt weiter gehen; nämlich die merkwürdigen Durchwachsungen des Pyroxens durch Granat können dann ebenfalls nur so gedeutet werden, daß auch der Pyroxen wenigstens größtenteils nicht autochthon ist. Das gestattet dann weiterhin einen Ausblick auf die Bildung der Pyroxengranulite und vielleicht auch der Pyroxenquarzporphyre, deren Pyroxene manchmal in Haufen um die Granaten sich ansammeln, und die gleichfalls dem Nebengesteine entstammen dürften (vgl. Bergt. Pyroxengranulit und Pyroxenquarzporphyr, Monatsber. D. G. G. 1909, 4).

Weil nun der Pyrop zusammen mit dem Pyroxen als ursprünglich fremde Gemengteile bei der Umkristallisierung im Tiefengesteine ihren Zusammenhang, zum Teil in komplizierten Verwachsungen beizubehalten wussten, bilden sie mit Vorliebe die gerundeten Einschlüsse im Kimberlit, d. h. sie

lösten sich leicht wieder aus dem Verbande, als das ursprüngliche Tiefengestein unter dem gewaltsamen Aufdringen des Kimberlites in Trümmer und Schollen zersprengt wurde.

V.

Der Diamant selbst ist bei den vorhergehenden petrographischen Betrachtungen zunächst aus dem Spiele gelassen worden. Die verschiedenen Theorien über seine Entstehung darf ich als bekannt voraussetzen; es fragt sich nur, welche von ihnen von dem neugewonnenen Standpunkte aus als die annehmbarste erscheint.

Da ist nun zunächst darauf hinzuweisen, daß Diamant gerade in den oben beschriebenen Knollen sehr häufig auftritt, daß weiterhin wiederholt Verwachsungen zwischen Pyrop und Diamant beobachtet wurden, daß endlich gar nicht selten auch Graphitkriställchen in die Kombination eintreten.

Hat man auch schon genügend darauf geachtet, daß auch gewisse Graphitvorkommen ebenso wie die südafrikanischen Diamanten gebunden sind an Eruptivgesteine, welche fremde Gemengteile führen, seien diese z. B. Kalksteinschollen und mikroskopische Calciteinschlüsse, wie sie durch Iaczewski und Stutzer (Zeitschr. prakt. Geol. 1910, H. 1) aus dem Nephelinsyenit der Alibertgrube in Sibirien bekannt geworden sind, seien es Granaten und Pyroxene, wie man von den Granuliten von Ceylon und dem Böhmerwalde weiß? Nur Weinschenk (Abh. bayer. Ak. Wiss. 1900) scheint diesen Gedanken gestreift zu haben, weil er die geologische Verbindung von Graphit und Granulit auf Ceylon für genetische Verwandtschaft hält, ohne sich allerdings näher darüber zu äußern.

Darüber ist man sich ja wohl allgemein klar geworden, daß der Kohlenstoffgehalt nicht einfach den eingebackenen eventuell Kohle führenden Trümmern des an- und überlagernden Sedimentgebirges entstammen könne. Diese alte Ansicht von Lewis ist hinfällig geworden. Und Beck hat das vielleicht am präzisesten ausgesprochen, wenn er schreibt: „Der

Schauplatz der Entstehung ist damit in die Tiefe zu verlegen, wo eine Einwirkung des Magmas auf Kohle oder bituminöse Gesteine ausgeschlossen erscheint, wohl aber ein ursprünglicher Gehalt an Metallcarbiden das Urmaterial geboten haben kann.* Auch Weinschenk hat für die Herkunft der sublimativ gebildeten Graphitlagerstätten auf diese hypothetischen Kohlenstoff-Metallverbindungen rekurriert, was übrigens wenigstens für Ceylon schon 11 Jahre früher J. Walther getan hatte.

Aber sollte die Annahme von der Unmöglichkeit der Bildung kristallisierten Kohlenstoffes aus organischen Relikten nicht bloß auf die eigentlichen Ergußgesteine, also mehr Bildungen der Oberfläche, beschränkt werden müssen? In Südafrika kann man doch genau zwei Stadien unterscheiden, die Bildung eines Tiefengesteines mit Pyroxen, Granat, Diamant, Graphit u. s. w., dessen Trümmer uns in den Knollen entgegen-treten, und das erst in späterer Zeit durch das neuerliche Aufdringen eines olivin- und nephelinführenden Schmelzflusses eine gewaltsame Desaggregation erfuhr. Sicherlich haben sich die Diamanten nicht erst herausgebildet durch Verkokung der kohlehaltigen Sedimente der dabei durchbrochenen Karoo-Formation, sondern sie waren schon im alten Tiefengesteine fertig ausgebildet. Was wissen wir aber in Südafrika von den geologischen Verhältnissen der Tiefe? Kann nicht unter der Karoo- und Kap-Formation noch eine viele, viele Kilometer mächtige Schichtenserie bis hinunter ins tiefste Algonkium verborgen liegen, die dem bis in eine gewisse Höhe gekommenen primären Schmelzfluß das Material zur Bildung von Pyrop, Pyroxen, aber auch von Diamant und Graphit in reichem Maße bieten konnte?

Huddelston (Min. Soc. London 1883) hatte schon angenommen, daß Kohlenwasserstoffe, die dem vielleicht in der Tiefe anstehenden kohlehaltigen Schiefer entstammen, durch die wasserhaltigen Mg-Silikate unter besonderen Druck- und Temperaturverhältnissen zersetzt worden seien, d. h. daß durch Reduktion Kohlenstoff frei geworden sei.

Das dünkt mich in der Tat die plausibelste Erklärung. Man wende nicht ein, daß damit die Flucht ergriffen sei in unbekannte und sehr problematische Tiefen, denn Beck verlegt ja den Vorgang der Entstehung von Diamant und Graphit in noch viel größere Tiefen, „wo eine Einwirkung des Magmas auf Kohle oder bituminöse Gesteine ausgeschlossen erscheint“. Die metamorphosierten Sedimentreste im Böhmerwalde sind doch höchstwahrscheinlich frühpaläozoischen oder algonkischen Alters und gerade in diesen finden sich in der Vergesellschaftung mit Granuliten die Graphitvorkommen, die ich allerdings größtenteils durch Kontaktmetamorphose, zum Teile aber auch durch Resorption und Wiederausscheidung innerhalb des Schmelzflusses selbst entstanden denken muß.

Als direkte Beweismomente für diese Bildungsweise sehe ich die Vergesellschaftung von Diamant und Graphit mit den offensichtlichen Fremdlingen Granat und Pyroxen an; sie geht so weit, daß der Diamant mit dem Pyrop in Verwachsung auftritt, wie Stelzner hervorhob, und das kann doch wohl nur durch gleichen Bildungsvorgang und gleiche Herkunft erklärt werden. Indirekt spricht hiefür auch die bekannte ungleichmäßige Verteilung der Diamanten, welche bei Annahme von primären Metallcarbiden schwer verständlich wäre, weil diese den Schmelzfluß doch höchst wahrscheinlich in seiner ganzen Ausdehnung gleichmäßig begleitet hätten.

So komme ich mit Huddleston zu einer einfachen Erklärung für das Auftreten kristallisierten Kohlenstoffes in der Natur, einfacher und ungezwungener jedenfalls als all diese Hypothesen von ursprünglichen Metallverbindungen des Kohlenstoffes im unveränderten Schmelzflusse, von denen wir praktisch gar nichts wissen und wohl auch nie etwas wissen werden. Eine einfachere Lösung aber ist doch stets einer komplizierteren vorzuziehen, zumal wenn erstere einigermaßen gestützt, letztere aber durch gar nichts motiviert werden kann.¹⁾

¹⁾ Rosenbusch (p. 457) nimmt für die südafrikanischen Diamanten organische Entstehung an, weil chemische Versuche von Friedländer, Sitzungsab. d. math.-phys. Kl. Jahrg. 1910, 13. Abh

Eine ähnliche Ansicht hat auch Postlethwaite (Zeitschr. f. Krist. 20) für die Bildung des Graphites von Borrowdale ausgesprochen und er wies ausdrücklich auf die Analogie mit den Kimberley-Diamanten hin. —

Nach diesen Deduktionen ist also der Kohlenstoff in der Natur, soweit Diamant und Graphit in Frage kommen, wenn ich diese Ausdrücke hier gebrauchen darf, *vados*, und da, wo er z. B. wie auf Ceylon in Form des Graphites in Gängen aufsetzt, nur *pseudojuvenil*. Dabei können immerhin die hypothetischen Metall-Carbonyle einmal als Durchgangsstadium fungiert haben. —

Eine weitere Frage ist die, unter welchen Umständen sich dieser *vadose* Kohlenstoff als Diamant oder als Graphit ausbildet. Hierüber habe ich eine Vermutung, welche sich an den Umstand knüpft, daß der Graphit wohl sicher flüchtig war, ehe er auf den Spalten des Granulites in Ceylon sich absetzte: vom Diamanten kennt man aber ein derartiges Verhalten nicht. Das hängt wohl damit zusammen, daß die saueren Schmelzflüsse viel mehr Gase und *agents minéralisateurs* enthalten, die auch den Kohlenstoff veranlassen, flüchtig zu werden, während die basischen Magmen daran viel ärmer sind; darum blieb der Diamant im basischen Eruptivgesteine selbst sitzen und nur stellenweise bildeten sich kleine Graphitkriställchen.¹⁾

Hasslinger und Moissan dafür sprechen; den Graphit der grönländischen Eisenbasalte leitet er aber, entgegen der Annahme Törnebohm's, aus Metallcarbiden her (p. 1255).

¹⁾ Bekanntlich wandelt sich Diamant beim Erhitzen in Graphit um, nach Vogel und Tamann (Zeitschr. f. phys. Chem. 1909) beginnt der Vorgang schon bei 1000°. Da aber diese Untersuchungen, wie es scheint, bisher nur bei Atmosphärendruck ausgeführt wurden, können sie zur Aufklärung der genetischen Verhältnisse schwerlich benutzt werden.

VI.

Schluß.

Wesentlich durch die besonders von den Franzosen ausgebildete Injektionstheorie haben wir große Areale von kristallinen Schiefen als innige, oft mikroskopische Mischungszonen von schmelzflüssigem und sedimentärem Materiale kennen gelernt.

Auch in nicht schiefrigen Eruptivstöcken hat man schon lange das besonders am Rande häufige Auftreten von Kontaktmineralien, wie Granat, Cordierit, Andalusit etc., auf Umkristallisation von eingebackenen Nebengesteinsteilchen zurückgeführt. Und das Gestein, dessen Beschreibung den Ausgangspunkt dieser Untersuchung bildet, der Granulit am Spitzenberg, wird man wegen seiner geringen räumlichen Ausdehnung allgemein wohl unbedenklich hier einrangieren, wenn auch das sedimentäre Nebengestein durch Erosion entfernt ist oder wegen mangelnder Aufschlüsse sich vorläufig nicht auffinden läßt.

Aber man hat nicht die Konsequenz gezogen, nun auch alle derartige Mineralien, wenn sie in einem Erstarrungsgesteine ferne von einem bekannten Kontakte oder auch in sehr reichlicher Menge auftreten, auf die gleiche Weise zu erklären, sondern man spricht hier vielfach noch von primären autochthonen Ausscheidungen aus dem Schmelzflusse.

Ein Hauptmoment für die Notwendigkeit dieser Trennung erblickt man in der guten oder schlechten kristallographischen Begrenzung der betreffenden Mineralien. Die schlecht begrenzten sind es zunächst, welche man durch Übernahme aus dem schon vorher metamorphen Nebengesteine erklärt, während die kristallographisch gut ausgebildeten dem Schmelzflusse selber eigentümlich gewesen sein sollen. Aber sehr viel ist dadurch meiner Ansicht nach nicht gewonnen; denn, wenn man auch annimmt, daß die lappig begrenzten Cordierite oder Andalusite schon fertig aus dem Nebengesteine übernommen wurden und dann im Schmelz-

flüsse durch Korrosion Einbuße an ihrer Gestalt erlitten haben, so können in anderen Fällen die sedimentären Partikel ganz gut aus ursprünglich klastischem Zustande übernommen sein, erst im Schmelzflusse Metamorphose erfahren haben und dann als frühe Ausscheidung mit guten Kristallformen ausgebildet worden sein. Das wäre dann allerdings ein bequemes Unterscheidungsmittel dafür, ob diese fremden Partikel aus einem klastischen oder aus einem schon vorher veränderten Nebengesteine stammen.

Aber abgesehen davon, daß diese Frage für den fast stets gut kristallisierenden Granat wohl selten zu entscheiden sein dürfte, muß man doch auch in Betracht ziehen, daß die Stärke der Umwandlung nach dem Maße der Abkühlung des Schmelzflusses ganz bedeutend schwanken kann, so daß einesteils tadellos begrenzte fertige Kristalle aus dem Nebengestein herübergenommen werden können, ohne eine Korrosion zu erfahren, andernteils bei sehr hoher Temperatur auch derartige fertige Kristalle zunächst ganz eingeschmolzen und später ebenso, wie ursprünglich klastische Körner, in gut begrenzten Kristallen wieder ausgeschieden werden können.¹⁾

Demnach ist eine feste Grenze zwischen autochthonen und allochthonen Granaten etc. überhaupt nicht zu ziehen und Osann (l. c.) hat seinerzeit in richtiger Erkenntnis dieses Umstandes einfach alle Cordierite, die größeren schlechten sowohl, wie die kleinen gut begrenzten in der Grundmasse für aus dem Nebengesteine stammend erklärt. —

Wenn ich also, ausgehend von den Granuliten, die einzelnen vorliegenden Erfahrungen zusammenfasse, verallgemeinere und zu einem einheitlichen Bilde gestalte, so glaube ich nirgends den Tatsachen Gewalt anzutun und Einwände gegen diese Anschauung werden sich nach dem eben Gesagten schwerlich machen lassen.²⁾ Daß dabei gelegentlich auch die

¹⁾ Siehe hierüber die Publikation von F. H. L. Vogt, Physik.-chem. Gesetze der Kristallisationsfolge in Eruptivgesteinen. T. M. P. M. 1908. — Auch Osann (l. c.) hat letzteren Vorgang für wahrscheinlich erklärt.

²⁾ Die verschiedene Zusammensetzung der Granaten in den einzelnen

Diamant- und Graphitvorkommen ihre alte und so annehmbare Erklärung wiederbekommen, ist ein sehr erfreuliches Nebenresultat. —

Es gibt also viel mehr Mischgesteine, als man bisher kannte; Cordierit- und Granatgneise gehören hierher, ferner gewisse Eklogite und Granatserpentine, Boro-lanit, dann aber auch Granulit, Charnockit, Paragranulit, Ariégit u. a. Erst wenn man solche Mischgesteine als solche erkannt hat, wird es möglich sein, schwere Irrtümer in einer chemischen Systematik der Eruptivgesteine zu vermeiden. —

Es ergeben sich auch noch Folgerungen mehr allgemeiner Natur.

Die unregelmäßige Lagerungsweise ist mit ein Hauptmoment für die Herleitung gewisser Gemengteile aus fremder Umgebung. Aus der Beschreibung der Ariégite wird man lebhaft daran erinnert, daß die dortigen granat- und spinellführenden Lagen tief gelegenen Muldenachsen sedimentärer Ablagerungen entsprechen könnten, die mit ihren tiefsten Partien in einen lokalen Schmelzfluß getaucht haben und dadurch unter Beibehaltung ihres allgemeinen räumlichen Umrisses diese Mischgesteinszonen hervor-gebracht haben. Daraus könnte man weiter den Schluß ziehen, daß die dortigen Ariégiteinlagerungen im Lherzolith Mittel zur Rekonstruktion der ursprünglichen Tektonik geben könnten, daß sie z. B. als Wurzeln für Deckschollen zu deuten wären. — Durch eine derartige Annahme würde aber vielleicht auch eine leichtere Erklärung für

Vorkommen wird man kaum ins Feld führen können, da die einzelnen Mischungsreihen ineinander übergehen, und der Al- und Fe-reiche Almandin z. B. in Glimmerschiefern ebenso schon als Kontaktprodukt anerkannt wurde, wie die Kalkeisengranate (Melanite) und Grossulare. Pyrop und Spessartin können ihren Gehalt an Cr bzw. Mn aus dem Schmelzflusse, letzterer wohl auch aus dem ursprünglichen Nebengesteine haben. — Die pneumatolytische Bildung gewisser Granaten (mit Topas etc.) in Liparit scheint wie die Graphitbildung an das Vorhandensein sehr gasreicher Schmelzflüsse gebunden zu sein.

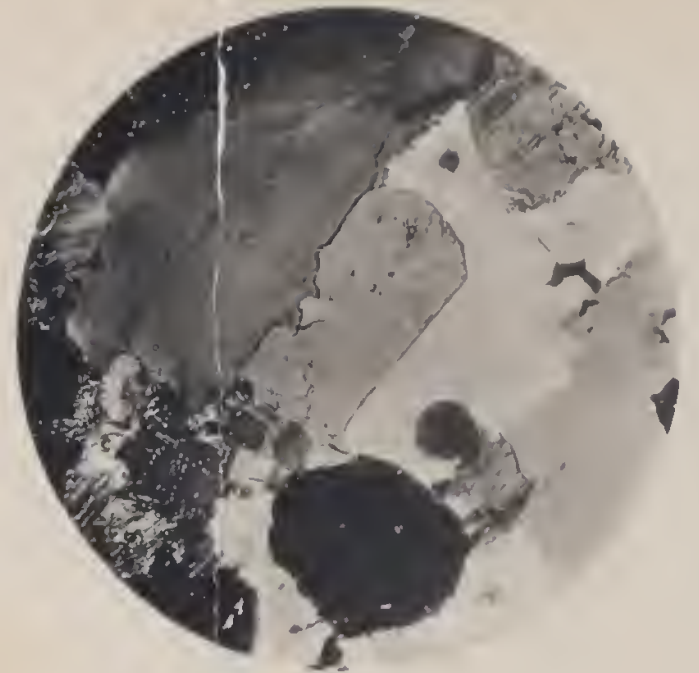
die von Sederholm (G. Rundsch. 1910, H. 3) aufgestellte Palingenese geschaffen. Dann wäre es nicht einfach die Verlagerung in die Tiefe, welche für die tief gelegenen Mulden gewisser Leptite zu einer neuerlichen Aufschmelzung führen würde, denn diese wäre wohl für die sedimentären Partien der Leptite schwer erklärlich, sondern es wäre das lokale Ein-tauchen in verwandte saure Magmabassins, das diesen Partien eine neuerliche späte, wenn auch abgeminderte Eruptivität verleihen würde. —

Mineralogisch-geologisches Laboratorium
der K. Technischen Hochschule in München.

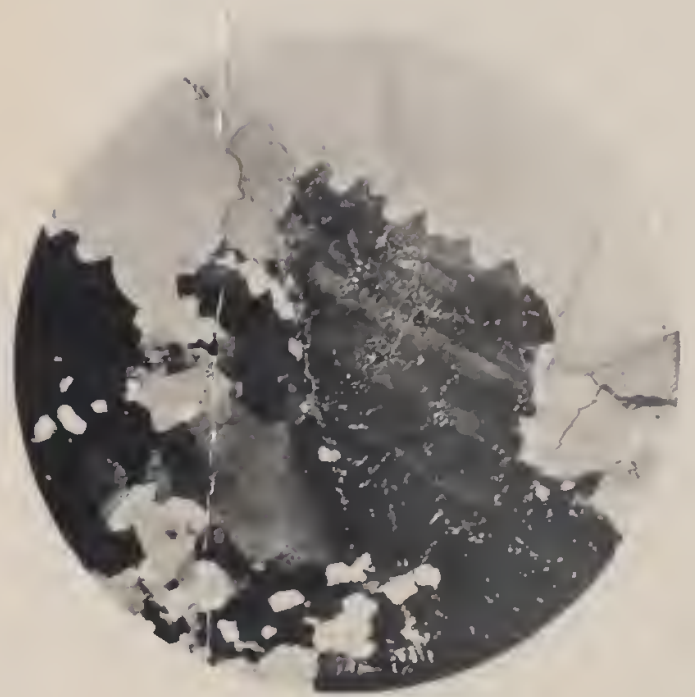
Tafelerklärung.

I.

1. Granulit von Spitzenberg. Hypidiomorph-körnige Struktur.
Plagioklas gut gegen Quarz begrenzt. + Nic. Vergr. $\frac{20}{1}$.
2. Granulit von Spitzenberg. Lappige Ausläufer des Quarzes
gegen den Plagioklas. + Nic. Vergr. $\frac{58}{1}$.



1



2

Tafelerklärung.

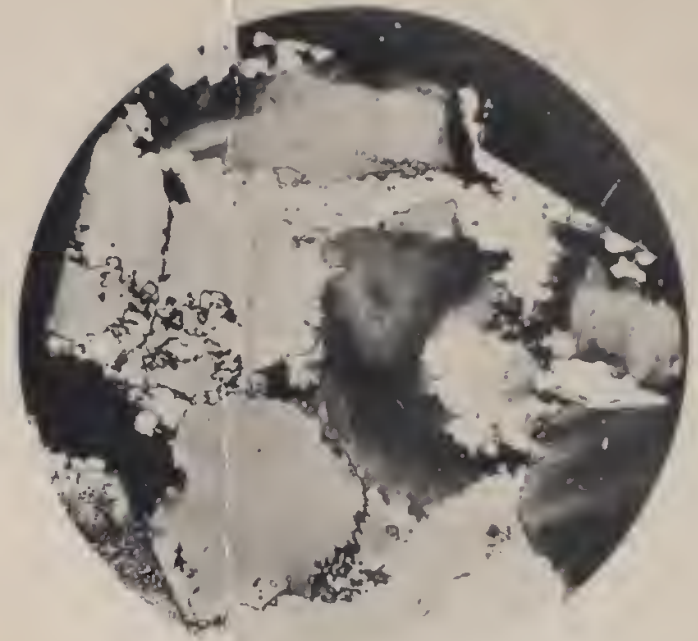
II.

3. Granulit von Spitzenberg. Die undulös auslöschenden, aber noch einheitlichen Quarze umsäumt von Aggregaten kleiner verzahnter Quarzkörner Mörtelstruktur (malchitisch?).

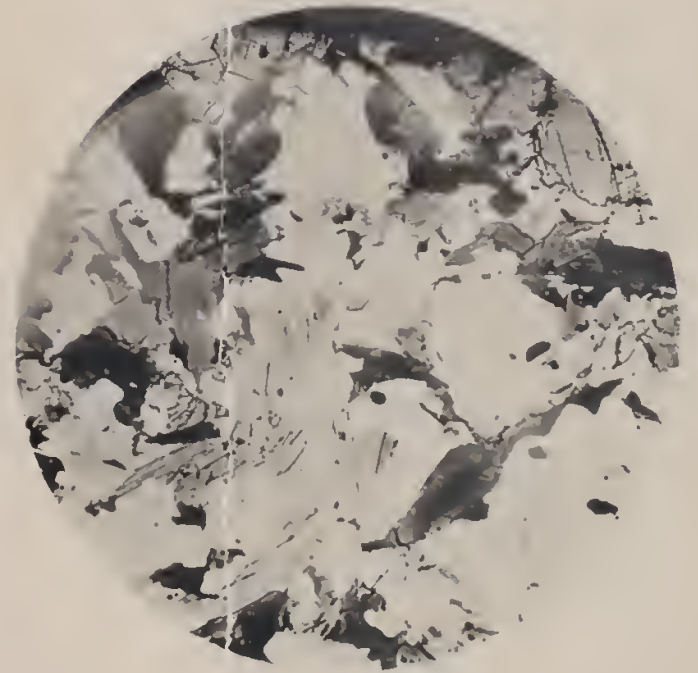
+ Nic. Vergr. $\frac{33}{1}$.

4. Granulit von Spitzenberg. Umrahmung der Plagioklase durch Biotit, dieser selbst wieder von Erz umsäumt. Gewöhnl. Licht.

Vergr. $\frac{20}{1}$.



3



4

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 14. Abhandlung

Die Korallenbauten

als Objekt wissenschaftlicher Forschung
in der Zeit vor Darwin

von

Siegmond Günther.

Vorgelegt am 3. Dezember 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die Lehre von den korallinen Küsten- und Hochseegebilden ist durch Ch. Darwin¹⁾ auf den hohen Stand gebracht worden, den sie heute einnimmt. Gewiß, seine Theorie hat die verschiedenartigsten Angriffe über sich ergehen lassen müssen; ganz abgesehen jedoch von der Tatsache, daß man gerade in neuester Zeit immer mehr wieder auf sie zurückkommt, spricht für ihre Bedeutung die unleugbare Wahrnehmung, daß jede neue Hypothese, jede veränderte Einzelanschauung sich mit der Lehre des Altmeisters auseinanderzusetzen genötigt ist. So bildet diese eben einen Markstein in der Geschichte der physikalischen Geographie, der selbst dann bestehen bleiben würde, wenn später einmal eine grundstürzende Neuerung die Oberhand gewinnen sollte. Immerhin war auch schon vor Darwin dieses Grenzgebiet zwischen Erdkunde und Biologie keineswegs vernachlässigt worden, und in den einschlägigen Geschichtswerken²⁾ ist das redliche

¹⁾ Ch. Darwin, *On the Structure and Distribution of Coral Reefs*, also *Geological Observations on the Volcanic Islands and Parts of South America visited during the Voyage of H. M. S. Beagle*, London 1842; 3. Aufl. (von Judd), ebenda 1890; *Über den Bau und die Verbreitung der Korallenriffe*, deutsch von Carus, Stuttgart 1876; *Les récifs de corail, leur structure et leur distribution*, französisch von Cosserat, Paris 1878.

²⁾ Hauptsächlich kommen in Betracht: J. V. Carus, *Geschichte der Zoologie bis auf J. v. Müller und Ch. Darwin*, München 1872, S. 460 ff., S. 684 ff.; O. Peschel-S. Ruge, *Geschichte der Erdkunde bis auf A. v. Humboldt und C. Ritter*, München 1877, S. 580 ff., S. 609 ff.; K. A. v. Zittel, *Geschichte der Geologie und Paläontologie bis Ende des XIX. Jahrhunderts*, München-Leipzig 1899, S. 368 ff. Dem geschichtlichen Elemente tragen auch J. G. Hahn (*Inselstudien; Versuch einer auf orographische und geologische Verhältnisse gegründeten Einteilung der Inseln*, Leip-

Bestreben nicht zu verkennen, auch diesen älteren Phasen gerecht zu werden. Eine zusammenhängende, alle Momente gleichmäßig berücksichtigende Untersuchung über diese Frühzeit steht dagegen noch aus, und es ist der Zweck der folgenden Zeilen, diese Darstellung der einzelnen Entwicklungsstadien im Zusammenhange zu liefern.

Dem Altertum war die Koralle als ein merkwürdiges, zu kunstgewerblicher Verarbeitung geeignetes Steingebilde nicht unbekannt. Plinius gibt¹⁾ verschiedene Fundstellen im Mitteländischen Meere an und schildert das „*coralium*“ als einen Beeren tragenden Strauch: aber auch im Persischen Meerbusen und im Erythräischen Meere gäbe es eine solche submarine Vegetation²⁾. Es scheint jedoch nicht, daß man diese Angaben besonders berücksichtigt hätte. Die Antike war im allgemeinen mit den indischen Meeren literarisch wenig vertraut, und so ist auch bei jenem Pseudo-Scylax, der wahrscheinlich im IV. nachchristlichen Jahrhundert eine Küstenbeschreibung der damals bekannten Meere lieferte³⁾, nichts hierher Gehöriges zu finden.

zig 1883, S. 177 ff.) und A. Penck (Morphologie der Erdoberfläche, 2. Band, Stuttgart 1894, S. 643 ff.) einige Rechnug. Bei Zittel wird auch (S. 380) einer einschlägigen Schrift von L. Böttger gedacht (Geschichtliche Darstellung unserer Kenntnisse und Meinungen von den Korallenbauten, Leipzig 1890). Gerade der Umstand, daß diese letztere sehr schwer zugänglich geworden ist, verstärkte noch den Wunsch, die ältere Geschichte ganz aus den Quellen herauszuarbeiten.

¹⁾ Plinius, *Historiae Naturalis libri XXXVII*, lib. XXXII, cap. 2 (11). „*Forma est ejus fruticis. color viridis. Baccae ejus candidae sub aqua et molles.*“ Als weiche, an der Luft rasch erhärtende Masse kennzeichnet die Korallen auch Ovidius (*Metamorph.*, IV, 749): „*Sic et coralium, quo primum contigit auras, tempore durescit, mollis fuit herba sub undis.*“ Die vermeintliche Heilwirkung der gepulverten Koralle war auch um 100 n. Chr. der „*Materia Medica*“ des Dioscurides bekannt.

²⁾ Wir lesen bei Plinius (lib. XIII, cap. 25 (51)): „*Qui navigavere in Indos Alexandri milites, frondem marinarum arborum tradidere in aquam viridem fuisse . . .*“ Die kleineren Bäume bedeckte das Wasser völlig; die Gipfel der größeren aber ragten über den Meeresspiegel empor. Auch der — als Geograph geschätzte — Mauretanierkönig Juba wisse von einem ähnlichen Strauche, „*Isishaar*“ genannt.

³⁾ Über den echten und falschen Scylax orientiert W. v. Christ

Die weitere Erörterung der Frage veranlaßt uns, eine Dreiteilung der zu lösenden Aufgabe eintreten zu lassen. Zunächst ist festzustellen, wie sich nach und nach in früherer Zeit die Erkenntnis Bahn brach, daß jene vermeintliche Pflanze die Fähigkeit besitzt, Gestein zu bilden und so schlimme Schiffahrtshindernisse zu schaffen. An zweiter Stelle ist der lange währende Streit über die wahre Natur der Korallen zu besprechen, denn erst als er in einem der Wirklichkeit entsprechenden Sinne entschieden war, konnte auch eine richtige Würdigung der Korallengebilde in morphologischer Hinsicht Platz greifen; zum dritten endlich ist zu zeigen, wieweit es die geophysische Behandlung des Korallenproblem es beim Auftreten Darwins gebracht hatte. Nur so werden uns die rein naturwissenschaftlichen Schwierigkeiten völlig klar werden, mit denen dieses Problem von Anfang an zu ringen hatte, bis es gelang, zu der Einsicht durchzudringen, deren Anbahnung auf die Weltreise des Expeditionsschiffes „Beagle“ zurückzuführen ist.

I. Mittelalter und beginnende Neuzeit.

Aus der mittelalterlichen Reiseliteratur ist kein direktes Zeugnis dafür anzuführen, daß man auf die Küstenriffe aufmerksam geworden wäre, die doch zumal bei der Bereisung der Sinaihalbinsel ganz von selbst ins Auge fallen mußten. Möglich, daß eine genaue Durchsicht der Kreuzfahrerschriften, deren es ja eine überaus stattliche Menge gibt, und auch der arabischen Geographen¹⁾ eine spärliche Ausbeute ergeben könnte. Jedenfalls konnte von tieferem Erfassen der auffallenden Erscheinungen, welche der nordwestliche Ausläufer des Roten Meeres darbot, keine Rede sein.

(Geschichte der griechischen Literatur bis auf die Zeit Justinians, Nördlingen 1889, S. 282).

¹⁾ Es ist das u. a. zu schließen aus der sehr fleißigen Schrift E. Reitemeyers (Beschreibung Ägyptens im Mittelalter nach den geographischen Werken der Araber, Leipzig 1903), in welcher die Korallengebilde gar nicht vorkommen. Und doch hätte die Ostküste gerade dieses Landes die beste Gelegenheit gegeben, sich mit jenen zu beschäftigen.

Hingegen verdient es wohl Erwähnung, daß ein scharfsichtiger arabischer Reisender an einer Gruppe von Hochseeinseln zwar nicht etwa deren koralline Eigenart, wohl aber so viel erkannt hat, daß diese Inselgruppen von allen denjenigen, die ihm sonst bekannt geworden waren, sich sehr erheblich unterschieden. Es waren dies die Malediven und Lakkediven; der Beobachter war Alberûni¹⁾. Langsam, so bemerkt er, steigen diese Inseln („Dibajât“ im Arabischen) aus der See auf, und der ursprünglich „sandige“ Uferstreifen gewinnt allgemach an Festigkeit, während an anderen Stellen Inseln im Ozean versinken. Das Neuland bedeckt sich mit Palmen, und es kommt vor, daß die Eingeborenen miteinander Krieg um diesen fruchtbaren Zuwachs der kleinen Eilande — ihre Zahl ist ungeheuer groß²⁾ — zu führen beginnen. Diese Charakteristik der Koralleninseln, die durch stete Schwankung ihrer Niveaulinien ausgezeichnet sind, beweist uns Neueren, daß Alberûni das Wesen der ersteren recht gut durchschaut hat, während natürlich der wahre Grund des Landwachstums, dem anderwärts wieder Landverlust gegenüberstand, ihm noch verborgen bleiben mußte.

1) Alberunis India. An Account of the Religion, Philosophy, Literature, Geography, Chronology, Astronomy, Customs, Laws and Astrology of India about A. D. 1030. An English Edition, with Notes and Indices, by E. Sachau, 1. Band, London 1868, S. 210, S. 223. Von der Richtigkeit des durch Alberûni erstatteten Berichtes konnte man sich auch später überzeugen (Peschel-Leipoldt, Physische Erdkunde, 1. Band, Leipzig 1884, S. 535). „Der englische Schiffsleutnant Prentice fand eine der Malediven, welche wenige Jahre zuvor noch Kokoshaine getragen hatte, bedeckt mit lebendigen Korallenpolypen. Wenn auch die Eingeborenen behaupteten, das Eiland sei von stürmischen Seen hinweggespült worden, so ist doch viel eher an ein örtliches Sinken des Meeresbodens zu denken.“ Von dem wirklich genialen Reiseschriftsteller handeln auch: Reinaud, Mémoires géographiques, historiques et scientifiques sur l'Inde antérieurement au milieu du XI^{me} siècle de l'ère chrétienne, Paris 1849; B. Boncompagni, Intorno all' opera d'Alberuni sull' India, Rom 1869. Hier findet man genaue Angaben über sämtliche Schriften des Arabers.

2) Ibn Batutas Reisen, französisch von Defremery und Sanguinetti, 2. Band, Paris 1854, S. 207 ff. Der berühmte Reisende schätzt die Anzahl der Inseln auf mehr als 2000.

Das rein morphographische Moment konnte bei aufmerksamer Betrachtung der in die Kategorie der Korallenbauten fallenden Meeresinseln überhaupt nicht umhin, einen gewissen Eindruck zu machen. Hiefür sind wir einen beachtenswerten Beleg anzuführen in der Lage, indem wir auf den durch v. Wiesers Mühwaltung dem Staube entrissenen Kolonialatlas des Spaniers De Sta. Cruz¹⁾ hinweisen. Man merkt dem sehr peinlich arbeitenden Kartographen das Bestreben an, die Umrisse der zahlreichen Inseln, welche das Länderbild Westindiens in sich aufzunehmen hat, so genau widerzugeben, als es eben mit den damaligen Hilfsmitteln der Ortsbestimmung möglich war. An der Nordseite der Halbinsel Yucatán sehen wir (Fig. 1) einige kleine Inseln, „los Alacranes“²⁾, deren eine



Alacranes

Fig. 1.

in der Zeichnung sich als ein wahres Atoll zu erkennen gibt. Und in der Tat gehört das Alacran-Riff zu den wenigen echten Atollbildungen des Amerikanischen Mittelmeeres, wie dies von Langenbeck ausdrücklich hervorgehoben wird³⁾. Auch bei einzelnen der Florida vorgelagerten Key- und Tortugas-Inseln scheint der Kartograph haben andeuten zu wollen⁴⁾, daß sie anders wie die Mehrzahl

¹⁾ Die Karten von Amerika in dem *Islario General* des Alfonso De Santa Cruz, *Cosmógrafo Major* des Kaisers Karl V. Mit dem spanischen Originaltexte und einer kritischen Einleitung herausgegeben von F. v. Wieser, Innsbruck 1908.

²⁾ A. a. O., Tafel X; Begleittext S. 41.

³⁾ R. Langenbeck, *Die Theorien über die Entstehung der Koralleninseln und Korallenriffe*, Leipzig 1890, S. 20. Das Alacran-Riff (Skorpionen-Riff), das seinen Namen nicht von dort hausenden gefährlichen Tieren, sondern von seiner eigentümlichen Gestalt erhalten hat, ist eine echte Atollbildung. Es sei beiläufig bemerkt, daß die westindischen Korallenbänke mit ihrer auf der nur scheinbaren Vegetation üppig wuchernden echten Pflanzenwelt bereits Columbus aufgefallen sind, der ihnen auf seiner zweiten Reise, südlich von Kuba, den Namen „Gärten des Königs und der Königin“ beigelegt hat. Ihrer wahren Natur nach beschreibt diese „Cajos verdes y graciosas“ A. v. Humboldt (*Ansichten der Natur*, herausgeg. von Bölsche, Leipzig s. a., S. 262).

⁴⁾ Sta. Cruz, Tafel IV.

dieser Anschwemmungsgebilde aussehen, und die moderne Forschung¹⁾ gibt ihm in dieser Unterscheidung recht.

Um dieselbe Zeit etwa, in welcher das Werk des Sta. Cruz entstand — nach v. Wieser 1541 — rückte ein anderer Nautiker der Iberischen Halbinsel den Korallenriffen unmittelbar auf den Leib. Im Roten Meere machte De Castro, einer der hervorragendsten Vertreter wissenschaftlicher Bestrebungen unter den portugiesischen Conquistadoren²⁾, die unliebsame Bekanntschaft mit derartigen Schiffahrtshindernissen und stellte zugleich fest, daß der die Riffe bildende Fels durch die unterseeischen „Bäume“ selbst erzeugt werde. Sein die Originaltagebücher enthaltender „Roteiro“ (Routier) kam erst im vorigen Jahrhundert an das Licht³⁾, allein viel früher schon war von der portugiesischen Reisebeschreibung eine holländische Bearbeitung erschienen⁴⁾, und diese ist es, auf welche wir uns bei der folgenden Skizze beziehen. Die Einfahrt ins Rote Meer schon wise solchen Fels. „Coral-grond“, auf⁵⁾; De Castro ist sogar nicht abgeneigt, den Ursprung des

1) Langenbeck, a. a. O., S. 15. „In den westlichsten Keys, den Marquesas-Keys, haben wir eine durchaus atollförmige Bildung vor uns. Hier tritt neben Trümmergesteinen auch fester Korallenfels auf.“

2) Mit der Bedeutung De Castros befassen sich: The Encyclopedia Britannica, a Dictionary of Arts, Sciences and General Literature, IX. Aufl., 5. Band, London 1876. S. 203; R. Guimarães, Les Mathématiques en Portugal, Coimbra 1909, S. 23 ff. Auch zwei andere Reisewerke aus dem Bereiche des Indischen Ozeans kennt man von ihm. Indem G. Hellmann (Die Anfänge der magnetischen Beobachtungen, Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin, 32. Band, S. 112 ff.) De Castros Verdienste um die Lehre vom Erdmagnetismus — und insbesondere auch vom Gesteinsmagnetismus — betont, sagt er, er stehe nicht an, diesen Mann „als den bedeutendsten Vertreter der wissenschaftlichen Erforschung des Meeres im ausgehenden Zeitalter der Entdeckungen zu erklären.“

3) Roteiro de Dom Joã de Castro, Paris 1833 (herausgeg. von A. N. Carvalho).

4) Don Johann De Castro, Naauwerkeurig Vertaal van een Reys door Portugijsen uit India gedaan na Soez, in de Jaaren 1540 en 1541, int Portugijs beschreven, en door uyt nu aldereerst vertaald, Leiden 1706.

5) A. a. O., S. 8. Wir geben den niederdeutschen Satz in hochdeutscher Sprache wieder: „Der Grund besteht aus jenem Steine, den

Namens des Meerbusens auf die Korallen zurückzuführen¹⁾. Weiter nördlich, bei Suakin, nehmen die Riffe immer mehr gefahrdrohende Dimensionen an; die ganze See ist voll von Untiefen und Bänken. Die Korallenfelsen wachsen aus gewissen Bäumen heraus, die sich mit ihren Zacken nach allen Seiten ausbreiten, und wer sich in der Beschaffenheit dieser Korallenbäume nicht auskennt, kann leicht Schaden nehmen. Die Farbe der letzteren ist teils weiß, teils rot; letztere Färbung wiegt vor, obwohl man gelegentlich auch Rotgelb und Grün vertreten sieht. Und deshalb heißt das bei den Mauren als „Meer von Mekka“ bekannte Nebenmeer des Indischen Ozeans das Rote Meer.

Man sieht, daß De Castro die Eigenschaft der angeblichen „Bäume“, eine sich verhärtende Steinmasse zu liefern, zutreffend erkannt hat. Er ist in dieser Beziehung dem Seefahrer, der etwas später auf diese Dinge geführt wurde, überlegen, denn dieser begnügt sich mit der bloßen Feststellung des Tatbestandes. Das ist der Holländer Johann Hugo van Linschot (so besser als Linschoten)²⁾. In seiner historisch orientierten Segelan-

man Korallenstein nennt, und er bildet die Not der Seefahrt, so daß man lange suchen muß, bis man eine Strecke sandigen Grundes findet.“ Daß das nicht schon früher den Indienfahrern aufgefallen war, haben wir oben als schwer begreiflich bezeichnet.

¹⁾ Wir verweisen hinsichtlich dieser toponomastischen Frage, die bereits zu Strabos Zeiten viele sonderbare Ansichten ins Leben gerufen hatte, auf eine Studie von Branky (Über die Farbe des Roten Meeres, Zeitschrift für Schulgeographie, 4. Band, S. 244). Einen sehr instruktiven Überblick, in dem auch De Castros Hinweis auf die rötlich schimmernden Korallen richtig gewertet wird, gibt über die Entstehung des Meeresnamens auch: Egli, *Nomina Geographica*, Leipzig 1893, S. 792 ff. Die von H. Berger (*Geschichte der wissenschaftlichen Erdkunde der Griechen*, Leipzig 1903, S. 59) verfochtene Etymologie ist die der Ägyptologen: Ägypten ist das „schwarze Land“, und ebenso ist Arabien das „rote Land“. Diese Namengebung übertrug sich dann vom Festlande auf das angrenzende Meer.

²⁾ Vgl. Poggen dorff, *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften*, 1. Band, Leipzig 1863, Sp. 1470 ff. Linschots Hauptwerk (*Navigatio ac itinerarium in orientalem sive Lusita-*

weisung für den Indischen Ozean kommt er auch auf die der Schifffahrt an der Ostküste Afrikas drohenden Gefahren zu sprechen¹⁾. Er ist jedoch auch mit den Riffen bekannt, welche weiter östlich solche Hindernisse bilden. So tut er ausdrücklich derjenigen Erwähnung, die sich an den Küsten der Insel Ceylon hinziehen²⁾, und noch später³⁾ warnt er vor ähnlichen Verkehrshindernissen im Malaiischen Archipel. In einer Linschots Werke beigegebenen Schrift, die mithin vielleicht den Zweck verfolgte, den niederländischen Seeleuten, zusammen mit jenem, eine Gesamtübersicht über die Erdmeere zu liefern, wird ferner noch erwähnt⁴⁾, daß Korallen auch an der Südostküste von Nordamerika und in den angrenzenden Gewässern vorkommen.

Ob man in aller chronologischen Strenge auch noch das XVII. Jahrhundert der „beginnenden“ Neuzeit zurechnen darf, mag fraglich erscheinen. In unserem Falle wird sich jedoch diese Zuteilung wohl rechtfertigen lassen. Handelt es sich doch um gewisse Veröffentlichungen, deren Tendenz nicht eine im engeren Sinne naturwissenschaftliche, sondern mehr nur eine geographisch-konstatierende war. Wir erachten uns des-

norum Indiam, Haag 1591) hat auch eine französische Ausgabe (Amsterdam 1599) erfahren, und eine Neubearbeitung von dieser wiederum (Le grand routier de mer, Amsterdam 1638) wurde hier zu Grunde gelegt.

1) A. a. O., S. 6: „Et pour aller plus seurement, singlez au Nord Ouest: ce faisant vous viendrez pres les Jsles d'Angoscas qui sont proches de la coste de Moçambique: et plus vous tendez au Nord plus vous approchez de Moçambique. Vous prendrez garde qu'en allant des dites Jsles à Moçambique. vous ne passiez point au dessous de la profondeur de vingt cinq brasses outres les Corals, la ou Dou Joan Pereira se perdit, et ou se trouve la profondeur de treize basses.“

2) A. a. O., S. 35.

3) Ebenda, S. 48. Es ist von „les bancs le long de la Coste“ bei Pulo Caton die Rede.

4) Descriptions de l'Amérique et des parties d'icelle, comme de la Nouvelle France, Floride, des Antilles, Lucaya, Cuba, Jamaica etc., Amsterdam 1638. Hier wird von den Insulanern nächst Florida gemeldet (S. 8): „Ils tirent hors les Coquilles certaines petites rouges pierres qu'ils ont en grande estime et lesquelles ils pendent à leurs oreilles.“

halb für legitimiert, gleich hier auch diese Beiträge zur Lehre von der geographischen Verbreitung der Korallen vorwegzunehmen, und zwar stellen wir die zwar jüngere, aber minder wichtige, voran.

Der französische Reisende Monconys¹⁾ ist der anscheinend erste gewesen, der die prächtigen Korallensäume der Sinai-Halbinsel bei Tor gesehen hat²⁾. Was er von ihnen berichtet, geht allerdings über eine recht oberflächliche Schilderung nicht hinaus. Auch er hält dafür, der Name des Meeres komme von diesen vielfarbigen, zumeist aber rötlichen „Seepflanzen“ her; daß ihn dabei De Castros Ansicht (s. o.) beeinflußt habe, ist wohl nicht anzunehmen.

Ungleich bedeutsamer ist die einige Jahrzehnte ältere Mitteilung Pyrards über die Malediven, über jenen Archipel, dessen Sonderstellung, wie wir (s. o.) erfuhren, bereits Alberúni richtig herausgeföhlt hatte. Ein für ihn und seine Schicksalsgenossen sehr ungünstiges, für die Wissenschaft dagegen vorteilhaftes Ereignis, nämlich ein Schiffbruch, hatte den weitgereisten Mann gezwungen, längere Zeit auf den genannten Inseln zu verweilen, was ihn veranlaßte, wertvollen Stoff für deren Landes- und Volkskunde zu sammeln. Nachdem er die ozeanische

¹⁾ Unterrichten kann man sich über diesen weit herumgekommenen, etwas wunderlichen Reisenden am besten aus einer Monographie von Ch. Henry (*Les voyages de Balthasar De Monconys*, Paris 1887). Das mehrbändige Reisewerk hat geographisch keine hohe Bedeutung, enthält aber doch manche Wahrnehmung, die fast nirgendwo zu finden ist und auch für die Geschichte der Erdkunde sowohl, wie auch für die historische Geographie sich verwerten läßt.

²⁾ *Journal des Voyages du Monsieur de Monconys*, 1. Teil, Paris 1667, S. 246. „L'après diné nous fusmes pecher à la Mer de ces champignons, coquilles et arbres divers“ — das sind eben die Korallen — „qu'on y trouve en quantité en des endroits fort longs où la Mer est si peu profonde qu'on voit clairement comme dans une fontaine tout ce qu'il y a bas qui est remplý d'une infinité des diverses herbes de différentes couleurs...“ Monconys pflückte, selbst ins Meer steigend, solche „Kräuter“. S. auch: J. Walther, *Die Korallenriffe der Sinai-Halbinsel*, Abhandl. d. math.-phys. Klasse d. K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., 14. Band (1888), Nr. X, S. 440 ff.

Lage der Gruppe gekennzeichnet hat, hebt er hervor¹⁾, dieselbe werde in dreizehn Provinzen, genannt „Atollons“, eingeteilt; jeder solche Atollon bestehe für sich und umschließe eine große Anzahl von Inselchen. Einen höchst wunderbaren Anblick gewähre jeder Atollon, um den sich eine gewaltige Steinbank herumziehe, und man könne sich keine Mauer, von Menschenhand aufgeführt, denken, welche so vortrefflich den Abschluß des Innenraumes bewerkstellige. Ihre Form ist kreisrund oder oval; im Durchschnitt dreißig „Lieues“ im Umkreise messend, sind die Atollons in meridionaler Richtung aneinander gereiht, so daß zwischen je zwei nächstbenachbarten immer ein Stück freien Meeres übrig bleibt. An der umgebenden Mauer bricht sich der Wogenschwalm; sie ragt in blendender Weiße aus den Wellen hervor. Die Menge der sekundären Inseln ist eine ganz unzählige²⁾, aber ununterbrochen versinken einzelne; man muß vermuten, daß sie alle nur Bruchstücke von früheren, viel umfangreicheren Inseln sind. Das innere Meer — was wir heute als Lagune bezeichnen — ist seicht und ruhig, so daß man anstandslos dasselbe durchschreiten könnte, wenn es darin nicht gefährliche Raubfische (Haie?) und sehr spitze Felsstücke (offenbar losgelöste Korallenblöcke) gäbe. Des ferneren findet man verzweigte und zugespitzte weiße Korallen, von denen schwer zu sagen wäre, ob man sie sich als Bäume oder Steingebilde vorstellen soll. Dieselben haben keine glatte, sondern eine sehr rauhe Oberfläche voll kleiner Poren und Löcher. Die wenigsten Inseln sind bewohnt; auch wachsen auf den meisten keine Pflanzen; als tierische Bewohner sind kleine Krabben und Pinguine³⁾ zu nennen. Der blendend weiße Korallensand, der allenthalben die Oberfläche der Eilande bedeckt, könnte aus der Ferne den Anschein frisch gefallenen Schnees erwecken. Ein großer Übelstand erwächst aus dem Mangel an Trinkwasser.

1) F. Pyrard, Voyage . . . , 3. Aufl., 1. Band, Paris 1619, S. 107 ff.

2) Man erinnere sich an die oben mitgeteilte Äußerung Ibn Batutas.

3) Diese Notiz ist zoogeographisch bemerkenswert, denn in unseren Tagen nisten diese flügellosen Vögel einzig und allein in antarktischen Breiten.

Spätererklärt Pyrrard¹⁾, daß der jeden Atollon umschließende Wallring zwei Öffnungen habe, die sich meist diametral gegenüberlägen, wodurch der Verkehr zwischen den einzelnen Teilen des „Königreiches“ eigentlich erst ermöglicht werde, da die Monsune außerdem die Schifffahrtsverbindung sehr erschweren würden. Wäre nur ein Eingangstor vorhanden, so könnte man z. B. beim Wehen des Westmonsuns unmöglich nach Westen hin den Atollon verlassen. Doch sind diese Löcher in der Mauer nach Größe und Gestalt sehr voneinander verschieden; ein Gleiches gilt für die zwischen den einzelnen Atollons hinführenden Kanäle.

Pyrrards Schilderung entspricht in den großen Zügen den Tatsachen; daß man gegenwärtig 17 Hauptinseln unterscheidet, tut nicht viel zur Sache²⁾. Wir erhalten die erste treffende Charakteristik der als Atolle bekannten ozeanischen Inseln und zugleich auch den Schlüssel zur Erklärung dieses von der wissenschaftlichen Sprache rezipierten Wortes³⁾. Über den inneren Zusammenhang zwischen der Entstehung der Lagunenumrandung und den von ihm wahrgenommenen Korallenstöcken hat sich der französische Seemann eine klare Vorstellung offenbar noch nicht gebildet gehabt. Aber soweit das morphographische Moment in Betracht kommt, ist seine Darstellung zweifellos die beste, von welcher wir Kunde haben.

Ein Fortschritt in der Ergründung der Kausalzusammenhänge war nur möglich, wenn man über die Art der Entstehung der Korallenriffe zutreffende Kenntnis gewinnen konnte. Und

1) Pyrrard, a. a. O., S. 115: „Les Atollons ont des ouvertures et des entrees opposites les unes aux autres, deux d'un costé et deux de l'autre, par le moyen dequoy on peut aller et venir d'Atollon en Atollon.“

2) Eine genaue Beschreibung des „Maldiva-Archipels“ gibt Darwin (Übers. von Carus, S. 32 ff.). Vgl. auch: Bourne, The Atoll of Diego Garcia and the Coral Formations of the Indian Ocean, Nature, 37. Band, S. 546 ff.

3) Da die Bevölkerung der Maledivengruppe dem Hindustamme angehört, wenn auch ihre Sprache stark mit arabischen Lehnwörtern vermengt ist, so werden wir „Atoll“ wohl auch als eine altindische Bezeichnung anzusprechen haben.

hiez u war allererste Voraussetzung ein tieferes Eindringen in die naturhistorische Seite des Problemes. Es hat ungefähr zweihundert Jahre gedauert, bis nach dieser Seite hin vollständige Aufklärung erbracht worden war.

II. Die Korallen als Gegenstand naturgeschichtlicher Untersuchung.

Die Ansicht, man habe es mit Steingebilden zu tun und die organische Naturkunde sei beim Studium der Korallen auszuschließen, war selbst zu Anfang des XVIII. Jahrhunderts noch keineswegs ganz überwunden. Es ist vor allem der Sizilianer *Bocccone* als Befürworter dieser Auffassung namhaft zu machen¹⁾, der zwar das stete Wachstum der Stücke wohl erkannt hatte, darin aber eine Art von Kristallisationsprozeß erblicken zu sollen vermeinte²⁾. Zitiert wird diese originelle Auffassung zwar

1) Zunächst kommt in Frage sein Hauptwerk: *Recherches et observations touchant le corail, la pierre étoilée, l'embrasement du mont Etna*, Paris 1672. Späterhin ist von ihm, der sich damals auf einer Reise in Deutschland befand, auch ein kleines Buch in deutscher Sprache veröffentlicht worden, welches uns an dieser Stelle angeht (*Curiöse Anmerkungen über ein und ander natürliche Dinge*, Frankfurt a. M.—Leipzig 1697, S. 51 ff.). In Deutschland war man teilweise schon über diesen Standpunkt hinausgekommen. Der große Pädagoge und tiefdenkende Naturforscher Comenius meinte, Korallen und Bernstein sollte man doch eher dem Pflanzen-, als dem Mineralreiche zurechnen (*Joh. A. Comenii Physicae ad lumen divinum reformatae synopsis*, übersetzt und kommentiert von J. Reber. Gießen 1896, S. 220). Der Abriß der Edelsteinkunde endet mit Korallen und Bernstein; „sed haec duo ad caput sequens potius referenda“. Dieses Kapitel ist der Pflanzenkunde gewidmet, gibt aber nur allgemeine Lehren.

2) *Boccones* Analyse des Wachstumsvorganges ist folgende: Die Natur läßt zuerst eine Kapsel, ein Behältnis entstehen, welches sich nach und nach mit den kleinsten Teilchen anfüllt, aus denen die Koralle besteht. Man muß den inneren „Tartarus“ — die Grundsubstanz, ein auf Theophrastus Paracelsus zurückweisender Begriff — und die „poröse Rinde“ auseinanderhalten. Ein Stück Holz kann von der Korallensubstanz derart überzogen werden, daß ein Gebilde wie eine Wachskerze zustande kommt; das Holz entspricht dem Dochte. „Glaube also, daß der Corall durch ein stetswährendes Ansetzen partis ad partem entsteht, wie bei dem Wachsen der dichten Körper und Felsen geschieht“ (a. a. O., S. 51 ff.).

zum öfteren, aber eine tiefer greifende Einwirkung auf die Entwicklung der theoretischen Ansichten hat sie anscheinend nicht geübt. Wir wüßten nur von einer einzigen Schrift zu berichten¹⁾, die sich auf diesen Standpunkt stellt.

Allein gerade in ihr kommt auch, wie gleich vorgreifend angeführt sein möge, die entgegengesetzte Anschauung zur Geltung. Der Autor bringt nämlich in seinem Werke eine Korrespondenzmitteilung aus Niederländisch-Indien²⁾ zum Abdrucke, welche schon in ihrer Überschrift ganz andere Perspektiven eröffnet; sie betitelt sich nämlich: „Bericht von den Amboinschen See-Bäumen“³⁾. Der Berichterstatter bestätigt die Angabe des Plinius (s. o.), daß Teile des Roten Meeres und Indischen Ozeans ganz von unterirdischen Wäldern erfüllt seien, und erklärt, daß der Molukken-Archipel das gleiche Bild gewähre. Er ist somit von der pflanzlichen Natur der Korallen überzeugt und gibt einige gute Abbildungen des von den Malaien „Calbahar“ genannten „Gewächses“. Eine solche, die des „*Corallum rubrum*“, suchen wir (Fig. 2) wiederzugeben.



Fig. 2.

Im großen und ganzen galt überhaupt die Pflanzennatur für erwiesen, und es schien für sie die schon erwähnte Beobachtung zu sprechen, daß die Korallen im Wasser eine weiche Substanz darstellten, die sich bei Berührung mit der Luft verhärtete. Obes sich in Wahrheit so verhalte, darüber gingen die Meinungen etwas auseinander.

¹⁾ M. B. Valentini, *Museum Museorum*, 1. Band, Frankfurt a. M. 1714, S. 104 ff. Man könne die Korallen nicht als Kräuter anerkennen, heißt es da; es bedecke sie lediglich ein organischer, schleimiger Überzug. Gefunden würden sie im Mittelmeere, in Vorderindien und an der Küste von Bantam (Java), aber auch in Böhmen! Die falschen „böhmischen Korallen“ sind freilich nichts als mineralische Konkretionen.

²⁾ A. a. O., S. 107 ff.

³⁾ Wer den abgedruckten Brief geschrieben, wird nicht gesagt. Mit sehr großer Wahrscheinlichkeit darf man jedoch auf den bedeutendsten

Boyle¹⁾ und Fournier²⁾ behaupteten, zuerst behalte die ihrem natürlichen Elemente entzogene Pflanze die Eigenschaften der Weichheit und Nachgiebigkeit, wogegen andererseits mehrere Schriftsteller zu erzählen wußten³⁾, der Dirigent der Korallenfischerei an der tunesischen Küste (bei Bizerta), ein Sieur De Nicolo oder Nicolai aus Südfrankreich, habe Erfahrungen im entgegengesetzten Sinne gemacht. Die richtigere Deutung des Verhärtungsprozesses dürfte zuerst ebenfalls ein Südfranzose, der als Polyhistor und Mäcen der Wissenschaft sehr geschätzte N. C. Fabri De Peiresc (1580—1637), ermittelt haben. Sein Biograph Gassendi meldet⁴⁾, jener habe sich nach Toulon begeben und dort selbst mit einer eigens dafür konstruierten Vorrichtung Korallen aus tiefem Wasser vor seinen Augen heraufholen lassen. Vieles ging durch Zerreißen des Netzes verloren; was aber an die Oberfläche heraufkam, war ganz biegsam und gab dem Drucke der Hand nach. Riß man jedoch die Spitzen ab, so drang eine milchige Flüssigkeit („lac“) hervor, und die ganze Außenseite

Konchyliologen jener Zeit, auf Eberhard Rumphius (1627—1706), schließen, denn war er auch, als Valentinis „Museum“ herauskam, bereits in Amboina gestorben, so kann jenes Sendschreiben doch sehr wohl auf seine letzten Lebensjahre zurückgehen. Seine eminenten Verdienste um die Erforschung der Hinterindischen Inselwelt charakterisiert A. S. Bickmore (Reisen im Ostindischen Archipel in den Jahren 1865 und 1866, deutsch von J. E. A. Martin, Jena 1869, a. v. St., zumal S. 187 ff.).

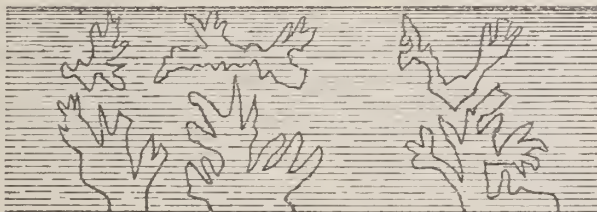
1) Eine genaue Notiz über die Stelle, in der Boyle sich so geäußert haben soll, war nicht zu finden. Die Schrift, welche am nächsten zu liegen schiene (*Observationes de salsedine Maris*, Bologna 1675) dürfte nicht in Betracht kommen.

2) G. Fournier, *L'hydrographie contenant la théorie et la pratique de toutes parties de la navigation*, Paris 1667, S. 181 ff. Der fragliche Abschnitt betitelt sich: „De la Pesche de l'Ambre et du Corail.“

3) So z. B.: O. Worm, *Museum Wormianum*, Leiden 1655, S. 230 ff.; J. Hoffmann („der ältere“), *Clavis pharmaceutica Schroederiana cum Thesauro mathematico*, Halle a. S. 1675, S. 157 ff. Dieser letztere Schriftsteller ist ein entschiedener Anhänger der Lehre von der Pflanzennatur dieses Naturkörpers („*Corallium est frutex sub aqua marina generatum*“).

4) P. Gassendi, *Viri Illustris Nicolai Claudii Fabricii De Peiresc, Senatoris Aquisextiensis vita*, Haag 1651, S. 291 ff. Es ist hier auch von „*plantae Corallii*“ die Rede.

der Probestücke erwies sich bedeckt mit winzigen Öffnungen („foraminulis“), aus denen jener Stoff ausschwitzte. Kam er mit der Haut des Menschen in Berührung, so erzeugte er ein Gefühl des Brennens. Peiresc schloß, daß dieser Saft die Verfestigung hervorrufe, wenn er eintrockne, und daß da wohl ein analoger Vorgang in Mitte liege, wie der, durch den gewisse Weichtiere, Muscheln und Schnecken, eine feste Schale erhalten. Ganz intakte Exemplare behielten ihre gallertartige Beschaffenheit auch außerhalb des Wassers. Daß diese auf Autopsie sich gründende Erkenntnis sich nicht sofort allenthalben durchsetzte, kann nicht wundernehmen. So bleibt Vielheuer, der nach dem gelehrten Kircher¹⁾ eine ganz anschauliche Darstellung der „Corallen-Püsch“ gibt²⁾ und sie durch eine Zeichnung — eine der ältesten ihrer Art (Fig. 3) — erläutert, noch bei der alten Lehre von der plötzlichen Verhärtung stehen.



Corallen Pusch

Fig. 3.

¹⁾ A. Kircher, *Mundus Subterraneus*, 2. Band, Amsterdam 1664. S. 158 ff. Kircher lehnt sich auch entschieden gegen die landläufige Meinung (s. o.) auf, die Korallengewächse seien im Wasser absolut biegsam. Wäre das der Fall, so wären sie nicht so oft am Zerreißen der Netze schuld, was, wie ihm der Chef der Seefischerei in Trapani versichert habe, fast die Regel sei. Nach seiner bekannten Sammlung, dem als Rarität in Rom den Fremden gezeigten „Museo Kircheriano“, bildet er ein paar Korallenstämme mit ihren Verästelungen ganz hübsch ab. Die Vergrößerung der Stöcke denkt er sich, obwohl er deren organische Natur anerkennt, nicht viel anders, wie Boccone (s. o.): „Atque hoc est primum *κορσταλλογενέσε* et fundamentum.“

²⁾ Vielheuer, *Gründliche Beschreibung fremder Materialien und Spezereyen*, Leipzig 1676. S. 28 ff. „Es seynd solche Corallen-Püsch oder
Sitzungsab. d. math.-phys. Kl. Jahrg. 1910, 14. Abh. 2

Zu denjenigen Autoren, welche die Beschaffenheit dieses naturgeschichtlichen Objektes am genauesten studierten, gehörte vor allem der Graf Marsigli¹⁾. Er entdeckte, was damals mit Recht als ein wichtiger Fund betrachtet und geschätzt ward, die „Blüten der Koralle“ (fleurs du Corail). Wiederum war es, wie schon bei Peiresc, die Küste der Provence, welche, im Jahre 1706, den Schauplatz dieser folgenreichen Entdeckung bildete²⁾. Niemand, selbst unter den berufsmäßig ihrem Gewerbe obliegenden Korallenfischern, habe von dieser Tatsache Kenntniss gehabt³⁾. Es waren „achtstrahlige“ Blüten, die er an den von ihm studierten Exemplaren auffand; einen „Stiel“, an dem sie befestigt gewesen wären, vermochte er nicht zu erkennen. Längere Zeit der Luft ausgesetzt, verschwanden sie, um gleich wieder zum Vorschein zu kommen, wenn man den Stock in Meerwasser brachte. Nach und nach freilich nahmen sie eine gelbliche Farbe an und trockneten bis zum Unkenntlichwerden ein.

Wälder unter dem Wasser, sonderlich im rothen Meer, auf welches Grunde die Fischer ofte Corallen-Bäume bey großen Hauffen herfür ziehen, welche Corallen-Stauden unsern Kirsch-Bäumen wenig nachgeben; ja manchesmal so hoch herauf wachsen, daß die Zinken aus dem Wasser herfür stehen, zu nicht geringer Gefahr den Durchschiffenden.*

1) Wir verweisen seinetwegen auf eine Spezialschrift: C. Wislizenus, Der Geograph Luigi Ferdinando Graf Marsigli (1658—1730), Nürnberg 1900. Der bedeutendsten Leistung des vielseitigen Mannes, seiner hier hauptsächlich mit dem vierten Teile in Betracht kommenden Ozeanographie (Histoire physique de la mer, Amsterdam 1725) wird all dort (S. 45 ff.) besondere Würdigung zuteil.

2) Seine am Golf du Lion gesammelten Erfahrungen über das Wachstum der Korallen legte Marsigli in einer vorläufigen Mitteilung nieder (Extrait de l'histoire physique de la mer, Hist. de l'Acad. Royale des sciences, 1710, S. 70 ff.).

3) Extrait d'une lettre écrite de Cassis près de Marseille le 18 décembre 1706 à M. l'Abbé Bignon par M. le Comte Marsigli, touchant quelques branches de Corail qui ont fleuri, Supplément du Journal des Savants pour l'année 1707, Paris 1707. Der Adressat Bignon lebte als Akademiker in Paris. Daß Marsigli bereits die Tentakeln abbildete, welche den am Kalkstocke haftenden Organismen die Nahrung zuführen, beweist, wie nahe er bereits der richtigen Auffassung war; vorher waren diese Fühlfäden noch nicht gesehen worden.

Daß er es mit richtiger Meeresvegetation zu tun habe, davon war Graf Marsigli fest überzeugt, allein gerade seine „Korallenblüten“ sollten den Anstoß zur bedeutsamsten Errungenschaft auf diesem Gebiete führen. Denn diese scheinbaren Blüten erwiesen sich eben bei näherem Zusehen nicht als pflanzliche, sondern als animalische Gebilde. Schon ziemlich bald nach Marsigli's Bekanntmachung seiner Beobachtungen unternahm der französische Arzt Peyssonel eine Reise nach Nordafrika, um auf königliche Anordnung dortselbst naturwissenschaftliche Studien zu machen¹⁾; die Neigung zu solchen dankte er eben Marsigli, dem Freunde seiner elterlichen Familie. Von da zurückgekehrt, bemühte er sich, in seiner Vaterstadt Marseille eine gelehrte Gesellschaft ins Leben zu rufen, und nachdem ihm dies gelungen war, legte er ihr 1727 einen Bericht über die „plantes marines pierreuses“ vor²⁾. Derselbe knüpft unmittelbar an Marsigli's Vermutung an, ein Korallenstock bestehe aus Steinmaterie, um die sich eine Knospen tragende Pflanzenhülle herumgelegt habe. Diese Knospen seien im Gegenteile „Insekten“, deren jedes in seiner eigenen Zelle sitze, wie die Bienen in ihrem Stocke. Auch bei den Madreporen und Lithophyten verhalte es sich nicht anders; diese gehörten also auch dem Korallengeschlechte an. Die zoologische Nomenklatur steckte damals noch in den Kinderschuhen; wir werden also keinen Anstoß daran nehmen dürfen, daß Peyssonel die Korallentiere in einem falschen Formenkreise unterbrachte. Später hat er auch nicht mehr von Insekten, sondern von „Würmern“ gesprochen³⁾. Er be-

¹⁾ Die beste und nahezu einzige Quelle zur Belehrung über Leben und Wirken des verdienten Mannes gewährt des Herausgebers Vorwort zu nachstehend bezeichnetem Werke: Peyssonel et Desfontaines, *Voyages dans les régences de Tunis et d'Alger*, publiés par M. Dureau de la Malle. 1. Band, Paris 1838, S. VII ff.). Die Biographie geht namentlich auch auf den uns hier interessierenden Gegenstand näher ein.

²⁾ Ebenda, S. XX.

³⁾ Aus der Neuen Welt sandte Peyssonel seinem Vereine in Marseille einen Aufsatz mit dem Titel „Sur les vers qui forment le corail“ (Dureau de la Malle, S. XXIII). Nach Pallas (s. u.) hätte erstmalig

gab sich nach Westindien und untersuchte da u. a. die Korallenbauten von Guadeloupe. Die geringe Anerkennung, welche seine wertvollen Arbeiten bei den Naturforschern gefunden hatten, veranlaßten ihn, alle seine Kraft der Archäologie zuzuwenden, und zumal die römischen Denkmäler Nordafrikas hat er allseitig ergründet¹⁾.

Ziemlich gleichzeitig mit Peyssonel hielt sich auch der Engländer Shaw in der afrikanischen Türkei auf. Wie der einst dem Plinius — oder seinen Gewährsmännern (s. o.) —, so erschien auch ihm die Korallenwelt von Tor, wohin er aus Ägypten gereist war, „wie ein Wald unter dem Wasser“²⁾. Die Madreporen vorzugsweise erinnerten ihn mit ihrer Verästelung ganz an Zypressen. Er prüfte sorgfältig die „Asterisken“, wie er Marsigli's „Blüten“ nennt, und glaubte in ihnen den Sitz der Wachstumstendenz eines jeden Korallenstockes zu erkennen. „Korallen, Madreporen und Lithophyten sind“, so heißt es im deutschen Texte, „nicht dem Pflanzenreiche, sondern dem Tierreiche zuzuzählen.“ Etwas später kam an den gleichen Ort der Däne Forskäl, Mitglied der berühmten arabischen Expedition, welche König Friedrich V. organisiert hatte, und von welcher als einziger Teilnehmer Carsten Niebuhr zurückkehrte. Die Bezeichnung „Stern“, die in seinem post-

J. Gesner an einen „vermiculus multiplex“ gedacht, der den Korallenstock bewohne, wie auch Imperato bei gewissen Madreporen deren tierische Natur geahnt haben soll. Letzteres wird kaum zutreffen, denn wenigstens in dem Hauptwerke des neapolitanischen Naturforschers (J. Imperato, *Historia Naturale*, Venedig 1572) wird (S. 622 ff.) die Koralle ganz unverhüllt als „Meerespflanze“ bezeichnet. Dagegen könnte man ihn vielleicht als Entdecker der „Sterne“ oder „Blüten“ (s. o.), d. h. als Vorläufer Marsigli's ansprechen, indem er u. a. sagt (a. a. O., S. 623): „Il corallo stellato si ha dall' Oceano e è nella sustanza simile à gli altri detti, di color puro bianco, ma nella estera superficie notato per tutti di piccole e foltre impressioni simili à stelle, onde ne ha il nome.“

¹⁾ A. a. O., S. XXVI.

²⁾ Th. Shaw, *Reisen oder Anmerkungen verschiedene Theile der Barbarey und der Levante betreffend*, nach der zweyten englischen Ausgabe ins Deutsche übersetzt, Leipzig 1765, S. 382 ff. Wichtig ist auch der Anhang („Appendix de Coralliis et eorum Affinibus“).

hunen Werke Anwendung findet, ist wahrscheinlich Shaws „*Asteriscus*“ nachgebildet und in der Tat auch recht passend. Seine Charakteristik der tierischen Natur von „*Madrepora Daedalea*“ ist sehr zutreffend¹⁾. Man wird leicht inne, daß solche Forscher, welche die Korallen in freier Natur sich näher angesehen hatten, der Wahrheit immer weit näher als die kamen, welche sich auf trockene Schilderungen verlassen mußten.

Denn von deren Seite erhob sich noch lebhafter Widerstand gegen die von Peyssonel angebahnte Neuerung. Letzterer hatte dem berühmten Réaumur ein von seiner Entdeckung Kunde gebendes Schreiben gesandt, und dieser tat der Sache zwar in eigener Abhandlung über die Korallen Erwähnung, unterschlug aber — ob aus Schonung? — den Namen des Briefstellers²⁾. Auch Statius Müller, der verdienstvolle Übersetzer von Rumphius' (s. o.) „*Rariteitkamer*“, konnte sich mit der alle bisherigen Annahmen umstoßenden Theorie nicht befreunden³⁾, und ein gleiches gilt von dem als Systematiker geachteten Klein⁴⁾. Allein erfreulicherweise hatte sich be-

1) P. Forskål, *Descriptiones animalium, avium, amphibiorum, piscium, insectorum, vermium, quae in itinere orientali observavit*, ed. C. Niebuhr. Kopenhagen 1775, S. 131 ff. „*Animal est Priapus; viridis vel cinereus; quisque suam stellam inhabitans; illuc se retrahens et occultans.*“

2) R. A. Ferchault de Réaumur, *Observations sur la formation du corail et des autres productions appelées plantes pierreuses*. Mémoires de l'Acad. des Sciences, 1727, S. 277 ff.: Bureau de la Malle, a. a. O., S. XXII.

3) Statius Müller, *Dubia coraliorum origini animali opposita*, Erlangen 1769 (holländische Ausgabe, Dordrecht 1771).

4) Daß K. Ph. Klein in seiner Tierklassifikation den Korallen noch keinen Platz gönnte, sondern an Marsigli's Anschauung festhalten zu sollen glaubte, bezeugt Carus (a. a. O., S. 489). Das Kabinett des Danziger Naturhistorikers hatte einen Weltruf; es ging nachmals in den Besitz der jungen Hochschule Erlangen über (Die Universität Erlangen von 1743—1843, Erlangen s. a., S. 133). Selbst noch viel später ist bei den nicht im engeren Sinne zoologischen Schriftstellern die Unsicherheit groß (vgl. z. B. De Pagès, *Reisen um die Welt und nach beiden Polen zu Lande und zur See in den Jahren 1767, 1768, 1769, 1771, 1773, 1774 und 1776*, aus dem Französischen übersetzt, Frankfurt a. M.-Leipzig 1786, S. 661).

reits ein Größerer der Sache bemächtigt und durch seine in die weitesten Kreise dringenden Schriften die Entscheidung der Streitfrage herbeigeführt. Für die vier von ihm aufgestellten Geschlechter der Steinpflanzen (Tubipora, Madrepora, Miliepora, Cellepora) adoptierte Linné¹⁾ die Erklärung Peyssonels. So tat auch sein Verehrer und Kommentator Esper²⁾, dessen Werk, ein stattlicher, mit schönen Abbildungen gezielter Quartband, sich im übrigen ausschließlich mit der deskriptiv-systematischen Seite des Korallenproblems befaßt. Eigentümlich mutet uns an, daß Pallas, ganz wie der vorsichtige Esper, von den Korallen ausdrücklich die Zoophyten als Organismen abtrennen möchte, die vielleicht doch eher als Pflanzen, denn als Tiere aufzufassen seien.³⁾ Die ersteren dagegen seien jedem Zweifel entrückt:⁴⁾ die „flores Marsigliani“ müsse man als echte Tiere „ex urticarum genere“ anerkennen. Zwar sei Réaumur (s. o.) anfänglich dieser Auffassung entgegengetreten, allein nachdem Trembley⁵⁾ durch seine Vivisektionsversuche an Süßwasserpolyphen ein ganz neues Ferment in diesen Anschauungskreis hineingetragen, habe

1) K. v. Linné, *Systema Naturae*, Kopenhagen 1746, S. 1270.

2) E. J. C. Esper, *Die Pflanzentiere in Abbildungen nach der Natur mit Farben erleuchtet nebst Beschreibungen*, 1. Teil, Nürnberg 1791, S. 10 ff. „Lithophyta animalcula materiam corallinam deponere et pro cellulis uti; et Madreporum animalcula stellis incumbentia sibi continuo substernendo materiam lapideam elevare et habitaculum suum augere, recte statuit Peyssonellus.“

3) P. S. Pallas, *Elenchus Zoophytorum sistens adumbrationes generaliores et specierum cognitarum succinctas descriptiones cum selectis autorum synonymis*, Haag 1766, S. XIV.

4) A. a. O., S. 17 ff.

5) Trembley, *Mémoires pour servir à l'histoire d'un genre de polypes d'eau douce à bras en forme de cornes*, Leiden 1744. Ins Deutsche übertrug diese Monographie der als Mikroskopiker bekannte Pfarrer Göze (Quedlinburg 1775), und neuerdings hat Dannemann (*Grundriß einer Geschichte der Naturwissenschaften; zugleich eine Einführung in das Studium der naturwissenschaftlichen Literatur*, 1. Band, Leipzig 1896, S. 122 ff.) die besonders charakteristischen Stellen bequem zugänglich gemacht.

er die zuerst verachteten Aufstellungen Peyssonels wieder herangezogen. Linné (s. o.), Loeffling, Trembley (s. o.), Jussieu, Guettard und Donati seien auf die gleiche Seite getreten. Und dann rektifiziert Pallas auch seine früher zurückhaltende Definition der Zoophyten, mit welchem Namen übrigens das Zeitalter noch nicht den weitgreifenden Sinn verband, den später Cuvier dem Worte beilegte. Im Anschluß an die überzeugenden Darlegungen von Ellis¹⁾ bezieht er jetzt²⁾ alle diese marinen Gebilde in die Tierwelt ein.

Für die Biologie der Korallen leistete im XVIII. Jahrhundert besonders Anerkennenswertes der geniale Geo- und Zoologe Spallanzani, der sich auch des seitdem herrschend gewordenen Ausdruckes Korallenpolypen bedient. Er ist sich klar³⁾ über die Ernährung dieser Tiere und führt aus,

¹⁾ Dieselben waren ihrer Zeit sehr angesehen und verbreitet; das Hauptwerk ward in zwei andere Sprachen übertragen (J. Ellis, *An Essay towards a Natural History of the Corals and other marine Productions*, London 1755; *Essai sur l'histoire naturelle des Corallines*, Haag 1756; *Versuch einer Naturgeschichte der Korallarten*, deutsch von Krünitz, Nürnberg 1767). Neuerdings scheint das Verdienst dieses gewissenhaften Naturhistorikers etwas in Vergessenheit geraten zu sein, weshalb wir besonders darauf aufmerksam machen möchten. Vgl. auch: Ellis, *An Account of a Red Coral from the East-India, of a very singular Kind*, *Philosophical Transactions*, 50. Band, S. 189 ff. Unter Hinweis auf (s. o.) Rumphius' „*Herbarium Amboinense*“ (6. Band, S. 21 ff.), wo noch an der Pflanzennatur festgehalten werde, tritt der Autor zielbewußt dafür ein, daß der ganze Korallenstock von den Kalk ausscheidenden Polypen aufgebaut werde. Die nämliche Zeitschrift (50. Band, S. 258 ff.) bringt gleichzeitig einen bisher noch nicht beachteten Artikel von D. Baster (*Phil. Trans.*, 50. Band, S. 258 ff.), worin die merkwürdige Meinung vertreten wird, die „Insekten“ seien nicht an Ort und Stelle gewachsen, sondern in die schon vorhandenen, aber leeren Zellen der Kalkbauten nachträglich erst „hineingekrochen“.

²⁾ Die „*sententia nuperior*“ lautet: „*Zoophyta esse animalia vere vegetantia, in plantae forma excrescentia; plantarumque alias quoque proprietates affectantia; esse plantas quasi animantes.*“ Also eine Art Mimikry!

³⁾ L. Spallanzani, *Reisen im beyde Sicilien und einige Gegenden der Appenninen*. Aus dem Italienischen mit Anmerkungen, 4. Teil, Leipzig 1796, S. 221.

sie verständen es, das Wasser durch ihre Tentakeln in eine strudelartige Bewegung zu versetzen, durch welche die winzigen Körperchen — jetzt nennen wir sie Plankton — dem Magen der Hohltiere zugeführt werde. Auch die das Wachstum des Korallenstockes bedingenden Vorgänge hat er sich zurechtzulegen versucht. „Die Polypen,“ sagt er, „welche ihr Leben in den alten Zellen endigen, werden von anderen wieder ersetzt, die sich in den neuen erzeugen. Wahrscheinlich, daß die neuen Zellen und die neuen Polypen irgend einem Keime der alten Polypen ihre Entwicklung verdanken.“ Eine Saftbewegung in den Körpern dieser Lebewesen sei unverkennbar¹⁾. Auch die Voraussetzungen ihrer Lebensfähigkeit hat er geprüft und gefunden, daß das Wasser, in dem sie allein existieren können, nicht zu warm und nicht zu kalt sein darf²⁾. Bei starker Erwärmung ihres Lebenselementes starben die Tiere sehr rasch ab.

Daß sich die gerade um die Wende des neuen Jahrhunderts mächtig aufstrebende Zoologie immer intensiver auch den Korallentieren zuwandte, braucht kaum eigens betont zu werden. Gegen die französischen Systematiker, wie Cuvier und Blainville, nahm teilweise Stellung der ebenfalls in lebensvoller Anschauung zum Korallenforscher herangebildete Ehrenberg³⁾, mit dessen Auftreten eine wichtige neue Etappe in der Gesamtforschung erreicht war. In allen nicht speziell zur Geomorphologie in Beziehung stehenden Punkten bezeichnet er die Höhenentwicklung der Periode vor Darwin⁴⁾. Am Strande der Sinai-Halbinsel hatte er, zusammen

1) Ebenda, S. 242 ff.

2) A. a. O., S. 250.

3) Vortrefflich skizziert auch die hierhergehörigen Momente eine Schrift von Laue (Christian Gottfried Ehrenberg, ein Vertreter deutscher Naturforschung im XIX. Jahrhundert, 1795–1876; nach seinen Reiseberichten, seinem Briefwechsel mit A. v. Humboldt, v. Chamisso, Darwin, v. Martius u. a., Familienaufzeichnungen, sowie anderem handschriftlichen Materiale, Berlin 1895).

4) Wir stützen uns hier größtenteils auf eine früher erschienene Abhandlung (Günther, Ch. G. Ehrenberg und die wissenschaftliche Erdkunde, Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik, 17. Jahr-

mit seinem Reisegenossen Hemprich, die Verhältnisse kennen gelernt, die ihm zu seiner fundamentalen Abhandlung¹⁾ den Stoff lieferten. Von ihm rührt auch für die echten Polypen der bezeichnende Name Anthozoen her, den er, der genaueste Kenner der Verschiedenheit von Tier und Pflanze²⁾, mit gutem Vorbedachte gewählt hatte. Auf die einschlägigen rein zoologischen Fragen kann an dieser Stelle um so weniger eingegangen werden, als das einen vorläufigen Abschluß in deren Diskussion herbeiführende Werk von Milne-Edwards³⁾ bereits jenseits der dieser Arbeit gezogenen Zeitgrenze liegt. Ehrenberg hat selbst mit historischer Treue den Leistungen aller seiner Vorgänger gerecht zu werden getrachtet⁴⁾. Hier sollen nur

gang, S. 532 ff.), die insonderheit auch die Sedimentbildung aus organischen Resten und das Leuchten des Meeres behandelt.

1) Ehrenberg, Beiträge zur physiologischen Kenntnis der Korallentiere im allgemeinen und besonders des Roten Meeres nebst einem Versuche zur physiologischen Systematik derselben, Abhandl. d. Berl. Akad. d. Wissensch., 1. Teil, 1832, S. 225 ff.

2) Hierüber spricht sich Ehrenberg bei anderer Gelegenheit einläßlich aus (Das unsichtbar wirkende organische Leben, Leipzig 1842, S. 32 ff.). „Bei den größten Bauen der kleinen Korallentiere, deren einige als einzelne Korallenstämme 1½ bis 3 Klafter hoch werden, erkennt man leicht in jedem der zahllosen, oft nur wenige Linien großen Tiersternchen und deren Knospen eine Mundöffnung, Fangfäden und, bei genauer, mühsamer Untersuchung immer mehr, zuweilen die gesamten organischen Systeme des Tierkörpers.“

3) Milne-Edwards-Haime, Histoire naturelle des Coralliaires, Paris 1857—1860.

4) Außer den uns bereits bekannten zitiert er noch Carolini, Savigny, Lamouroux, Schweigger, Lesueur, Lassen, Rapp, Grant und Quoy-Gaimard. Für uns kommen an diesem Orte nur die beiden letzteren ernstlicher in Betracht, weil, wie sich zeigen wird, ihre Originaluntersuchungen ebenso sehr die geologischen, wie die zoologischen Umstände betreffen. Was die letzteren anlangt, so ist freilich die sonst wesentlich deskriptiv gehaltene Schrift von J. F. V. Lamouroux (Histoire des polypes coralligènes flexibles, vulgairement nommés zoophytes, Caen 1816) hauptsächlich wegen ihrer trefflichen literarhistorischen Einleitung (S. XIII ff.) noch der Erwähnung sehr würdig. Sehr exakt und zuverlässig, scheint sie nur Gesner, den wir (s. o.) als einen bedingten Anhänger der tierischen Natur der Korallen kennen gelernt haben, wohl

seine Verdienste um die Schaffung der Grundlagen zur Sprache kommen, deren die physikalische Geographie bedurfte, um Darwins Auftreten von ihrer Seite aus zu ermöglichen.

Ehrenberg hat zuerst den Nachweis geführt, daß lebende Polypen sich niemals in großer Tiefe vorfinden — die unerläßlichste Vorbedingung für Darwins sogenannte Submergenztheorie, welche die drei Grundformen koralliner Bautätigkeit — Saum- oder Strandriffe, Wallriffe, Atolle — in innerliche Verbindung miteinander bringt. Er hat die Art der Ernährung der Zoelenteraten, worauf erwähnenswerth ja schon die Beobachtungen Spallanzanis einiges Licht hatten fallen lassen, näher bestimmt und die Kalkausscheidung der lebenden Polypen als den Faktor ermittelt, von welchem die Vergrößerung der einzelnen Stöcke und damit das Wachstum der Riffe und Inseln selber abhängt. Nicht völlig klar war ihm die hohe Bedeutung der Wassertemperatur geworden, so daß er nach der Rückkehr aus Arabia Petraea auch an hiezu ganz ungeeigneten Orten, wie an der Küste Norwegens, nach lebenden Korallen suchte¹⁾, aber diese fehlgeschlagenen Versuche hatten doch auch wieder vorteilhafte Folgen für die Wissenschaft. Denn statt tätiger Polypen fand er fossile Bildungen und wurde so recht eigentlich der Schöpfer und Begründer der Korallen-Paläontologie. Sein großer Nachfolger Darwin durfte sich auf eine gewisse Summe von Tatsachen stützen, die Ehrenberg als feststehend nachgewiesen hatte. Es sind wesentlich diese:

Korallentiere können nur in wenig tiefem, reinem und stets in leichter Bewegung erhaltenem Salzwasser

nicht ganz gerecht zu werden. Hier allein wird auch des Dänen C. Müller, eines der Begründer der modernen Schleppnetzforschung, in diesem Zusammenhang anerkennend gedacht; auch Lamarcks Leistungen, die sonst neben seinen Reformideen zurückzutreten pflegen, kommen zur Geltung. Wesentlich zwei Abhandlungen von ihm sind zu nennen: *Mémoire sur les polypiens empatés*, Paris 1813; *Mémoire sur les polypes coralligènes*, Paris 1815.

¹⁾ Laue, a. a. O., S. 174.

ihr Gedeihen finden. Berührung mit der Luft¹⁾ oder mit süßem Wasser führt ihren raschen Tod herbei. Durch Knospung sich fortpflanzend, bewirken sie eine stetige Ausdehnung der einmal vorhandenen Kolonien durch kalkige Absonderung, während gleichzeitig ein anderer Teil des Stockes in eine amorphe Kalkmasse übergeht.

Die morphologischen Fragen treten bei Ehrenberg mehr zurück. Daß die Korallen ganz neue, vorher nicht vorhanden gewesene Inseln erzeugen könnten, erschien ihm kaum glaublich; wohl aber erkannte er ihre Fähigkeit an, Landfragmente zu erhalten und zu vergrößern. Auch deutete er die Möglichkeit an, es könne das Wachstum sich um so energischer gestalten, je mehr der die Basis bildende Meeresgrund sich abwärts bewege. Gerade nach dieser Seite hin, die er mehr nur streifte, war indessen seit einigen Jahrzehnten ebenfalls rührig gearbeitet worden; was sich dabei ergab, soll nunmehr im Zusammenhange dargestellt werden.

III. Studien über die Gesetzmässigkeit der korallinen Landbildung.

Wieweit im Verlaufe des XVII. Jahrhunderts das geographische Wissen von den Korallengebilden fortgeschritten war, ist uns aus Abschnitt I bekannt. Man wußte, daß sie in den Westindischen Gewässern, sowie im Indischen Meere, das Wort im weitesten Sinne genommen, keine seltene Erscheinung bildeten; der Pazifische Ozean dagegen war noch eine wesentlich unerforschte Erdgegend. Wir wollen jetzt zunächst zusehen, wie sich die topische Kenntnis, diese unentbehrliche Grundlage jeder Kausalbetrachtung, im XVIII. und im beginnenden XIX. Jahrhundert allmählich erweiterte.

¹⁾ Dieser Satz hat sich neuerdings, vorab in Folge der Studien Krämers (Über den Bau der Korallenriffe und die Planktonverteilung an der samoanischen Küste, Kiel 1897) und Ortmanns (Die Korallenriffe von Dar-es-Salaam, Zoolog. Jahrbuch, 6. Band, S. 631 ff.), einige Einschränkungen gefallen lassen müssen.

Über die bereits von den holländischen Seefahrern wahrgenommenen — und jedenfalls auch nautisch aufgenommenen — Bänke an der ceylonesischen Küste (s.o.) publizierte Strachan einen Aufsatz¹⁾, der jedoch wenig positiv Neues brachte. Einige Notizen über die Riffe der Andamanen, der Nias-Inseln u. s. w. begegnen verstreut in den Reisewerken von Dalrymple²⁾. Vor allem aber hat die zweite Weltreise J. Cooks, welche zwei gut geschulte deutsche Gelehrte mitmachen durften, sowohl in der Bereicherung unserer Einsicht in die geographische Verteilung der Koralleninseln, wie auch hinsichtlich der sachlichen Erkundung ihrer Besonderheiten die Erdkunde beträchtlich gefördert. Die betreffenden Partien des von Forster Vater und Sohn erstatteten Berichtes³⁾ haben manche bleibende Wirkung gehabt; so ist ihre Gegenüberstellung von

1) Strachan, *Some Observations on Coral, Large Oysters . . . of the Ceilonese*, Phil. Trans, 22. Band, S. 1247 ff. Zur Sache wäre höchstens zu bemerken, daß hier die Korallenfelsen nicht als etwas ursprünglich Gegebenes, sondern als etwas Organisches, als „petrifizierte Substanz“, angesprochen werden.

2) A. Dalrymple, *Historical Collection of South Sea Voyages*, London 1770—1771; *Historical Relation of several Expeditions from Fort Marlborough to the Islands of the West Coast of Sumatra*, London 1775. Auch auf den kühnen Seemann J. Byron, der die Südsee nach allen Richtungen durchkreuzte, ist noch zu verweisen. Er beschreibt die von ihm aufgefundenen „Disappointed Islands“ (Byron, *Premier et second voyage à la Mer du Sud*, Paris, An VII, französisch von Cartwel, S. 268 ff.) als typische Atolle. Die umschließende Mauer fällt steil geböscht nach außen ab, und nur durch eine einzige Lücke darin könne man in die innere Lagune, mit Korallengrund, eindringen. Leider weiß man nicht sicher, welche Gruppe gemeint ist, denn jener Name kommt nach C. Meinicke (*Die Inseln des Stillen Ozeans, eine geographische Monographie*, 2. Band, Leipzig 1876, S. 61, S. 203, S. 351, S. 416) nicht weniger denn viermal im weiten Bereiche des Pazifik vor.

3) J. R. Forster-G. Forster, *Reise um die Welt während den Jahren 1772—1775*, 2. Band, Berlin 1780, S. 34 ff. Die für die Geophysik neuen Mitteilungen, welche das umfangreiche Werk enthält, hat übersichtlich zusammengestellt Rittau (*J. R. Forsters Bemerkungen auf seiner Reise um die Welt gesammelt*, Hanau 1881). Gerade die Koralleninseln spielen da eine Hauptrolle; Forsters Versuch, die Atollform zu erklären, wird hervorgehoben (S. 4).

hohen und niederen Inseln (Hochseeinseln vulkanischen oder korallinen Ursprunges) Gemeingut der Wissenschaft geworden. Sie haben auch festgestellt, daß diese Eilande weit- aus am häufigsten „zwischen den Wendezirkeln“ vorkommen, daß sie also an die tropischen Meere gebunden sind, über deren Grenzen sie ja auch in der Tat nur in einzelnen Fällen hinausgehen. Läßt J. R. Forsters zoologische Kenntnis und Erkenntnis auch insofern noch zu wünschen übrig, als er in den kleinen Baumeistern der Ozeane Würmer erblicken zu sollen glaubt, so hat er andererseits in geographischer und morphologischer Beziehung sehr reelle Fortschritte auf diesem Gebiete angebahnt¹⁾. Die Tatsache, daß das ganze Riff ausschließlich Erzeugnis tierischer Arbeit ist, wurde vor ihm niemals mit gleicher Bestimmtheit ausgesprochen. Auch weiß er sehr wohl, daß bei aller grundsätzlichen Übereinstimmung doch ganz namhafte äußerliche Verschiedenheiten in der Struktur der Riffe und Atolle vorkommen können, wie er denn die Freundschafts-Inseln als eine eigenartige Bildung herausheben will²⁾.

¹⁾ J. R. Forster-G. Forster, a. a. O., S. 33 ff. „Die Entstehungsart dieser Corallen-Felsen gibt uns ein nicht minder bewundernswürdiges Beyer- spiel von der Allmacht des Schöpfers . . . Die Coralle ist bekannter- maßen das Gebäude eines kleinen Wurms, der sein Haus, in eben dem fortschreitenden Maße als er selbst wächst, vergrößert. Kaum bemerkt man an diesem kleinen Thierchen Empfindung genug, um es in dieser Absicht von den Pflanzen unterscheiden zu können: Gleichwohl baut es, aus der unergründlichsten Tiefe der See, ein Felsenwerk, bis an die Ober- fläche des Meeres, in die Höhe, um unzähligen Menschen einen großen Boden zum Wohnsitz zu verschaffen. — Die Zahl der auf solche Art ent- standenen flachen Inseln ist sehr beträchtlich, und wir kennen sie gleich- wohl bei weitem noch nicht alle. In der Südsee sind ihrer zwischen den Wendezirkeln am meisten, vorzüglich trifft man sie ostwärts von den Sozietäts-Inseln, in einer Strecke von 10 bis 15 Graden, an. Quiros, Schouten, Roggevein“ -- so irrthümlich statt Roggeveen — „Byron, Wallis, Carteret, Bougainville haben insgesamt, ein jeder ver- schiedene neue Eylande von der Art entdeckt . . . Zwar gibt es weiter nach Westen hin, noch einen anderen Archipelagus von Corallen-Riefen, nämlich die sogenannten freundschaftlichen Inseln: diese sind aber von jener Art in mehreren Stücken sehr unterschieden.“

²⁾ A. a. O., S. 34. „So viel ich bemerkt habe, sind diese Corall-Riefen,

Auch hat er ein asymmetrisches Verhalten der See- und Luvseite der Laguneninseln bemerkt, was in der Tat mit der Meeresbrandung und ihrer Einwirkung auf das Inselgerüste in Verbindung steht. Kurz, wir können nicht zugeben, daß die absprechende Kritik berechtigt sei, welche einer von Forsters Nachfolgern, wie sich nachher zeigen wird, gegen seinen Vorgänger richtet. Daß jeder spätere mehr sieht, als ein älterer Beobachter, ist nicht verwunderlich, und es wäre schlimm, wenn es sich anders verhielte.

Die nächste tiefer eindringende Nachricht über unseren Gegenstand erhielt man durch den Kapitän Flinders, der als einer der ersten die Ostküste Neuhollands, d. h. des soeben durch Forster kreierte fünften Kontinentes Australiens, näher untersucht hat¹⁾. Das „Wrack-Riff“, worin wir einen nördlichen Ausläufer des nur zu bekannten australischen Wallriffes²⁾ zu erkennen haben, wird von unserem Gewährsmann so beschrieben, daß man darin nicht notwendig, wenn es nicht anderweitig bekannt wäre, einen wahren Korallenbau wahrzunehmen hätte: es ist indessen Flinders selbst von der tatsächlichen Beschaffenheit der Küste, die ihm einige Zeit als aufgezwungener Wohnort dienen mußte, vollständig überzeugt, und er hatte ja auch in der von Klippen starrenden Torres-Straße mit der korallinen Individualität gründlich Bekanntschaft gemacht³⁾. Was aber vom geographischen Standpunkte

mehrentsils an der Seite, auf welche der Wind nicht gewöhnlich hin bläset, am höchsten und am fruchtbarsten . . .“

1) M. Flinders, *A Voyage to Terra Australis, undertaken to complete the Discovery of that vast Country, and prosecuted in the Years 1801—1803*, London 1814. Hier wurde benützt die folgende Ausgabe: *Flinders' Reise nach dem Australlande, in der Absicht die Entdeckung desselben zu vollenden unternommen in den Jahren 1801, 1802 und 1803*, Weimar 1816. (Deutsch von F. Götze, F. J. Bertuchs Neue Bibliothek der wichtigsten Reisebeschreibungen, I. Centurie, 2. Hälfte, 6. Band.)

2) A. a. O., S. 489 ff. Die „Porpoise“, Flinders' Expeditionsschiff, scheiterte auf dem berichtigten Riffe, und so hatte man nur allzu gute Gelegenheit zu Beobachtungen.

3) A. a. O., S. 513 ff. Es verdient angemerkt zu werden, daß das Wallriff auch nach neueren Erkundungen nicht sofort jenen Eindruck

aus sein Eingreifen besonders auszeichnet, das ist sein Streben, die räumliche Verteilung der Korallengebilde zu umgrenzen. „Man könnte“, so meint er¹⁾, „folgende Meeresfläche das Korallen-Meer nennen. Sie wird gegen Norden von Louisiade und Neu-Guinea, gegen Ost von Neu-Caledonien, gegen West von Neu-Süd-Wallis und gegen Süd von einer Linie, die vom Sand-Cap bis zur Fichten-Insel geht, begränzt“. Es ist nicht ganz durchsichtig, welchen Zweck Flinders mit der Schaffung eines neuen Begriffes erreichen wollte, denn er äußert ja selbst²⁾, die Anzahl der Atolle im Großen Ozean sei unzählbar, und die sehr zahlreichen mikronesischen Bildungen liegen ja auch außerhalb jenes Viereckes. Wahrscheinlich wollte er nur andeuten, daß der fragliche Meeresteil ausschließlich Riffe im engeren Sinne und keine Laguneninseln enthalte. Jedenfalls hat die Wissenschaft seinem Vorschlage stattgegeben, und auf allen Karten erscheint die Korallen-See als jene pazifische Randpartie, welche, von Bänken wechselnder Ausdehnung durchschwärmt, dem australischen Wallriffe nächst anliegt.

Zehn Jahre nach der Heimkehr jener englischen Expedition, mit welcher wir uns soeben zu beschäftigen hatten, erschien in den nämlichen Gewässern eine russische, um gleichfalls hydrographische Untersuchungen großen Stiles vorzunehmen. O. v. Kotzebue leitete dieselbe während der drei Jahre 1815 bis 1818; speziell für naturwissenschaftliche Studien waren ihr beigegeben der Zoologe Eschscholz und der Dichter A. v. Chamisso, der sich auch durch botanische Arbeiten bereits einigen Ruf erworben hatte und durch seine Berichterstattung über die Kotzebuesche Weltreise seinen

bewirkt, der bei den Hochseeinseln sich ganz von selbst einzustellen scheint. A. Penck betont dies (Das große australische Wallriff, Vorträge d. Ver. z. Verbreit. naturwissensch. Kenntnisse, 36. Jahrgang, 13. Heft, Wien 1896, S. 13), indem er auf eine britische Monographie (Savile-Kent, The Great Barrier Reef of Australia; its Products and Potentialities, London 1893) als Hauptquelle bezug nimmt.

1) Flinders-Götze, a. a. O., S. 510 ff.

2) Flinders, Originalwerk, S. 314.

Befähigungsnachweis für solche Dinge, wie sie einem reisenden Naturforscher sich als Hauptaufgabe ergeben, ausgiebig erbrachte. Über Koralleninseln hat er wiederholt sich ausgesprochen¹⁾. Er stellt mit Forster (s. o.), den er hier voll anerkennt, die „hohen“ und „niedrigen“ Inseln einander gegenüber, und diese letzteren kennzeichnet er als „eine ganz eigentümliche Bildung“. Man habe es mit „Tafelbergen“ zu tun, welche steil aus tiefen Abgründen aufstiegen, so daß in ihrer Nähe das Senkblei keinen Grund finde²⁾; die Lagune faßt er als einen abgeschnürten Teil des freien Meeres auf, dessen „Umkreis“, d. h. die Korallenmauer des Atolls, ein wenig über die Wasserfläche emporrage. Auf dieser korallinen Basis sammle sich der Sand, den Wind und Wellen herbeiführen. Laufe der erwähnte submarine „Tafelberg“ in eine recht schmale Kuppe aus, so könne es sich wohl ereignen, daß der kleine Binnensee ganz ausgefüllt und an Stelle einer Inselgruppe eine einzige größere Insel gebildet wird. Soweit der Beobachter die Umrandung der Lagune zu prüfen in der Lage war, fand er sie

¹⁾ A. v. Chamisso, Bemerkungen und Ansichten auf einer Entdeckungsreise unternommen in den Jahren 1815 -1818 . . ., Weimar 1821, S. 187 ff.; A. v. Chamissos Werke. 2. Band, 2. Teil, Leipzig 1836, S. 40 ff. Man begegnet da (S. 45 ff.) der oben angeführten Stelle, welche nicht mit Recht besagt: „Forster ist über diesen Gegenstand flüchtig, und was er davon sagt, ist der Beachtung nicht wert.“ Auch an einer dritten Stelle begegnet man noch diesem Autornamen in der Fachliteratur; Poggendorff gibt (a. a. O., 1. Band, Sp. 418) an, in L. Choris' „Voyage pittoresque autour du Monde“ seien aus v. Chamissos Feder „Notices sur les îles de Corail“ enthalten. Es scheint sich jedoch da bloß um kurze Erläuterungen landschaftlicher Ansichten zu handeln. Wenigstens deutet dies der Autor selbst (Bemerkungen u. s. w., S. 240) an, indem er auf diese „schöne und getreue Bildergalerie“ verweist, welche einläßliche Beschreibungen häufig überflüssig mache.

²⁾ Diese Wahrnehmung hat die Folgezeit vollauf bekräftigt (Buchanan, On Oceanic Shoals discovered of the S. S. Dacia in October 1883, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 13. Band, S. 42³; Dietrich, Untersuchungen über die Böschungsverhältnisse der Sockel ozeanischer Inseln, Greifswald 1892). Man findet in Korallenmeeren Abfälle von einer den Hochgebirgsverhältnissen entsprechenden Steilheit (Penck, Morph. d. Erdoberfl., 2. Band, S. 612).

aus horizontal geschichteten Lagen „von Korallensand und Madreporentrümmern“ zusammengesetzt. Größere, auf den „Damm“ hinaufgeschleuderte Felstrümmer erwiesen sich als aus dem gleichen Stoffe bestehend, indem nur der koralline Ursprung bei ihnen oft noch deutlicher zutage tritt; „und wir halten dafür, daß der ganze Bau, der Tafelberg, der die Grundfeste der Inselgruppe bildet, aus dieser selben Gebirgsart besteht“. In diesem Gestein habe man sogar auf Guadeloupe menschliche Skelette eingeschlossen gefunden¹⁾. Ähnliche Riffzusammensetzung stellte sich den Expeditionsmitgliedern auch auf Guam („Guajan“) und an der Küste von Manila dar. Es ist die Überzeugung v. Chamisso's, daß der Stein von den an Ort und Stelle lebenden Tieren selber herrührt. Mit der geographischen Verbreitung solcher Koralleninseln, die auch er an die tropische Zone gebunden glaubt, zeigt er sich gut vertraut²⁾.

Bezüglich der Art und Weise des Wachstums kann dagegen v. Chamisso mit anderen Schriftstellern, vorab mit Flinders, nicht übereinstimmen. Diese nehmen nämlich — und diese ihre Auffassung hat die Folgezeit gerechtfertigt — an, die einzelnen Polypenindividuen verwandelten sich bei ihrem Absterben selber in eine Kalkmasse, während gleichzeitig und nachher in den oberen Teilen des so versteineten Stockes die Zellenbildung fortdaure und neues Leben sich entwickle. Er seinerseits könne nicht glauben, daß „die Kalk erzeugenden Polypen“ lediglich an den Wänden der bestehenden Riffe leben sollten, deren manche eine gewaltige senkrechte Höhe erreichten³⁾.

1) Dieses merkwürdige Objekt will v. Chamisso selbst im Britischen Museum gesehen haben, und die Vergleichung der Gesteinsart mit Proben der Berliner Mineraliensammlung habe die Identität beider ergeben.

2) Außer im Stillen Ozean, wo ihre wahre Heimat ist, weist er auch im Indischen das Vorkommen einer Reihe echter Atolle nach: die Kokos-Inseln (Schauplatz der Geburt der Darwinschen Hypothese), Juan de Nova (Straße von Moçambique), Admiranten, Assumption-Cosmoledo (Aldabra-Gruppe nordöstlich von den Comoren), Chagos-Inseln. Nicht sicher dünkt ihm die Zuordnung der Lakkediven und Malediven (s. o.).

3) Es scheint da an „gehobenen“ Korallenkalk gedacht worden zu

Für ihn ist der Ozean zwischen den Wendekreisen „eine große chemische Werkstatt der Natur“. Die Reihenanzordnung der pazifischen Atolle scheint darauf hinzuweisen, „daß die Korallen ihr Gebäude auf Meeresuntiefen, oder besser zu sprechen auf die Gipfel von unter Wasser befindlichen Gebirgen gegründet haben“. Ihr Fortwachsen läßt die Gebäude einerseits in die Breite sich ausdehnen, andererseits dem Meeresspiegel immer näher kommen. Zuerst geschieht dies seitens der Außenränder, auf welche auch noch andere Momente der Vergrößerung einwirken. Bei Erreichung des Niveaus hört die Bautätigkeit auf. Von Gleichheit der äußeren Form verschiedener Inseln kann keine Rede sein, da sich in jeder Umrandungslinie die Gestalt des das Eiland tragenden Berggipfels zu erkennen gibt.

Suchen wir uns das Wesen der von A. v. Chamisso mehr nur skizzierten als wirklich ausgearbeiteten Theorie klar vorzustellen, so können wir etwa zu nachstehender Charakteristik gelangen.

Die auf minder tiefen Meeresstellen von den Korallenpolypen aufgeführten Gebäude bestehen aus einer kompakten Kalkmasse, und es ist nicht zutreffend, wenn man diese architektonische Tätigkeit der Korallen bloß in eine der Oberfläche nächst anliegende Schicht verlegen will¹⁾.

sein, der allerdings in den malaio-polynesischen Archipelen nicht selten eine ganz beträchtliche Höhe erreicht.

¹⁾ A. v. Chamisso, Bemerkungen u. s. w., S. 107. „Die enormen Massen aus einem Wuchs, die man hie und da auf den Inseln oder auf den Riffen als gerollte Felsenstücke antrifft, haben sich wohl in den ruhigen Tiefen des Ozeans erzeugt. Oben unter wechselnden Einwirkungen können nur Bildungen von geringer Größe entstehen.“ Es ist offenbar, daß sich der Reisende, so sehr er auch seinen Erfahrungskreis zu erweitern trachtete, über das Verhältnis der noch lebenden zu den bereits petrifizierten Teilen eines Stockes nicht zu völliger Klarheit durchgerungen hat, obwohl er eben bei der zuletzt zitierten, die Insel Radaek angehenden Schilderung gelegentlich die das Rätsel lösende Bemerkung macht: „Man sieht an den Lithophyten oft lebendige Äste bei anderen erstorbenen bestehen.“

Man gewinnt leicht die Überzeugung, daß diese Anschauung ganz von zufällig-autoptischer Einsichtnahme bedingt ist. Hätte der mit so reicher Phantasie ausgestattete Weltreisende auch anderswo, als gerade in Mela- und Mikronesien, Erfahrungen zu sammeln Gelegenheit gehabt, so wäre eine gewisse seiner Darlegung anhaftende Einseitigkeit wohl vermieden worden. Aber in der richtigen Behauptung, die Korallenmasse habe häufig einen sehr namhaften Vertikaldurchmesser¹⁾, ging er denen, die nach ihm kamen, und also auch Darwin, führend voran.

Manche andere Bereisung der Südsee in den zwanziger Jahren des XIX. Jahrhunderts vermochte zwar in naturgeschichtlicher, nicht aber in physisch-geographischer Hinsicht über die erste Kotzebuesche Expedition hinauszugehen²⁾. Wohl aber ist dies geleistet worden durch die Erdumsegelungen der Fregatten „Le Géographe“ und „Uranie“, welche Kapitän Freycinet ausführte und teilweise in Gemeinschaft mit dem Schiffsarzte

¹⁾ Die berühmten ozeanischen Bohrungsversuche (Die Arbeiten der Korallenexpedition auf Funafuti, Geograph. Zeitschr., 3. Band, S. 643) haben dargetan, daß die Mächtigkeit der Korallenfelsen dort zum mindesten 200 m beträgt.

²⁾ Wenn A. v. Humboldt (a. a. O., S. 259) auch F. B. v. Lütke unter denjenigen aufzählt, welche fördernd in unsere Theorie eingegriffen haben, so scheint uns das zu viel gesagt zu sein. Gewiß, der spätere Admiral und sein Begleiter haben Korallen gesehen und besprochen (v. Lütke-Postels, Voyage autour du Monde, 2. Band, Paris 1835, S. 23 ff.; 3. Band, Paris 1836, S. 104 ff.), aber neue Gesichtspunkte haben wir in ihrer Schilderung der Karolinen nicht bemerken können. Biologisch wertvoll sind die Erörterungen, welche Eschscholz, der (s. o.) schon die erste Reise v. Kotzebues mitgemacht hatte, an seine Wahrnehmungen auf der zweiten Reise anknüpfte (Neue Reise um die Welt in den Jahren 1823—1826, Weimar 1830): von ersterem stammt ein älterer, allerdings fast ganz unzugänglicher Aufsatz (Über die Koralleninseln, Neue inländische Blätter, 1818) und eine Reihe von späteren Referaten in Férussacs Zeitschrift (Jahrgang 1826 des „Bulletin des sciences et de l'industrie“), worin hauptsächlich der Löcherkoralle (Porites) ihre Stellung im Systeme angewiesen wird. Bis zu einem gewissen Grade kann Eschscholz auch mit Quoy und Gaimard auf gleiche Linie gestellt werden; seine morphologischen Ansichten ähneln den ihrigen sehr.

Péron beschrieb¹⁾. Denn auch die beiden Naturforscher Quoy und Gaimard, welche an der zweiten Fahrt teilgenommen hatten, lieferten einen Beitrag zur Theorie der korallinen Architektur²⁾ und stellten der Theorie v. Chamisso eine andere gegenüber, welche diese zweifelsohne in einem wichtigen Punkte berichtigte, immerhin jedoch in eine andere Einseitigkeit verfiel³⁾. Auch die Meerestiefe, bis in welche hinab die Polypen noch ihre Existenz fristen können, haben beide zu niedrig geschätzt, insofern sie 10 m als Maximaltiefe festsetzten⁴⁾. Ganz gewiß gibt es genug solche Riffe, wie sie Quoy und Gaimard als Norm betrachten; man hat sie zutreffend Krustenriffe genannt⁵⁾. Auch die Vermutung, zumeist krönten Korallenbauten die Krateröffnungen unterseeischer Vulkane, geht in dieser Form

¹⁾ C. L. Desaulses de Freycinet-F. Péron, Voyage de découverte aux Terres Australes pendant les années 1800—1804, Paris 1807—1810; Freycinet, Voyage autour du Monde, entrepris par l'ordre du Roi, exécuté sur les corvettes de S. M. L'Uranie et Physicienne pendant les années 1818—1820, Paris 1824—1844.

²⁾ Quoy-Gaimard, Mémoire sur l'accroissement des polypes lithophytes considérés géologiquement, Annales des Sciences Naturelles, 6. Band, S. 273 ff.

³⁾ Nachstehend die Hauptthesen: „En appelant l'attention des naturalistes sur les animalcules des coraux, nous espérons démontrer que tout ce qu'on a dit ou cru observer jusqu'à ce jour relativement aux immenses travaux qu'ils sont susceptibles d'exécuter, est le plus souvent inexact et toujours excessivement exagéré. Nous pensons que les coraux, loin d'élever des profondeurs de l'Océan, des murs perpendiculaires, ne forment que des couches ou des encroûtements de quelques toises d'épaisseur.“

⁴⁾ Ebenda, S. 289 ff.

⁵⁾ Von Penck (Das große australische Wallriff, S. 7) wird vorgeschlagen, der üblichen Einteilung der Korallengebäude (Saumriffe, Wallriffe, Atolle) als selbständig auftretende Form die Krustenriffe hinzuzufügen, wie sie z. B. in den beiden Arabien einschließenden Golfen, aber auch in der Sunda-See den Ton angeben. Sie hatten bei Forster und v. Chamisso gar keine Beachtung gefunden, und ihnen solche zu erringen waren mithin Quoy und Gaimard wohl berechtigt, aber nun schossen sie wieder mit ihrer Negation anderer Möglichkeiten über das Ziel hinaus.

natürlich zu weit¹⁾. Allein den Erfolg hatte die Kritik der französischen Naturforscher in jedem Falle, daß sie die Vielgestaltigkeit des Korallenproblem es ins richtige Licht setzte und zeigte, wie wenig hier mit schematisierenden Verallgemeinerungen ausgerichtet sei. Mithin können Quoy und Gaimard mit Fug als unentbehrliches Entwicklungsglied in der zu Darwin führenden Entwicklungsreihe aufgefaßt werden.

Indem wir so dem Jahre 1830 nahe gekommen sind, haben wir auch das Ziel erreicht, welches dieser Untersuchung eingangs gesetzt worden war. Denn 1831 schiffte sich der junge Darwin auf Kapitän Fitzroys „Beagle“ ein, und von dieser lange währenden Seefahrt ist er mit dem sozusagen potentiellen Besitze zurückgekehrt, dessen Ausgestaltung die folgenden Jahre gewidmet waren. Zu dem stattlichen literarischen Materiale, welches ihm, abgesehen von dem reichen Schatze des Selbstgesehenen, zu Gebote stand, war inzwischen noch Nelsons Monographie der Bermudas²⁾ hinzugetreten, welche wiederum mit einer neuen Ausprägung des in der Korallenwelt herrschenden Prinzipes näher bekannt machte³⁾ und so die Not-

1) Noch vor der Veröffentlichung, mit welcher wir es jetzt zu tun haben, und unabhängig von ihr hatte der phantastischen Vorstellungen als überzeugter Naturphilosoph sehr zugängliche dänisch-deutsche Naturforscher H. Steffens (Anthropologie, 1. Band, Breslau 1822, S. 322 ff.) ähnliche Ideen verlautbart. Wie v. Zittel (a. a. O., S. 370) berichtet, hatten Quoy-Gaimards Ansichten auch bei den Weltumseglern Lesson, Garnot und Beechey, sowie bei den Geologen Poulett Scrope und Lyell Anklang gefunden, während Ainsworth sich ablehnend verhielt und auch die Dicke vieler Riffe richtig betonte. Es reicht indessen dieser ganze Zyklus von Arbeiten schon mehr oder weniger in die Darwinsche Epoche hinein.

2) R. J. Nelson, On the Geology of the Bermudas, Proceedings of the Geological Society, 1838, S. 81 ff. Nachmals hat derselbe Geologe auch die südwestlich gelegenen Riffbildungen analoger Betrachtung unterzogen (On the Geology of the Bahamas and on Corall Formations generally, Journal of the Geological Society, 1853, S. 200 ff.

3) Daß die Bermudas von den anderen Korallengruppen in der äußerlichen Perspektive namhaft abweichen, steht fest (J. Rein, Die Bermudas-Inseln und ihre Korallenriffe, nebst einem Nachtrage gegen die Darwinsche Senkungstheorie, Verhandl. d. I. Deutschen Geographentages,

wendigkeit aufzeigte, die Aufstellung einer Schablone zu vermeiden. Ganz ist ja auch Darwin dieser Gefahr nicht entgangen, was eben damit zusammenhing, daß ihm Einsichtnahme der nord- und mittelamerikanischen Örtlichkeiten versagt geblieben war. Sein Verdienst wird nicht geschmälert, wenn man diese Tatsache unumwunden einräumt, da doch zweifellos alle indopazifischen Vorkommnisse seiner Analyse der Bildungsvorgänge fast vollständig entsprechen¹⁾. Auch darunter kann die Bedeutung dieser Leistung nicht leiden, daß damals, als Darwin auftrat, die Theorie gerade auf dem Punkte angelangt war, um eine Weiterbildung im bezeichneten Sinne als eine Notwendigkeit erscheinen zu lassen.

Denn darüber dürfen wir uns nicht täuschen: Die Pflicht, mit starken negativen Bewegungen der Niveaulinie zu rechnen, war sowohl durch paläontologische Feststellung²⁾, wie auch durch die rezenten Korallenkalk-

Berlin 1881, S. 30 ff.; Langenbeck, a. a. O., S. 116 ff.). Wer an ihrem Südrande hinfährt, bekommt, wie Verfasser nach eigener Erinnerung bezeugen kann, durchaus nicht den Eindruck einer korallinen Struktur, wie er auf Grund seiner Bücherstudien erwartet haben mochte. Verantwortlich dafür ist vorzugsweise der Umstand zu machen, daß nur die unter Niedrigwasser liegenden Kalkschichten von Korallen erzeugt sind, die bis zu 80 m aus dem Meere aufragende Steilküste hingegen ganz und gar äolischen Ursprunges ist.

1) Vgl. die zwischen Darwin und seinen Gegnern gezogenen Parallelen bei Günther (Handbuch der Geophysik, 2. Band, Stuttgart 1899, S. 647 ff.).

2) Sehr bemerkenswert erscheinen in diesem Zusammenhange Äußerungen von (s. o.) Lamouroux (Umriss eines Elementar-Lehrkursus der physischen Geographie, deutsch von Le Bret, Stuttgart-Tübingen 1823, S. 290 ff.): „Das Meer muß abgenommen haben, mehr als man gewöhnlich annimmt. Ramond fand Korallen in den Pyrenäen und sagte, er habe Neptuns Manschetten auf dem Gipfel des Mont Perdu aufgehängt gefunden.“ Und bei A. v. Humboldt lesen wir (a. a. O., S. 258): „Das ganze Jura-gebilde entsteht sogar, nach der großartigen Ansicht Leopold v. Buchs, aus großen gehobenen Korallenbänken der Vorwelt, welche in gewisser Entfernung die alten Gebirgsketten umgeben.“ Somit kann der große Paläontologe eigentlich als Vater jener lebhaften Kontroverse angesehen werden, welche sich unter Vortritt F. v. Richthofens um die orga-

lager in größerer Höhe über dem Meeresspiegel nahegelegt worden, und ebenso glaubte man Anzeichen für eine da und dort eingetretene Bewegung im umgekehrten Sinne zu besitzen¹⁾. Nahe lag somit der Gedanke, auch in die Lehre von der Entstehung der Korallenbauten dieses Element der „Senkungen“ und „Hebungen“ hineinzutragen, und Darwin bot sich dieses Erklärungsmittel von selbst dar. Unbestritten aber bleibt sein Eigentum die universelle und geistvolle Verwendung, welche durch ihn diesem methodischen Fingerzeige zuteil ward.

Seitdem ist die Inselkunde ein selbständiger Zweig der physikalischen Geographie geworden²⁾, und die Darwinsche Deutung der ursächlichen Zusammenhänge zwischen den drei besonders hervortretenden Erscheinungsformen der tierischen Kalkgebäude bildet in dieser Sonderdisziplin einen festen Punkt. Rasch hat sie sich nicht durchgesetzt³⁾, und daß ihr sachliche

nogene Herkunft der triassischen südtirolischen Dolomitberge drehte (Miß Ogilvie, *Coral in the Dolomites of South Tirol*, *Geological Magazine*, 1894, S. 1 ff., S. 48 ff.; Langenbeck, a. a. O., S. 87 ff.).

1) Charles Lyells „*Principles of Geology*“ waren (London 1830 bis 1833) bei Darwins Heimkehr hinlänglich lange schon Gemeingut der Gelehrtenwelt, um den jungen Weltreisenden mächtig anzuziehen. Man weiß, welch tiefgreifenden Einfluß der etwas ältere Geologe auf den jüngeren Freund, vornehmlich auch im Hinblick auf dessen deszendenztheoretische Gedankengänge, ausgeübt hat, und so darf wohl auch ein Gleiches angenommen werden für Lyells Versuch (a. a. O., 1. Band, a. v. St.), durch seismische Senkungen die lokalen Anomalien der Atollränder verständlich zu machen.

2) In erster Linie gebührt die Anerkennung der Initiative O. Peschels zwei Kapiteln („Über den Ursprung der Inseln“. „Die Tier- und Pflanzenwelt der Inseln“) in seiner Essaysammlung (*Neue Probleme der vergleichenden Erdkunde*, 1. Auflage, Leipzig 1870).

3) Wie lange uoch Irrtümmer sich fortpflanzen können, ersieht man recht augenfällig aus einer Beschreibung der Liukiu-Inseln aus dem Jahre 1853 (*Die Erschließung Japans; Erinnerungen des Admirals Perry von der Fahrt der amerikanischen Flotte 1853/54*, deutsch von A. Wirth und A. Dirr, Hamburg 1910, S. 73), wo es heißt: „Wir hingen einige Zeit an den Korallenbänken, entzückt von den wundervollen Farben und Formen der reichen Vegetation des Meeres.“ Dann ist noch die Rede

Gegnerschaft verschiedenster Art nicht erspart blieb, ist bereits hervorgehoben worden. Gerade ihrer zentralen Stellung wegen mochte es jedoch passend sein, den Grund, auf dem sie sich erhob, seinem geschichtlichen Werden nach zu kennzeichnen, und diese Aufgabe suchte die vorstehende Darstellung zu lösen.

davon, daß sich da „all die verschiedenen Formen des vegetabilischen Lebens“ (!) zwischen den Klippen zusammengefunden hätten.

Namen-Index.

- Ainsworth 37.
 Alberûni 6.
 Alexander der Große 4.
 Baster 23.
 Beechey 37.
 Berger 9.
 Bertuch 30.
 Bickmore 16.
 Bignon 18.
 Blainville 24.
 Boccone 14, 17.
 Bölsche 7.
 Böttger 4.
 Boncompagni (Fürst) 6.
 Bougainville 29.
 Bourne 13.
 Boyle 16.
 Branky 9.
 v. Buch 38.
 Buchanan 32.
 Byron 28, 29.
 Carolini 25.
 Carteret 29.
 Cartwel 28.
 Carvalho 8.
 Carus 3, 13, 21.
 Castro (de) 8, 9, 11.
 v. Chamisso 24, 31, 32,
 33, 34, 36.
 Choriz 32.
 v. Christ 4.
 Columbus 7.
 Comenius 14.
 Cook 28.
 Cosserat 3.
 Cuvier 23, 24.
 Dalrymple 28.
 Dannemann 22.
 Darwin 5, 13, 24, 26, 33,
 35, 37, 38, 39.
 Defremery 6.
 Desfontaines 19.
 Dietrich 32.
 Dioscurides 4.
 Dirr 39.
 Donati 23.
 Dureau de la Malle 19, 21.
 Egli 9.
 Ehrenberg 24, 25, 26, 27.
 Ellis 23.
 Eschscholz 35.
 Esper 22.
 Férussac 35.
 Fitzroy 37.
 Flinders 30, 31, 33.
 Forskål 20, 21.
 Forster (G.) 28, 29.
 Forster (J. R.) 28, 29, 30,
 32, 36.
 Fournier 16.
 Freycinet (Désaulses de)
 35.
 Friedrich V. (König) 20.
 Garnot 37.
 Gassendi 16.
 Gaymard 25, 35, 36, 37.
 Gesner 20.
 Götze 30, 31.
 Göze 22.
 Grant 25.
 Günther 24, 38.
 Guettard 23.
 Guimarães 8.
 Hahn 3.
 Haime 25.
 Hellmann 8.
 Hemprich 25.
 Henry 8.
 Hoffmann 16.
 v. Humboldt 3, 7, 24, 35,
 38.
 Ibn Batuta 6, 12.
 Imperato 20.
 Juba (König) 4.
 Judd 3.
 Jussieu 23.
 Justinianus (Kaiser) 5.
 Karl V. (Kaiser) 7.
 Kircher 17.
 Klein 21.
 v. Kotzebue 31, 35.
 Krämer 27.
 Krünitz 23.
 Lamarek 26.
 Lamouroux 25, 38.
 Langenbeck 7, 8, 38, 39.
 Lassen 25.
 Laue 24.
 Le Bret 38.

42 14. Abhandlung: Sigmund Günther, Die Korallenbauten.

- Leiboldt 6.
 Lesson 37.
 Lesueur 25.
 v. Linné 22, 23.
 van Linschot 9, 10.
 Loeffling 23.
 v. Lütke 35.
 Marsigli (Graf) 18, 19,
 20, 21, 22.
 Martin 16
 v. Martius 24.
 Meinicke 28.
 Milne-Edwards 25.
 Monconys 11.
 Müller (C.) 26.
 v. Müller (J.) 8.
 Müller (Stadius) 21.
 Nelson 87.
 Nicolai (Nicolo) 16.
 Niebuhr 37.
 Ogilvie 39.
 Ortmann 27.
 Ovidius 4.
 Pagès (de) 21.
 Pallas 19, 22, 23.
 Penck 4, 31, 32, 36.
 Perry 39.
 Pereira 10.
 Péron 36.
 Peschel 6, 39.
 Peyresc (de) 16, 17, 18.
 Peyssonel 19, 20, 21, 22,
 23.
 Plinius 4, 15, 20.
 Poggendorff 9, 32.
 Postels 35.
 Poulett Scrope 37.
 Prentice 6.
 Pyrard 11, 12, 13.
 Quiros 29.
 Quoy 25, 35, 36, 37.
 Ramond 38.
 Rapp 25.
 Réaumur 21, 22.
 Reber 14.
 Rein 37.
 Reinaud 6.
 Reitemeyer 5.
 v. Richthofen 38.
 Rittau 28.
 Ritter 3.
 Roggeveen (Roggevein)
 29.
 Ruge 3.
 Rumphius 16, 21.
 Sachau 6.
 Sanguinetti 6.
 Savigny 25.
 Savile-Kent 31.
 Santa Cruz (de) 7, 8.
 Schouten 29.
 Schroeder 16.
 Schweigger 25.
 Scylax 4.
 Shaw 20, 21.
 Spallanzani 23, 25.
 Steffens 37.
 Strachan 28.
 Theophrastus Paracelsus
 14.
 Trembley 22, 23.
 Valentini 15, 16.
 Vielheuer 17.
 Wallis 29.
 Walther 11.
 v. Wieser 7, 8.
 Wirth 39.
 Wiszmüller 18.
 Worm 16.
 v. Zittel 3, 4, 37.

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch - physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 15. Abhandlung

Meine Beobachtungen über den Sparagmit und Birikalk am Mjösen in Norwegen

von

A. Rothpletz

Mit 2 Tafeln

Vorgetragen am 3. Dezember 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Einleitung.

Was soll man unter Sparagmit verstehen, hat das Wort einen rein petrographischen Sinn oder umfaßt es als stratigraphische Einheit eine Reihe verschiedenartiger Gesteine? Auf diese Frage wollte ich mir vor fünf Jahren in der Heimat des Sparagmites eine Antwort suchen, die ich bis dahin weder in den Lehrbüchern noch in den Museen hatte finden können. Da jedoch mein damaliger Besuch Norwegens in der Hauptsache andere Ziele verfolgte, so blieb für die Sparagmitfrage nicht mehr Zeit als zwei Tage übrig. Auf den Rat Prof. Bröggers ging ich an den Mjösen, wo nach Münsters geologischer Karte zwei verschiedenalterige Sparagmite und der sie trennende Birikalk zu sehen sein sollten, darüber der fossilfreie Quarzsandstein und die untercambrischen Olenellschichten. Zuerst durchwanderte ich die Strecke Bröttum-Ring und sah in guten Aufschlüssen die zwei Sparagmitstufen und den Birikalk, aber für ihre Altersfolge fand ich keine Beweise. Das war am 16. August. Am 11. September stattete ich der gegenüberliegenden Seeseite einen Besuch ab und glaubte wahrzunehmen, daß der Birikalk dort nicht zwischen den zwei Sparagmiten, sondern konkordant auf dem Quarzsandstein liege und nur durch eine Schieferlage von diesem getrennt sei. Meine Beobachtungen waren mit der Münsterschen Auffassung nicht in Einklang zu bringen und ich verhehlte, nach Kristiania zurückgekehrt, meine Bedenken den Herrn Brögger, Reusch und Vogt nicht.

In dem Sparagmitconglomerat südlich von Bröttum hatte ich Kalksteingerölle mit Oolithen gefunden, die auf die Existenz

von Organismen hinweisen, die jedenfalls vor Ablagerung des Sparagmites gelebt haben müssen. Wenn dieser Sparagmit hier, wie Münster meint, wirklich die älteste Sedimentdecke über dem archaischen Grundgebirge ist, dann müssen jene Oolithe ein sehr hohes präcambrisches Alter haben und für den Paläontologen, der die Vorläufer der cambrischen Tiere und Pflanzen sucht, von ganz besonderem Wert sein. Gerade in diesem Punkte war ich aber sehr unsicher geworden und so kam es mir sehr erwünscht, daß Victor Moriz Goldschmidt im Auftrage der norwegischen geologischen Landesuntersuchung von diesem Gebiete eine neue Detailuntersuchung unternahm, die 1908 im Jahrbuch der Norges geologiske undersøgelse veröffentlicht wurde. Dieser Arbeit ist eine geologische Spezialkarte im Maßstab von 1 : 60 000 beigegeben, die gegenüber der Münsterschen Karte einen bedeutenden Fortschritt bedeutet. Leider aber bezieht sie sich fast nur auf die Ostseite des Mjösen und berührt die Westseite sehr wenig, wo nach meinen Erfahrungen der Schlüssel für die Stratigraphie und Tektonik verborgen lag.

Goldschmidt hat jedoch an der Münsterschen Stratigraphie keine wesentlichen Veränderungen vorgenommen, obwohl er einige Beobachtungen machte, die nicht mit ihr übereinstimmen, und ob schon er, um sie dennoch aufrecht halten zu können, seine Zuflucht zu mehreren Verwerfungen nehmen mußte, die aber als solche nicht zu sehen sind. Meine Zweifel waren somit nicht beseitigt und gerne ergriff ich die günstige Gelegenheit, die der internationale Geologenkongreß in Stockholm mir in diesem Jahre gab, zu einem erneuten Besuche des Mjösen. Am 4. September traf ich in Gjøvik ein in Begleitung des Bergbaustudierenden Kjørstad, mit dem ich dreizehn Tage lang beide Ufer des Mjösen bei Biri und Ring durchstreifte. Dem Professor Reusch und dem Direktor der Norges geographiske opmaaling verdanke ich die topographischen Karten 1 : 50 000. Auf die Empfehlung des Prof. J. H. L. Vogt erhielt ich freundliche Unterstützung durch die Herren Dr. med. Markussen in Gjøvik und Dr. Töning in Biri, durch dessen Ver-

mittelung ich Unterkunft in Biri im Hause der Frau von Enzberg fand. Ihnen allen, sowie dem Prof. Brögger und Herrn Goldschmidt spreche ich für das Interesse, das sie an meinen Untersuchungen genommen haben, meinen herzlichen Dank aus.

Zum besseren Verständnis des Lesers glaubte ich auf die Beigabe des geologischen Kärtchens 1 : 50 000 nicht verzichten zu sollen, obwohl es ja in so kurzer Zeit nicht möglich war, eine Spezialkarte von diesem Umfange anzufertigen. Die Karte macht deshalb auch keinen Anspruch auf eine geologische Spezialkarte und auf Vollständigkeit der Eintragungen. Von vornherein habe ich darauf verzichtet, die Moränen der Glacialzeit und die postglacialen Seeterrassen, die meist bis über 60 m über den heutigen Seespiegel heraufgehen, zu kartieren. Diese Gebiete sind also weiß geblieben, aber ebenso auch diejenigen der älteren zutage gehenden Gesteine, die ich nicht selbst besucht habe. Die Karte gibt somit genau das Tatsachenmaterial an, auf die sich meine nachfolgenden Ausführungen stützen. Indessen habe ich aus der Goldschmidtschen Karte manche Eintragungen übernommen, die mir zur Ergänzung des Kartenbildes notwendig erscheinen. Diese Teile sind jedoch von den anderen durch Anwendung punktierter Grenzlinien deutlich unterscheidbar gemacht. Die topographische Unterlage ist zum Teil veraltet und auch der Verlauf der Höhenkurven ist an manchen Stellen unrichtig. Eine kleine Veränderung des Seesufers bei Moelven und, wo es recht unentbehrlich erschien, auch Eintragungen neuer Wege habe ich freihändig vorgenommen. Aber mit Bezug auf Lage und Anzahl der Häuser ist alles unverändert geblieben, obschon seit der topographischen Aufnahme dieses Blattes sich hierin sehr viel geändert hat.

I. Mein Reiseweg.

Ehe ich meine Ergebnisse in sachlicher Anordnung entwickle, möchte ich in Kürze den Weg schildern, auf dem ich jene in zeitlicher Aufeinanderfolge gewonnen habe. Wer nicht im Lande lebt, nicht in der Lage ist, Jahre hindurch Beob-

achtungen zu machen, und auch die vorhandene fremdsprachige Literatur nicht wie ein Einheimischer beherrscht, dem passiert es leicht, daß er leichtfertig oder rücksichtslos mit den Verdiensten Anderer umzugehen scheint und daß er Entdeckungen als die seinigen beschreibt, die in Wirklichkeit vielleicht schon uralt sind. Die vorhandenen geologischen Karten hatte ich mit mir und sie habe ich als den allgemein verständlichen Ausdruck des zurzeit vorhandenen stratigraphischen und tektonischen Wissens stets zu Rate gezogen. Von der Literatur hingegen konnte ich der Kürze der Zeit halber vor und während meiner Reise nur teilweise Einsicht nehmen. Ich beklage dies einerseits, aber andererseits glaube ich, daß, wenn man ausrückt um die Natur zu beobachten, ein allzugroßes literarisches Gepäck der Beobachtung leicht hinderlich werden kann. Nachträglich habe ich meine Literaturkenntnis zu vervollständigen gesucht und dabei vieles hinzugelernt. Wenn 'es gleichwohl so erscheinen mag, daß ich ältere Verdienste durch Unterlassung von Zitaten nicht genügend würdige oder manche wohlbekannte Dinge so erzähle, als ob ich sie zum erstenmal gesehen hätte, so bitte ich im Auge zu behalten, daß ich mir als Zweck dieses Aufsatzes nicht eine erschöpfende Behandlung der Sparagmitfrage gesetzt habe, sondern nur mitteilen will, was ich gesehen und zu welchen Schlußfolgerungen ich dabei gekommen bin.

Die Eisenbahn brachte mich mittags den 4. September nach Gjøvik. Ich benutzte den Nachmittag zu einem Besuche der Vardaler Silurmulde, die nach Kjerulfs Karte von Ost nach West streicht, im Süden von Gneiß und Quarzit, im Norden aber von Sparagmit begrenzt wird. Das Auffällige dabei ist das Fehlen des Cambriums auf beiden Seiten und das Fehlen auch des Quarzites im Norden dieser Mulde, wodurch der ältere Sparagmit direkt an das Silur herantritt.

An der Fahrstraße von Gjøvik nach Moelum steht zwischen Sogstad und Overby und bei Mashus Gneiß an, der von Granitgängen durchsetzt ist. Zwischen Jemtland und Mashus liegt an der Straße ein kleiner Aufschluß von schwarzem Tonschiefer

(wahrscheinlich cambrischer Alaunschiefer) und bei Oedegaard, wo die Karte schon silurischen Kalk angibt, steht der cambrische Quarzsandstein an (str. N 80° O, f. 20—30° N). Hier von der Straße nach Nord vorgehend fand ich zuerst noch Quarzsandstein, dann Moräne. Aber einige herumliegende Kalkblöcke machen es wahrscheinlich, daß der silurische Kalk unter der Moräne ausstreicht. Sobald man jedoch hinter den Hütten den Wald erreicht hat, trifft man da, wo die Karte bereits den Sparagmit angibt, Rundhöcker von Quarzsandstein und Quarzconglomerat, die sich von den feinkörnigen Quarzsandsteinen an der Straße petrographisch unterscheiden lassen, wenschon ich nicht sicher bin, ob man das Gestein wirklich als Sparagmit bezeichnen darf. Die Bankung tritt nicht deutlich hervor, doch glaubte ich ein ganz schwaches nördliches Einfallen wahrzunehmen. Unter Sumpf und Moränen verschwinden diese Rundhöcker allmählich ganz (Taf. II Fig. 7).

Folgt man dem Quarzsandstein an der Straße gegen Moelum, so stellt sich alsbald in dessen Hangenden der silurische Orthocerenkalk ein (str. N 70° O, f. mäßig nach N). Wir sind somit im flachfallenden Südflügel der Vardalmulde. Von hier ging ich quer zum Streichen gegen Norden am Gehänge herauf nach dem Gute Hage. In einer Breite von beinahe 500 m steht nur Orthocerenkalk an, der im Süden, wie schon erwähnt, flach nach N bzw. NW einfällt, rings um das Gut Hage aber völlig saiger steht. Wir hatten somit den Silurkern einer Mulde durchquert, deren Nordflügel vertikal, deren Südflügel flach nach N geneigt ist. Doch stellt sich letzterer gegen Westen steiler und fällt beim Gute Moelum bereits mit 70° nach N (str. N 80° W), wobei an der Straße im Liegenden des Kalkes noch etwas dunkle Tonschiefer zum Vorschein kommen (Graptolithenschiefer?). Die Kalksteine sind alle von Drucksuturen und Gleitflächen so stark durchsetzt, daß sie an Versteinerungen, die auf dem Querbruch deutlich sichtbar sind, keine brauchbare Ausbeute lieferten. Kjerulfs Karte gibt bei Moelum Silur, aber bei Hage schon den Sparagmit an, was sicher unrichtig ist, denn geht man von Hage noch weiter

auf dem von Moränen bedeckten flachen Bergrücken nach Norden vor, so stößt man alsbald von neuem auf saigeren Orthocerenkalk, der Rundhöcker bildet und ohne Zweifel die Existenz einer zweiten Silurmulde anzeigt.

Das Ergebnis dieses Ausfluges war somit erstens, daß bei Vardal statt einer zwei Silurmulden liegen, die zwar von West nach Ost streichen, aber trotzdem das Ufer des Mjösen nicht erreichen, zweitens, daß das Liegende dieser Mulden im Süden wahrscheinlich aus wenig mächtigem Alaunschiefer und Quarzsandstein, die direkt auf dem archaischen Gneiß aufliegen, besteht, während der „Sparagmit“ im Norden anscheinend diskordant auf jenen zwei Silurmulden liegt. Die Ausdehnung dieser Decke gegen Westen ist auf Kjerulfs Karte sicher nicht richtig angegeben und bedarf einer erneuten Untersuchung.

Am 5. September fuhren wir von Gjøvik nach Biri.

Die Fahrstraße läuft auf der alten Seeterrasse hin und schneidet nur ab und zu ältere Gesteine an. Der Braastadely, den man überschreitet, hat sich tief in Sparagmit eingeschnitten, der flußaufwärts sich aus seiner horizontalen Lagerung flexurartig nach NW senkt. Sparagmit und mit ihm wechsellagernd feinstückiges Quarzconglomerat steht auch bei Braastadbakke an. Er streicht N 70° O und f. 25° nach Nord, ist aber von kleinen Verwerfungen stark durchsetzt. Von Kolberge und Fyrstuøy an stellt sich der Quarzsandstein ein mit erheblich steilerem Einfallen (50—60° NNW). Die feinsandigen quarzistischen Bänke zeigen ausgezeichnete Driftstruktur. Bei Slettum stehen diese Schichten schon senkrecht (str. N 70° O) und schließen noch Zwischenlager von stark verbogenen schwarzen Schiefen ein. Meine Beobachtungen stimmen hier mit den Angaben der Kjerulfschen Karte vollständig überein. Bemerkenswert ist aber die flache Lagerung des Sparagmites gegenüber der steilen Schichtstellung im Quarzsandsteingebiet, als ob ersterer wirklich wie eine Decke über letzterem liege. Der Stokkeelven hat sich in schwarze Tonschiefer eingeschnitten, die dunkle, von Trilobitenfragmenten erfüllte Kalkbänke und Kalkknollen einschließen, die dem Cambrium angehören. 500 m

hinter Sven steht grünlich-grauer, wahrscheinlich untersilurischer Schiefer an der Straßenböschung an, der in saigerer Stellung N 55° O streicht. In seinem Hangenden ragen, aber höher oben am Gehänge, wo die alte Straße liegt, die Orthocerenkalkbänke (N 50° O, f. 80° W) auf und sind durch einen großen jätzt verlassenen Steinbruch aufgeschlossen. Auch hier sind die festen Kalkbänke von Drucksuturen und Gleitflächen ähnlich wie bei Vardal netzförmig durchzogen, was auf starke mechanische Inanspruchnahme bei der Faltung und Aufrichtung hinweist. Bei Bäckemellem folgt wieder steil NW fallender Quarzsandstein, der weiterhin am Skulhus nur noch mit 15—20° nach NNO geneigt ist. Die zwei in den See vorspringenden Felspartien bei Skulhusodden und nördlich von Skulhus bestehen aus denselben Schichten, die nun aber mit 70° nach SSW einfallen und zwischen sich eine flachere Landspitze mit Birikalk einschließen, der sich von da in weitem Bogen, den Höhenzug von Klundbyberget krönend, bis Krämmerodden hinzieht, wo er wieder an den See herabkommt, von dem liegenden Quarzsandstein nur durch eine ziemlich mächtige Schieferlage getrennt, die zuoberst zum Teil dolomitische Kalklagen und Linsen einschließt.

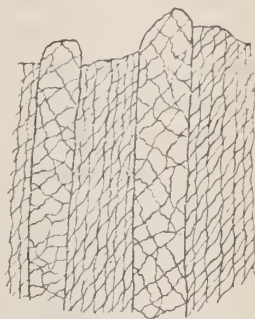


Fig 1. Orthocerenkalk im Kalkbruch bei Liers oberhalb Sven. Zwei bis 0.1 m dicke Bänke tonarmen Kalkes von netzförmig angeordneten Drucksuturen durchzogen. Die tonreicheren Kalkschichten durch nach zwei Richtungen verlaufende Tonhäute gemasert.

Dieser Tag bestätigte somit die Eindrücke, die ich 5 Jahre früher erhalten hatte, daß der Birikalk wie eine jüngere Formation konkordant auf dem älteren Quarzsandstein liegt.

Der folgende Tag war dem Klundbyberget und seiner Westseite gewidmet und ergab, daß im Birikalk recht verschiedenartige Gesteine zu unterscheiden sind, und daß der feste, zum Teil aber breccienartig verdrückte Bänderkalk von Krämmerodden als ein jüngeres Glied sich ausscheiden läßt, das von dem älteren eigentlichen und stark bituminösen Birikalkschiefer als Muldenkern eingeschlossen wird.

Das Gehänge nördlich von Biri und Vismundelven besuchte ich am Mittwoch und dabei fand ich, daß der eigentliche Birikalk zu zahlreichen, meist nach Süden überkippten, von O nach W streichenden Sättel und Mulden zusammengeschoben ist, im Höhenzug des Heggehaugen aber vollständig senkrecht aufgerichtet und auf der Nordseite von dem sog. älteren Sparagmit mit seinem großstückigen Conglomerat begrenzt ist, der das gleiche Streichen und Fallen zeigt, so daß er als die Unterlage des Birikalkes erscheint, wenn schon hier nirgends der unmittelbare Kontakt beider Gesteinsarten zu sehen ist.

Dem Studium des sog. jüngeren Sparagmites war der nächste Tag gewidmet. Es ergab sich dabei mit völliger Sicherheit, daß dieser mit sehr flacher, oft ganz horizontaler Lagerung auf den steil aufgerichteten Schichten des Birikalkes und des Quarzsandsteines am Lundeberget, Melbyaasen und Klundbystuen liegt, was zu der Schlußfolgerung zwingt, daß dieser Sparagmit entweder ursprünglich als ein viel jüngerer Absatz diskordant über jenen älteren und bereits gefalteten Schichten zur Ablagerung gekommen, oder daß er gleichen Alters wie der ältere Sparagmit ist und erst nachträglich durch tektonische Bewegungen über jene Schichten heraufgeschoben wurde.

Da nach der Karte von Björlykke im westlichen Gausdal alle diese Schichten viel flacher und ungestörter als bei Biri liegen, so daß ihre Aufeinanderfolge mit größerer Leichtigkeit festzustellen ist, und da dort das Silur in einer ganz anderen Facies wie bei Gjøvik entwickelt ist, machte ich einen zweitägigen Abstecher nach Veisten. Die Reihenfolge, die ich hier am Evenvoldkampen, auf Högbrenna und nördlich von Bö antraf, war von unten nach oben: Sparagmit mit dem großstückigen Conglomerat wie bei Biri, darüber Birikalk, etwas Quarzsandstein und Schiefer und dann völlig kalkfreie silurische Tonschiefer, die zuoberst viele Quarzsandschiefer einschließen. Ein jüngerer Sparagmit existiert hier also nicht und mit Ausnahme des Sparagmites besitzen alle stratigraphischen Horizonte eine ganz andere petrographische Beschaffenheit als weiter im Süden. Wir müssen somit darauf gefaßt sein, daß

auch am Mjösen ein und derselbe stratigraphische Horizont an verschiedenen Orten petrographisch verschieden entwickelt sein kann und daß aus petrographischer nicht ohne weiteres auch auf stratigraphische Verschiedenheit geschlossen werden darf.

Von Veisten verlegte ich mein Standquartier für fünf Tage nach Moelven auf der Ostseite des Mjösen. Mein erster Besuch galt dem Biskopaaßen. Die Schichten des Sparagmites und seines Conglomerates, das im Haviker Eisenbahneinschnitt die Kalkstein- und Oolithgerölle enthält, sind zwischen Bröttum und Nordberg am Fuße dieses Berges steil aufgerichtet, während von halber Bergeshöhe an bis zum Gipfel des 400 m über den Seespiegel aufragenden Höhenzuges dieselben Sparagmite und Conglomerate ganz flach-muldenförmig ausgebreitet sind, ähnlich wie auf der anderen Seeseite bei Lundeberget und Melbyaasen, nur daß dort die Unterlage nicht auch aus Sparagmit sondern aus Birikalk besteht. Die nächsten Tage führten mich zum Syljuaasen und Lundshögda. Da fand ich wiederum den Sparagmit die oberen Teile dieser Höhenzüge aufbauend, aber die Unterlage besteht aus steil aufgerichtetem und gefaltetem Birikalk, während der Sparagmit der Höhe flach-muldenförmig gelagert ist und als Muldenkern Quarzsandstein trägt. Damit war mir bewiesen, daß erstens dieser Sparagmit nicht jünger sein kann als der andere bei Bröttum und zweitens daß die Diskordanz zwischen ihm und seiner Unterlage als eine Folge späterer Überschiebung zu deuten ist. Die Untersuchung der Umgebung von Moelven zeigte weiterhin, daß dort der Sparagmit und der Quarzsandstein in Wechsellagerung auftreten, wenn schon die Hauptmasse des Sparagmites in tieferem Horizonte liegt.

Ich war an diese dreizehntägige Untersuchung mit keinem bestimmten Programm herangetreten. Ich hatte zuerst immer den Maßstab der überlieferten stratigraphischen Gliederung angelegt und, nur dem Zwange der beobachteten Tatsachen nachgebend, habe ich diese Gliederung verändert. Das tiefste Glied der Sedimente ist eine mächtige Anhäufung von Sand und Geröllen, die im Norden neben Quarz auch sehr viel Feldspat

führen, gegen Süden immer feldspatärmer werden. Je nachdem können sie als Sparagmit und Quarzsandstein unterschieden werden. Darüber liegen im Süden die versteinierungsführenden cambrischen Schichten der Olenellus-, Paradoxides- und Olenus-Horizonte, auf denen das Silur ruht. Im Norden hingegen liegen auf jener eocambrischen Sand- und Gerölleablagerung direkt teils Tonschiefer teils die Birischiefer und zuoberst die Krämmeroddenkalke, aber alle drei Gesteine ohne bestimmbare Versteinerungen. Noch weiter im Norden endlich im Gausdal liegt über dem Eocambrium der Birikalk und Tonschiefer, der aber in seinen unteren und obersten Teilen viel Quarzsandablagerungen einschließt, während er in der Mitte frei davon ist und untersilurische Graptolithen führt.

Wo ein scheinbar jüngerer Sparagmit über dem Birikalk liegt, existiert eine konkordante Auflagerung nicht, sondern eine scharf ausgeprägte Diskordanz, die aber nicht als ein Beweis für das jüngere Alter dieses Sparagmites aufgefaßt werden kann, denn auch er ist von eocambrischem Quarzsandstein konkordant überdeckt. Sie ist vielmehr durch Überschiebung des eocambrischen Sparagmites über den jüngeren Birikalk erzeugt worden. Der Mangel deutlicher Versteinerungen im Birikalk kann ebensowenig für dessen präcambrisches als gegen sein cambrisches Alter sprechen, während die vollkommene Konkordanz der ganzen Schichtenreihe diesem Kalke entschieden seine Stellung im Cambrium anweist.

II. Zur Stratigraphie.

Auf den Entwicklungsgang, den die wechselnden Anschauungen über die Gliederung der Sedimentgesteine am Mjøsen genommen haben, kann ich aus den in der Einleitung angeführten Gründen hier nicht eingehen. Es ist dies übrigens bereits durch Bjørlykke 1905 in Det centrale Norges Fjeldbygning geschehen. Als Ausgangspunkt für meine Erörterungen will ich nur die Gliederung anführen, die Münster und Goldschmidt ihren geologischen Karten zu Grunde gelegt haben.

Nach Münster		Nach Goldschmidt
Etage 4—3	4—3	Untersilurische Schiefer mit dem Orthocerenkalk (3c γ)
Schichten der Primordialfauna	2—1c	Cambrische Alaunschiefer
	1b β 2	Olenellus-Schiefer
	1b β 1	Sandsteinschiefer mit Kriechspuren
Quarzsandsteinformation	1b α 2	Quarzsandstein
	1b α 1	Roter und grüner Schiefer
Jüngerer Sparagmit	1a γ	Jüngerer Sparagmit mit Conglomeraten
Birikalk	1a β	Birikalk
Älterer Sparagmit im oberen Teil mit Conglomerat	1a α 2'	Grobes Conglomerat („Biriconglomerat“)
	1a α 2	Rother Schiefer und Kalk
	1a α 1	Älterer Sparagmit mit dunklen Schiefen

Mit Brögger kann man 1a und 1ba als Eocambrium, mit Björlykke auch als Präcambrium bezeichnen, während 1b β —2 das Cambrium umfaßt. In 2 ist die Paradoxides- und Olenusstufe enthalten.

Im Süden unseres Gebietes liegt das ganze Cambrium normal und konkordant auf 1ba. Nordwärts reicht es bis Evjeviken im Osten und Sven im Westen des Mjösen, Sven fällt aber nicht mehr auf unser Kartenblatt, das somit fast ganz von Eocambrium aufgebaut wäre. Im Norden dieser Karte fehlt nach Björlykkes Karte das Cambrium ebenfalls gänzlich, und das Untersilur müßte somit direkt auf dem Eocambrium liegen. Björlykke gibt von dort folgende Gliederung:

	Sandsteinschiefer und graue Tonschiefer
Etage 3—4	Dunkle Graptolithenschiefer
Quarzitformation	Grünliche Tonschiefer
	Blaquarz und heller Quarzit
	Grünlicher Tonschiefer
	Sparagmitsandstein
	Grauer und grünlicher Tonschiefer
	Birikalk
	Sparagmitformation

Wenn man Björlykkes Quarzitformation mit 1a γ und 1ba bei Goldschmidt und Münster identifiziert, so fehlt 1b—c und 2 im Norden vollständig und man muß eine Transgression des Untersilurs über das Eocambrium annehmen. Es ist aber weder eine Diskordanz noch ein Grundconglomerat zwischen Etage 3—4 und der Quarzitformation bisher beobachtet worden und bei Veisten habe ich nicht die geringste Andeutung einer solchen Transgression entdecken können. Es erscheint mir deshalb viel wahrscheinlicher, daß die Quarzitformation Björlykkes als eine besondere Facies das Cambrium vertritt und daß der dort wenig mächtige Birikalk auch noch dazu gehört. Es ist nicht einzusehen, weshalb die reichen Einschwemmungen von Sand, Ton und Geröllen, welche das Eocambrium auszeichnen, mit Beginn des Cambriums plötzlich und überall gleichzeitig gänzlich aufgehört haben sollen. Wasser und Wind, welche diesen Transport vom Festland aus ins Meer besorgten, können ebensowenig wie das Festland mit einem Schlag allerorten verschwunden sein. Wohl begründet erscheint die Vermutung Bröggers, daß die allerdings sehr wenig mächtigen Sandablagerungen an der Basis der Paradoxidesstufe im Kristianiagebiet trotz mangels an Versteinerungen die Olenelluszone vertreten. Bei Evjeviken hingegen, wo die Olenellusschiefer vorhanden sind und auf Sandstein liegen, ist es klar, daß letzterer älter und als prä- oder eocambrisch aufzufassen ist, solange wenigstens als der Olenellushorizont als das tiefste Glied des Cambriums gilt. Wenn hingegen im Gausdal unter dem silurischen Graptolithenschiefer konkordant Tonschiefer in Wechsellagerung mit Sandstein liegen, dann darf uns der Mangel an Versteinerungen nicht abhalten, diese Schiefer und Sandsteine als die den Graptolithenschiefern zeitlich unmittelbar vorausgegangenen Ablagerungen anzusprechen, die somit entweder noch in der allerersten Silurperiode oder schon in der cambrischen Zeit zum Absatz gekommen sind. Und nur darüber bleibt Unsicherheit bestehen, wieviel von diesen fossilfreien präsilurischen Sedimenten noch zum Cambrium gehören und wohin die Grenze gegen das Eocambrium zu legen ist.

Wenn wir also die Entwicklung von Evjeviken und von Gausdal durch ein schematisches Profil miteinander in Verbindung bringen wollen, so würde das etwa so ausfallen:

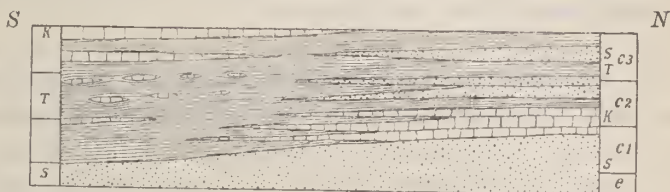


Fig. 2. Schematische Darstellung der obersten eocambriischen und der cambrischen Horizonte zwischen Gausdal und Evjeviken. e Eocambrium, c1 Olenellus-, c2 Paradoxides-, c3 Olenus-Stufe. S Sand-, T Ton-, K Kalkablagerung.

Hierbei kommt durch den Abstand der horizontalen Linien die Gleichheit der Zeiträume zum Ausdruck. Wenn man aber die Mächtigkeit der verschiedenen Sedimente veranschaulichen will, so würde dies etwa nach Art der Figur 3 darzustellen sein, weil die klastischen Elemente von Nord gegen Süden eingeschwennt wurden und deshalb im Norden eine größere

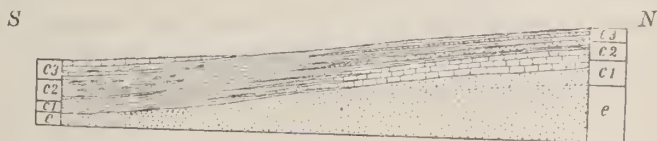


Fig. 3. Schematische Darstellung der Mächtigkeiten der Sand-, Ton- und Kalkfacies im Gebiet der Fig. 2. Bedeutung der Buchstaben wie oben.

Mächtigkeit erlangten als im Süden. Ein ähnliches Bild gäbe auch die profilmässige Darstellung des Untersilurs, wobei im Norden mächtige Tonschiefer und Sandschiefer, im Süden aber weniger Schiefer, dafür jedoch mächtige Kalke liegen, die sich gegen Norden auskeilen.

Daß eine solche Auffassung des Untersilurs nicht eine nur hypothetische ist, sondern den Tatsachen entspricht, davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man die geologischen Karten von Kjerulf, Münster und Björlykke betrachtet und das Untersilur mit seinen mächtigen Kalkbänken vom süd-

lichen Mjösen westwärts und dann nordwärts über Torpen im Dokkatal nach Gausdal verfolgt, wobei die blauen, den Silurkalk anzeigenden Striche immer schmaler und seltner werden und bei Gausdal ganz verschwinden.

Schwieriger ist der Facieswechsel im Cambrium zu verfolgen. Münster hat es zwar im Dokkatal als Alaunschiefer unter dem Untersilur und über der Quarzsandsteinformation nachgewiesen, aber sobald man nach Gausdal herübergeht, fehlen diese cambrischen Schiefer mit einem Schlag und es treten die schon erwähnten fossilfreien Sandsteine und Schiefer an ihre Stelle. Dieser plötzliche Wechsel hängt vielleicht mit tektonischen Störungen zusammen. Ich ziehe es deshalb vor, den Facieswechsel nur in dem von mir untersuchten Gebiete darzustellen, weil mir da die tektonischen Verhältnisse besser bekannt sind. Bei Evjeviken liegt das Cambrium mit seinen drei Stufen ziemlich fossilreich über dem Quarzsandstein des großen Moelvengewölbes. Auf der entgegengesetzten Seite hingegen im Norden fehlen diese Schichten und statt dessen liegen über dem Quarzsandstein die Birikalke, die zwar mit den cambrischen Kalksteinen in Farbe und Bitumengehalt große Ähnlichkeit besitzen, aber doch krystalliner sind und des charakteristischen Alaunschiefers entbehren. Während im Süden die Kalke gegenüber den Alaunschiefern stark zurücktreten, herrschen im Norden die Kalke vor und kalkfreie Schiefer sind verhältnismäßig nur selten darin eingelagert. Das Merkwürdigste aber ist, daß hier bestimmbare Versteinerungen ganz fehlen, während solche im Süden nicht selten sind.

Hierin ist ohne Zweifel der Grund zu sehen, weshalb man dem Birikalk ein präcambrisches Alter gegeben hat und Kjerrulf seine anfängliche, instinktiv das Richtige treffende Ansicht später geändert hat. Würde es gelingen cambrische Versteinerungen im Birikalk nachzuweisen, dann bräuchte man nicht mehr überall da, wo er in konkordanter Lage über eocambri-schem Quarzsandstein liegt, eine Verwerfung anzunehmen, wozu Goldschmidt sich bei seiner Kartierung genötigt sah.

In Wirklichkeit hat dieser Mangel an Versteinerungen an

sich gar keine Beweiskraft für das Alter des Birikalkes. Kennen wir doch Kalksedimente genug in jüngeren Formationen, deren Zugehörigkeit durch die Untersuchung der Lagerungsverhältnisse völlig sichergestellt ist, ohne daß es bis jetzt gelang, diesen Nachweis durch Versteinerungen zu erhärten. Es steht aber fest, daß einerseits der so bitumenreiche Birikalk nicht ohne die Mitwirkung der Organismen zustande gekommen sein kann und andererseits, daß er seine jetzige kristallinische Struktur erst infolge späterer Umwandlung erhalten hat. Dabei sind wahrscheinlich die Versteinerungen undeutlich geworden oder verschwunden. Doch kann man Spuren derselben an geeigneten Stücken noch recht gut nachweisen, nur sind sie zu undeutlich, um eine spezifische Bestimmung zu ermöglichen. Gleichwohl ist es Goldschmidt gelungen bei Smedstadviken einen *Olenellus Kjerulfi*, nicht allerdings im Birikalk selbst, aber in einem grünlichen Tonschiefer nachzuweisen, der zwar nicht anstand, sondern nur einen großen Block bildete, der aber in seiner Lage nahe der Grenze zwischen Quarzsandstein und Birikalk weder durch Menschenhand noch durch Gletschertransport gekommen sein kann. Jedenfalls wurde er an einer Stelle gefunden, wo die *Olenellus*schiefer zu erwarten sind, wenn der Birikalk wirklich dem mittleren und oberen Cambrium angehört.

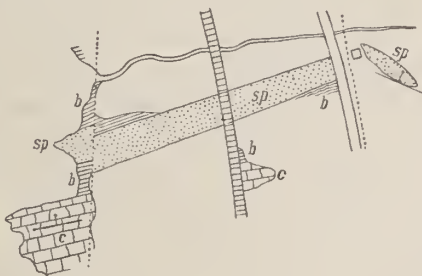


Fig. 4. Links das Seeufer, rechts die Fahrstrasse Moelven-Ring, in der Mitte die Eisenbahlinie, im Norden der Smedstadviken. sp Sparagmit, c Quarzsandstein, b Birikalk. Die zwei N-S gerichteten punktierten Linien Querungsverfugen.

Die Schichtfolge ist am Seestrand bei Smedstadviken gut aufgeschlossen und läßt sich ostwärts über den Eisenbahneinschnitt bis zur Landstraße verfolgen. Alle Schichten streichen N 70° O. Im Süden liegt der Quarzsandstein, der am Ufer mit 45°, an der Eisenbahn mit 70—80° nach Norden einfällt. Darüber folgt am Ufer eine 50 m breite Zone von schiefrigem Birikalk, der in einer Breite von 10 m auch an der Bahnlinie aufgeschlossen ist und dort zunächst am Kontakt mit dem Quarzsandstein ebenfalls wie dieser steil nach Nord geneigt ist, dann aber vertikale Stellung annimmt. Im Norden dieses Kalkschiefers folgt ein etwa 50 m breites Sparagmitlager. Sein Kontakt mit dem Birikalk im Süden ist nicht aufgeschlossen, so daß es ebensowohl ein normaler als ein durch eine Verwerfung bedingter sein kann. Überlagert wird dieser Sparagmit konkordant von Birikalk, der sich von da bis zur Halbinsel Helgeberget ohne Unterbrechung verfolgen läßt, wo er dann von dem Krämmeroddenkalk überlagert wird, der muldenförmig in ihn eingefaltet ist. Er streicht in den See hinein und auf der gegenüberliegenden Seite bei Krämmerodden kommt er wieder zum Vorschein. Hier liegt er aber nicht auf dem Birikalk sondern auf schwarzem alaunschieferartigem Tonschiefer, der nur in den obersten Lagen dünne Kalklagen und rundliche Kalklinsen einschließt, so daß diese Schichten, obwohl Versteinerungen nicht darin zu finden waren, doch vollkommen an die petrographische Entwicklung des Cambriums bei Sten erinnern. Aber zugleich haben sie auch Beziehungen zu dem Birikalk, der bei Helgeberget unmittelbar im Liegenden der Krämmeroddenkalke ebenfalls rundliche Kalklinsen enthält. Es hat den Anschein, als ob die Birikalkfacies gerade im Mjösen in die Alaunschieferfacies übergehe.

Diese Alaunschieferfacies von Krämmerodden läßt sich auf der ganzen Ostseite des Klundbyberget bis Skulhus ohne Unterbrechung verfolgen. Sie bildet die Zwischenlage zwischen dem eocambriischen Quarzsandstein und dem hellbankigen Krämmeroddenkalk. Ihre Mächtigkeit ist nicht mit vollkommener Sicherheit festzustellen, beträgt aber jedenfalls bis zu 100 m, vielleicht auch mehr. Der Krämmeroddenkalk bildet bei Skulhus

eine deutliche, etwa 150 m breite Mulde, dementsprechend kommen dort die liegenden schwarzen Schiefer zweimal zum

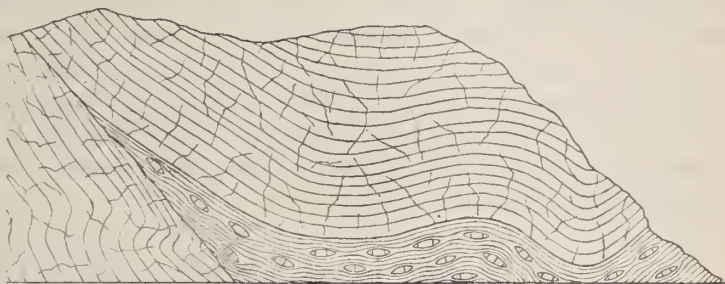


Fig. 5. Uferfelsen auf der Südseite des Helgeberget. Birikalkschiefer mit rundlichen Kalklinsen ist von festen Bänken des Krämmeroddenkalkes überlagert.

Austrich, einmal als Fortsetzung des Krämmeroddenflügels im Nordosten, das andere Mal als Gegenflügel im SW des Skulhus. Dieser Gegenflügel verschwindet jedoch alsbald unter der Sparagmitdecke von Klundbystuen und da, wo er weiter im NW unter dieser Decke wieder zum Vorschein kommt, hat er sich bereits in die Birikalkfacies umgewandelt, die nun ausschließlich auf der Westseite der Mulde vorherrscht und nur bei Horne wieder der Alaunschieferfacies Platz macht. Weiter im Norden beiderseits des Mjösen herrscht ausschließlich die Birikalkfacies, wenn schon untergeordnet zwischen den dunklen bituminösen Kalkbänken und -schiefern auch Schieferlagen vorkommen, die ganz oder fast ganz kalkfrei sind und somit wieder an die Alaunschiefer erinnern. Die Mächtigkeit dieses Birikalkes läßt sich nicht bestimmen, weil jüngere Schichten in den engen Falten nicht miteingeschlossen sind und er selbst in der vielfältigsten Weise zusammengestaucht ist. Nur bei Helgeberget und Klundbyberget ist der jüngere Krämmeroddenkalk miteingefaltet, aber da fehlt uns das Liegende des Birikalkes. Im Norden aber, wo als Liegendes bei Biskopaasen und Heggehaugen der Sparagmit unter dem Birikalk liegt, fehlen die jüngeren Ablagerungen über diesem. Gleichwohl habe ich den Eindruck gewonnen, daß dieser Kalk wohl mindestens 200 m mächtig sein muß.

Von Biri zieht sich diese Facies nach der Münsterschen Karte nordwestwärts fort bis Gausdal, aber dort ist ihre Mächtigkeit schon um über die Hälfte geringer geworden. Dafür stellen sich darüber Quarzsandsteine ein, ganz vom Charakter der eocambrischen, die im Süden unter dem Birikalk liegen. Im westlichen Gausdal ist deren Mächtigkeit noch recht gering, aber nach der Karte von Björlykke nehmen sie gegen Norden immer mehr an Dicke zu, während der Kalk an Mächtigkeit abnimmt.

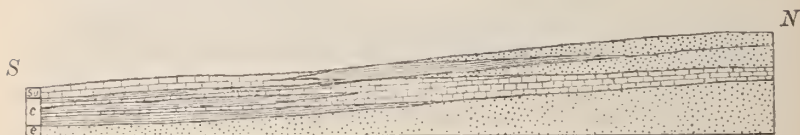


Fig. 6. Schematische Darstellung der Mächtigkeiten der Sand-, Ton- und Kalkfacies in Eocambrium, Cambrium und unterem Silur.

Wir können uns diese Faciesverhältnisse in einem Profil etwa durch Fig. 6 veranschaulichen. Die eocambrischen, von Norden her eingeschwenkten Schuttmassen nehmen an Mächtigkeit gegen Süden ab. Mit Beginn des Cambriums wird die Zufuhr viel geringer, im Süden setzen sich vorwiegend nur Tone mit Kalkstein, in einer mittleren Zone vorwiegend Kalksteine ab, die aber stets einen nicht unerheblichen Zusatz von Quarzsand haben und gegen Norden an Mächtigkeit abnehmen. Im Norden hingegen bleibt die Zufuhr von Sand und Ton bedeutend, die zur Bildung von Sandstein und Tonschiefer führen, sich gegen Süden aber im Gebiet der Kalkfacies allmählich verlieren. In früher Silurzeit blieben die Verhältnisse ähnlich. Im Süden herrschen Kalksedimente, in der Mitte Ton und im Norden Sand vor.

Die hier entwickelte stratigraphische Auffassung beruht nicht auf theoretischen Spekulationen, sondern gibt nur das Bild wieder, das ich bei meinen Aufnahmen im Felde gewonnen habe durch das Studium und die Zusammenstellung der Einzelprofile. So wenig Rücksicht habe ich dabei auf theoretische Spekulation genommen, daß ich es wohl begreifen

könnte, wenn gerade von spekulativer Seite aus meiner Auffassung ein Widerstand erwüchse. Es kann nemlich ein solcher darin gesucht werden, daß während im Silur die Kalkfacies reich, die Tonfacies arm und die Sandfacies leer an Versteinerungen ist, umgekehrt im Cambrium der Fossilreichtum an die Tonfacies, die Armut an die Birikalkfacies gebunden sein soll. Allein dieser Widerspruch ist doch nur ein scheinbarer. Ein Unterschied zwischen Silurkalk und Birikalk besteht allerdings in der Fossilführung, aber zugleich auch darin, daß jener stets sandfrei ist, während der Birikalk meist Quarzsandkörner führt, häufig sogar in solchen Mengen, daß man oft versucht sein könnte von kalkigem Sandstein zu sprechen. Der hohe Bitumengehalt des Birikalles beweist zwar ein reiches organisches Leben im Birikalkmeere, aber der viele Sand scheint versteineringfähige Organismen teils nicht begünstigt teils deren Reste zerstört zu haben, so daß sie jetzt nur noch als undeutliche Fragmente erhalten geblieben sind, deren Erkennbarkeit durch die starke mechanische Inanspruchnahme, welche gerade diese Kalke später erfahren haben, außerdem noch gelitten hat. Doch wäre es ein Irrtum, wenn man glauben wollte, daß die Alaunschiefer mit Bezug auf Versteinerungsreichtum sich sehr von den Birikalken unterscheiden. Es ist ja bekannt, daß man in ihnen meistens gar keine Fossilien findet und daß sich dieselben erst da einstellen, wo innerhalb des Schiefers Kalklager oder Linsen auftreten. Doch auch diesen Kalken, welche also als eine lokal entwickelte Kalkfacies zu gelten haben, die frei von Quarzsand ist, fehlen in vielen Lagen die Versteinerungen ganz oder sie sind doch recht selten. Und gerade diese Kalke haben mit dem echten Birikalk petrographisch eine recht große Ähnlichkeit, so daß man einzelne Handstücke derselben ganz gut mit solchen des Birikalles verwechseln könnte.

Den Krämmeroddenkalk habe ich als eine Bildung bezeichnet, die jünger ist als der eigentliche Birikalk, weil man seine Auflagerung auf diesem sehr deutlich wahrnehmen kann. Petrographisch unterscheiden sich beide so auffallend, daß ihre Trennung sehr leicht fällt.

Der Krämmeroddenkalk ist hellfarbiger als der Birikalk, zum Teil sogar rötlich, ganz dicht, fest gebankt und führt niemals Quarzsandkörner. Er ist auch nicht bituminös. Eine gewisse Ähnlichkeit hat er hingegen mit dem Orthocerenkalk und jedenfalls sieht er ihm ähnlicher als irgend einem anderen Kalkstein in der Umgebung des Mjösen. Da er außerdem entweder auf den Alaunschiefern oder auf dem Birikalk liegt, so ist schon dadurch eine Altersbeziehung zum Silur gegeben und ich bin geneigt in ihm, wenn auch nicht gerade einen Vertreter des Orthocerenkalkes, so doch eine Ablagerung der Silurzeit zu sehen.

Es bleibt nun noch die Gliederung im Eocambrium und die Altersbeziehungen des Quarzsandsteines zum Sparagmit zu besprechen übrig. Bei dem vollständigen Mangel an Versteinerungen kann es sich hierbei nur um eine petrographische Gliederung handeln. Die Gesteine bestehen aus Schiefern, Sandsteinen und Conglomeraten, die aber ziemlich regellos miteinander wechsellagern. Das sog. Biriconglomerat scheint allerdings nördlich von Biri, wo es bis zu 120 m mächtig ist, und bei Bröttum, sowie im Gausdal einen gleichen Horizont unterhalb des Birikalkes einzunehmen, aber andere Conglomerate liegen entschieden tiefer, manche sogar zuunterst d. h. so tief als die Aufschlüsse überhaupt in den Sparagmit herabreichen. Innerhalb der Sandsteine besteht wohl der Unterschied zwischen den feldspatfreien Quarzsandsteinen und den feldspatreichen Sparagmiten, aber man trifft gar oft feldspatarme Sandsteine, bei denen es unsicher bleibt, in welche der beiden Abteilungen sie zu stellen sind.

Im allgemeinen läßt sich feststellen, daß der Sparagmit im Norden, der Quarzsandstein im Süden unseres Gebietes vorherrscht. Bei Gausdal ist der Sparagmit in einer Mächtigkeit von mindestens 300 m aufgeschlossen. Er besteht vorwiegend aus Sandstein. Ein mächtiges Conglomerat ist in seiner oberen Partie, aber nicht ganz zu oberst eingeschaltet. Schiefer kommen auch vor, aber durchaus in kleinen Mengen. Ob alle Sandsteine Sparagmite sind, habe ich festzustellen keine Zeit ge-

fehlt, aber an von den Wänden herabgebrochenen Blöcken gibt es auch einige so feldspatarme zu sehen, daß sie kaum noch den Namen Sparagmit verdienen. Ganz sicherer Quarzsandstein stellt sich dort aber erst über dem Birikalk ein und er gehört deshalb nicht mehr zum Eocambrium. Bei Moelven hingegen ist die Wechsellagerung der einen mit der anderen Gesteinsart recht gut wahrzunehmen. Der Kern des dortigen Gewölbes ist Sparagmit mit vielen und zum Teil über kopfgroßen Geröllen von Quarz, Quarzit und Granitgneis. Auf ihm ist die Ortschaft Moelven erbaut. Nach Norden ist er von Quarzsandstein überlagert, dessen Ausstrichzone etwa 6—700 m breit ist. Dann folgt wieder eine ungefähr 800 m breite Sparagmitzone und zuletzt in einer Breite von 500 m nochmals Quarzsandstein. Die Gesamtmächtigkeit dieser Schichten läßt sich demnach auf jedenfalls 900 m berechnen unter der Voraussetzung, daß keine oder mindestens keine erheblichen Längsverwerfungen da sind, die eine Wiederholung der Schichten hervorbringen könnten. Von der circa 50 m mächtigen Sparagmitlage, die bei Smedstadviken noch über dem obersten Quarzsandstein, aber schon im Birikalk liegt, ist dabei abgesehen, weil die Aufschlüsse nicht genügend sind, um erkennen zu lassen, ob es sich hier um eine normale Wechsellagerung oder um ein Auftreten des älteren Sparagmites längs einer Verwerfung handelt. Auf der Westseite des Mjösen südlich vom Biri bei Gjövik habe ich Einlagerungen vom echtem Sparagmit in den Quarzsandsteinen nicht beobachten können, wohl aber nimmt letzterer in einzelnen Lagen z. B. am Skulhus-Elv etwas Feldspat auf, aber doch so wenig, daß man dem Gestein noch nicht den Namen Sparagmit geben möchte. Zwischen Braastadbakke und Braastadely steht allerdings wieder echter Sparagmit an, doch seine flache Lagerung und eigentümliche horizontale Ausbreitung macht es, wie eingangs erwähnt, wahrscheinlich, daß dieser Sparagmit keinen normalen Verband mit dem Quarzsandstein im Norden hat. Es ergibt sich daraus, daß innerhalb der mächtigen eocambrischen Sandsteinformation keine durchgehende petrographische Gliederung

in vertikaler Richtung durchgeführt werden kann, daß aber wo die beiderlei Gesteinsvarietäten zusammen vorkommen, der Sparagmit zu unterst, der Quarzsandstein zu oberst vorherrscht, was besonders deutlich auch bei Varde-Aasen in die Augen fällt, wo das mächtige Sparagmitlager von Syljuaasen und Lundehögda von dem Quarzsandstein des Varberget und von Kjölen überlagert wird. Sparagmit und Quarzsandstein stellen innerhalb der eocambrischen Ablagerungen zweierlei Facies dar, die man als nördliche und südliche voneinander trennen könnte, wenn sie nicht bei Moelven durch Ineinandergreifen miteinander verbunden wären.

Münster hat in seinem älteren Sparagmit am Südfuß des Biskopaasen einen mit Unterbrechungen ostwärts bis zum Naerensjøen verfolgbaren Kalkzug eingezeichnet. Nach seiner Beschreibung ist es ein Zug von rotem bis grauem Tonschiefer mit rötlichem oder hellgrau violettem Kalkstein, der immer im oberen Teil des Sparagmites aber unter dem Biriconglomerat liegen soll. Über den Hütten von Traetsveen ist dieser Schiefer am Waldgehänge entblöst. Er fällt mit 20° nach Norden ein und wird von dem Conglomerat überlagert. Es ist ein unreiner sandiger Schiefer durch Eisenoxyd zum Teil rötlich gefärbt, aber Kalklagen habe ich darin nicht finden können. Auch die Waldvegetation ergab keine Anzeigen von Kalkgehalt des Bodens. Einige Kalkstücke, die Herr Kjörstad weiter im Westen gegen Havik zu auf dem Waldgehänge lose fand, waren echter dunkler bituminöser Birikalk und können keinenfalls mit diesen Schiefen in Verbindung gebracht werden. Die Aufschlüsse bei Byen und am Naerensjøen konnte ich nicht mehr besuchen. Aber ähnliche Schiefer kommen noch anderwärts mit dem Sparagmit zusammen vor und werden im tektonischen Teil zu besprechen sein. Ich habe aber nie Kalksteine in ihnen eingelagert gefunden.

III. Zum Gebirgsbau.

Es ist längst bekannt, daß die paläozoischen Schichten aus Mjösen stark gefaltet sind. Die Profile, die Kjerulf (1879) und Münster (1901) von dieser Gegend gegeben haben, zeigen das deutlich an, wenn schon zwischen beiden im einzelnen große Differenzen bestehen. Daß auch Verwerfungen vorkommen, haben beide Autoren ebenfalls angenommen, eigentlich aber nur eine größere Längsverwerfung nachgewiesen. Goldschmidt hat dann 1908 versucht, die stratigraphischen Schwierigkeiten durch die Annahme einer größeren Anzahl solcher Verwerfungen verständlich zu machen. Schiötz hingegen hatte schon 1903 weiter im Osten von Glommen bis herüber zum Tryssilelven den Beweis zu erbringen versucht, daß es nur eine Sparagmit-Quarzformation gibt, die die Unterlage des Cambriums bildet und daß dieselbe durch eine große starke Überschiebung auf das Cambrium im Süden zu liegen gekommen ist. Den Glomstadkalk Münsters, dem eine ähnliche Rolle wie dem Birikalk zugeschrieben worden war, erklärte er trotz des Mangels an Versteinerungen für Silur, das in den Sparagmit eingefaltet sei. Goldschmidt lehnte diese Auffassung für den Mjösen ab, weil im Birikalk noch keine Versteinerungen zu finden waren und späterer Dynamometamorphose das Verschwinden derselben nicht zugeschrieben werden könne. Aus dem Abschnitt I wird der Leser bereits entnommen haben, daß meine Untersuchungen mit denen von Schiötz am meisten übereinstimmen, und daß nach diesen die eigentlichen Verwerfungen zwar durchaus nicht ganz fehlen, aber an Bedeutung gegenüber den Faltungen und Überschiebungen doch weit zurücktreten. Diese drei tektonischen Phänomene wollen wir nun der Reihe nach besprechen.

I. Der Faltenwurf.

Alle paläozoischen Gesteine ohne Ausnahme sind in Falten gelegt, aber die Stärke der Faltung ist nicht überall gleich groß. Ihre Streichrichtung ist in der Hauptsache eine ostwest-

piche, doch gibt es auch Ausnahmen, zu denen besonders die Klundbybergetmulde gehört. Es scheint als ob neben den Ostwestfalten auch Nordsüdfaltungen eingetreten seien, die aber nicht so bedeutend wie jene waren. Man muß jedoch die großen Falten, an denen alle Schichten vom Eocambrium bis zum Silur teilgenommen haben, von den engen Fältelungen wohl unterscheiden, bei denen nur ein verhältnismäßig wenig mächtiger Komplex von Schichten zu Mulden und Sätteln zusammengeschoben worden sind, wie das besonders beim Birikaik der Fall ist.

Der Mjösen liegt in einem stark abgeflachten Gebirgsland mit wenig tief eingeschnittenen Erosionstälern. Sein Wasserspiegel in einer Höhe von 124 m über Meer gibt uns das Maximum der Tiefe an, bis zu welcher die dem See tributären Täler uns die Erdkruste aufgeschlossen haben. Die höchsten Höhen gehen ganz selten mehr als 400 m über den Seespiegel herauf. In Fig. 5 auf Taf. II habe ich durch zwei Linien, die in Abständen von $1\frac{1}{2}$ bis 2 m nebeneinander herlaufen, bei einem Maßstabe von 1:200 000 diese Breite der erschlossenen Erdkruste anzudeuten gesucht. Wenn man auf diesen Streifen die Falten einträgt durch eine Wellenlinie, die der Lage der gefalteten Grenzfläche zwischen Eocambrium und Cambrium entspricht, dann erkennt man sofort, daß die Sattelkämme und Muldentiefen meist außerhalb dieses Streifens fallen, teils nur die einen teils beide zugleich. Im Süden von Gjøvik (d) liegt diese Wellenlinie durchaus unter der Oberflächenlinie, von Gjøvik bis Skulhus reicht sie darüber hinaus (c), um bei Biri wieder unterzutauchen (b) und erst bei Bröttum wieder an der Oberfläche zu erscheinen (a).

Diese Wellen liegen somit auf einer Mittellinie, die selbst wieder, aber ganz schwach, gewellt ist. In d sind es stehende, in c nach Süden überkippte Falten, bei b sind es ebenso überkippte, aber ganz enge Falten, die erst in a wieder zu stehenden werden.

Sehr auffällig ist der starke Zusammenschub des Birkalkes in b, wo man leicht erkennt, daß das ältere Cambrium

in den Sätteln als Kern nicht vorhanden sein kann, weil die festen und massigen Bänke des Sparagmites einer solchen Fältelung gar nicht fähig sind und weil die Sättel im Birikalk ganz geschlossen sind, so daß für etwas anderes darin gar kein Platz mehr vorhanden ist. Leider geht nirgends ein Aufschluß in solche Tiefe herab, daß wir das Eocambrium unter dem gefältelten Birikalk beobachten können, und wir sind deshalb nur auf Vermutungen angewiesen. Indessen geben uns für diese die Krämmeroddenkalke, welche in den Mulden als Kerne auftreten, doch einige Anhaltspunkte.

a) Die Faltung des Biri- und Krämmeroddenkalkes.

Der Birikalk ist durch das vollständige Fehlen dicker Bänke ausgezeichnet. Soweit er als eigentlicher Kalkstein entwickelt ist, ist er stets dünnplattig, aber meist ist er ein sehr unreiner Kalk, der von glimmerigen und tonigen Häuten durchsetzt wird, die ihm eine deutliche Schieferung verleihen, so daß alsdann die Bezeichnung Kalkschiefer vorzuziehen ist. Beimengungen von Quarzsandkörnern sind ganz gewöhnlich, nehmen aber oft so zu, daß die Bezeichnung als kalkiger Sandstein zuweilen zutreffender wird. Auch tritt gegen die tonig-glimmerigen Bestandteile der Kalkgehalt nicht selten so stark zurück, daß man höchstens von kalkigem Schiefer sprechen kann und zuweilen bleibt die Salzsäurereaktion sogar ganz resultatlos. Es wechsellagern diese verschiedenen Varietäten miteinander, indem bald die einen bald die anderen vorherrschen. Zuweilen schwellen die reineren Kalklagen linsenförmig an und nehmen Formen an, die lebhaft an die „Kalkboller“ der cambrischen Alaunschiefer erinnern. Als ursprünglich wahrscheinlich ebenfalls klastische Bestandteile stellen sich neben den Quarzkörnern kleine Kaliglimmerblättchen besonders in den kalkarmen oder -freien Schiefen ein und bieten durch ihre Anwesenheit einen weiteren Anhaltspunkt zum Vergleich mit den Alaunschiefen.

Wo kalkige mit schieferigen Partien oft nur in millimeter dicken Lagen wechseln, da zeigen jene häufig eine stengelige

Anordnung der Calcitkristalle und zwar so, daß die stengeligen Kristalle senkrecht zu den Schichtstöcken stehen, ähnlich wie das von Gyps- oder Coelestinlagen bekannt ist.

Calcitadern durchschwärmen diese Schichten gewöhnlich in großer Zahl und sind um so häufiger, je stärker das Gestein gefaltet ist, so daß man sich des Eindrucks kaum erwehren kann, daß zwischen diesen beiden Erscheinungen ein gewisser genetischer Zusammenhang bestehe. Doch scheint es, daß manche der Calcitgänge schon vor der Faltung vorhanden waren, während andere vielleicht während der Faltung und auch nachher erst entstanden sind. Dieses Altersverhältnisz erdiente eine sorgfältige Untersuchung.

Da wo der Birikalk auf dem Sparagmit des Heggehaugen im Norden von Biri aufliegt und beider Schichten zu vertikaler Stellung aufgerichtet sind, zeigt er diesen Grad von Fältelung nicht und ist er auch viel ärmer an Calcitgängen. Dahingegen kann man da beobachten, daß einzelne seiner Lagen in eigentümlicher Weise verbogen sind, ohne daß die hangenden und liegenden Schichten daran teilnehmen. Es sieht so aus als wenn sie bei der Aufrichtung nicht genug Stabilität be-

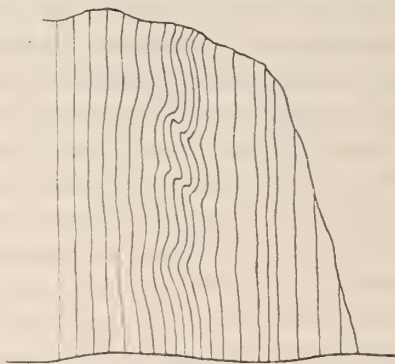


Fig. 7. Birikalk in einem Steinbruch bei Storsletten östlich vom Heggehaugen.

sessen hätten und in sich zusammengesunken wären, also zwischen den stabileren Lagen eine Bewegung ausführten, an der die sie umgebenden Lagen nicht teilnahmen.

In den stark gefältelten Lagen sind Drucksuturen eine ganz gewöhnliche Erscheinung, die sich teils schon mit blosem Auge leicht wahrnehmen läßt, teils als solche erst unter dem Mikroskop, dann aber in ungeheurer Häufigkeit zu bemerken ist. An ihrem schwärzlichen Überzug sind diese Suturen auf den Spaltungsflächen des Gesteines leicht zu erkennen. Daneben treten aber auch schwärzlich glänzende Rutschflächen auf, die zu kleineren und größeren Verschiebungen geführt haben, die jedoch zum größten Teil nicht als eigentliche Verwerfungen, sondern nur als lokalisierte innere Verschiebungen aufzufassen sind.

An den Umbiegungsstellen der steilen und isoklinalen Falten werden die Schichten sehr häufig von zahlreichen unter sich und mit der isoklinalen Richtung parallelen Klüften



Fig. 8. Birikalk an dem Weg nördlich des Vismundelv an der Brücke von Naeperud. Ein gegen den Zuschauer überkipptes Gewölbe ist annähernd im Streichen der Bänke angeschnitten. Zahllose Drucksuturen durchziehen in allen Richtungen den Kalkstein. Zwei Verschiebungen sind durch breitere Linien angedeutet. 1:20 nat. Grösse.

durchsetzt, die zum Teil so enge stehen, daß das ganze Gestein transversal geschiefert ist und griffelartig zerfällt.

Dem starken mechanischen Drucke gegenüber, der solchergestalt den Birikalk verändert hat, haben sich die Krämmeroddenkalke ganz anders verhalten. Sie zeigen keine so enge Fältelung und keine transversale Schieferung. Verbiegungen sind zwar stets nachweisbar und sind ebenfalls von zahlreichen

Drucksuturen begleitet, aber sehr häufig sind die einzelnen dichten Kalklagen in einzelne kleinere oder größere Stücke zerbrochen und diese Stücke dann nach verschiedenen Richtungen verschoben worden, so daß das ganze Gestein zu einer richtigen Breccie umgewandelt ist. Dies ist besonders da geschehen, wo die Kalkbänke mit tonigen dunklen Schieferlagen wechsellagern, welche wegen ihrer größeren Plastizität nicht zerbrochen sondern zwischen die Kalkbruchstücke hineingepreßt wurden. Die Folge ist eine helle Kalkbreccie mit schwärzlichem Bindemittel. Solche Breccie ist besonders auffällig in der Klundbyberget-Mulde entwickelt, wo die jüngeren Krämmeroddenkalken zu einer engen überkippten Mulde zusammengepreßt worden sind durch Druckkräfte, die sowohl in nordsüdlicher als auch in ostwestlicher Richtung tätig waren. Durch eine Felsgrabung im Gut Horne etwas unterhalb des Wohnhauses war diese Breccie ganz frisch aufgeschlossen worden und es liegen davon viele Stücke auf einer Halde, wo sie bequem zu studieren sind. Joh. Walther ist in seiner Studie über algonkische Sedimente (Z. d. D. Geol. Ges. 1909 S. 295) zu einer anderen Deutung dieser Breccie gekommen. Er glaubt, daß schon während des Absatzes dieses Krämmeroddenkalkes verhärtete Oberflächenschichten zerbrachen und deren Stücke regellos in den darunterliegenden noch weichen Schlamm hinabsanken. Das Zerbrechen erklärt er sich so, daß diese Sedimente in flachem Wasser entstanden und vorübergehend trockengelegt wurden, wobei sich Trockenrisse bildeten, die die 2 m bis 8 cm dicken, nur wenig verhärteten Kalklagen in Einzelstücke zerlegten.

Mir scheint, daß das Herumschwimmen von Stücken wenig verhärteten Kalkes und ihr Untertauchen in den tieferen Schlamm mit der Scharfkantigkeit nicht gut in Einklang zu bringen ist, die diese Stücke heute noch zur Schau tragen, wenigstens in denjenigen Breccien, die ich gesehen habe und die ich als eine tektonische Breccienbildung deute. Ob allerdings die von Walther untersuchten Breccien mit diesen von mir untersuchten tektonischen Breccien identisch sind, kann ich nicht mit Sicher-

heit sagen. Nach der von ihm gegebenen Abbildung (l. c. Fig. 4) halte ich dies nicht für ganz ausgeschlossen.

Auf Helgeberget, wo mehrere kleine Muldenkerne von Krämmeroddenkalk im Birikalk eingefaltet sind, ist diese Breccienstruktur nicht oder doch nur in sehr geringfügiger Weise entwickelt. Statt dessen sieht man eigentümliche Einpressungen des Birikalles in den hangenden Krämmeroddenkalk, wie sie Fig. 5 zeigt.

Der festere, härtere und jüngere Kalk war nicht so biegsam wie der echte Birikalk und so ist er schließlich zerrissen, hat sich auf den Zerreißungsflächen verschoben und der Kalkschiefer ist zwischen die sich bewegenden Massen hineingepreßt worden.

Es ergibt sich aus diesen Beobachtungen, daß bei der Faltung des Birikalles die minder plastischen jüngeren Kalke die Bewegungen der liegenden schiefrigen Kalke nicht getreulich mitgemacht haben, daß sie sich nicht ebenso stark bogen, sondern bald zerbrachen und zu Breccie wurden, während an anderen Stellen sich ganz große Schollen auf Gleitflächen fortbewegt haben anstatt sich bruchlos zu verbiegen und auf diese Weise sich den veränderten Oberflächenformen des liegenden Kalkschiefers anpaßten.

b) Die Faltung des Sparagmites und Quarzsandsteines.

Daß auch diese festen und dickbankigen Massen durch horizontal wirkende Druckkräfte verbogen werden konnten, dafür gibt die Umgebung des Mjösen die besten Beweise. Ich brauche bloß auf das Gewölbe von Moelven und die Mulde von Lundehögdä-Syljuaaßen zu verweisen. Hierbei handelt es sich jedoch um sehr breite und weit gespannte Falten. Man versteht es leicht, daß Schichten von 1000 m Mächtigkeit, auch wenn sie recht spröde sind, zu Mulden und Sättel verbogen werden, deren Spannweite 3000 und mehr Meter beträgt. Aber daß es auch hierbei nicht ohne zahlreiche Zerreißungen und Schollenverschiebungen abgegangen ist, davon kann man sich an manchen Aufschlüssen überzeugen, die durch Menschenhand

geschaffen sind. Besonders mache ich in dieser Hinsicht auf den Eisenbahneinschnitt bei Havik aufmerksam, von dem Björlykke (1905 S. 28) eine Abbildung gegeben hat. Auch S. 30 findet man dort ein gutes Bild des gefalteten Sparagmites zwischen Bröttum und Bergseng mit seinen inneren Zerreibungen und Verschiebungen.

Darnach können wir uns eine Vorstellung zu machen versuchen, wie etwa der Sparagmit den großen horizontalen Zusammenschub mitgemacht hat, der in seinen hangenden Birikalken zu den zahlreichen engen Falten führte, die wir im vorhergehenden beschrieben haben. Die horizontale Ausdehnung des ganzen Sparagmitlagers ist wahrscheinlich durch zahlreiche flache, kleine Über- und Unterschiebungen verkürzt, aber ebendadurch seine vertikale Ausdehnung vergrößert worden. Diese Schubflächen drangen aber nicht durch den oberen biegsamen Birikalk hindurch bis zur Oberfläche, sondern sie erstarrten in demselben und der hangende Kalkschiefer erreichte die horizontale Kürzung hauptsächlich durch Faltung, wobei selbstverständlich auf der Grenzfläche eine Art von Ablösung des Kalkes von dem Sparagmit eingetreten sein muß, ähnlich wie wir es ja auch auf Helgeberget zwischen Krämmeroddenkalk und Birikalk in kleinem Maßstabe wahrgenommen haben (Fig. 4).

Die beigegebene Figur soll nur ganz schematisch den Vorgang illustrieren, da bestimmte Anhaltspunkte über Anzahl und Richtung der größeren und kleineren Thrusts ja fehlen. Vielleicht jedoch ließe sich das Profil am Smedstadviken in diesem Sinne ausdeuten, daß dort nicht der Birikalk eine Einlagerung zwischen Quarzsandstein und Sparagmit bildet, sondern daß das obere Sparagmitlager durch eine solche kleine Überschiebung in die Höhe gebracht worden ist.



Fig. 9. Schematisches Profil in Anwendung auf die Gegend zwischen Helgeberget und der Fabrik von Moelven. sp Sparagmit, c Quarzsandstein, b Birikalk, k Krämmeroddenkalk. 1:2000.

c) Die Klundbyberget-Mulde.

Das Streichen der Schichten und der Falten ist innerhalb unseres Kartengebietes entweder ein fast rein ost-westliches oder es schwankt zwischen WNW und WSW. Man kann dem entnehmen, daß der Druck, welcher die Falten erzeugt, in der Hauptsache eine nord-südliche Richtung gehabt hat.

Eine merkwürdige Ausnahme von dieser Regel macht jedoch die Klundbyberget-Mulde, die im Süden die normale WNW-Richtung hat, bei Klundby jedoch in eine nord-südliche Richtung umbiegt, um bei Krämmerodden wieder die normale zu gewinnen. Hier muß also offenbar lokal auch noch ein ost-westlicher neben dem nord-südlichen Druck gewirkt haben, und zwar scheint er von West gegen Ost geschoben zu haben. Eine Erklärung für diese Tatsache kann ich nicht geben, aber vielleicht wird es späteren Untersuchungen gelingen eine ähnliche Faltungsrichtung auch noch in benachbarten Gebieten nachzuweisen und damit die jetztige Ausnahmestellung, die die Klundby-Falte einnimmt, aufzuheben.

Die Ursache aber dafür, daß gerade in dieser Mulde die Krämmeroddenkalke eine so starke Breccienbildung zeigen, bin ich geneigt in dieser Faltung nach zwei Richtungen zu suchen, durch die die Schichten zum Teil in eine drehende Bewegung geraten sein müssen.

2. Die Überschiebungen.

In dem Faltenschema der Fig. 5 der Taf. II sind die Sparagmitlager und der Quarzsandstein von Biskopaasen, Syljaasen, Lundehögda, Jöraasen, Storsvepladse, Klevestuen, Melbyaasen und Lundeberget nicht miteinbegriffen worden. Sie zeigen zum Teil zwar auch Faltung, aber die ist sehr gering und jedenfalls immer viel geringer als bei den Schichten, die darunter liegen. Fast überall läßt sich der Nachweis erbringen, daß diese Massen diskordant auf dem Faltengebirge liegen, das wir im vorhergehenden Abschnitte besprochen haben. Da jedoch der Sparagmit samt dem daraufliegenden Quarzsandstein keine

jüngere Formation ist und mithin dem Eocambrium angehört, so kann man jene diskordante Lagerung auf dem cambrischen Birikalk und den eocambrischen Quarzsandsteinen und Sparagmiten nur durch die Annahme von Überschiebungen erklären.

a) Die Sparagmitdecke von Lundeberget und Melbyaasen.

Münster hat auf seiner Karte diese Sparagmitmasse als eine zusammenhängende Decke über beide Berge gezogen und noch erheblich weiter nach Westen ausgedehnt. Ich habe ihre Grenze gegen Westen und Osten nicht begangen, aber gesehen, daß zwischen Lundeberget und Melbyaasen die Sparagmitdecke nur noch stellenweise erhalten ist und daß in diesem Zwischenraum der Birikalk in der flachen Senke, in der die Fahrstraße von Biri nach Stenberg und Vestby heraufführt, an drei Stellen zum Vorschein kommt.

Der Sparagmit liegt bei Lunde am Waldrand, wo er in schönen Felsen ansteht, vollkommen horizontal und seine Verbreitung bis zum Skulhuselven beweist, daß er überhaupt im allgemeinen horizontal liegen muß. Auf der Südostseite des Lundeberget heben sich seine Bänke allerdings aus der Horizontalen in die Höhe und fallen nordwärts, aber dort ist es auch, wo der Birikalk bei Stenberg, in Rundhöckern anstehend, zum Vorschein kommt, jedoch nicht mit horizontaler sondern mit ganz vertikaler Schichtenstellung. Das Streichen wechselt zwischen N 20° und 55° W. Obschon die unmittelbare Auflagerung nicht zu sehen ist, so ist die diskordante Lage des Sparagmites auf dem topographisch tiefer liegenden Birikalk doch damit zweifellos festgestellt (Taf. II Fig. 3).

Weiter im Süden unweit Langset bei der zerfallenen Mühle am Skulhuselven wird als Unterlage des feldspatreichen Sparagmites, welcher dort als Felsbarriere das Tälchen sperrt und den Bach gezwungen hat, sich eine schmale und tiefe klammartige Rinne einzuschneiden, Quarzsandstein sichtbar. Dieser liegt aber nicht wie der Sparagmit horizontal, sondern streicht N 75 O und fällt steil nach Süden ein. Leider ist auch hier

die Überlagerungsstelle auf mehrere Meter Breite durch die Bachalluvionen verhüllt. Aber da der Sparagmit sowohl im Westen wie im Norden von jenem Quarzsandstein und zwar jedesmal in der für eine Überlagerung erforderlichen größeren Höhenlage ansteht, so kann seine Zugehörigkeit zu der Melbyaasen-Schubdecke keinem Zweifel unterliegen.

Der eocambrische Quarzsandstein unterscheidet sich sehr deutlich von jenem Sparagmit, wenschon

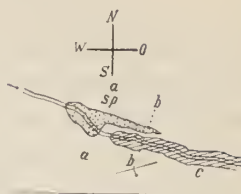


Fig. 10. Kartenskizze der Überschiebungsstelle am Skulhuselven. sp Sparagmit, c Quarzsandstein. a-a und b-b Schnittlinien der Profile in Fig. 11.

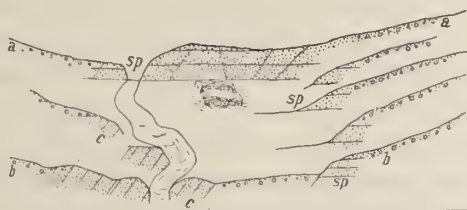


Fig. 11. Perspektivisch angeordnete Querschnitte durch die Zone a-a bis b-b in Fig. 10. Von oben nach unten quert der Skulhus-Bach in kleinen Windungen die Profile. In der Mitte oben sieht man die Mauerüberreste der zerfallenen Mühle am Fusse der Sparagmitwand. Die mit Ringelchen versehene Signatur bedeutet Moränen- und Bachschutt.

er auch etwas Feldspat führt. Er ist viel feinkörniger und die Feldspatkörner erheblich kleiner und seltener, zum Teil auch kaolinisch zersetzt.

b) Die Sparagmitdecke von Klundbystuen.

Wenn man von Klundby gegen Süden fortschreitet, gelangt man aus dem Birikalk in den Sparagmit und aus diesem in den Quarzsandstein. Münster sah darin eine normale Aufeinanderfolge des „jüngeren“ Sparagmites auf dem Birikalk und des Quarzsandsteines auf dem Sparagmit. Er war aber überrascht, daß sich diese Gesteinsfolge nicht ostwärts bis zum Seeufer fortsetzt, sondern daß dort der Quarzsandstein direkt auf den Birikalk folgt und der Sparagmit ganz fehlt. Zur Erklärung dieser unerwarteten Tatsache nahm er eine von Ost

nach West streichende Verwerfung zu Hilfe, die er jedoch als solche nicht beobachtet und darum in seinen Profilen III und IV eingezeichnet, aber mit einem Fragezeichen versehen hat. Auch Goldschmidt hat auf seinem Kärtchen dies Fragezeichen eingesetzt.¹⁾

In Wirklichkeit liegen die Verhältnisse anders. Der Sparagmit von Klundbystuen bildet die deckenförmige Krönung des Hügels, der nach drei Seiten unter einen Böschungswinkel von bis zu 20° abfällt, aber gegen Norden sich an den Höhenzug des Klundbyberget anlehnt, von dem ihn nur eine ebene und ziemlich breite Talfurche trennt, in der die Fahrstraße von Skulhus heraufkommt. Sobald man jedoch von der Höhe des Hügels abwärts geht, läßt man die Sparagmitfelsen alsbald über sich zurück, denn sie reichen nur wenig tiefer als die 270 Meterkurve der Karte herab. An dem tieferen Gehänge ist allerdings anstehendes Gestein meist nicht aufgeschlossen. Waldboden, Gehängeschutt, von oben herabgefallene Sparagmitblöcke bedecken dasselbe und nur an einigen Stellen schaut es darunter hervor. Im Süden sind es senkrecht aufgestellte Quarzsandsteinbänke, die N 75 W streichen und neben Quarzkörnern nur sehr wenige und kleine Feldspatkörner führen. Die Schichtköpfe gehen nicht viel über die 240 Meterkurve herauf. Darüber am Gehänge, aber von dem Quarzsandstein durch eine wenig breite, ganz flach ansteigende von Schutt überdeckte Terrasse getrennt, folgt der grobkörnige und feldspatreiche Sparagmit in horizontaler Lagerung. Das kleine Terrassenband zieht von da um den ganzen Hügel herum bis auf dessen Nordwestseite und über demselben steht der Sparagmit in kleinen Wänden an, während tiefer am Gehänge die Aufschlüsse fehlen bis zu jener NW-Ecke, wo feinschiefriger Birikalk zum Vorschein kommt, saiger bis steil südfallend und N 75 O streichend. Auch er setzt wie der Quarzsandstein nicht über das Terrassenband herauf. Geht man dann von

1) Kartbladet Lillehammer 1900 Tafel I in Norges geologiske undersøgelse Nr. 30.

Klundby nach Skulhus, so bedeckt Sand und Lehm das wahrscheinlich in glazialer Zeit entstandene kleine, von West nach Ost ziehende und Klundbyberget von Klundbystuen trennende Hochtälchen, an dessen nördlichem Talgehänge die Krämmeroddenkalke mit teils nördlichem Einfallen teils in saigerer Stellung anstehen, während am südlichen Gehänge der Sparagmit liegt, der besonders am östlichen Ausgang des Hochtälchens Felsen bildet, an denen man die horizontale Lagerung erkennen kann. Aber gleich unterhalb dieser Felsen schneidet das Fahrsträßchen die schwarzen alaunschieferähnlichen Vertreter des Birikalkes an und im Norden am jenseitigen Gehänge steigen die saigeren Bänke des Krämmeroddenkalkes, mit Streichen N 80 W, in hohen Felsen auf, die auch auf ihrer Nordseite von einem Zug jener dunklen Schiefer unterlagert sind. Hieraus ergibt sich, daß diese Kalke muldenförmig in jenem älteren Schiefer eingelagert sind und daß der Schiefer an dem Fahrsträßchen der Südflügel dieser Mulde ist, der aber oben von der Sparagmitdecke diskordant überlagert wird und sich unter dieser Decke jedenfalls noch weiter gegen Westen fortsetzt. Als diese Fortsetzung fasse ich den Birikalk auf, der an der Nordwestecke des Klundbystuenhügels, wie wir sahen, zum Vorschein kommt. Unter dem Sparagmit hat sich der Übergang der kalkarmen Schieferfacies in die kalkreiche des Birikalkes vollzogen, wie ich das im stratigraphischen Teil geschildert habe. Mit dieser Auffassung in vollstem Einklang steht das Auftreten des Quarzsandsteines im Süden unter dem Sparagmit, er bildet das Liegendste jener Mulde, die man als Skulhusmulde bezeichnen kann und die bei Klundby dann jene merkwürdige Umbiegung in die Süd-Nord streichende Klundbymulde erfährt.

Die Auflagerungsfläche des Sparagmites auf den Schichtköpfen dieser Mulde ist nicht aufgeschlossen. Überall wo ihr Ausstrich zu erwarten wäre, wird sie von Gehängeschutt, Moräne oder Waldboden verdeckt, gleichwohl tritt ihre Lage orographisch sehr deutlich markiert hervor und es kann an ihrer Existenz nicht gezweifelt werden.

Daß diese kleine Sparagmitdecke mit der größeren von Melbyaasen keinen Zusammenhang mehr hat, ist Folge der Erosion, welche das breite Tal von Skjõnsby zur Glazialzeit ausgehobelt hat. Diese Talfurche läuft zum Mjõsen parallel, hat aber in ihrer Mitte eine Wasserscheide. Der kleine See sendet seinen Ablauf in den Skulhuselv nach Süden, während die Wasser von Nysveen an nach Norden in den Vismundelven laufen. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß die Erosion des Gletschereises hier wahrscheinlich einer tektonischen Linie gefolgt ist (s. Taf. II Fig. 2 und 4).

c) Die Sparagmitdecke von Biskopaasen.

Daß der Sparagmit von Biskopaasen eine flache Mulde bildet, darüber kann ein Zweifel nicht bestehen. Münster hat dies durch die Art, wie er das Gipfelkonglomerat auf seiner Karte und in den Profilen eingezeichnet hat, deutlich bekundet und Goldschmidts Karte stimmt damit überein. Nur ist das Konglomerat selbst zu mächtig angegeben, es bildet bloß die Unterlage und zuoberst trifft man den gewöhnlichen Sparagmit. Ich habe den Bergrücken von Klõvstad bis über Haakenaastuen hinaus zweimal abgelaufen und dabei weder das Konglomerat noch den rötlichen Schiefer und Kalk gefunden, von dem Goldschmidt eine kleine Partie bei Haakenaasen eingezeichnet hat. Das Konglomerat liegt tiefer im Süden von Haakenaasen und der Fahrstraße, auf der Terrasse von Klõvstad.



Fig. 12. Anblick des Biskopaasen von Westen.

Es fällt im Süden nach Norden, im Norden nach Süden ein. hat also eine ausgesprochen flachmuldenförmige Lage. Unter ihm liegen in einer Meereshöhe von 300 m konkordant bei

Trätsveen die schon erwähnten unreinen und zum Teil rötlichen Schiefer, in denen ich aber Kalkeinlagerungen nicht habe finden können. Der Sparagmit mit dem Konglomerat darüber bildet am südlichen und westlichen Gebänge unter der Klövstadterrasse Steilwände, die besonders von Biri aus deutlich in ihrem Verlauf zu erkennen sind. Sie ziehen sich durch den Berghang hin und steigen dabei gegen Norden in die Höhe, so daß sie zwischen Trätengen und Klövstad die Terrasse bei etwa 420 m Meereshöhe überschneiden, dort aber orographisch wegen der Moränenüberdeckung als Steilwände nicht mehr deutlich hervortreten.

Sobald man unter diese Steilwände herabsteigt, ändert sich das tektonische Bild vollkommen. Der Fuß der Wände ist zwar stets stark überschüttet, aber wo immer Felsen hervorschauen, zeigen sie steiles Einfallen der Bänke oder völlig saigere Stellung. Letzteres gilt insbesondere für den Höhenzug südlich von Traetsveen, in dem der Haviker Eisenbahneinschnitt liegt und für die Bahneinschnitte zwischen Havik und Frengstuen. Am Fußsteig, der von Trätengen direkt nach der Station Brötum herabführt, sah ich unterhalb des Gutes im Walde Sparagmitbänke, die N 80 W streichen und mit 65° nach Norden einfallen. Nirgends reichen diese steiler gestellten Schichten in das Niveau der flachmuldenförmig liegenden Schichten der Klövstad-Terrasse herauf und nirgends sind Andeutungen einer Umbiegung in die flacheren Schichten zu bemerken. Münsters Versuch diese Lagerungsverhältnisse durch die Annahme eines Doppelsattels mit zwischenliegender Mulde und Überkippung des südlichen Sattels gegen Süden zu erklären, muß als mißglückt angesehen werden. Er war dadurch gezwungen (s. sein Profil II Pl. 1) zwischen Havik und Frengstuen unten am See söhliche Lagerung der Schichten anzunehmen. Die Aufschlüsse an der Bahnlinie zeigen statt dessen steile Stellung derselben. Von den sattelförmigen Umbiegungen bei Frengstuen und bei Havik ist ebenfalls nichts zu beobachten. Sodann hat er eine Kalkbank bei Trätsveen eingezeichnet, die er durch den Biskopaasen bis auf dessen Nordseite durchzieht und im Liegen-

den des Haviker Konglomerates also südlich von Traetsveen nochmals in saigerer Stellung erscheinen läßt. Zu sehen ist von alledem nichts sowohl in der Natur als auch auf der Münsterschen Karte, die ja nur den Kalkstein einmal nördlich von Traetsveen angibt an einer Stelle, wo ich sie trotz eifrigen Suchens nicht finden konnte. Das Münstersche Profil mischt somit das wirklich Beobachtete mit dem nur Vermuteten in einer Weise, daß man das Sichere von dem Unsicheren zu unterscheiden nicht imstande ist. Es hat somit keine Beweiskraft, sondern kann nur als eine Versinnbildlichung seiner Auffassung angesehen werden, durch welche der in ihr liegende Widerspruch mit dem wirklichen geologischen Befund deutlich zu Tage tritt.

In Anbetracht der Unvollständigkeit der Aufschlüsse läßt sich über den Bau des Biskopaasen nur soviel, dies aber mit Bestimmtheit aussagen, daß dieser Sparagmitberg aus einem unteren Sockelteil und aus einem oberen Gipfelteil besteht, von denen jeder seinen eigenen Bauplan besitzt. Im unteren Teil stehen die Schichten alle steil aufgerichtet, im Süden vollständig senkrecht, im Norden mit steiler Neigung nach Nord. Wenn auch vielleicht diese Schichten Teile eines Gewölbes sind und früher einmal nach oben durch sattelförmiges Umbiegen ineinander übergingen, so ist davon jetzt doch nichts mehr erhalten.

Im Gipfelteil hingegen liegen die Schichten flach und biegen sich auf der Nordseite und Südseite in die Höhe bis zu Neigungen von 35° . Die Muldentiefe liegt ungefähr da, wo im basalen Teil der Gewölbefirst zu erwarten wäre.

Es besteht also eine ausgesprochene Diskordanz zwischen der Schichtlage oben und unten, und sie kann bei der Gleichalterigkeit der Schichten nur als durch eine Überschiebung zustande gekommen erklärt werden. Die Überschiebungsfläche ist allerdings nicht sichtbar, aber sie dürfte bei Traetsveen wenig unterhalb der dort aufgeschlossenen Schiefer zu suchen sein (Taf. II Fig. 1).

d) Die Sparagmitdecke von Syljuaasen und Lunde- högdä.

Hier wiederholen sich die Verhältnisse von Biskopaasen insofern, als auch da der Sparagmit in flach muldenförmiger Anordnung den oberen Teil des Gebirges aufbaut, während die Schichten des basalen Teiles sich alle in steiler Stellung befinden, was natürlich auch hier zur Annahme einer Überschiebung führen muß.

Es bestehen aber auch erhebliche Unterschiede gegenüber dem Biskopaasen. Der basale Teil wird hier nemlich nicht von Sparagmit sondern ausschließlich von Birikalk aufgebaut, dessen Schichten alle ein mehr oder minder genau ostwestliches Streichen und stets steile bis saigere Stellung haben, abgesehen von den Stellen, wo kleine Faltenumbiegungen vorkommen, aber da ist dann eine enge transversale Klüftung, die sich zum Teil bis zur Schieferung steigert, vorhanden, die ebenfalls Ost-Weststreichen und steiles Einfallen zeigt.

Solange man den Birikalk als eine Einlagerung zwischen zwei großen Sparagmitstufen auffassen zu müssen glaubte, mußte man den Sparagmit von Syljuaasen und Lundehögdä als den jüngeren ansehen, der hier ganz normal auf seiner Unterlage von Birikalk liege. Das hat auch Münster getan und auf seinen Profilen I und II Taf. I sieht man, wie der Birikalk den flachmuldenförmigen Biegungen des Sparagmites genau konkordant folgt. Das ist aber in Wirklichkeit gar nicht der Fall, das habe ich schon 1905 gesehen und Goldschmidt hat das Verdienst auf einige Punkte aufmerksam gemacht zu haben, die sich mit den Münsterschen Profilen nicht in Übereinstimmung bringen lassen. Man kann sagen, er war nahe daran den Hauptfehler Münsters aufzudecken. Dadurch jedoch, daß er an dessen Stratigraphie festhielt, obschon er deren Schwäche wohl erkannt hatte, war er gezwungen zu kleinen Verwerfungen seine Zuflucht zu nehmen, die zwar nicht zu sehen sind, durch deren Annahme jedoch die vorhandene Diskordanz zwischen Birikalk und Sparagmit als eine nur scheinbare gedeutet werden konnte.

Von großer Bedeutung ist der Nachweis, den Goldschmidt erbracht hat, daß in der Sparagmitmulde als innerer Kern noch eine ziemlich mächtige Lage von Quarzsandstein liegt. Ich kann diese Beobachtung vollständig bestätigen. Damit sind zwei zur Erklärung der Tektonik mögliche Hypothesen beseitigt. Der Sparagmit kann keine jüngere, etwa devonische Ablagerung sein, die sich ursprünglich diskordant auf dem schon gefalteten Birikalk abgesetzt hat, denn er wird ja von dem eocambrischen Sandstein überlagert. Ebensowenig kann er in seine jetzige Lage durch eine große Überfaltung von Norden her gekommen sein, weil er nicht in verkehrter, sondern in ganz normaler Lagerung sich befindet. Es bleibt also nur die Erklärung durch einfache Überschiebung übrig.

Am Weg, der den Syljuaasen im Westen umgeht, steht Sparagmit flach südfallend an. Man erreicht gegen Norden fortschreitend einige kleine Häuser. Die Wegeinzeichnung auf der Karte ist hier nicht genau, es dürften die Häuser von Gullikstuen sein. Sie stehen noch auf dem Sparagmit, aber wenige Meter darunter geht der Birikalk mit ostwestlichem Streichen in Saigerstellung zutage. Der Kontakt ist verhüllt. Die untere Grenze des Sparagmites senkt sich von da gegen Südwest schräg am Gehänge herab. Hagen steht noch ganz auf dem Sparagmit, während nördlich davon das in gleicher Meereshöhe liegende Gut Kusveen auf saigerem Birikalk erbaut ist. Von Gullikstuen bis Sveum senkt sich die Untergrenze des Sparagmites um etwa 120 m; sie ist stets durch kleine, von Wald bedeckte Steilwände markiert, in denen die Sparagmitbänke oberhalb Sveum bereits ganz horizontal liegen ebenso wie in dem östlich davon und 100 m höher gelegenen Gute Hauger. Unterhalb der Steilwände, an der Grenze zwischen Wald und Feld steht der Birikalk saiger und O—W streichend an. Die von Goldschmidt hier eingezeichnete Verwerfung konnte ich nicht finden. Jedenfalls aber geht aus diesen Beobachtungen hervor, daß das Münstersche Profil hier ganz unrichtig ist, weil es zwischen Birikalk und Sparagmit konkordante Lagerung angibt, die unmöglich beobachtet sein kann.

Ich habe die Grenze des Sparagmites von dort bis zum Oksenbak nicht weiter verfolgt und glaube auch nicht, daß dies gut möglich ist, weil Feldbau und Moränen sie verhüllen. Jedenfalls senkt sie sich auf der Südseite jenes Baches rasch um über 100 m bis zum See herab. Ob es notwendig ist eine Verwerfung dafür zu Hilfe zu nehmen, bleibt zweifelhaft. Es ist ganz gut möglich, daß nur eine starke Neigung der Überschiebungsfläche gegen Westen vorliegt.

Am Ufer von Bergsviken bis Bergsodden steht nur Birikalk an, in dem Bahneinschnitt bei Kjosberget hingegen ist der Sparagmit angeschnitten. Bei Kilometer 161 beginnen die Aufschlüsse mit einem schwarzen Schiefer, der ganz kalkfrei zu sein scheint. Wenigstens konnte ich mit Salzsäure keine Reaktion bekommen. Er ist auf eine Erstreckung von 75 m aufgeschlossen. Zuerst steht er ganz saiger, zeigt sogar anfangs steile Neigung nach Norden. Dann aber biegt er sich in horizontale Lagerung rasch um, wobei er von kleinen Sprüngen durchsetzt wird. Kleine Flexuren stören die horizontale Lagerung gegen Süden nur wenig. Die Auflagerung des Sparagmites ist nicht aufgeschlossen, aber an der Bahnlinie steht dieser nach kurzer Unterbrechung des Aufschlusses an und hebt sich aus seiner horizontalen Lage weiter gegen Süden nur allmählich in die Höhe, so daß er schwach nach Norden einfällt und mitsamt seinen liegenden Schiefen auch hier eine flach muldenförmige Lagerung hat. Leider konnte ich den Bahneinschnitt von da noch weiter bis zur Station Ring nicht begehen wegen der Gefahr von dem Aufsichtspersonal bemerkt zu werden. Aber Björlykke hat diesen Teil beschrieben (l. c. 1905 S. 27). Er gibt ein Profil, wonach der Sparagmit mit 30° nach Norden geneigt ist und eine Einlagerung von grünlichem Schiefer einschließt. Eine steile Verwerfung schneidet diese Schichten ab und es folgt von neuem Sparagmit mit einer Lage von grünem und chokoladefarbigem sandigem Schiefer im Liegenden, von dem er meint, er könne wohl das Hangende des Birikalkes sein. Doch liegt dieser Schiefer nicht ganz konkordant zum Sparagmit sondern ist von ihm durch eine flache nordfallende

Kontaktfläche getrennt, die Goldschmidt (S. 22 Fig. 6) photographiert und mit Recht als eine Verschiebungsfläche bezeichnet hat. Goldschmidt bezeichnet diesen kalkfreien Schiefer kurzweg als Birikalk, während Björlykke ihn mit dem oben erwähnten Schiefer bei Kilometer 161 identifizierte und nur die Vermutung ausspricht, es möchten beide demselben Horizont des Birikalkes angehören. Ein Beweis für diese Annahme ist jedoch nicht erbracht und ich halte diese Annahme auch nicht für wahrscheinlich, weil der wirkliche Birikalk im Norden des Einschnittes nach den Mitteilungen von Björlykke zumeist nach Norden einfällt, zu kleinen Falten zusammengeschoben ist und aus einer Wechsellagerung von dunklen Kalk- und Tonschiefern besteht, die auch bis 3 m lange Kalklinsen einschließen. Daraus ergibt sich, dass eine konkordante Auflagerung der kalkfreien, den Sparagmit unterlagernden sandigen Schiefer auf dem Birikalk nicht beobachtet ist.

Andererseits ist es recht auffallend, daß nicht nur in diesem Eisenbahneinschnitt zu beiden Seiten, sondern, wie wir früher gesehen haben, auch bei Trätsveen die Sparagmitdecke zuunterst oder wenigstens in dem untersten Teil, der sich beobachten läßt, eine ziemlich mächtige Schieferlage besitzt, die anscheinend zur Sparagmitformation selbst gehört und alle tektonischen Bewegungen mit dieser durchgemacht hat. Solange ein stratigraphischer Zusammenhang mit dem Birikalk nicht ganz sicher nachgewiesen ist, darf man diesen Schiefer nicht als eine obere Lage des Birikalkes ansprechen. Derselbe Schiefer kommt auch bei Kjos und Herberg am Südgehänge des Lunde-högda in konkordanter Lage unter dem Sparagmit vor, wo er von Goldschmidt ebenfalls als Birikalk kartiert worden ist, ob- schon er ganz kalkfrei ist.

Geht man von Kjos die neu angelegte Straße nach Kjets-berget herauf, so sieht man, kurz bevor die Sparagmitfelsen an die Straße herantreten, in einer kleinen Grube die Biri- kalke aufgeschlossen unter einer Decke von Gehängeschutt. Sie fallen nach Norden ein, sind aber stark zerrüttet und ver- wittert, so daß ein genaues Streichen und Fallen sich nicht

messen läßt. Ob dies nur der Verwitterung und dem Gehängedruck zuzuschreiben ist, oder ob die Überschiebung der Sparagmitdecke den Kalkschiefer so zerrüttet hat, mag dahingestellt bleiben. Dann folgt eine kurze Strecke nur Gehängeschutt bis zum Sparagmit, dessen dicke Bänke deutlich unter etwa 45° nach Norden einfallen. Zuunterst aber treten unter denselben noch grünliche, im frischen Bruch schwärzliche, ganz kalkfreie Schiefer hervor, die dünne Lagen von sandigem Schiefer einschließen und petrographisch den Schiefern im Eisenbahneinschnitt bei Kilometer 161 sehr ähnlich sehen und auch den-

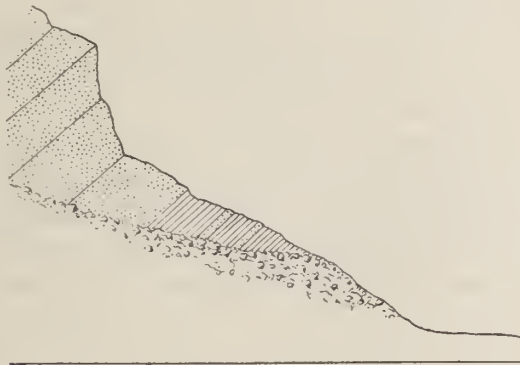


Fig. 13. Sparagmit mit seiner Unterlage von kalkfreien Schiefern am Wege von Kjos nach Kjetsberget.

jenigen bei Traetsveen. Sie liegen mit den Sparagmitbänken völlig konform und haben genau dasselbe Streichen und Einfallen, so daß sie als zur Sparagmitformation gehörig betrachtet werden müssen. Ihre stratigraphische und tektonische Beziehung zu den weiter unten anstehenden Birikalken ist jedoch nicht zu erkennen.

Über dem Gute Herberg, das auf echtem kalkreichem Birikalk erbaut ist, führt ein Fußweg über den Berg nach Svarungstad. Da wo ein kleines Bächlein neben dem Weg herabkommt, steht an der unteren Waldgrenze ein kalkfreier dunkler, grünlich anwitternder Schiefer an, der $N 75^{\circ} O$ streicht und steil nach Norden einfällt. Weiter oben sind ihm einige bis fußdicke, sehr harte, quarzitisches graue Bänke eingelagert und

dann folgt darüber der Sparagmit, der, wie man sich auf der Paßhöhe überzeugen kann, ebenfalls deutlich nach Nord geneigt ist.

Die Überschiebungsfläche liegt jedenfalls unter diesen Schiefen, die nicht als die tiefste Lage des Sparagmites, sondern nur als eine Einlagerung in demselben aufzufassen sind, wie es solche an anderen Stellen gar viele in der Sparagmitformation gibt, wovon man sich leicht zwischen Havik und Bröttum oder bei Hellerud an der Fahrstraße nördlich von Biri überzeugen kann.

Aus alledem geht hervor, daß die Sparagmit- und Quarzsandsteinmasse von Lundehögda, Vardeaasen und Syljuaasen eine große Decke darstellt, die über die Ost-West streichenden Falten des Birikalkes herübergeschoben worden ist. Mit der Decke von Biskopaasen hängt sie wahrscheinlich auch heute noch zusammen, denn die Schiefer, Konglomerate und Sparagmite von Persveen, Byen und Mjösund am Nörensjoen sind höchstwahrscheinlich die noch stehengebliebenen und von Moränen nicht bedeckten Teile des Verbindungsstückes.

e) Die Sparagmitdecken von Jöraasen und Storsvepladse.

Steigt man von Ring aus ostwärts am Berggelände herauf gegen Huleberg, so kann man unter der mächtigen Moränendecke an vielen Stellen den Birikalk hervortreten sehen mit steilen, west-ostwärts streichenden Falten. Das geht so bis zu einer Höhe von etwas mehr als 300 m, dann aber ist dieser Kalk verschwunden und an seine Stelle tritt Sparagmit. Er bildet scheinbar keine zusammenhängende Decke wie bei Lundehögda, sondern ragt nur in kleinen Hügeln oder noch kleineren Rundhöckern unter der Moräne hervor, aber unzweifelhaft hängen sie alle unter dieser Moränendecke auch heute noch zusammen. Auf meinem Kärtchen habe ich nach Goldschmidts und meinen Beobachtungen eine Anzahl dieser Vorkommnisse eingetragen, ich glaube aber, daß eine ganz sorgfältige Untersuchung noch viel mehr Aufschlüsse ergeben würde. Gegen

Südwest senkt sich diese Decke besonders tief bis auf etwa 220 m Meereshöhe herab und hier liegt bei Kamperud ein wichtiger Aufschluß, der schon von Kjerulf beschrieben worden ist.

Von Nordost gegen Südwest folgen hier Aufschlüsse von Sparagmit, Birikalk und Quarzsandstein und zwar in solcher Weise, daß man glauben könnte, der Quarzsandstein sei das älteste und der Sparagmit das jüngste. Münster ist dieser



Fig. 14. Aufschluß bei Kamperud. Links Sparagmit, rechts Birikalk.

Schwierigkeit dadurch aus dem Wege gegangen, daß er die Stelle auf seiner Karte weiß ließ, als ob da nichts wie Moräne zu sehen wäre. Kjerulf hatte geglaubt, daß bei Kamperud der Birikalk in normaler Weise von Sparagmit unter und überlagert werde, aber Goldschmidt hat ganz richtig festgestellt, daß der untere Sparagmit Kjerulfs hier eocambrischer Quarzsandstein ist. Da er aber aus dieser Beobachtung den Schluß nicht ziehen zu dürfen glaubte, daß der Birikalk jünger als der Quarzsandstein, also cambrisch sein müsse, hat er in das kleine Tälchen, welches den Kalk von dem Sandstein trennt, eine Verwerfung gelegt (s. l. c. Fig. 5 S. 20). Es ist jedoch sehr gut möglich, daß hier der Birikalk wirklich ganz normal auf dem Quarzsandstein ruht, denn zwischen beiden liegt nach Goldschmidts Angaben noch eine grünliche Schieferlage, die jenem Olenellusschiefer petrographisch sehr ähnlich sieht, in dem Goldschmidt bei Smedstadviken den Olenellus Kjerulfi gefunden hat. Außerdem habe ich mich davon überzeugt, daß der „obere“ Sparagmit den Birikalk nicht konkordant überlagert.

Aus der nebenstehenden Figur ersieht man, daß auch hier der Kontakt beider Gesteine, die sich einander bis auf wenige Meter nähern, nicht aufgeschlossen ist. Aber während der Birikalk, auf dem die Hütte steht, N 70° O streicht und mit

35° nach NW einfällt, liegt der Sparagmit viel flacher und fällt nur unter etwa 15° nach Norden ein. Also besteht Diskordanz sowohl im Streichen wie im Fallen. Die Sparagmitfelsen liegen orographisch höher und ihre Grenze gegen den Birikalk läuft von NW nach SO, mithin muß der Birikalk mit seinem nordöstlichen Streichen unter den Sparagmit in den Berg hineinstreichen und damit ist die Deckennatur des letzteren hinreichend charakterisiert.

Die 340 Meter-Waldhöhe des Storsvepladsen konnte ich nicht mehr besuchen und ich muß mich deshalb mit Bezug auf sie ganz an die Beschreibung halten, die Goldschmidt gegeben hat. Ich entnehme derselben (l. c. S. 16—17), daß zwischen Forstuen, Storsvepladse und Olstad Sparagmit mit viel Geröllen die Höhen bedeckt, ohne daß deutliche Bankung wahrzunehmen ist. Da bei horizontaler Lagerung die Bankung im Sparagmit gewöhnlich nur schwer zu erkennen ist, besonders wenn er nur in Rundhöckern ansteht, und da ferner dieser Sparagmit eine so große horizontale Ausbreitung besitzt, so schließe ich daraus, daß es sich hier wirklich um eine flache Decke handelt, die über das aus Sparagmit und Quarzsandstein bestehende Moelven-Gewölbe geschoben ist.

Diese Decke würde dann wohl als die südliche Fortsetzung der großen Decke aufzufassen sein, die wir bereits kennen gelernt haben und die sich von Kamperud nordwärts bis zum Biskopaasen erstreckt.

f) Die Sparagmitdecke von Braastad.

Der Sparagmit, den Münster im Norden von Gjøvik eingetragen hat und der sich ebenfalls durch seine starke Lagerung auszeichnet (s. S. 8), gehört möglicherweise auch einer Decke an, die diskordant über den Silurmulden von Vardal ausgebreitet liegt. Dafür sprechen wenigstens die Beobachtungen, die ich in dortiger Gegend machen konnte und über die ich eingangs berichtet habe. Um darüber völlige Sicherheit zu erlangen, sind allerdings noch eingehendere Untersuchungen erforderlich und ich will mich deshalb hier nur auf

diese Vermutung beschränken, um damit anzudeuten, daß die Südgrenze der Überschiebungen von Lundeberget und Melbyaasen möglicherweise so weit nach Süden vorspringt.

3. Die Verwerfungen.

Bisher haben uns nur die Faltungen und Überschiebungen beschäftigt und es stellte sich dabei heraus, daß die meisten der von Goldschmidt zur Erklärung der Tektonik zu Hilfe genommenen Längsverwerfungen, soweit sie nicht auf sicherer Beobachtung der Verwerfung selbst beruhen, unnötig geworden sind. Damit soll jedoch die Existenz von Längsverwerfungen in unserem Gebiete durchaus nicht in Abrede gestellt werden, nur scheint es mir, daß sie keine sehr große tektonische Bedeutung haben. Verschiebungen auf Zerreißungsflächen sind wohl in Menge und besonders in dem Sparagmit zu sehen, und auch in dem stark gefältelten Birikalk sind sie eine gewöhnliche Erscheinung, aber meist lassen sie sich nur auf kurze Erstreckung hin verfolgen, wahrscheinlich weil sie nicht weiter fortsetzen und nur zu kleinen Verschiebungen geführt haben.

Die Längsverwerfung bei Smedstadviken zwischen dem Sparagmitlager und dem Birikalk erscheint vielleicht nur als eine solche und dürfte eher zur Gruppe der Überschiebungen gehören. Eine kleine Querverwerfung hat Goldschmidt von ebenda beschrieben (Fig. 12). Sie ist sehr deutlich zu sehen aber von geringer tektonischer Bedeutung.

Ich habe sie auf dem geologischen Kärtchen (Tafel I) anzudeuten versucht, obwohl der Maßstab dazu eigentlich zu klein ist. Auf nachstehender Figur ist sie und eine östlich von ihr liegende in größerem Maßstab eingetragen. Über dem im Süden anstehenden Quarzsandstein, der am Seeufer die Strandfelsen bildet und dessen Bänke, N 60—80° streichend, mit 45° nach N einfallen, folgt der alte schiefrige Birikalk. Etwa 200 m ostwärts davon ist in einem Eisenbahneinschnitt dieselbe Aufeinanderfolge sehr gut aufgeschlossen, nur stehen die Schichten

15. Abhandlung: A. Rothpletz

dort ganz steil. Der Quarzsandstein, mit Schiefer und kleinstückigem Quarzkonglomerat wechsellagernd, streicht $N 60^{\circ} O$ und fällt mit 70° nach Norden. Er ist in einer Breite von

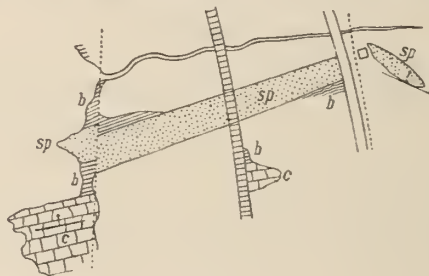


Fig. 12. Links das Seeufer, rechts die Fabrstrasse Møelven-Ring, in der Mitte die Eisenbahnlinie, im Norden der Smedstadelven. sp Sparagmit, c Quarzsandstein, b Birikalk. Die zwei N-S gerichteten punktierten Linien Querverwerfungen.

35 m aufgeschlossen und stellt sich gegen seine Hangendgrenze steiler, worauf konkordant auf eine Erstreckung von 10 m der Birikalk folgt, der gegen Norden hin sich langsam noch steiler stellt.

Am Seeufer ist dieser Birikalk nur etwa 50 m mächtig und wird im Hangenden von einem ebenfalls etwa 50 m breiten Streifen von Sparagmit abgelöst, aber der Kontakt beider Gesteinsarten ist nicht aufgeschlossen, so daß es ungewiß bleibt, ob sie konkordant gelagert sind oder ob eine Störungsfläche dazwischen liegt. Letzteres ist aber das Wahrscheinlichere, weil sonst überall der Sparagmit älter als der Birikalk ist. An der Fahrstraße im Osten der Eisenbahn ist der Kontakt nochmals zu sehen, aber auch nicht gut aufgeschlossen. Gleichwohl zeigt sich der Birikalk dort recht verdrückt, was vielleicht als die Folge einer Verwerfung oder Überschiebung aufzufassen ist.

Am Seeufer liegt jedoch zweifellos über diesem Sparagmit konkordant echter Birikalk, der sich von da mit wenigen Unterbrechungen, die durch die Sandablagerungen auf der alten Seeterrasse bedingt sind, bis zur Helgeberg-Halbinsel verfolgen läßt.

Geht man die Hangend-Grenze des Sparagmites von West gegen Ost ab, so gewahrt man alsbald eine Querverwerfung, die N 5° O streicht und mit 45° nach Osten geneigt ist. Auf dieser Spalte ist der Sparagmit im Osten um 10 m nach Süden zurückgeschoben. Folgt man diesem Sparagmitzug, der das Südgehänge des Tälchens bildet, ostwärts herauf bis zur Fahrstraße, dann hört er dort auf und zeigt nur in seinem Liegenden den schon erwähnten Birikalk. Auf der anderen Seite der Straße hingegen erhebt sich hinter einer Hütte ein kleiner Felszug von Sparagmit da, wo eigentlich die Fortsetzung des Birikalles zu erwarten wäre. Seine Bänke streichen N 60° W und sind mit nur 20° nach NO geneigt. Dieser plötzliche Wechsel spricht für eine Querverwerfung, die mit der Straße zusammenfällt und vielleicht wie diejenige von Smedstadviken Nord-Südrichtung besitzt.

Eine ähnliche Störung macht sich weiter im Süden bei Sten bemerkbar. Die Silurmulde von Skarpsno, deren Nordflügel steil steht, während der Südflügel gegen Norden einfällt, setzt sich mit ihrem Kern von Orthocerenkalk über die Fahrstraße nach Sten fort. Im Westen dieses Gutes rückt sie aber plötzlich um einen kleinen Betrag nach Norden vor, was auf eine ebenfalls nordsüdliche Querverwerfung hinweist. Verlängert man diese gegen Norden über Moelven hinaus, dann fällt sie mit der östlichen Verwerfung von Smedstadviken zusammen. Es ist dieser Zusammenhang natürlich nur eine Vermutung, aber es liegen keine Beobachtungen vor, die gegen dieselbe sprechen. Sehr bedeutend können die Gebirgsbewegungen, die auf ihr erfolgten, nicht gewesen sein, aber immerhin gilt dies mit Sicherheit nur für den Betrag der horizontalen Verschiebung, während für die Größe einer in vertikaler Richtung erfolgten Absenkung keinerlei Anhaltungspunkte gegeben sind.

Für die von Goldschmidt angenommenen Längsverwerfungen von Skotta und von Ekredalen habe ich keine Beweise gefunden, doch will ich besonders letztere keineswegs in Abrede stellen, da ich die für sie entscheidenden Punkte am Hoiberget

nicht besucht habe. Auf der Westseite des Mjösen hat Münster eine Ost—West streichende Verwerfung im Süden von Shulhus eingezeichnet, doch hat er sie auf seinen Profilen (l. c. Pl. I, Fig. 3 u. 4) mit einem ? versehen. Sie ist nicht beobachtet, und ihre Annahme sollte nur, wie schon (S. 40) erwähnt, das plötzliche Abschneiden des Sparagmites oberhalb Skulhus erklären, das für Münster natürlich sonst ganz unverständlich geblieben wäre, da er die Deckennatur dieses Sparagmites ja nicht erkannt hatte. Auch Goldschmidt hat auf seiner Karte diese Verwerfung mit einem ? eingetragen, fügte jedoch noch eine Querverwerfung hinzu, die von Skulhus über Onset nach Krämmerodden läuft und die den Quarzsandstein im Osten von dem Birikalk im Westen trennt. Er korrigierte damit die Münstersche Karte insoferne mit vollem Recht, als er deren „älteren Sparagmit“ als Quarzsandstein eintrug, was er auch ohne Zweifel ist. Aber er übersah, was Münster in seiner Karte ganz richtig eingetragen hatte, daß der Birikalk von Klundbyberget nicht nur zwischen Krämmerodden und Skulhus regelrecht über dem Quarzsandstein liegt, sondern daß er sich auch vom Skulhus weg bis ans Seeufer herabzieht, wodurch jene Querverwerfung ganz unmöglich wird. Eine wirkliche Querverwerfung, deren horizontale Verschiebung zwischen Berg und Jolökken im Norden von Biri ungefähr 600 m beträgt, macht sich hingegen sehr deutlich bemerkbar, sobald man der Grenze zwischen Sparagmit und Birikalk nachgeht. Das Streichen der senkrecht aufgerichteten Schichten ist hier durchweg ein ostwestliches; der bogenförmige Grenzverlauf, wie ihn Münsters Karte angibt, somit von vornherein ganz unwahrscheinlich.

Wegen der mächtigen Überdeckung durch Moräne und postglaziale Seeabsätze ist die südliche Fortsetzung dieser Querverschiebung leider nicht genau festzulegen. Wahrscheinlich verläuft sie in NNW—SSO Richtung, dem Mjösen parallel, über Biri und Nysveen in das Hochtal zwischen Melbyaasen und Klundbyberget und hat zu dessen Entstehung eine genetische Beziehung.

Allen drei von mir beschriebenen Querverwerfungen ist es gemeinsam, daß sie wenigstens annähernd dem Mjösen parallel laufen und daß sie sicher jünger als die Gesteinsfaltungen und Überschiebungen sind. Ob sie auf die Entstehung und Ausgestaltung des Sees einen maßgebenden Einfluß ausgeübt haben, ist möglich, doch reichen meine Beobachtungen nicht aus, um dies festzustellen.

IV. Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Sparagmit und Quarzsandstein bilden eine gleichalterige mächtige Ablagerung, auf der das Cambrium liegt. Sie können somit als eocambrisch oder praecambrisch bezeichnet werden. Der Sparagmit herrscht im Norden, der Quarzsandstein im Süden vor und beide sind durch Wechsellagerungen mit einander verbunden.

2. Das Cambrium beginnt im Süden über dem Quarzsandstein mit den Olenellusschiefern, und darüber liegen die Schiefer und Kalksteine der Paradoxides- und Olenusstufe. Im Norden des Ringsaker-Biri-Kartenblattes tritt an deren Stelle der Birikalk, der teils auf Quarzsandstein, teils auf Sparagmit liegt. Er ist als eine besondere Facies des Cambriums aufzufassen.

3. Im Süden wird das Cambrium von untersilurischen Schiefen und den Orthocerenkalken überlagert, während im Norden über dem Birikalk der Krämmeroddenkalk folgt, der somit das Silur vertritt. Ob die Grenze zwischen diesen Beiden genau mit derjenigen zwischen Cambrium und Silur zusammenfällt, bleibt ungewiß.

4. Noch weiter im Norden, außerhalb unseres Kartenblattes, im Gausdal liegt der Birikalk ebenfalls auf Sparagmit, aber über ihm folgt kein Krämmeroddenkalk, sondern zunächst noch eine Lage von Quarzsandstein und Tonschiefer und dann erst der graptolithenführende untersilurische Tonschiefer, der in seinen höheren fossilfreien Schichten schieferige Quarzsandlager aufnimmt. Das Silur ist somit hier in einer kalkfreien Facies entwickelt und die Grenze gegen das Cambrium muß

über dem oder in dem Quarzsandstein über dem Birikalk gesucht werden.

5. Alle Stufen vom Eocambrium herauf bis ins Silur zeigen innerhalb des untersuchten Gebietes einen bedeutenden Facieswechsel, der sich in der Richtung von Nord nach Süd vollzieht. Auch der Fossilreichtum wechselt und nimmt von Süden gegen Norden Hand in Hand mit dem sich vollziehenden Gesteinswechsel rasch ab.

5. Die Konglomerate des eocambrischen Sandsteines führen im Süden fast nur Quarzgerölle, im Norden werden die Gerölle nicht nur größer, sondern es stellen sich darunter viele ein, die aus Granit, Gneiß, Quarzsandstein, Quarzit, Kalkstein und Oolithen bestehen. Diese polygenen Konglomerate kommen nur im Sparagmit vor und sind besonders mächtig in den oberen Horizonten entwickelt („Birikonglomerat“).

7. Daraus geht hervor, daß es in Skandinavien präcambrische Sandstein- und Kalksteinlager gegeben hat, die noch älter als der eocambrische Sparagmit sind und auf das Vorhandensein einer präcambrischen Fauna und Flora hinweisen.

8. Nach Ablagerung dieser ganzen Serie sind alle Schichten gefaltet worden — im Norden bei Gausdal zu großen weitgespannten Mulden und Sätteln, im Süden bei Biri und Ringsaker zu vielen kleineren Falten. Im allgemeinen streichen diese Falten ost-westlich, doch gibt es im einzelnen auch Ausnahmen unter denen besonders die Klundbybergfalte auffällt.

9. Die Faltungsbewegungen haben im Sparagmit und Quarzsandstein teils nur zu Verbiegungen der Gesteinsbänke geführt, deren Spannungsweite, der Sprödigkeit und Mächtigkeit der Gesteinsmasse entsprechend, eine sehr große und nach Hunderten bis Tausenden von Metern messende ist, teils sind wohl infolge forcierter Pressung zahlreiche Zerreißungsflächen entstanden, auf denen Verschiebungen eintraten. Die hangenden, an sich biegsameren Schiefer und Kalksteine des Cambriums und Silurs folgten im ersteren Falle ziemlich gleichmässig den Verbiegungen ihrer Unterlage, im zweiten Falle jedoch bildete sich eine Art von Diskordanz in der Weise

heraus, daß die hangenden Schichten durch enge Faltung und Fältelung den Schollenverschiebungen der Unterlage sich anpaßten, solange es möglich war.

10. Fortgesetzter horizontaler Schub führte gegen Süden in der eocambrischen Unterlage zu großen, schräg aufsteigenden Bruchflächen, auf denen sich die nördliche Gebirgsmasse über die südliche heraufschob. So entstand die Schubdecke von Sparagmit und Quarzsandstein, welche im Bereiche unseres Kartenblattes auf eine Erstreckung von wenigstens 11 km über dem basalen Faltengebirge liegt.

11. Da diese Überschiebung sehr alt ist, hat die Erosion seither Zeit genug gefunden, große Teile der überschobenen Massen wieder verschwinden zu machen. Nur im Osten unseres Kartenblattes ist noch ein größeres zusammenhängendes Stück erhalten geblieben, während im Westen nur einzelne inselförmige Reste als Zeugen ihrer ehemaligen weiten Ausdehnung stehengeblieben sind. Aber auch von den erhaltenen Teilen wurden die obersten Schichten — das Silur und Cambrium — ganz und von den eocambrischen Quarzsandsteinen das meiste entfernt, so daß zumeist nur noch der Sparagmit übrigblieb.

12. Diese ungeheure Massenbewegung hat auf ihre Unterlage einen starken Einfluß ausgeübt, der zur Herausbildung von Druckschieferung, von zahllosen Drucksuturen und Gleitflächen in den Schiefen und Kalksteinen des Cambriums und Silurs, sowie wahrscheinlich auch zur Überkippung der Falten nach Süden und zur Breccienbildung im Krämmeroddenkalk führte.

13. Die Oberfläche des basalen Gebirges, auf der die Schubmasse ruht, ist nicht eben, sie zeigt aber auch keine einheitliche Neigung nach irgend einer Himmelsrichtung hin. Zur Entscheidung, ob die heutige Form der Schubfläche noch die ursprüngliche ist oder ob spätere Gebirgsbewegungen sie wesentlich verändert hat, fehlen vorerst Anhaltspunkte.

14. Kleine nachträgliche Veränderungen sind jedoch nachweisbar und bestehen in den Verschiebungen, die auf nord-südlich streichenden Verwerfungsspalten, wahrscheinlich in sehr

viel jüngerer Zeit, eingetreten sind und durch die die Orographie des Landes, vielleicht auch die Tal- oder Seenbildung des Mjösen beeinflusst worden sind.

V. Tektonischer Ausblick.

Die vorliegende Arbeit hatte ich nur in der Absicht begonnen, mir über die Altersverhältnisse des Sparagmites und Birikalkes Klarheit zu verschaffen. Ich kam dabei zu der unerwarteten Überzeugung, daß in der Umgebung von Biri und Ringsaker eine große Überschiebung vorhanden ist, deren Ausdehnung weit über die Grenzen meines Untersuchungsgebietes übergreift.

Da wäre es nun sehr wünschenswert zu wissen, wo denn die Wurzel dieser Überschiebung liegt, welche Ausbreitung sie hat und wo ihr Stirnrand zu suchen ist.

Zwar ergab sich, daß sie von irgendwoher aus Norden gekommen sein muß und daß der Sparagmit bei Gjøvik möglicherweise noch zu dieser Schubdecke gehört, in welchem Falle ihr Stirnrand sehr weit im Süden läge. Aber diesem Ergebnissen haften noch so viele Unsicherheiten an, daß manche vielleicht sagen werden, die ganze Sache sei noch nicht spruchreif und man könne erst dann an die Existenz einer Überschiebung bei Biri und Ringsaker glauben, wenn erst jene erwähnten dunklen Punkte völlig aufgeklärt sein werden.

Einer solchen Stellungnahme könnte ich nur dann Berechtigung zusprechen, wenn anderweitige Tatsachen bekannt wären, die gegen eine Überschiebung überhaupt sprechen. Dies ist aber nicht nur nicht der Fall, sondern es läßt sich im Gegenteil nachweisen, daß schon längst Tatsachen bekannt sind, die die Annahme einer Überschiebung geradezu herausfordern.

In dieser Hinsicht möchte ich zunächst an die Arbeit von Goldschmidt erinnern, der zu dem Ergebnis kam, daß der Sparagmit von Syljuaasen bis Kamperud eine überschobene Scholle sein müsste, falls der Birikalk wirklich cambrischen und unter-silurischen Alters sein sollte (l. c. S. 40). Der Tatsache, daß

bis jetzt keine Fossilien im Birikalk gefunden worden sind, legte er allerdings ein so großes Gewicht bei, daß er daraus einen Ablehnungsgrund gegen die Überschiebung ableitet. Und doch hatte er selbst festgestellt, daß der untere Birikalk bei Eriksrud wie cambrischer Alaunschiefer aussieht und nicht, wie Münster angab, auf älterem Sparagmit liegt, sondern daß dieser Sparagmit eocambrischer Quarzsandstein ist.

Dieses zu Gunsten einer Überschiebung sprechende Argument hat er allerdings durch die Annahme einer Verwerfung, die er zwischen den Birikalk und Quarzsandstein legt, entwertet, ich habe mich aber davon überzeugt, daß diese Verwerfung nicht existiert. Man kann also wohl behaupten, daß Goldschmidt wichtiges Material gesammelt hat, das nicht gegen sondern für die Überschiebung spricht.

Schon vor 8 Jahren hat in viel bestimmterer Weise, wenn auch nicht für die Umgebung des Mjösen, so doch für ein sehr großes Gebiet weiter im Osten Schiötz¹⁾ Tatsachen zusammengetragen und den Schluß daraus gezogen, daß dort eine große Überschiebung existieren müsse, durch welche der Sparagmit auf eine Erstreckung von 20 km über das Silur und Cambrium geschoben worden sei. Wenn seine Auffassung begründet ist, dann ergibt es sich ganz von selbst, daß die Überschiebung am Mjösen die westliche Fortsetzung von jener ist.

Erst nachdem ich meine Aufnahmen vollendet, Karten und Profile gezeichnet hatte und der Überschiebung sicher war, bin ich an das Studium der Erläuterungen gegangen, die Schiötz seiner Karte beigegeben hat. Die Karte hatte ich schon vor 5 Jahren betrachtet, aber aus ihr allein war es mir nicht möglich geworden ein klares Bild von der Tektonik zu gewinnen. Der Grund liegt darin, daß die „overskjövene partier“ ringsum von einer in sich zurücklaufenden Grenzlinie umgeben sind, als ob die ganze Decke nur eine auf dem basalen Gebirge ruhende Insel sei. Man kann also aus der Karte allein gar nicht erraten, woher der Schub eigentlich gekommen sein soll. Auch nur ein einziges geo-

¹⁾ O. E. Schiötz, Den sydøstlige del op Sparagmit-Kvarts-Fjeldet i Norge. Nr. 35 Norges geologiske undersøgelse. 1903.

logisches Profil hätte genügt um Klarheit zu bekommen und den Fehler zu entdecken, der darin liegt, daß Schiötz die Schubdecke von ihrer nördlichen Wurzel ebenso abgegrenzt hat als da, wo sie gegen Süden überhaupt endet. Aber leider ist der Arbeit kein solches Profil beigegeben und deshalb habe ich es versucht in Fig. 6 der Taf. II ein solches zu zeichnen auf Grund der Karte und des Textes, selbst auf die Gefahr hin, dabei die Meinung des Verfassers nicht ganz erraten und zu schematisch gezeichnet zu haben. Ich habe mich in den norwegischen Text zu vertiefen gesucht, soweit es mir meine mangelhafte Kenntnis der norwegischen Sprache gestattete, und war erstaunt zu sehen, daß Schiötz auch in stratigraphischer Beziehung zu ganz ähnlichen Ergebnissen, wie ich selbst, schon vor 8 Jahren gelangt ist. Das war für mich eine sehr angenehme Entdeckung.

Allerdings hat sich K. O. Björlykke¹⁾ in seinem bekannten Werke über den geologischen Bau Zentral-Norwegens vor 6 Jahren entschieden gegen die Schiötzsche Stratigraphie und die Überschiebung ausgesprochen, und das mag auch der Grund sein, weshalb die Auffassung von Schiötz keinen Anklang gefunden und sich mir deren Bedeutung nicht schon früher aufgedrängt hat.

Die auch von Björlykke nicht in Abrede gestellte Tatsache, daß in dem Gebiete zwischen Glommen und Trysil-Elven der Sparagmit an zahlreichen Stellen orographisch höher liegt als die angrenzenden und versteinierungsführenden cambrischen Schichten, hat er durch Zuhilfenahme von gewöhnlichen Verwerfungsspalten zu erklären versucht, auf denen die letzteren in das Niveau des älteren Sparagmites eingesunken seien. Gesehen hatte er diese Spalten aber nicht, wenn anders ich seine Ausführungen richtig verstanden habe, während Schiötz wenigstens in einem Fall die Überlagerung wirklich nachgewiesen hat (l. c. S. 39 Fig. 10). Der Mangel an Beobachtungen des Kontaktes ist bedingt durch die Ungunst

¹⁾ Det Centrale Norges fjeldbygning. Norges geologiske undersøgelse Nr. 39. 1905.

des Geländes, dem tiefe Einschnitte fehlen und das von Moränen und Sumpf meist überdeckt ist. Wenn man aber den unregelmässig bogenartigen Verlauf der Sparagmitgrenzen, wie ihn die Karte darstellt, und die Verteilung der an den Sparagmit anstoßenden cambrischen Gesteine ins Auge faßt, dann wird es klar, daß man fast für jede Kontaktstelle eine neue Verwerfungsspalte zu konstruieren hätte und daß diese Spalten kreuz und quer das Gebiet durchziehen müßten. Das ist aber höchst unwahrscheinlich, und es erscheint mir deshalb Björlykkes Erklärung, solange es nicht gelingt, die Existenz dieser Spalten direkt nachzuweisen, nicht genügend begründet.

Da ich jedoch das Gebiet nicht selbst untersucht habe, so will ich auf diese Kontroverse nicht weiter eingehen und nur vom Standpunkte Schiötz' aus die Beziehungen erörtern, die vielleicht zwischen seiner Überschiebung und derjenigen am Mjösen existieren.

Nach Schiötz liegt im SO einer Linie, die Aasta am Glommen mit Tryssil verbindet, das Cambrium direkt auf dem archaischen Gneiß und Granit und befindet sich auch heute noch in annähernd horizontaler Lagerung. Im Nordwesten jener Linie hingegen ist die archaische Unterlage von einer mächtigen Anhäufung von Sparagmit und Quarzsandstein bedeckt, über der zunächst das Cambrium und dann das Silur folgt.

Verlängert man diese Linie gegen SW mit einer nur schwachen Ablenkung nach Süden, so trifft man auf die Stelle bei Gjövik, wo die mächtige Quarzsandsteinformation des Mjösen sich bereits ganz erheblich verringert hat, um wenig weiter im Süden vollständig auszukeilen, so daß das Cambrium unmittelbar auf Gneiß und Granit zu liegen kommt.

Die Linie Gjövik—Aasta—Tryssil bezeichnet also die Südgrenze der Quarzsandstein- und Sparagmit-Ablagerung und Schiötz nimmt an, daß zu jener Zeit im Norden dieser Linie ein tiefes Meeresbecken lag, das allmählich durch Einschwemmungen von Sand und Geröllen eingefüllt wurde, während das Gebiet im Süden jener Küstenlinie absatzfreies Festland blieb. Erst in der cambrischen Zeit habe dann das Meer auch das

Festland überdeckt und so sei es gekommen, daß die Olenellus-schiefer hier unmittelbar auf dem Gneiß, dort auf dem Quarzsandstein abgesetzt wurden. Als nun später nach Absatz der silurischen Sedimente ein horizontaler Schub, der im NNW entstand, alle diese Sedimente in Bewegung setzte, sei zunächst im Norden des archaischen Festlandblockes, der dieser Bewegung einen unüberwindlichen Widerstand entgegengesetzte, eine große faltenförmige Aufwölbung entstanden. Die Massen bäumten sich an diesem Hemmnis auf, bis der Gewölbebogen barst und sein Nordflügel, mit der normalen Aufeinanderfolge seiner Schichten, sich über den abgebrochenen und überkippten Südflügel hinweg auf das alte Festland hinüberschob, auf dem es sich dann noch 20 km landeinwärts fortbewegte. Der sich steigernde Reibungswiderstand hinderte zwar schließlich ein weiteres Vordringen der Schubmasse nach SSO, aber da die Schubkraft noch immer nicht erloschen war, so begannen sich nun die Sedimentmassen weiter im Norden in Falten zu legen und so entstanden der Reihe nach die nach Nord überkippten Falten von Kletten, Brensaeter und Brumundkamp.

Der Stirnrand dieser Überschiebung verläuft nach Schiötz von Tryssil über das Südende des Ossjöen und Grundset am Glommen nach Brumundsalen am Furnesfjord. Von hier läßt er sich auf Grund der älteren geologischen Karten ohne Mühe weiter verfolgen, zunächst in nördlicher Richtung über Björgeberget und Mariendalen bis Tanga und von da in westlicher Richtung über Kompaasen, Smedbakken und Rustad nach Skyalle, wo er sich mit dem von mir beschriebenen Südrand der Mjösen-Schubdecke am Storsvepladsen vereinigt.

Somit hat sich ergeben, daß die Untersuchungen von Schiötz nicht nur mit der Annahme einer Überschiebung am Mjösen in vollem Einklang stehen, sondern daß sie deren Existenz geradezu verlangen und daß sie mit Bezug auf den tatsächlichen Befund mit meinen Untersuchungen sehr gut übereinstimmen.

Diese Übereinstimmung verschwindet jedoch bei der theoretischen Ausdeutung der Tatsachen. Schiötz sieht in dem

Widerstand jenes Festlandblockes gegen horizontale Krustenbewegung die Ursache der in der Schubdecke entstandenen Faltenbildung und zugleich die Ursache der Überschiebung. Am Mjösen ist diese Annahme unmöglich, weil dort das Festlandufer nicht bis zur Wurzel der Schubmasse, ja nicht einmal bis zu deren Stirnrand heranreicht und weil das basale Gebirge, über welches die Schubmasse sich fortbewegt hat, selbst in viele und enge Falten gelegt ist. Das Faltungs- und Überschiebungsphänomen muß deshalb an sich von jenem Festland ganz unabhängig gewesen sein, wenschon eingeräumt werden kann, daß es im Gebiete von Schiötz auf die Form der Falten und der Überschiebung einen modifizierenden Einfluß ausgeübt haben mag.

VI. Der jüngere Sparagmit Björlykkes.

Als ein Ergebnis meiner Arbeit habe ich bezeichnet, daß es am Mjösen zwei altersverschiedene und durch den Birikalk von einander getrennte Sparagmitstufen nicht gibt. Daß dies auch für die Gegend weiter nach Nordosten gilt, hat Schiötz bewiesen.

Björlykke hält zwar an der Zweiteilung für diese Gegend fest, aber er hat selbst nachgewiesen, daß der obere Sparagmit gegen Norden hin verschwinde und über dem Birikalk nicht mehr vorkommt. Dadurch verliert für ihn der jüngere Sparagmit an Wichtigkeit und er hat nur noch eine lokale Bedeutung. Er bezeichnet ihn deshalb auch bloß als eine „obere Sparagmitabteilung“ des Praecambriums, im Gegensatz zu dem eigentlichen jüngeren Sparagmit, dem er devonisches Alter zuschreibt und der, von dem älteren Sparagmit räumlich ganz getrennt, erheblich weiter im Norden und Westen in deutlicher Lagerung über dem Silur vorkommt.

Die Grenze seiner Verbreitung gegen Süden und Osten verläuft vom Hardangerfjord in nordöstlicher Richtung zwischen Storskavl und Hardangerjökkel hindurch nach Slidre in Valdres und zum Dok Vand westlich von Gausdal, biegt von da gegen

Norden um nach Espedal und endet bei Vaage. Längs dieser vielfach und ganz unregelmäßig ausgebuchteten Grenzlinie liegt er auf Schiefen, deren silurisches Alter an vielen Stellen nachgewiesen werden konnte und deren Unterlage aus cambrischen Schichten, praecambrischem Sparagmit und archaischen Gneissen, Graniten u. s. w. besteht.

Die Auflagerungsfläche dieses oberen Sparagmites liegt häufig diskordant auf den Schichten der Unterlage. Bjørlykke schließt daraus auf ein jüngeres, devonisches Alter dieses Sparagmites, während Tørnebohm die Überlagerung als Folge einer Überschiebung deutet, die mithin für das jüngere Alter des Sparagmites nichts beweist. Versteinerungen sind auch in diesem Sparagmit bisher nicht gefunden worden.

Vor fünf Jahren habe ich sein Verbreitungsgebiet an zwei Stellen durchquert, einmal von Voss nach Stalheim und dann von Laerdal nach Valdres. Dem Sparagmit habe ich damals eine besondere Aufmerksamkeit nicht gewidmet, dahingegen habe ich die Überzeugung gewonnen, daß hier große und sehr starke Überschiebungen vorkommen, durch die ganz alte Granite und Gneise über die cambro-silurischen Gesteine hinübergeschoben worden sind.

Bei Laerdal beobachtete ich zu beiden Seiten des in den Fjord einmündenden Tales und ebenso bei Erdalen eine mit 30° gegen NW geneigte Überschiebungsfläche, über der Grundgebirg und Labradorfels und unter der Schiefer liegen, die nach der Auffassung Bröggers ins Cambrium gestellt werden müssen und die bei einer Mächtigkeit von kaum mehr als 30 m unmittelbar auf dem Grundgebirg liegen. Wo die Schubfläche nicht von Schutt bedeckt ist, zeigen die Gesteine in ihrem Hangenden starke Zerklüftung und Merkmale innerer Pressung, wie das nach der Schilderung von Brögger in ähnlicher Weise auch im Hardangervidda der Fall ist.

Bei Borgund sah ich dieselbe Überschiebungsfläche in flacher Lagerung oben durch den Berghang hindurchziehen, während unten die Straße über cambro-silurische Schichten hinläuft, ebenso am Bleia bei Maristuen.

Bei Nystuen ist gerade hinter dem Hotel ein schönes Profil sichtbar. Unten an der Straße steht das Grundfeld an, darüber liegen, ohne daß jedoch die unmittelbare Auflagerung zu sehen wäre, schwarze glänzende Schiefer mit Kalk-einlagerungen, dann Bänke eines dichten Quarzites. Erstere identifiziere ich mit Bröggers Alaunschieferphyllit, wofür insbesondere die Kalkeinlagerungen sprechen, der Quarzit entspricht dann selbstverständlich dem Blauquarz. Statt der silurischen „Phyllitabteilung“, die darüber zu erwarten wäre, sieht man unmittelbar über dem Quarzit ein gneißartiges Gestein mit Adern von rötlichem Feldspat und Quarz, das ursprünglich wohl ein Granit gewesen sein kann, aber in Folge innerer Zertrümmerung ein grauwackenartiges Aussehen und eine Art von Schieferung erlangt hat.

Wo immer ich dieses Deckgebirge zu beobachten Gelegenheit hatte, fand ich Bröggers Angabe bestätigt, daß die Umwandlungen, die es nachweislich erfahren hat, sich nicht ausschließlich durch Druckmetamorphose erklären lassen, sondern daß die in demselben auftretenden Tiefengesteine auf die Sedimentgesteine eine „Regionalmetamorphose“ ausgeübt haben, durch die Kalksteine, Tonschiefer und Quarzsandsteine in Marmor, Glimmerschiefer und Quarzitschiefer umgewandelt worden sind. Da diese Art von Umwandlung aber immer nur auf das Deckgebirge beschränkt bleibt, so schließe ich daraus, daß sie älter ist als die Überschiebung; und daß die Druckmetamorphosen erst nachher während des Schubes eingetreten sind und sich deshalb nicht nur im Deckgebirge, sondern in der Nähe der Schubflächen auch im basalen Gebirge zeigen, wo sie oftmals zu Mylonitbildungen geführt haben.

Auch Björlykke, der aus dieser Gegend mehrere Profile beschrieben hat, wonach über den cambro-silurischen Schichten eine mächtige Lage von Sparagmit und darüber eine Decke von Gabbro und Amphibolith ausgebreitet sind, gibt an, daß auf der Grenze zwischen den unteren Schiefen und dem hangenden Sparagmit die Gesteine stark gepreßt und gefältelt sind, also Mylonitbildung zeigen. Es ist das aber schwer ver-

ständig, wenn man die Überschiebung läugnet und den Sparagmit als eine devonische Ablagerung auffassen will, die sich ursprünglich so auf ihrer jetzigen Unterlage abgesetzt habe.

VII. Die Beziehungen der Mjösenüberschiebung zu der von Hardanger-Valdres.

Wenn schon die Stirnränder dieser beiden Überschiebungen um beinahe 100 km von einander entfernt liegen, so wäre es doch möglich, beide als Erscheinungsformen einer einzigen Schubdecke aufzufassen, in der Meinung, daß die Mjösendecke nur der äußerste, aber durch Erosion von seiner Wurzel abgetrennte Teil der Hardanger-Valdresdecke sei. Und da die letztere offenbar nichts anderes als der südwestliche Teil der großen schwedischen Schubdecke ist, so würde man auf diesem Wege zu einer sehr einfachen Auffassung des großartigen tektonischen Vorganges gelangen.

So verlockend und bequem dies auch erscheinen mag, so glaube ich doch, daß man damit auf einen Irrweg käme. Soweit mir die schwedische Überschiebung aus eigener Anschauung bekannt geworden ist, scheint sie mir aus einer Reihe von übereinander geschobenen Decken zusammengesetzt zu sein. Das mag auch für die Schubdecke in Norwegen gelten. Der Umstand, daß längs der Linie Hardanger-Valdres sehr häufig das Urgebirg nicht direkt auf dem basalen Cambro-Silur liegt, sondern daß sich streckenweise eine oft sehr mächtige Lage von Sparagmit dazwischen schiebt, spricht dafür, daß auch hier wenigstens zwei Decken schuppenförmig übereinander aufgestaut worden sind.

Für die Sparagmitüberschiebung an unteren Glommen und an Osensjö hat Schiötz nachgewiesen, daß sich die Decke in einer Entfernung von etwa 20 km im NW des Stirnrandes in die Tiefe senkt und es liegen keine Anhaltspunkte dafür vor, daß sie weiter nordwärts etwa wieder auftauche. Im Gegenteil hat Björlykke (l. c. S. 106) nachgewiesen, daß bei Hierjöaasen und Storfjeldet bei Sollien also ungefähr 80 km nördlich

des Stirnrandes der Mjösendecke und 40 km südlich des Stirnrandes der Hardanger-Valdres Schubdecke eine weitere Überschiebung vorkommt, durch die der Sparagmit gegen Süden über Silur und Cambrium geschoben worden ist, welche letztere wahrscheinlich der Mjösen-Schubdecke angehören. Es scheint somit, daß im Osten von Gudbrandsdalen mindestens drei Schubdecken dachziegelartig übereinander liegen.

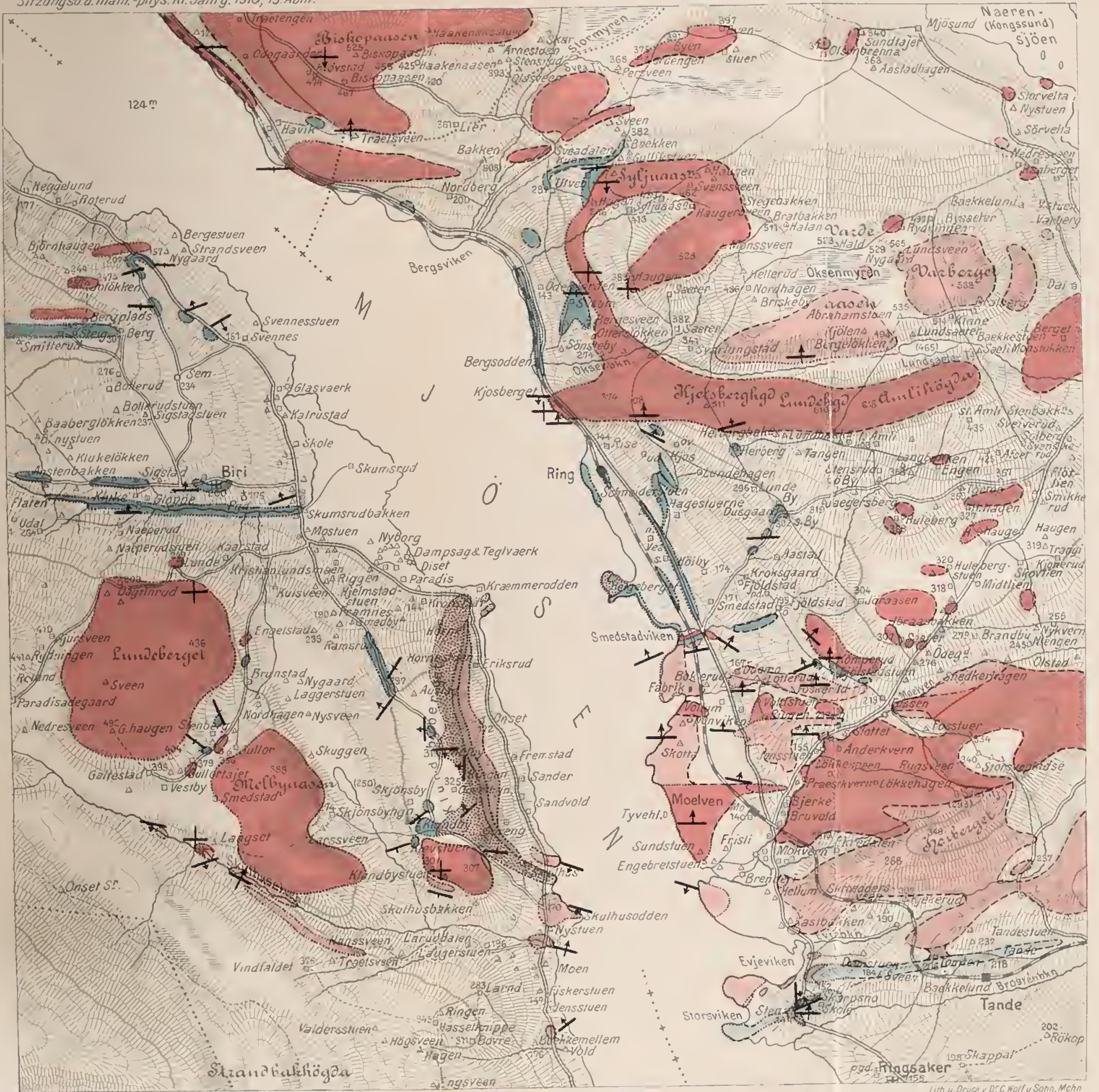
Für die am Mjösen von mir nachgewiesene Schubdecke bin ich allerdings nicht im Stande zu sagen, wo deren Wurzel zu suchen ist, weil ich das Gebiet des oberen Mjösen daraufhin zu untersuchen keine Zeit mehr hatte, aber die Untersuchungen von Schiøtz machen es sehr wahrscheinlich, daß sie irgendwo zwischen Gausdal und Biri liegt und daß sie mit der Wurzel der Hardanger-Valdres-Schubdecke nicht zusammenfällt.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	3
I. Mein Reiseweg	5
II. Zur Stratigraphie	12
III. Zum Gebirgsbau	25
1. Der Faltenwurf	25
a) Die Faltung des Biri- und Kränneroddenkalkes .	27
b) Die Faltung des Sparagmites und Quarzsandsteines	31
c) Die Klundbyberget-Mulde	33
2. Die Überschiebungen	33
a) Die Sparagmitdecke von Lundeberget und Melby-	
aasen	34
b) Die Sparagmitdecke von Klundbystuen	35
c) Die Sparagmitdecke von Biskopaasen	38
d) Die Sparagmitdecke von Syljuaasen und Lundehögda	
e) Die Sparagmitdecken von Jöraasen und Storsve-	
pladse	46
f) Die Sparagmitdecke von Braastad	48
3. Die Verwerfungen	49
IV. Zusammenfassung der Ergebnisse	53
V. Tektonischer Ausblick	56
VI. Der jüngere Sparagmit Björlykkes	61
VII. Die Beziehungen der Mjösen-Überschiebung zu der von Hard-	
anger-Valdres	64

Nachtrag zu Tafel I.

Die punktierten Linien geben die Formationsgrenzen nach meinen Beobachtungen, die gestrichelten Linien nach Goldschmidt (s. S. 5).



Sparagmit
 Quarzsandstein
 Gambrium
 Birikalk
 Silur
 Krämmerodden-Kalk

Höhencurven in 30 Meter Abstand.

M. = 1:50000

300 600 0 1 2 3 4 5 kilometer

Lith. u. Druck v. D. C. Wolf u. Sohn, Mchn

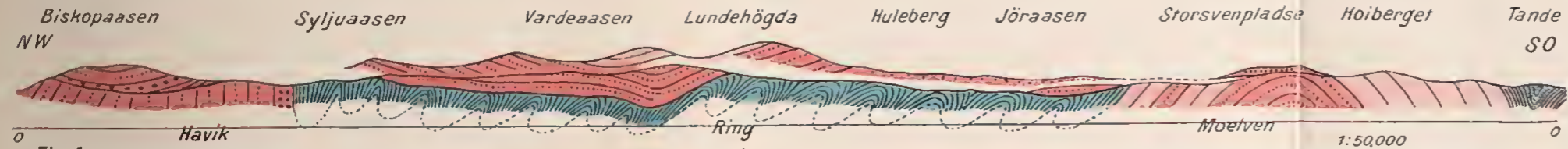


Fig. 1.

- s Silurische Schichten
 - o Orthocerenkalk
 - k Krämmeroddenkalk
 - c Cambrische Schiefer und Kalke
 - b Birikalk
 - q Quarzsandstein
 - sp Sparagmit
 - gn Gneis und Granit (Archaikum)
- } Eocambrium.

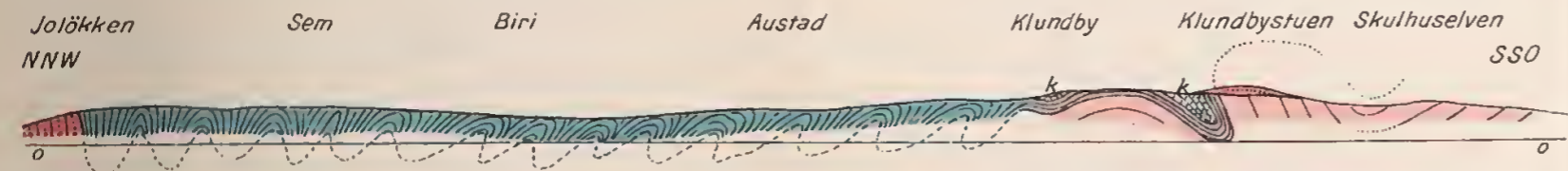


Fig. 2.

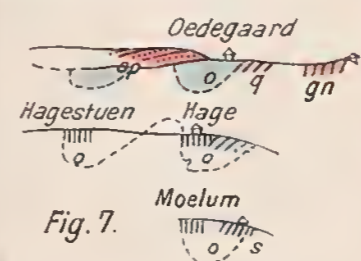


Fig. 7.

Fig. 1-4 und 7-10 im Maßstab 1:50.000.



Fig. 3.

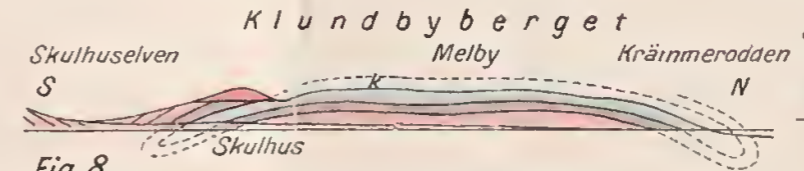


Fig. 8.

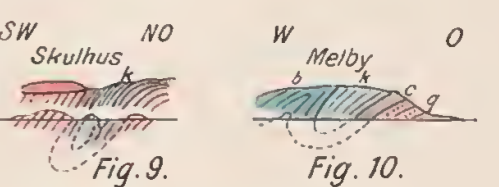


Fig. 9.

Fig. 10.

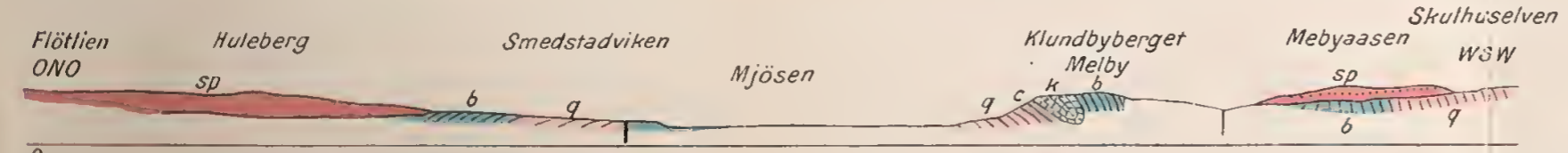


Fig. 4.

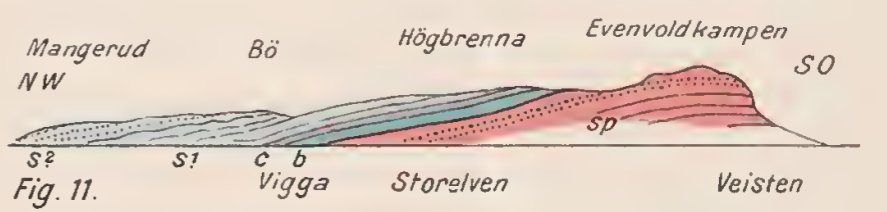


Fig. 11.

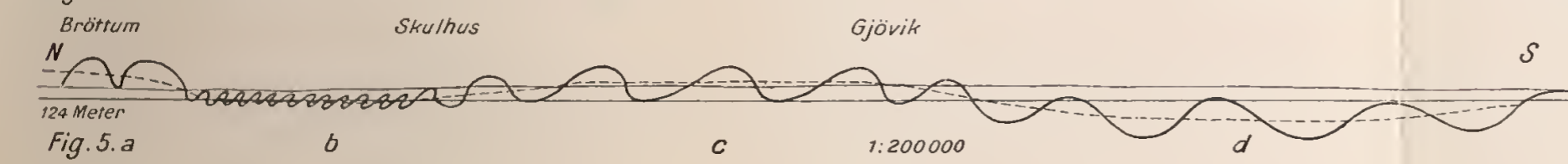


Fig. 5. a

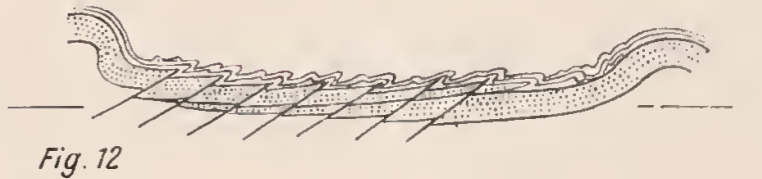


Fig. 12

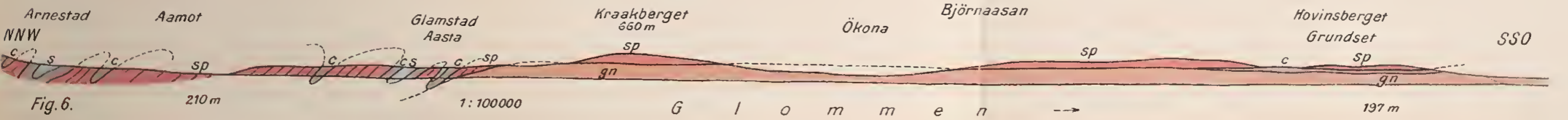


Fig. 6.

G l o m m e n →

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch - physikalische Klasse

Jahrgang 1910, Schlußheft

Inhaltsübersicht

**Berichte über die Sitzungen mit Inhaltsangaben
der Vorträge**

Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

München 1910

**Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)**

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 1. Abhandlung

Über die spezifische Wärme c_p des überhitzten
Wasserdampfes für Drucke bis 8 Atmosphären
und Temperaturen von 350° C. bis 550° C.

von

Oscar Knoblauch u. Hilde Mollier

Mit 1 Tafel

Vorgelegt am 8. Januar 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(mathematisch-physikalische Klasse).

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

- Bauernfeind, C. M. v. Beobachtungen und Untersuchungen über Naudet'sche Aneroidbarometer. 1874 1 M 80 ₤
- Gedächtnissrede auf Jos. v. Fraunhofer. 1887 80 ₤
- Beez, W. Antheil der bayer. Akademie der Wissenschaften an der Entwicklung der Electricitätslehre. Rede. 1873 90 ₤
- Cranz, C. und K. R. Koch. Untersuchungen über die Vibrationen des Gewehrlaufs. Abh. XIX,3 1899 I. 2 M
- — — Fortsetzung XX,3 1900 I. 1 M 60 ₤
- — — Abh. XXI,3 1901 II. 80 ₤
- * Ebert, Herm. Unsichtbare Vorgänge bei electricischen Entladungen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 4.
- * — Zur Mechanik der Glimmlichtphänomene. Sitzb. 1899 XXIX. Bd. Heft 1.
- Periodische Seespiegelschwankungen (Seiches) am Starnberger See. Sitzb. 1900 Heft 3.
- Messungen der elektrischen Zerstreung im Freiballon. Sitzb. 1900 Heft 3.
- Weitere Beobachtungen der Luftelektrizität in grösseren Höhen. Sitzb. 1901 Heft 1.
- Ueber die Möglichkeit radioaktivirende Emanationen in flüssiger Luft anzureichern. Sitzb. 1903 Heft 1.
- Ebert, Herm. und Hoffmann, B. Versuche mit flüssiger Luft. Sitzb. 1900 XXX. Bd. 20 ₤
- Ueber Pultationen von geringer Periodendauer in der erdmagnetischen Feldkraft. 1906, 3 40 ₤
- Elster, J. und Geitel, H. Ueber die radioaktive Emanation in der atmosphärischen Luft. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Ueber Methoden zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit der atmosphärischen Luft an der Erdoberfläche sowie ihres Gehalts an radioaktiver Emanation und die nächsten Ziele dieser Untersuchungen. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Endrös, A. Die Seeschwankungen (Seiches) des Chiemsees mit 2 Tafeln. 1906, 2 1 M
- Exner, F. Potentialmessungen. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Bericht über die Thätigkeit der luftelektrischen Stationen der Wiener Akademie im abgelaufenen Jahre. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Finsterwalder, S. Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Mit 3 Tafeln. Abh. XVII,3 1891 3 M
- Ueber die Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen (mit 1 Tafel). Sitzb. 1900 Heft 2.
- Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abh. 1903.

- Finsterwalder, S. Ueber die Aufgabe, zwei Punkthaufen durch Drehung ohne Maassstabveränderung möglichst nahe zusammenzulegen. Abh. 1903.
- Fischer, K. T. und Alt. Siedepunkt, Gefrierpunkt und Dampfspannung des reinen Stickstoffes bei niedrigen Drucken (mit 2 Tafeln). Sitzb. 1902 Heft 2.
- Erstarrungs- und Schmelzdruck des Stickstoffes. Sitzb. 1902 Heft 2.
- *Fomm, L. Ueber eine neue Erscheinung bei electricischen Entladungen in verdünnten Gasen. Sitzb. 1893 XXVIII. Bd. Heft 3 1 M 20 ♂
- Föppl, A. Ueber eine mögliche Erweiterung des Newton'schen Gravitationsgesetzes. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 1 1 M 20 ♂
- Fraunhofer, Jos. v. Neue Modifikation des Lichtes. Denkschr. VIII. 1821—22 3 M
- Gesammelte Schriften, herausgegeben von E. Lommel 1833 12 M
- Gerdien, H. Registrirung der Niederschlags-Elektrizität im Göttinger Geophysikalischen Institut. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- *Glan, P. Theoretische Untersuchungen über elastische Körper und Electricität. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 1.
- *Grätz, L. Ein electrochemisches Verfahren, um Wechselströme in Gleichströme zu verwandeln. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 2.
- Groth, P. Ueber die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. Rede 1883 80 ♂
- Jolly, Ph. v. Physik der Molekularkräfte. Rede 1857 50 ♂
- Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation. Abh. I. Abtlg. XIII,1 1878 60 ♂ und II. Abtlg. XIV,2 1881 80 ♂
- Zusammensetzung der atmosphär. Luft. Abh. XIII,2 1879 1 M
- Kohlrausch, Friedr. Ueber den absoluten electricischen Leitungswiderstand des Quecksilbers. Abh. XVI,3 1883 3 M 50 ♂
- Korn, A. Ueber die natürliche, elektrische Belegung einer beliebigen, stetig gekrümmten Konduktoroberfläche. Sitzb. 1901 Heft 4.
- Allgemeine Lösung des Problems der magnetischen Induktion. Sitzb. 1901 Heft 4.
- Ueber ein Verfahren der elektrischen Fernphotographie. Sitzb. 1902 Heft 1.
- Einige Sätze über die Potentiale von Doppelbelegungen. Sitzb. 1903 Heft 1.
- Ueber eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes. I. Sitzb. 1903 Heft 3. II. Sitzb. 1903 Heft 4.
- *Linde, C. v. Ueber die Veränderlichkeit der specifischen Wärme der Gase. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 3.
- * — Ueber Vorgänge bei Verbrennung in flüssiger Luft. Sitzb. 1899 XXIX. Bd. Heft 1.
- Lommel, Eug. v. Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Oeffnung etc. Abh. XV,2 1884 4 M 50 ♂
- Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. Abh. XV,3 1886 4 M 50 ♂
- G. S. Ohms wissenschaftliche Leistungen. Rede 1839 60 ♂
- Berechnung von Mischfarben. Mit 2 Taf. Abh. XVII,2 1891 1 M
- Theorie der Dämmerungsfarben. Abh. XIX,2 1897 2 M 40 ♂
- Nachtrag dazu XIX,3 1899 40 ♂
- * — Ueber aus Kalkspath u. Glas zusammengesetzte Nicol'sche Prismen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 1.
- Lüdeling, Bericht über luftelektrische Arbeiten. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Meinardus, W. Bericht über einige Messungen der Elektrizitätszerstreuung auf dem Meere. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- *Merz, S. v. Das Fraunhofer-Objectiv. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd.

- Miller, Andr. Der primäre und secundäre longitudinale Elastizitätsmodul und die thermische Constante des letzteren. Abh. XV,3 1886 1 M 80 J
- Ueber die Grundlagen der Bestimmungsmethode des longitudinalen Elastizitätsmoduls. Abh. XVI,3 1888 1 M 70 J
- Ohm, H. S. Erklärung aller . . . Interferenz-Erscheinungen (in einaxigen Krystallplatten) VII,1 u. 2 1853 I. 3 M. II. 2 M. 50 J
- Orff, C. v. Länge d. einfachen Sekundenpendels. Abh. XIV,3 1883 4 M
- * — Bemerkungen über die Beziehung zwischen Schweremessungen und geologischen Untersuchungen und Bericht über die in Bayern begonnene Pendelbestimmung. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 1.
- Ueber die Hilfsmittel, Methoden und Resultate der internationalen Erdmessung. Rede. 1899 2 M
- Pfaff, F. Bewegung d. Finnes u. d. Gletscher. Abh. XII,2 1876 60 J
- Recknagel, Gg. Ueber Abkühlung geschlossener Lufträume durch Wärmeleitung. Sitzb. 1901 Heft 2.
- Riecke, E. Neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftpolektrizität. Sitzb. 1903 Heft 2.
- Schmauss, A. Magnetische Drehung der Polarisationssebene des Lichtes in selektiv absorbirenden Medien (mit 4 Tafeln). Sitzb. 1902 Heft 3.
- Schmidt, Adolf. Mittheilungen über eine neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials. XIX,1 1895 2 M
- Schmidt, M. Untersuchung über die Umlaufbewegung hydrometrischer Flügel. Sitzb. 1903 Heft 2.
- Schwarzschild, K. Die Poincaré'sche Theorie des Gleichgewichts. Aus den neuen Annalen der k. Sternwarte. Bd. 3 1897 5 M
- * — Ueber die Beugungsfigur im Fernrohr weit ausserhalb des Focus. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 2.
- * Seidel, L. v. Ueber die Bedingungen möglichst präciser Abbildung eines Objects von endlicher scheinbarer Grösse durch einen dioptrischen Apparat. Herausgegeben von S. Finsterwalder. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 3.
- Sohncke, Leonh. Ueber die Bedeutung wissenschaftlicher Ballonfahrten. Rede. 1894. 80 J
- Gewitterstudien auf Grund von Ballonfahrten. Abh. XVIII,3 1894 1 M 80 J
- * — Ueber die Aenderung der specifischen Wärme mit der Temperatur. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 2.
- Sprung, Bericht über die luftelektrischen Arbeiten des Meteorologisch-Magnetischen Observatoriums zu Potsdam. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Steinheil, C. A. und Seidel, L. Brechungs- und Zerstreungsverhältnisse verschiedener Medien. Abh. V,2 1848 40 J
- Straubel, Rud. Theorie der Beugungserscheinungen kreisförmig begrenzter symmetrischer, nicht sphärischer Wellen. Abh. XVIII,1 1893 3 M

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 2. Abhandlung

Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems
in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung

von

W. M. Kutta

Vorgelegt am 8. Januar 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

- Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 112, 1872 *M.* —.50
 — Pascal's Theorem. A. 113, 1874 *M.* 1.—
 — Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 *M.* —.60
 — Von der Hesse'schen Determinante. A. 143, 1883 *M.* —.50
 * — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.
- Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 142, 1883 *M.* 1.—
 * — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
 * — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
 — Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
 — Die reducirte Resultante. A. 171, 1889 *M.* —.40.
 — Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.
- Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 *M.* —.40
- Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1^{ter} O. definierten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
 * — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
 — Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 *M.* 1.20
 — Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 *M.* —.20
- Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2 . Sb. 1887, p. 33—42.
 — Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
 — Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
 — Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung- und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 *M.* 3.—
 — Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 *M.* —.20
 — Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 *M.* —.40
 — u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 *M.* —.40
 — Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 *M.* —.40
 — Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 *M.* —.20

- Finsterwalder, S. Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abh. II. Kl. XXII, 2. 1903
M. 1.20
- Der gefährliche Ort beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel. 1905, 1 M. —.20
- Föppl, A. Absol. u. relat. Bewegung. Sb. 1904, p. 383—395 M. —.40
- Kreiselversuch zur Messung der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. 1904, 1 M. —.40
- Ueber die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. 1905, 2 M. —.40
- Günther, S. Pothenot'sches Problem auf d. Kugel. Sb. 1904, p. 115—123 M. —.20
- Gordan, P. Discriminante einer ternären Form. Sb. 1887, p. 477—478.
- * Klein, F. Elliptische Modulfunctionen. Sb. 1880, p. 89—100.
- * — Unendl. viele Normalf. des ellipt. Integr. 1. Gtg. Sb. 1880, p. 533—541.
- Königsberger, L. Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des Abel'schen. Sb. 1885, p. 462—468.
- Algebraische Bez. zw. Fund.-Integralen etc. Sb. 1887, p. 423—431.
- Irreducibilität der algebr. part. Diff.-Gl.-Syst. Sb. 1891, p. 275—279.
- Lindemann, F. Conforme Abbild. d. Halbebene auf ein einf. zusammenh., von algebr. Curve begrenztes Flächenst. Sb. 1894, p. 403—422.
- Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird. Sb. 1895, p. 219—237.
- Lineare Transf. einer quadrat. Mannigf. in sich. Sb. 1896, p. 31—66.
- * — Analyt. Forts. der j. Funktionen, welche das Innere eines Kegelschn. conform auf die Halbebene abbilden. Sb. 1896, p. 401—424.
- Zur Gesch. d. Polyeder u. Zahlzeichen. Sb. 1896, p. 625—756.
- Gedächtnissrede auf Phil Ludw. von Seidel. März 1897 M. 3.—
- Umkehrprobleme aus d. Theorie der ellipt. Integrale. Sb. 1898, p. 37—54.
- * — Drehung eines Körpers um d. Schwerpunkt. Sb. 1898, p. 181—202.
- * — Prähistorische Gewichte. I. Sb. 1899, p. 71—136.
- * — Zur Theorie der automorphen Funktionen. I. Sb. 1899, p. 423—454. II. Desgl. p. 493—510.
- Fermat'scher Satz betr. d. Gl. $x^n = y^n + z^n$. Sb. 1901, p. 185—202 und p. 495 M. —.40
- Zur Theorie der Spectrallinien. I. Sb. 1901, p. 451—491 M. —.80
- II. Sb. 1903, p. 27—100 M. 1.—
- Das Pascal'sche Sechseck. Sb. 1902, p. 153—161 M. —.20
- Das d'Alembert'sche Prinzip. Sb. 1904, p. 77—101 M. —.60
- Lüroth, J. Canon. Perioden d. Abel'schen Integrale. I. A. 152, 1885 M. 1.20. II. A. 161, 1887 M. 1.30
- Bestimmung einer Fläche durch geod. Messungen. Sb. 1892, p. 27—52.
- Nöther, M. Berührungscurven der C_4 . A. 171, 1889, p. 103—150 M. 1.50
- Die sieben Systeme von Kegelschnitten durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen C_4 . Sb. 1895, p. 93—100.
- Pringsheim, A. Zur Theorie d. Taylor'schen Reihe. Sb. 1892, p. 211—245.
- Ueber den Cauchy'schen Integralsatz. Sb. 1895, p. 39—72.
- Entwicklung eind. analyt. Funkt. in Potenzreihen. Sb. 1895, p. 75—92.
- Zum Cauchy'schen Integralsatz. Sb. 1895, p. 295—304.
- Potenzreihen a. Conv.-Kr. u. Fourier'sche Reihen. Sb. 1895, p. 337—364.
- Zur Theorie der synéktischen Funktionen. Sb. 1896, p. 167—182.
- Sog. Grenze u. Grenzgebiete zw. Conv. u. Div. Sb. 1896, p. 605—624.
- Elementare Theorie d. unendl. Doppelreihen. Sb. 1897, p. 101—152.
- Du Bois-Reymond'sche Conv.-Grenze etc. Sb. 1897, p. 303—344 und 356—358.

- Pringsheim, A. Zwei Abel'sche Sätze, betr. Reihen-Stetigkeit. Sb. 1897, p. 343—356.
- Zur Theorie des Doppelintegrals. Sb. 1898, p. 59—74.
 - Convergenz unendlicher Kettenbrüche. Sb. 1898, p. 295—324.
 - Die ersten Beweise d. Irrationalität von e u. π . Sb. 1899, p. 325—337.
 - Zur Theorie des Doppelintegrals, des Green'schen und Cauchy'schen Integralsatzes. Sb. 1899, p. 39—62 und 268—271.
 - Convergenzkrit. f. Kettenbr. mit pos. Gliedern. Sb. 1899, p. 261—268.
 - Potenzreihen auf d. Conv.-Kreise. Sb. 1900, p. 37—100 *M.* 1.20
 - Zweiter Mittelw.-Satz f. Summen u. Integrale. Sb. 1900, p. 209—233. *M.* —.40
 - Conv. periodischer Kettenbrüche. Sb. 1900, p. 463—488 *M.* —.40
 - Fund.-Satz f. period. Funktionen. Sb. 1900, p. 541—552 *M.* —.20
 - Divergenz gewisser Potenzreihen an der Convergenz-Grenze. Sb. 1901, p. 505—524 *M.* —.40
 - Zur Theorie der ganzen transzendenten Funktionen. Sb. 1902, p. 163—192 u. 295—304 *M.* —.40
 - Ganze transz. Funkt. v. endl. Range. Sb. 1903, p. 101—130 *M.* —.40
 - Cauchy-Goursat'scher Integralsatz f. reelle Curven-Integrale. Sb. 1903, p. 573—682 *M.* —.40
 - Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. Festrede. März 1904 *M.* 1.20
 - Ueber einige Konvergenz-Kriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. 1905, 3 *M.* —.40
 - Ueber das Additions-Theorem der elliptischen Funktionen. 1906, 2 *M.* —.20
 - Ueber Konvergenz- und Divergenz-Kriterien für zwei- und mehrfach unendliche Reihen mit positiven Gliedern. 1908, 1 *M.* —.20
- Seeliger, H. v. Interpolat. Darst. einer Function durch eine nach Kugelfunctionen fortschr. Reihè. Sb. 1890, p. 499—511.
- * — Verteilung d. nach Ausgleichung übrigbl. Fehler. Sb. 1899, p. 3—21.
- Voss, A. Ueber die projective Centrafläche einer algebraischen Fläche n ter Ordnung. A. 16, 1887, p. 245—324 *M.* 2.40
- Ueber einen Satz aus der Theorie der Formen. Sb. 1888, p. 15—19.
 - Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Schaaren geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden. Sb. 1888, p. 90—102.
 - Conjug. Transf. einer bilin. Form in sich selbst. Sb. 1889, p. 175—211.
 - Mit bilin. Form vertauschb. bilin. Formen. Sb. 1889, p. 283—300.
 - Satz aus der Theorie der Determinanten. Sb. 1889, p. 329—339.
 - Cogred. Transf. bilin. Formen in sich. A. 17, 1890, p. 237—356 *M.* 3.60
 - Die Fundamentalgl. der Flächentheorie. Sb. 1892, p. 247—278.
 - Cogred. Transf. der bilin. Formen in sich. Sb. 1896, p. 1—23.
 - Cogred. u. adjung. Transf. einer bilin. Form. Sb. 1896, p. 211—272.
 - Symmetr. u. altern. Lösungen der Gl. $SX=XS'$. Sb. 1896, p. 273—281.
 - Infinites. Biegungsdeform. einer Fläche. Sb. 1897, p. 229—301.
 - Energet. Grundgesetz d. Mechanik. Sb. 1901, pag. 53—62 *M.* —.20
 - Prinzipien d. Mechanik. Sb. 1901, p. 167—182 *M.* —.40
 - Unendl. kl. Deform. einer Fläche. Sb. 1904, p. 141—199 *M.* 1.—
 - Ueber diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. 1906, 2 *M.* —.80
 - Ueber die Krümmung und konforme Transformation. 1907, 1 *M.* —.60

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 3. Abhandlung

Über gewisse Potenzreihen
an der Konvergenzgrenze

von

Leopold Fejér

Vorgelegt am 8. Januar 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

- Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 112, 1872 *M.* —.50
 — Pascal's Theorem. A. 113, 1874 *M.* 1.—
 — Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1892 *M.* —.60
 — Von der Hesse'schen Determinante. A. 143, 1883 *M.* —.50
 * — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.
- Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 142, 1883 *M.* 1.—
 * — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
 * — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
 — Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
 — Die reducirte Resultante. A. 171, 1889 *M.* —.40.
 — Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.
- Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 *M.* —.40
- Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1^{ter} O. definirten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
 * — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
 — Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 *M.* 1.20
 — Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 *M.* —.20
- Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2 . Sb. 1887, p. 33—42.
 — Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1868, p. 257—266.
 — Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
 — Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 *M.* 3.—
 — Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 *M.* —.20
 — Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 *M.* —.40
 — u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 *M.* —.40
 — Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 *M.* —.40
 — Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 *M.* —.20

- Finsterwalder, S. Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abh. II. Kl. XXII, 2. 1903 *M.* 1.20
- Der gefährliche Ort beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel. 1905, 1 *M.* —.20
- Föppl, A. Absol. u. relat. Bewegung. Sb. 1904, p. 383—395 *M.* —.40
- Kreiserversuch zur Messung der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. 1904, 1 *M.* —.40
- Ueber die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. 1905, 2 *M.* —.40
- Günther, S. Pothenot'sches Problem auf d. Kugel. Sb. 1904, p. 115—123 *M.* —.20
- Gordan, P. Discriminante einer ternären Form. Sb. 1887, p. 477—478.
- * Klein, F. Elliptische Modulfunctionen. Sb. 1880, p. 89—100.
- * — Unendl. viele Normalf. des ellipt. Integr. 1. Gtg. Sb. 1880, p. 533—541.
- Königsberger, L. Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des Abel'schen. Sb. 1885, p. 462—468.
- Algebraische Bez. zw. Fund. Integralen etc. Sb. 1887, p. 423—431.
- Irreducibilität der algebr. part. Diff.-Gl.-Syst. Sb. 1891, p. 275—279.
- Lindemann, F. Conforme Abbild. d. Halbebene auf ein einf. zusammenh., von algebr. Curve begrenztes Flächenst. Sb. 1894, p. 403—422.
- Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird. Sb. 1895, p. 219—237.
- Lineare Transf. einer quadrat. Mannigf. in sich. Sb. 1896, p. 31—66.
- * — Analyt. Forts. derj. Funktionen, welche das Innere eines Kegelschn. conform auf die Halbebene abbilden. Sb. 1896, p. 401—424.
- Zur Gesch. d. Polyeder u. Zahlzeichen. Sb. 1896, p. 625—756.
- Gedächtnisrede auf Phil Ludw. von Seidel. März 1897 *M.* 3.—
- Umkehrprobleme aus d. Theorie der ellipt. Integrale. Sb. 1898, p. 37—54.
- * — Drehung eines Körpers um d. Schwerpunkt. Sb. 1898, p. 181—202.
- * — Prähistorische Gewichte. I. Sb. 1899, p. 71—136.
- * — Zur Theorie der automorphen Funktionen. I. Sb. 1899, p. 423—454. II. Desgl. p. 493—510.
- Fermat'scher Satz betr. d. Gl. $x^n = y^n + z^n$. Sb. 1901, p. 185—202 und p. 495 *M.* —.40
- Zur Theorie der Spectrallinien. I. Sb. 1901, p. 451—491 *M.* —.80
- II. Sb. 1903, p. 27—100 *M.* 1.—
- Das Pascal'sche Sechseck. Sb. 1902, p. 153—161 *M.* —.20
- Das d'Alembert'sche Prinzip. Sb. 1904, p. 77—101 *M.* —.60
- Lüroth, J. Kanon. Perioden d. Abel'schen Integrale. I. A. 152, 1885 *M.* 1.20. II. A. 161, 1887 *M.* 1.30
- Bestimmung einer Fläche durch geod. Messungen. Sb. 1892, p. 27—52.
- Nöther, M. Berührungscurven der C_4 . A. 171, 1889, p. 103—150 *M.* 1.50
- Die sieben Systeme von Kegelschnitten durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen C_4 . Sb. 1895, p. 93—100.
- Pringsheim, A. Zur Theorie d. Taylor'schen Reihe. Sb. 1892, p. 211—245.
- Ueber den Cauchy'schen Integralsatz. Sb. 1895, p. 39—72.
- Entwickelung eind. analyt. Funkt. in Potenzreihen. Sb. 1895, p. 75—92.
- Zum Cauchy'schen Integralsatz. Sb. 1895, p. 295—304.
- Potenzreihen a. Conv.-Kr. u. Fourier'sche Reihen. Sb. 1895, p. 337—364.
- Zur Theorie der synektischen Funktionen. Sb. 1896, p. 167—182.
- Sog. Grenze u. Grenzgebiete zw. Conv. u. Div. Sb. 1896, p. 605—624.
- Elementare Theorie d. unendl. Doppelreihen. Sb. 1897, p. 101—152.
- Du Bois-Reymond'sche Conv.-Grenze etc. Sb. 1897, p. 303—344 und 356—358.

- Pringsheim, A. Zwei Abel'sche Sätze, betr. Reihen-Stetigkeit. Sb. 1897, p. 343—356.
- Zur Theorie des Doppelintegrals. Sb. 1898, p. 59—74.
 - Convergenz unendlicher Kettenbrüche. Sb. 1898, p. 295—324.
 - Die ersten Beweise d. Irrationalität von e u. π . Sb. 1898, p. 325—337.
 - Zur Theorie des Doppelintegrals, des Green'schen und Cauchy'schen Integralsatzes. Sb. 1899, p. 39—62 und 268—271.
 - Convergenczkrit. f. Kettenbr. mit pos. Gliedern. Sb. 1899, p. 261—268.
 - Potenzreihen auf d. Conv.-Kreise. Sb. 1900, p. 37—100 *M.* 1.20
 - Zweiter Mittelw. Satz f. Summen u. Integrale. Sb. 1900, p. 209—233. *M.* —.40
 - Conv. periodischer Kettenbrüche. Sb. 1900, p. 463—488 *M.* —.40
 - Fund.-Satz f. period. Funktionen. Sb. 1900, p. 541—552 *M.* —.20
 - Divergenz gewisser Potenzreihen an der Convergenz-Grenze. Sb. 1901, p. 505—524 *M.* —.40
 - Zur Theorie der ganzen transzendenten Funktionen. Sb. 1902, p. 163—192 u. 295—304 *M.* —.40
 - Ganze transz. Funkt. v. endl. Range. Sb. 1903, p. 101—130 *M.* —.40
 - Cauchy-Goursat'scher Integralsatz f. reelle Curven-Integrale. Sb. 1903, p. 673—682 *M.* —.40
 - Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. Feste dr. März 1904 *M.* 1.20
 - Ueber einige Convergenz-Kriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. 1905, 3 *M.* —.40
 - Ueber das Additions-Theorem der elliptischen Funktionen. 1906, 2 *M.* —.20
 - Ueber Convergenz- und Divergenz-Kriterien für zwei- und mehrfach unendliche Reihen mit positiven Gliedern. 1908, 1 *M.* —.20
- Seeliger, H. v. Interpolat. Darst. einer Function durch eine nach Kugelfunctionen fortschr. Reihe. Sb. 1890, p. 499—511.
- * — Verteilung d. nach Ausgleichung übrigbl. Fehler. Sb. 1899, p. 3—21.
- Voss, A. Ueber die projective Centralfläche einer algebraischen Fläche n ter Ordnung. A. 16, 1887, p. 245—324 *M.* 2.40
- Ueber einen Satz aus der Theorie der Formen. Sb. 1888, p. 15—19.
 - Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Schaaren geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden. Sb. 1888, p. 90—102.
 - Conjug. Transf. einer bilin. Form in sich selbst. Sb. 1889, p. 175—211.
 - Mit bilin. Form vertauschb. bilin. Formen. Sb. 1889, p. 283—300.
 - Satz aus der Theorie der Determinanten. Sb. 1889, p. 329—339.
 - Cogred. Transf. bilin. Formen in sich. A. 17, 1890, p. 237—356 *M.* 3.60
 - Die Fundamentalgl. der Flächentheorie. Sb. 1892, p. 247—278.
 - Cogred. Transf. der bilin. Formen in sich. Sb. 1896, p. 1—23.
 - Cogred. u. adjung. Transf. einer bilin. Form. Sb. 1896, p. 211—272.
 - Symmetr. u. altern. Lösungen der Gl. $SX=XS'$. Sb. 1896, p. 273—281.
 - Infinites. Biegungsdeform. einer Fläche. Sb. 1897, p. 229—301.
 - Energet. Grundgesetz d. Mechanik. Sb. 1901, pag. 53—62 *M.* —.20
 - Prinzipien d. Mechanik. Sb. 1901, p. 167—182 *M.* —.40
 - Unendl. kl. Deform. einer Fläche. Sb. 1904, p. 141—199 *M.* 1.—
 - Ueber diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. 1906, 2 *M.* —.80
 - Ueber die Krümmung und konforme Transformation. 1907, 1 *M.* —.60

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 4. Abhandlung

Ein Beitrag

zur Vorgeschichte der modernen Gewitterkunde

von

Siegmond Günther.

Vorgelegt am 5. Februar 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(mathematisch-physikalische Klasse)

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

- Bauernfeind, C. M. v. Beobachtungen und Untersuchungen über Naudet'sche Aneroidbarometer. 1874 1 M. 80 *℔*
 — Gedächtnissrede auf Jos. v. Fraunhofer. 1887 80 *℔*
 Beetz, W. Antheil der bayer. Akademie der Wissenschaften an der Entwicklung der Electricitätslehre. Rede. 1873 90 *℔*
 Cranz, C. und K. R. Koch. Untersuchungen über die Vibrationen des Gewehrlaufs. Abh. XIX, 3 1899 I. 2 M.
 — — — Fortsetzung XX, 3 1900 I. 1 M. 60 *℔*
 — — — Abh. XXI, 3 1901 II. 80 *℔*
 * Ebert, Herm. Unsichtbare Vorgänge bei electricischen Entladungen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 4.
 * — Zur Mechanik der Glimmlichtphänomene. Sitzb. 1899 XXIX. Bd. Heft 1.
 — Periodische Seespiegelschwankungen (Seiches) am Starnberger See. Sitzb. 1900 Heft 3.
 — Messungen der elektrischen Zerstreung im Freiballon. Sitzb. 1900 Heft 3.
 — Weitere Beobachtungen der Luftpolektrizität in grösseren Höhen. Sitzb. 1901 Heft 1.
 — Ueber die Möglichkeit radioaktivirende Emanationen in flüssiger Luft anzureichern. Sitzb. 1903 Heft 1.
 Ebert, Herm. und Hoffmann, B. Versuche mit flüssiger Luft. Sitzb. 1900 XXX. Bd. 20 *℔*
 — Ueber Pultationen von geringer Periodendauer in der erdmagnetischen Feldkraft. 1906, 3 40 *℔*
 Elster, J. und Geitel, H. Ueber die radioaktive Emanation in der atmosphärischen Luft. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
 — Ueber Methoden zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit der atmosphärischen Luft an der Erdoberfläche sowie ihres Gehalts an radioaktiver Emanation und die nächsten Ziele dieser Untersuchungen. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
 Endrös, A. Die Seeschwankungen (Seiches) des Chiemsees mit 2 Tafeln. 1906, 2 1 M.
 Exner, F. Potentialmessungen. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
 — Bericht über die Thätigkeit der luftpolektrischen Stationen der Wiener Akademie im abgelaufenen Jahre. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
 Finsterwalder, S. Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Mit 3 Tafeln. Abh. XVII, 3 1891 3 M.
 — Ueber die Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen (mit 1 Tafel). Sitzb. 1900 Heft 2.
 — Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abh. 1903.

- Finsterwalder, S. Ueber die Aufgabe, zwei Punkthaufen durch Drehung ohne Maassstabveränderung möglichst nahe zusammenzulegen. Abh. 1903.
- Fischer, K. T. und Alt. Siedepunkt, Gefrierpunkt und Dampfspannung des reinen Stickstoffes bei niedrigen Drucken (mit 2 Tafeln). Sitzb. 1902 Heft 2.
- Erstarrungs- und Schmelzdruck des Stickstoffs. Sitzb. 1902 Heft 2.
- * Fomm, L. Ueber eine neue Erscheinung bei electricischen Entladungen in verdünnten Gasen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 3 1 *M* 20 *ſ*
- Föppl, A. Ueber eine mögliche Erweiterung des Newton'schen Gravitationsgesetzes. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 1 1 *M* 20 *ſ*
- Fraunhofer, Jos. v. Neue Modifikation des Lichtes. Denkschr. VIII. 1821—22 — 8 *M*
- Gesammelte Schriften, herausgegeben von E. Lommel 1888 12 *M*
- Gerdien, H. Registrirung der Niederschlags-Elektrizität im Göttinger Geophysikalischen Institut. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- * Glan, P. Theoretische Untersuchungen über elastische Körper und Electricität. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 1.
- * Grätz, L. Ein electrochemisches Verfahren, um Wechselströme in Gleichströme zu verwandeln. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 2.
- Groth, P. Ueber die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. Rede 1888 80 *ſ*
- Jolly, Ph. v. Physik der Molekularkräfte. Rede 1857 50 *ſ*
- Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation. Abh. I. Abtlg. XIII,1 1878 60 *ſ* und II. Abtlg. XIV,2 1881 80 *ſ*
- Zusammensetzung der atmosphär. Luft. Abh. XIII,2 1879 1 *M*
- Kohlrausch, Friedr. Ueber den absoluten electricischen Leitungswiderstand des Quecksilbers. Abh. XVI,3 1888 3 *M* 50 *ſ*
- Korn, A. Ueber die natürliche, elektrische Belegung einer beliebigen, stetig gekrümmten Konduktoroberfläche. Sitzb. 1901 Heft 4.
- Allgemeine Lösung des Problems der magnetischen Induktion. Sitzb. 1901 Heft 4.
- Ueber ein Verfahren der elektrischen Fernphotographie. Sitzb. 1902 Heft 1.
- Einige Sätze über die Potentiale von Doppelbelegungen. Sitzb. 1903 Heft 1.
- Ueber eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes.
I. Sitzb. 1903 Heft 3.
II. Sitzb. 1903 Heft 4.
- * Linde, C. v. Ueber die Veränderlichkeit der specifischen Wärme der Gase. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 3.
- * — Ueber Vorgänge bei Verbrennung in flüssiger Luft. Sitzb. 1899 XXIX. Bd. Heft 1.
- Lommel, Eug. v. Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Oeffnung etc. Abh. XV,2 1884 4 *M* 50 *ſ*
- Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. Abh. XV,3 1886 4 *M* 50 *ſ*
- G. S. Ohms wissenschaftliche Leistungen. Rede 1889 60 *ſ*
- Berechnung von Mischfarben. Mit 2 Taf. Abh. XVII,2 1891 1 *M*
- Theorie der Dämmerungsfarben. Abh. XIX,2 1897 2 *M* 40 *ſ*
Nachtrag dazu XIX,3 1899 40 *ſ*
- * — Ueber aus Kalkspath u. Glas zusammengesetzte Nicol'sche Prismen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 1.
- Lüdeling, Bericht über luftelektrische Arbeiten. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Meinardus, W. Bericht über einige Messungen der Elektrizitätszerstreuung auf dem Meere. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- * Merz, S. v. Das Fraunhofer-Objectiv. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd.

- Miller, Andr. Der primäre und secundäre longitudinale Elastizitätsmodul und die thermische Constante des letzteren. Abh. XV,3 1886 1 M. 80 S.
- Ueber die Grundlagen der Bestimmungsmethode des longitudinalen Elastizitätsmoduls. Abh. XVI,3 1888 1 M. 70 S.
- Ohm, H. S. Erklärung aller . . . Interferenz-Erscheinungen (in einaxigen Krystallplatten) VII,1 u. 2 1853 I. 3 M. II. 2 M. 50 S.
- Orff, C. v. Länge d. einfachen Sekundenpendels. Abh. XIV,3 1883 4 M.
- * — Bemerkungen über die Beziehung zwischen Schwermessungen und geologischen Untersuchungen und Bericht über die in Bayern begonnene Pendelbestimmung. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 1.
- Ueber die Hilfsmittel, Methoden und Resultate der internationalen Erdmessung. Rede. 1899 2 M.
- Pfaff, F. Bewegung d. Firnes u. d. Gletscher. Abh. XII,2 1876 60 S.
- Recknagel, Gg. Ueber Abkühlung geschlossener Lufträume durch Wärmeleitung. Sitzb. 1901 Heft 2.
- Riecke, E. Neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Lufterlektrizität. Sitzb. 1903 Heft 2.
- Schmansk, A. Magnetische Drehung der Polarisationssebene des Lichtes in selektiv absorbirenden Medien (mit 4 Tafeln). Sitzb. 1902 Heft 3.
- Schmidt, Adolf. Mittheilungen über eine neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials. XIX,1 1895 2 M.
- Schmidt, M. Untersuchung über die Umlaufbewegung hydrometrischer Flügel. Sitzb. 1903 Heft 2.
- Schwarzschild, K. Die Poincaré'sche Theorie des Gleichgewichts. Aus den neuen Annalen der k. Sternwarte. Bd. 3 1897 5 M.
- * — Ueber die Beugungsfigur im Fernrohr weit ausserhalb des Focus. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 2.
- * Seidel, L. v. Ueber die Bedingungen möglichst präciser Abbildung eines Objects von endlicher scheinbarer Grösse durch einen dioptrischen Apparat. Herausgegeben von S. Finsterwalder. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 3.
- Sohncke, Leonh. Ueber die Bedeutung wissenschaftlicher Ballonfahrten. Rede. 1894. 80 S.
- Gewitterstudien auf Grund von Ballonfahrten. Abh. XVIII,3 1894 1 M. 80 S.
- * — Ueber die Aenderung der specifischen Wärme mit der Temperatur. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 2.
- Sprung, Bericht über die lufterlektrischen Arbeiten des Meteorologisch-Magnetischen Observatoriums zu Potsdam. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Steinheil, C. A. und Seidel, L. Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse verschiedener Medien. Abh. V,2 1848 40 S.
- Straubel, Rud. Theorie der Beugungserscheinungen kreisförmig begrenzter symmetrischer, nicht sphärischer Wellen. Abh. XVIII,1 1893 3 M.

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch - physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 5. Abhandlung

Semikonvergente Entwicklungen für die Zylinderfunktionen und ihre Ausdehnung ins Komplexe

von

P. Debye

Vorgelegt am 5. Februar 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(mathematisch-physikalische Klasse)

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

- Bauernfeind, C. M. v. Beobachtungen und Untersuchungen über Naudet'sche Aneroidbarometer. 1874 1 M. 80 ₤
- Gedächtnissrede auf Jos. v. Fraunhofer. 1887 80 ₤
- Beetz, W. Antheil der bayer. Akademie der Wissenschaften an der Entwicklung der Electricitätslehre. Rede. 1873 90 ₤
- Cranz, C. und K. R. Koch. Untersuchungen über die Vibrationen des Gewehrlaufs. Abh. XIX,3 1899 I. 2 M.
- — — Fortsetzung XX,3 1900 I. 1 M. 60 ₤
- — — Abh. XXI,3 1901 II. 80 ₤
- * Ebert, Herm. Unsichtbare Vorgänge bei electrischen Entladungen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 4.
- * — Zur Mechanik der Glimmlichtphänomene. Sitzb. 1899 XXIX. Bd. Heft 1.
- Periodische Seespiegelschwankungen (Seiches) am Starnberger See. Sitzb. 1900 Heft 3.
- Messungen der elektrischen Zerstreung im Freiballon. Sitzb. 1900 Heft 3.
- Weitere Beobachtungen der Luftpolektrizität in grösseren Höhen. Sitzb. 1901 Heft 1.
- Ueber die Möglichkeit radioaktivirende Emanationen in flüssiger Luft anzureichern. Sitzb. 1903 Heft 1.
- Ebert, Herm. und Hoffmann, B. Versuche mit flüssiger Luft. Sitzb. 1900 XXX. Bd. 20 ₤
- Ueber Pultationen von geringer Periodendauer in der erdmagnetischen Feldkraft. 1906, 3 40 ₤
- Elster, J. und Geitel, H. Ueber die radioaktive Emanation in der atmosphärischen Luft. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Ueber Methoden zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit der atmosphärischen Luft an der Erdoberfläche sowie ihres Gehalts an radioaktiver Emanation und die nächsten Ziele dieser Untersuchungen. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Endrös, A. Die Seeschwankungen (Seiches) des Chiemsees mit 2 Tafeln. 1906, 2 1 M.
- Exner, F. Potentialmessungen. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Bericht über die Thätigkeit der luftpolektrischen Stationen der Wiener Akademie im abgelaufenen Jahre. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Fensterwalder, S. Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Mit 3 Tafeln. Abh. XVII,3 1891 3 M.
- Ueber die Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen (mit 1 Tafel). Sitzb. 1900 Heft 2.
- Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abh. 1903.

- Finsterwalder, S. Ueber die Aufgabe, zwei Punkthaufen durch Drehung ohne Maassstabveränderung möglichst nahe zusammenzulegen. Abh. 1903.
- Fischer, K. T. und Ait. Siedepunkt, Gefrierpunkt und Dampfspannung des reinen Stickstoffes bei niedrigen Drucken (mit 2 Tafeln). Sitzb. 1902 Heft 2.
- Erstarrungs- und Schmelzdruck des Stickstoffs. Sitzb. 1902 Heft 2.
- *Fomm, L. Ueber eine neue Erscheinung bei electricischen Entladungen in verdünnten Gasen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 3 1 *M.* 20 *z.*
- Föppl, A. Ueber eine mögliche Erweiterung des Newton'schen Gravitationsgesetzes. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 1 1 *M.* 20 *z.*
- Fraunhofer, Jos. v. Neue Modifikation des Lichtes. Denkschr. VIII. 1821—22 3 *M.*
- Gesammelte Schriften, herausgegeben von E. Lommel 1888 12 *M.*
- Gerdien, H. Registrirung der Niederschlags-Elektricität im Göttinger Geophysikalischen Institut. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- *Glan, P. Theoretische Untersuchungen über elastische Körper und Electricität. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 1.
- *Grätz, L. Ein electrochemisches Verfahren, um Wechselströme in Gleichströme zu verwandeln. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 2.
- Groth, P. Ueber die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. Rede 1888 80 *z.*
- Jolly, Ph. v. Physik der Molekularkräfte. Rede 1857 50 *z.*
- Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation. Abh. I. Abtlg. XIII,1 1878 60 *z.* und II. Abtlg. XIV,2 1881 80 *z.*
- Zusammensetzung der atmosphär. Luft. Abh. XIII,2 1879 1 *M.*
- Kohlrausch, Friedr. Ueber den absoluten electricischen Leitungswiderstand des Quecksilbers. Abh. XVI,3 1888 3 *M.* 50 *z.*
- Korn, A. Ueber die natürliche, elektrische Belegung einer beliebigen, stetig gekrümmten Konduktoroberfläche. Sitzb. 1901 Heft 4.
- Allgemeine Lösung des Problems der magnetischen Induktion. Sitzb. 1901 Heft 4.
- Ueber ein Verfahren der elektrischen Fernphotographie. Sitzb. 1902 Heft 1.
- Einige Sätze über die Potentiale von Doppelbelegungen. Sitzb. 1903 Heft 1.
- Ueber eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes. I. Sitzb. 1903 Heft 3. II. Sitzb. 1903 Heft 4.
- *Linde, C. v. Ueber die Veränderlichkeit der specifischen Wärme der Gase. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 3.
- * — Ueber Vorgänge bei Verbrennung in flüssiger Luft. Sitzb. 1899 XXIX. Bd. Heft 1.
- Lommel, Eug. v. Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Öffnung etc. Abh. XV,2 1884 4 *M.* 50 *z.*
- Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. Abh. XV,3 1886 4 *M.* 50 *z.*
- G. S. Ohms wissenschaftliche Leistungen. Rede 1889 60 *z.*
- Berechnung von Mischfarben. Mit 2 Taf. Abh. XVII,2 1891 1 *M.*
- Theorie der Dämmerungsfarben. Abh. XIX,2 1897 2 *M.* 40 *z.*
- Nachtrag dazu XIX,3 1899 40 *z.*
- * — Ueber aus Kalkspath u. Glas zusammengesetzte Nicol'sche Prismen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 1.
- Lüdeling, Bericht über lufterlektrische Arbeiten. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Meinardus, W. Bericht über einige Messungen der Elektrizitätszerstreuung auf dem Meere. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- *Merz, S. v. Das Fraunhofer-Objectiv. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd.

- Miller, Andr. Der primäre und secundäre longitudinale Elastizitätsmodul und die thermische Constante des letzteren. Abh. XV,3 1886 1 *M.* 80 *J.*
- Ueber die Grundlagen der Bestimmungsmethode des longitudinalen Elastizitätsmoduls. Abh. XVI,3 1888 1 *M.* 70 *J.*
- Ohm, H. S. Erklärung aller . . . Interferenz-Erscheinungen (in einaxigen Krystallplatten) VII,1 u. 2 1853 I. 3 *M.* II. 2 *M.* 50 *J.*
- Orff, C. v. Länge d. einfachen Sekundenpendels. Abh. XIV,3 1883 4 *M.*
- * — Bemerkungen über die Beziehung zwischen Schweremessungen und geologischen Untersuchungen und Bericht über die in Bayern begonnene Pendelbestimmung. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 1.
- Ueber die Hilfsmittel, Methoden und Resultate der internationalen Erdmessung. Rede. 1899 2 *M.*
- Pfaff, F. Bewegung d. Firnes u. d. Gletscher. Abh. XII,2 1876 60 *J.*
- Recknagel, Gg. Ueber Abkühlung geschlossener Lufträume durch Wärmeleitung. Sitzb. 1901 Heft 2.
- Riecke, E. Neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelektrizität. Sitzb. 1903 Heft 2.
- Schmauss, A. Magnetische Drehung der Polarisationssebene des Lichtes in selektiv absorbirenden Medien (mit 4 Tafeln). Sitzb. 1902 Heft 3.
- Schmidt, Adolf. Mittheilungen über eine neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials. XIX,1 1895 2 *M.*
- Schmidt, M. Untersuchung über die Umlaufbewegung hydrometrischer Flügel. Sitzb. 1903 Heft 2.
- Schwarzschild, K. Die Poincaré'sche Theorie des Gleichgewichts. Aus den neuen Annalen der k. Sternwarte. Bd. 3 1897 5 *M.*
- * — Ueber die Beugungsfigur im Fernrohr weit ausserhalb des Focus. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 2.
- * Seidel, L. v. Ueber die Bedingungen möglichst präziser Abbildung eines Objects von endlicher scheinbarer Grösse durch einen dioptrischen Apparat. Herausgegeben von S. Finsterwalder. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 3.
- Sohncke, Leonh. Ueber die Bedeutung wissenschaftlicher Ballonfahrten. Rede. 1894. 80 *J.*
- Gewitterstudien auf Grund von Ballonfahrten. Abh. XVIII,3 1894 1 *M.* 80 *J.*
- * — Ueber die Aenderung der specifischen Wärme mit der Temperatur. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 2.
- Sprung, Bericht über die luftelektrischen Arbeiten des Meteorologisch-Magnetischen Observatoriums zu Potsdam. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Steinheil, C. A. und Seidel, L. Brechungs- und Zerstreungsverhältnisse verschiedener Medien. Abh. V,2 1848 40 *J.*
- Straubel, Rud. Theorie der Beugungserscheinungen kreisförmig begrenzter symmetrischer, nicht sphärischer Wellen. Abh. XVIII,1 1893 3 *M.*

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 6. Abhandlung

Über

Konvergenz und funktionentheoretischen Charakter
gewisser limitär-periodischer Kettenbrüche

von

Alfred Pringsheim

Vorgetragen am 1. Mai 1909 u. 8. Januar 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

- Baur, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 112, 1872 *M.* —50
 — Pascal's Theorem. A. 113, 1874 *M.* 1.—
 — Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 *M.* —60
 — Von der Hesse'schen Determinante. A. 143, 1883 *M.* —50
 * — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.
- Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 142, 1893 *M.* 1—
 * — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
 * — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
 — Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
 — Die reducirte Resultante. A. 171, 1889 *M.* —40.
 — Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.
- Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 *M.* —40
- Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1ter O. definierten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
- * — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
 — Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 *M.* 1.20
 — Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 *M.* —20
- Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F₂. Sb. 1887, p. 33—42.
 — Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
 — Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
 — Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—587 *M.* 3.—
 — Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 *M.* —20
 — Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 *M.* —40
 — u. W. Schenfele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 *M.* —40
 — Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1901, 2 *M.* —10
 — Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 *M.* —20

- Finsterwalder, S. Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abb. II. Kl. XXII, 2. 1903 *M.* 1.20
- Der gefährliche Ort beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel. 1905, 1 *M.* —.20
- Föppl, A. Absol. u. relat. Bewegung. Sb. 1904, p. 383—395 *M.* —.40
- Kreisversuch zur Messung zur Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. 1904, 1 *M.* —.40
 - Ueber die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. 1905, 2 *M.* —.40
- Günther, S. Pothenot'sches Problem auf d. Kugel. Sb. 1904, p. 115—123 *M.* —.20
- Gordan, P. Discriminante einer ternären Form. Sb. 1887, p. 477—478.
- * Klein, F. Elliptische Modulfunctionen. Sb. 1880, p. 89—100.
- * — Unendl. viele Normalf. des ellipt. Integr. 1. Gtg. Sb. 1880, p. 533—541.
- Königsberger, L. Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des Abel'schen. Sb. 1885, p. 462—468.
- Algebraische Bez. zw. Fund.-Integralen etc. Sb. 1887, p. 423—431.
 - Irreducibilität der algebr. part. Diff.-Gl.-Syst. Sb. 1891, p. 275—279.
- Lindemann, F. Conforme Abbild. d. Halbebene auf ein einf. zusammenh., von algebr. Curve begrenztes Flächenst. Sb. 1894, p. 403—422.
- Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird. Sb. 1895, p. 219—237.
 - Lineare Transf. einer quadrat. Mannigf. in sich. Sb. 1896, p. 31—66.
- * — Analyt. Forts. derj. Functionen, welche das Innere eines Kegelschn. conform auf die Halbebene abbilden. Sb. 1896, p. 401—424.
- Zur Gesch. d. Polyeder u. Zahlzeichen. Sb. 1896, p. 625—756.
 - Gedächtnissrede auf Phil Ludw. von Seidel. März 1897 *M.* 3.—
 - Umkehrprobleme aus d. Theorie der ellipt. Integrale. Sb. 1898, p. 37—54.
 - * — Drehung eines Körpers um d. Schwerpunkt. Sb. 1898, p. 181—202.
 - * — Prähistorische Gewichte. I. Sb. 1899, p. 71—136.
 - * — Zur Theorie der automorphen Functionen. I. Sb. 1899, p. 423—454. II. Desgl. p. 493—510.
 - Fermat'scher Satz betr. d. Gl. $x^n = y^n + z^n$. Sb. 1901, p. 185—202 und p. 495 *M.* —.40
 - Zur Theorie der Spectrallinien. I. Sb. 1901, p. 451—491 *M.* —.80
 - II. Sb. 1903, p. 27—100 *M.* 1.—
 - Das Pascal'sche Sechseck. Sb. 1902, p. 153—161 *M.* —.20
 - Das d'Alembert'sche Prinzip. Sb. 1904, p. 77—101 *M.* —.60
- Lüroth, J. Kanon. Perioden d. Abel'schen Integrale. I. A. 152, 1885 *M.* 1.20. II. A. 161, 1887 *M.* 1.30
- Bestimmung einer Fläche durchgeod. Messungen. Sb. 1892, p. 27—52.
- Nöther, M. Berührungscurven der C_4 . A. 171, 1889, p. 103—150 *M.* 1.50
- Die sieben Systeme von Kegelschnitten durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen C_4 . Sb. 1895, p. 93—100.
- Pringsheim, A. Zur Theorie d. Taylor'schen Reihe. Sb. 1892, p. 211—245.
- Ueber den Cauchy'schen Integralsatz. Sb. 1895, p. 39—72.
 - Entwicklung eind. analyt. Funkt. in Potenzreihen. Sb. 1895, p. 75—92.
 - Zum Cauchy'schen Integralsatz. Sb. 1895, p. 295—304.
 - Potenzreihen a. Conv.-Kr. u. Fourier'sche Reihen. Sb. 1895, p. 337—364.
 - Zur Theorie der synektischen Functionen. Sb. 1896, p. 167—182.
 - Sog. Grenze u. Grenzgebiete zw. Conv. u. Div. Sb. 1896, p. 605—624.
 - Elementare Theorie d. unendl. Doppelreihen. Sb. 1897, p. 101—152.
 - Du Bois-Reymond'sche Conv.-Grenze etc. Sb. 1897, p. 303—344 und 356—358.

- Pringsheim, A. Zwei Abel'sche Sätze, betr. Reihen-Stetigkeit. Sb. 1897, p. 343—356.
- Zur Theorie des Doppelintegrals. Sb. 1898, p. 59—74.
- Convergenz unendlicher Kettenbrüche. Sb. 1898, p. 295—324.
- Die ersten Beweise d. Irrationalität von e u. π . Sb. 1898, p. 325—337.
- Zur Theorie des Doppelintegrals, des Green'schen und Cauchy'schen Integralsatzes. Sb. 1899, p. 89—62 und 268—271.
- Convergenzkrit. f. Kettenbr. mit pos. Gliedern. Sb. 1899, p. 261—268.
- Potenzreihen auf d. Conv.-Kreise. Sb. 1900, p. 87—100 *M.* 1.20
- Zweiter Mittelw.-Satz f. Summen u. Integrale. Sb. 1900, p. 209—233. *M.* —.40
- Conv. periodischer Kettenbrüche. Sb. 1900, p. 463—488 *M.* —.40
- Fund.-Satz f. period. Funktionen. Sb. 1900, p. 541—552 *M.* —.20
- Divergenz gewisser Potenzreihen an der Convergenz-Grenze. Sb. 1901, p. 505—524 *M.* —.40
- Zur Theorie der ganzen transzendenten Funktionen. Sb. 1902, p. 163—192 u. 295—304 *M.* —.40
- Ganze transz. Funkt. v. endl. Range. Sb. 1903, p. 101—130 *M.* —.40
- Cauchy-Goursat'scher Integralsatz f. reelle Curven-Integrale. Sb. 1903, p. 673—682 *M.* —.40
- Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. Festrede. März 1904 *M.* 1.20
- Ueber einige Konvergenz-Kriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. 1905, 3 *M.* —.40
- Ueber das Additions-Theorem der elliptischen Funktionen. 1906, 2 *M.* —.20
- Ueber Konvergenz- und Divergenz-Kriterien für zwei- und mehrfach unendliche Reihen mit positiven Gliedern. 1908, 1 *M.* —.20
- Seeliger, H. v. Interpolat. Darst. einer Function durch eine nach Kugelfunctionen fortschr. Reihe. Sb. 1890, p. 499—511.
- * — Verteilung d. nach Ausgleichung übrigbl. Fehler. Sb. 1899, p. 3—21.
- Voss, A. Ueber die projective Centrafläche einer algebraischen Fläche n ter Ordnung. A. 16, 1887, p. 245—324 *M.* 2.40
- Ueber einen Satz aus der Theorie der Formen. Sb. 1888, p. 15—19.
- Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Schaaeren geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden. Sb. 1888, p. 90—102.
- Conjug. Transf. einer bilin. Form in sich selbst. Sb. 1889, p. 175—211.
- Mit bilin. Form vertauschb. bilin. Formen. Sb. 1889, p. 283—300.
- Satz aus der Theorie der Determinanten. Sb. 1889, p. 329—339.
- Cogred. Transf. bilin. Formen in sich. A. 17, 1890, p. 237—356 *M.* 3.60
- Die Fundamentalgl. der Flächentheorie. Sb. 1892, p. 247—278.
- Cogred. Transf. der bilin. Formen in sich. Sb. 1896, p. 1—23.
- Cogred. u. adjung. Transf. einer bilin. Form. Sb. 1896, p. 211—272.
- Symmetr. u. altern Lösungen der Gl. $SX=XS'$. Sb. 1896, p. 273—281.
- Infinites. Biegungsdeform. einer Fläche Sb. 1897, p. 229—301.
- Energet. Grundgesetz d. Mechanik, Sb. 1901, pag. 53—62 *M.* —.20
- Prinzipien d. Mechanik. Sb. 1901, p. 167—182 *M.* —.40
- Unendl. kl. Deform. einer Fläche. Sb. 1904, p. 141—199 *M.* 1.—
- Ueber diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. 1906, 2 *M.* —.60
- Ueber die Krümmung und konforme Transformation. 1907, 1 *M.* —.60

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch - physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 7. Abhandlung

Funkentelegraphische Empfangsstörung

von

Max Dieckmann

Vorgelegt am 7. Mai 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(mathematisch-physikalische Klasse)

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

- Banernfeind, C. M. v. Beobachtungen und Untersuchungen über Naudet'sche Aneroidbarometer. 1874 1 M 80 ₤
- Gedächtnissrede auf Jos. v. Fraunhofer. 1887 80 ₤
- Beetz, W. Antheil der bayer. Akademie der Wissenschaften an der Entwicklung der Electricitätslehre. Rede. 1873 90 ₤
- Cranz, C. und K. R. Koch. Untersuchungen über die Vibrationen des Gewehrlaufs. Abh. XIX,3 1899 I. 2 M
- — — Fortsetzung XX,3 1900 I. 1 M 60 ₤
- — — Abh. XXI,3 1901 II. 80 ₤
- *Ebert, Herm. Unsichtbare Vorgänge bei electrischen Entladungen. Sitzb. 1898 XXVII. Bd. Heft 4.
- * — Zur Mechanik der Glimmlichtphänomene. Sitzb. 1899 XXIX. Bd. Heft 1.
- Periodische Seespiegelschwankungen (Seiches) am Starnberger See. Sitzb. 1900 Heft 3.
- Messungen der elektrischen Zerstreung im Freiballon. Sitzb. 1900 Heft 3.
- Weitere Beobachtungen der Lufterlektrizität in grösseren Höhen. Sitzb. 1901 Heft 1.
- Ueber die Möglichkeit radioaktivirende Emanationen in flüssiger Luft anzureichern. Sitzb. 1903 Heft 1.
- Ebert, Herm. und Hoffmann, B. Versuche mit flüssiger Luft. Sitzb. 1900 XXX. Bd. 20 ₤
- Ueber Pultationen von geringer Periodendauer in der erdmagnetischen Feldkraft. 1906, 3 40 ₤
- Elster, J. und Geitel, H. Ueber die radioaktive Emanation in der atmosphärischen Luft. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Ueber Methoden zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit der atmosphärischen Luft an der Erdoberfläche sowie ihres Gehalts an radioaktiver Emanation und die nächsten Ziele dieser Untersuchungen. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Endrös, A. Die Seeschwankungen (Seiches) des Chiemsees mit 2 Tafeln. 1906, 2 1 M
- Exner, F. Potentialmessungen. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Bericht über die Thätigkeit der lufterlektrischen Stationen der Wiener Akademie im abgelaufenen Jahre. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Finsterwalder, S. Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Mit 3 Tafeln. Abh. XVII,3 1891 3 M
- Ueber die Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen (mit 1 Tafel). Sitzb. 1900 Heft 2.
- Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abh. 1903.

- Finsterwalder, S. Ueber die Aufgabe, zwei Punkthaufen durch Drehung ohne Maassstabveränderung möglichst nahe zusammenzulegen. Abh. 1903.
- Fischer, K. T. und Alt. Siedepunkt, Gefrierpunkt und Dampfspannung des reinen Stickstoffes bei niedrigen Drucken (mit 2 Tafeln). Sitzb. 1902 Heft 2.
- Erstarrungs- und Schmelzdruck des Stickstoffes. Sitzb. 1902 Heft 2.
- *Fomm, L. Ueber eine neue Erscheinung bei electricischen Entladungen in verdünnten Gasen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 3 1 *M.* 20 *Œ.*
- Föppl, A. Ueber eine mögliche Erweiterung des Newton'schen Gravitationsgesetzes. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 1 1 *M.* 20 *Œ.*
- Fraunhofer, Jos. v. Neue Modifikation des Lichtes. Denkschr. VIII. 1821—22 3 *M.*
- Gesammelte Schriften, herausgegeben von E. Lommel 1888 12 *M.*
- Gerdien, H. Registrirung der Niederschlags-Elektrizität im Göttinger Geophysikalischen Institut. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- *Glan, P. Theoretische Untersuchungen über elastische Körper und Electricität. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 1.
- *Grätz, L. Ein electrochemisches Verfahren, um Wechselströme in Gleichströme zu verwandeln. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 2.
- Groth, P. Ueber die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. Rede 1888 80 *Œ.*
- Jolly, Ph. v. Physik der Molekularkräfte. Rede 1857 50 *Œ.*
- Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation. Abh. I. Abtlg. XIII,1 1878 60 *Œ.* und II. Abtlg. XIV,2 1881 80 *Œ.*
- Zusammensetzung der atmosphär. Luft. Abh. XIII,2 1879 1 *M.*
- Kohlrausch, Friedr. Ueber den absoluten electricischen Leitungswiderstand des Quecksilbers. Abh. XVI,3 1883 3 *M.* 50 *Œ.*
- Korn, A. Ueber die natürliche, elektrische Belegung einer beliebigen, stetig gekrümmten Konduktoroberfläche. Sitzb. 1901 Heft 4.
- Allgemeine Lösung des Problems der magnetischen Induktion. Sitzb. 1901 Heft 4.
- Ueber ein Verfahren der elektrischen Fernphotographie. Sitzb. 1902 Heft 1.
- Einige Sätze über die Potentiale von Doppelbelegungen. Sitzb. 1903 Heft 1.
- Ueber eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes. I. Sitzb. 1903 Heft 3. II. Sitzb. 1903 Heft 4.
- *Linde, C. v. Ueber die Veränderlichkeit der specifischen Wärme der Gase. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 3.
- * — Ueber Vorgänge bei Verbrennung in flüssiger Luft. Sitzb. 1899 XXIX. Bd. Heft 1.
- Lommel, Eug. v. Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Oeffnung etc. Abh. XV,2 1884 4 *M.* 50 *Œ.*
- Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. Abh. XV,3 1886 4 *M.* 50 *Œ.*
- G. S. Ohms wissenschaftliche Leistungen. Rede 1889 60 *Œ.*
- Berechnung von Mischfarben. Mit 2 Taf. Abh. XVII,2 1891 1 *M.*
- Theorie der Dämmerungsfarben. Abh. XIX,2 1897 2 *M.* 40 *Œ.* Nachtrag dazu XIX,3 1899 40 *Œ.*
- * — Ueber aus Kalkspath u. Glas zusammengesetzte Nicol'sche Prismen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 1.
- Lüdeling, Bericht über luftelektrische Arbeiten. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Meinardus, W. Bericht über einige Messungen der Elektrizitätszerstreuung auf dem Meere. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- *Merz, S. v. Das Fraunhofer-Objectiv. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd.

- Miller, Andr. Der primäre und secundäre longitudinale Elastizitätsmodul und die thermische Constante des letzteren. Abh. XV,3 1886 1 M. 80 \mathcal{J}
- Ueber die Grundlagen der Bestimmungsmethode des longitudinalen Elastizitätsmoduls. Abh. XVI,3 1888 1 M. 70 \mathcal{J}
- Ohm, H. S. Erklärung aller . . . Interferenz-Erscheinungen (in einaxigen Krystallplatten) VII,1 u. 2 1853 I. 3 M. II. 2 M. 50 \mathcal{J}
- Orff, C. v. Länge d. einfachen Sekundenpendels. Abh. XIV,3 1883 4 M
- * — Bemerkungen über die Beziehung zwischen Schweremessungen und geologischen Untersuchungen und Bericht über die in Bayern begonnene Pendelbestimmung. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 1.
- Ueber die Hilfsmittel, Methoden und Resultate der internationalen Erdmessung. Rede. 1899 2 M
- Pfaff, F. Bewegung d. Firnes u. d. Gletscher. Abh. XII,2 1876 60 \mathcal{J}
- Kecknagel, Gg. Ueber Abkühlung geschlossener Lufträume durch Wärmeleitung. Sitzb. 1901 Heft 2.
- Riecke, E. Neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelektrizität. Sitzb. 1903 Heft 2.
- Schmauss, A. Magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in selektiv absorbirenden Medien (mit 4 Tafeln). Sitzb. 1902 Heft 3.
- Schmidt, Adolf. Mitteilungen über eine neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials. XIX,1 1895 2 M
- Schmidt, M. Untersuchung über die Umlaufbewegung hydrometrischer Flügel. Sitzb. 1903 Heft 2.
- Schwarzschild, K. Die Poincaré'sche Theorie des Gleichgewichts. Aus den neuen Annalen der k. Sternwarte. Bd. 3 1897 5 M
- * — Ueber die Beugungsfigur im Fernrohr weit ausserhalb des Focus. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 2.
- *Seidel, L. v. Ueber die Bedingungen möglichst präciser Abbildung eines Objects von endlicher scheinbarer Grösse durch einen dioptrischen Apparat. Herausgegeben von S. Finsterwalder. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 3.
- Sohncke, Leonh. Ueber die Bedeutung wissenschaftlicher Ballonfahrten. Rede. 1894. 80 \mathcal{J}
- Gewitterstudien auf Grund von Ballonfahrten. Abh. XVIII,3 1894 1 M. 80 \mathcal{J}
- * — Ueber die Aenderung der specifischen Wärme mit der Temperatur. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 2.
- Sprung, Bericht über die luftelektrischen Arbeiten des Meteorologisch-Magnetischen Observatoriums zu Potsdam. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Steinheil, C. A. und Seidel, L. Brechungs- und Zerstreungsverhältnisse verschiedener Medien. Abh. V,2 1848 40 \mathcal{J}
- Straubel, Rud. Theorie der Beugungserscheinungen kreisförmig begrenzter symmetrischer, nicht sphärischer Wellen. Abh. XVIII,1 1893 3 M

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 8. Abhandlung

Über die Ursachen des Kalifornischen Erdbebens von 1906

von

A. Rothpletz

Mit 2 Tafeln

Vorgetragen am 7. Mai 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(mathematisch-physikalische Klasse)

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Bergeat, Alfr. Die äolischen Inseln. XX,1 1899	16 M
Egger, Jos. G. Foraminiferen und Ostrakoden der Kreidebildungen in den bayerischen Alpen. XXI,1 1899	14 M
Fraunhofer, Jos. Gesammelte Schriften. 1888	12 M
Fuchs, J. Nep. Chemie und Mineralogie. Rede. 1824	60 ♂
— Theoretische Bemerkungen über die Gestaltungszustände des Eisens. VII, 1 1852	60 ♂
Glungler G., Das Eruptivgebiet zwischen Weiden und Tirschenreut und seine kristalline Umgebung 1905, 2.	1 M
Groth, Paul. Ueber die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. Festrede. 1888	80 ♂
— Führer durch die Mineraliensammlung des bayerischen Staates. 1891. 8 ^o	1 M
*Gümbel, Karl Wilh. Ueber das Vorkommen des Antozon-haltigen Flussspathes bei Wölsenberg. 1863 I S. 301.	
* — Ueber das fränkische Knochenbett des Keupers und seine Pflanzenschichten. 1864 I S. 215.	
* — Vorkommen von unteren Triasschichten in Hochasien. 1865 II S. 348.	
* — Ueber neue Funde von Gosauschichten und Vilsenkalk. 1866 II S. 158.	
* — Weitere Mitteilungen über das Vorkommen von Phosphorsäure in Schichtgesteinen Bayerns. 1867 II S. 147.	
* — Ueber die geognostischen Verhältnisse des Montblanc nach Favre. 1867 II S. 603.	
* — Ueber Pyrophyllit als Versteinerungsmittel. 1868 I S. 498.	
— Ueber Gliederung der Procänschichten in Böhmen. X, 2 1868 S. 501	2 M 60 ♂
* — Der Riesvulkan. 1870 I S. 153.	
* — Ueber die Foraminiferen der Gosau- und Belemniten-Schichten. 1870 II S. 278.	
* — Geognostische Verhältnisse des Ulmer Cementmergels und über seine Foraminiferen. 1871 S. 38.	
— Sogenannte Nulliporen, I. Abtlg. Nulliporen des Pflanzenreichs (Lithothamnium). XI,1 1871 S. 1	1 M 50 ♂
— Desgl. II. Abtlg. Nulliporen des Tierreichs (Dactyloporen). XI,1 1871 S. 60	2 M 40 ♂
* — Gletschererscheinungen aus der Eiszeit. 1872 S. 223.	

- *Gümbel, Karl Wilhelm. Geognostische Mittheilungen aus den Alpen.
 I. Mendel- und Schlerengebirge. 1873 S. 14.
 — Desgl. II. Ein Profil aus dem Kaisergebirge. 1874 S. 177.
 * — Ueber Conodictyum bursiforme. 1873 S. 282.
 * — Ueber die Beschaffenheit der Steinmeteoriten von Jowa. 1875 S. 313
 — Beiträge zur Kenntnis der Organisation und systematischen Stellung von Receptaculites. XII, 1 1875.
 * — Geognostische Mittheilungen aus der Umgegend v. Trient. 1876 S. 51.
 — Die geognostische Durchforschung Bayerns. Rede. 1877 2 M. 30 J
 — Die in Bayern gefallenen Steinmeteorite. 1878 S. 14.
 * — Die am Grunde d. Meeres vorkomm. Manganknollen. 1878 S. 189.
 * — Geognostische Mittheilungen aus den Alpen. V. Die Pflanzenresteführenden Schichten von Recoaro. 1879 S. 33.
 * — Das Eruptionsmaterial des Schlammvulkans v. Paterno. 1879 S. 217.
 * — Geognostische Mittheilungen aus den Alpen. VI. Ein Streifzug durch die Bergamasker Alpen. 1880 S. 164.
 * — Desgl. VII. Das Gebirge am Comersee und über Gebirgsfaltung. 1880 S. 542.
 * — Ueber die mit einer Flüssigkeit gefüllten Chalzedon-Mandeln (Enhydros) aus Uruguay. 1880 S. 241.
 * — Beiträge zur Geologie der Goldküste in Afrika. 1882 S. 170.
 * — Geologische Fragmente aus der Umgegend von Ems. 1882 S. 197.
 * — Die miocänen Ablagerungen im oberen Donaugebiete und die Stellung des Schliers von Otttnag. 1887 S. 221.
 * — Das Erdbeben vom 27. Februar 1889 S. 79.
 * — Geolog. Bemerkungen über die Thermen von Gastein. 1889 S. 341.
 * — Geolog. Bemerkungen über die Thermen von Bormio und über das Ortlergebirge. 1891 S. 79.
 * — Geologische Bemerkungen über die warmen Quellen vom Brennerbad. 1892 S. 139.
 * — Die Amberger Eisenerzformation. 1893 S. 293.
 * — Ueber die Grünerde am Monte Baldo. 1896 S. 545.
- Günther, S. Akustisch-geographische Probleme I. 1901, 1 40 J
 — Akustisch-geographische Probleme II. 1901, 3 1 M
 — Ueber gewisse hydrologisch-topographische Grundbegriffe. 1902, 1 40 J
 — Glaziale Denudationsgebilde im mittleren Eisackthale. 1902, 3 40 J
 — und Reindl, J. Seismologische Untersuchungen. 1903, 4 60 J
 — Das Pothenotsche Problem auf der Kugelfläche. 1904, 2 20 J
 — Erdpyramiden und Büsserschnee als gleichartige Erosionsgebilde. 1904, 3 60 J
 — Neue Beiträge zur Theorie der Erosionsfiguren. 1905, 3 40 J
 — Ein Naturmodell der Dünenbildung. 1907, 2 20 J
 — und Dannbeck, S. Die Vorgeschichte des barischen Windgesetzes. 1905, 3 60 J
- Haushofer, K. Franz von Kobell. Denkschrift. 1884 80 J
- Liebig, Justus Frhr. v. Rede am 28. März 1863 (Francis Bacon von Verulam) 1 M. 60 J
 — Rede am 28. März 1865 (Induction und Deduction) 50 J
 — Rede am 25. Juli 1866 (Entwicklung der Ideen in der Naturwissenschaft). 80. 50 J
- Pfaff, F. Bewegung des Firnes und der Gletscher. XII, 2 1876 60 J
- Pohlig, Hans. Eine Elefantenhöhle Siciliens. XVIII, 1. 1893 2 M. 80 J
- Rauff, Herm. Untersuchungen üb. d. Receptaculitiden. XVII, 3 1892 5 M

- Roth, J. u. Wagner, A. Fossile Knochenüberreste von Pikermi. VII, 2
1854 3 M
- Rothpletz, A. Ueber eigentümliche Deformationen jurassischer Am-
moniten. 1900, 1 60 J
- Ueber die Jodquellen bei Tölz. 1901, 1 60 J
- Ueber den Ursprung der Thermalquellen von St. Moriz. 1902, 2 40 J
- Ueber die Möglichkeit, den Gegensatz zwischen Kontraktions- und
Expansionstheorie aufzuheben. 1902, 3 40 J
- Die fossilen, oberoligocänen Wellenfurchen des Peissenberges etc.
1904, 3 40 J
- Gedächtnisrede auf Karl Alfred von Zittel am 15. März 1905 60 J
- Schlagintweit, Herm. v. Salzseen im westl. Tibet. Thl. I. XI, 1.
1871 2 M
- Sendtner, O. Vegetationsverhältnisse Südbayerns. 1854 8^o 15 M
- Voit, E. Vergleichung von Bergkrystall-Gewichten. 1880 3 M
- Wagner, Andr. Spezif. Differenzen der Hyaena brunnea von der Hy-
aena striata. III, 3 1842 50 J
- Geograph. Verbreitung der Säugethiere. 1, 2 u. 3. IV, 1, 2 u. 3
1844, 45 u. 46. I. à 3 M 80 J, II. à 2 M. III. à 4 M
- Säugethiere Amerikas. 1, 2 u. 3. V, 1 u. 2 1847 u. 48.
I. II. III. jedes à 2 M
- Urweltliche Säugethier-Ueberreste aus Griechenland. V, 2 1848
2 M 60 J
- Foss. Ueberreste gavialart. Saurier. V, 3 1849 3 M 40 J
- Urweltliche Fische in d. lithogr. Schieferen. VI, 1 1850 2 M 40 J
- Neue Art von Ornithocephalus. VI, 1 1850 1 M 60 J
- Urweltliche Säugethiere in den Höhlen von Muggendorf. VI, 1
1850 1 M 50 J
- Ichthyosaurus im süddeutschen Lias. VI, 2 1851 1 M 40 J
- Neu aufgefundenene Saurier-Ueberreste a. d. lithograph. Schieferen.
VI, 3 1852 2 M 40 J
- Beschreib. einer fossilen Schildkröte v. Kelheim. VII, 1 1853 90 J
- Fossile Säugethier-Ueberreste v. Pikermi. VIII, 1 1857 3 M 70 J
- Urweltliche Fauna des lithogr. Schiefers 1 u. 2. VIII, 2 u. IX, 1
1858 u. 61 I. à 2 M 80 J, II. à 2 M 20 J
- Fossile Ueberreste von nackten Dintenfischen. VIII, 3 1860 2 M
- Monographie der fossilen Fische a. d. lithogr. Schieferen. 1 u. 2
IX, 2 u. 3 1861 u. 63 I. à 2 M 70 J, II. à 3 M 60 J
- Weinschenk, Ernst. Beiträge zur Petrographie der östl. Zentralalpen.
XVIII, 3 1894 I. Abhdlg. 3 M, II. Abhdlg. 1 M 50 J
- XXII, 2 1903 III. Abhdlg. 3 M
- Zur Kenntnis der Graphitlagerstätten. XIX, 2 1897 3 M
- Zittel, Karl Alfr. Denkschrift auf Christ. Erich Herm. v. Meyer. 1870
1 M 40 J
- Ueber Coeloptychium. XII, 3 1876 3 M 70 J
- Studien über fossile Spongien. 1, 2 u. 3. XIII, 1 u. 2 1877 u. 78.
I. à 1 M 80 J, II. à 5 M, III. à 2 M
- Geolog. Bau der libyschen Wüste. Rede. 1880 2 M 40 J
- Rückblick auf die Gründung u. die Entwicklung der k. b. Akademie
der Wissenschaften im XIX. Jahrh. Rede. 1899 80 J
- * — Die Räuberhöhle im Schelmengraben. 1872 S. 28.
- * — Ueber Gletschererscheinungen in der bayer. Hochebene. 1874 S. 252.
- * — Ueber Plicatoerinus. 1881 S. 105.

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 9. Abhandlung

Das Schelfeis der Antarktis
am Gaussberg

von

Erich von Drygalski

Vorgetragen am 4. Juni 1910



München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN
der
KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
(mathematisch-physikalische Klasse).

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte

Bergeat, Alfr. Die äolischen Inseln. XX,1 1899	16 <i>M.</i>
Egger, Jos. G. Foraminiferen und Ostrakoden der Kreidebildungen in den bayerischen Alpen. XXI,1 1899	14 <i>M.</i>
Fraunhofer, Jos. Gesammelte Schriften. 1888	12 <i>M.</i>
Fuchs, J. Nep. Chemie und Mineralogie. Rede. 1824	60 <i>S.</i>
— Theoretische Bemerkungen über die Gestaltungszustände des Eisens. VII, 1 1852	60 <i>S.</i>
Glungler G., Das Eruptivgebiet zwischen Weiden und Tirschenreut und seine kristalline Umgebung 1905, 2.	1 <i>M.</i>
Groth, Paul. Ueber die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. Festrede. 1888	80 <i>S.</i>
— Führer durch die Mineraliensammlung des bayerischen Staates. 1891. 8 ^o	1 <i>M.</i>
* Gümbel, Karl Wilh. Ueber das Vorkommen des Antozon-haltigen Flussspathes bei Wölsenberg. 1863 I S. 301.	
* — Ueber das fränkische Knochenbett des Keupers und seine Pflanzenschichten. 1864 I S. 215.	
* — Vorkommen von unteren Triassschichten in Hochasien. 1865 II S. 348.	
* — Ueber neue Funde von Gosauschichten und Vilserkalk. 1866 II S. 158.	
* — Weitere Mitteilungen über das Vorkommen von Phosphorsäure in Schichtgesteinen Bayerns. 1867 II S. 147.	
* — Ueber die geognostischen Verhältnisse des Montblanc nach Favre. 1867 II S. 603.	
* — Ueber Pyrophyllit als Versteinerungsmittel. 1868 I S. 498.	
— Ueber Gliederung der Procänschichten in Böhmen. X, 2 1865 S. 501	2 <i>M.</i> 60 <i>S.</i>
* — Der Riesvulkan. 1870 I S. 153.	
* — Ueber die Foraminiferen der Gosau- und Belemniten-Schichten. 1870 II S. 278.	
* — Geognostische Verhältnisse des Ulmer Cementmergels und über seine Foraminiferen. 1871 S. 38.	
— Sogenannte Nulliporen, I. Abtlg. Nulliporen des Pflanzenreichs (Litiothamnium). XI, 1 1871 S. 1	1 <i>M.</i> 50 <i>S.</i>
— Desgl. II. Abtlg. Nulliporen des Thierreichs (Dactyloporen). XI, 1 1871 S. 60	2 <i>M.</i> 40 <i>S.</i>
* — Gletschererscheinungen aus der Eiszeit. 1872 S. 223.	

- *Gümbel, Karl Wilhelm. Geognostische Mitteilungen aus den Alpen.
I. Mendel- und Schlerngebirge. 1873 S. 14.
— Desgl. II. Ein Profil aus dem Kaisergebirge. 1874 S. 177.
* — Ueber Conodictyum bursiforme. 1873 S. 282.
* — Ueber die Beschaffenheit der Steinmeteoriten von Jowa. 1875 S. 313
— Beiträge zur Kenntnis der Organisation und systematischen Stellung von Receptaculites. XII,1 1875.
* — Geognostische Mitteilungen aus der Umgegend v. Trient. 1876 S. 51.
— Die geognostische Durchforschung Bayerns. Rede. 1877 2 M 30 ♂
— Die in Bayern gefallenen Steinmeteorite. 1878 S. 14.
* — Die am Grunde d. Meeres vorkomm. Manganknollen. 1878 S. 189.
* — Geognostische Mitteilungen aus den Alpen. V. Die Pflanzenresteführenden Schichten von Recoaro. 1879 S. 33.
* — Das Eruptionsmaterial des Schlammvulkans v. Paterno. 1879 S. 217.
* — Geognostische Mitteilungen aus den Alpen. VI. Ein Streifzug durch die Bergamasker Alpen. 1880 S. 164.
* — Desgl. VII. Das Gebirge am Comersee und über Gebirgsfaltung. 1880 S. 542.
* — Ueber die mit einer Flüssigkeit gefüllten Chalzedon-Mandeln (Enhydros) aus Uruguay. 1880 S. 241.
* — Beiträge zur Geologie der Goldküste in Afrika. 1882 S. 170.
* — Geologische Fragmente aus der Umgegend von Ems. 1882 S. 197.
* — Die miocänen Ablagerungen im oberen Donaugebiete und die Stellung des Schliers von Ottnang. 1887 S. 221.
* — Das Erdbeben vom 27. Februar 1889 S. 79.
* — Geolog. Bemerkungen über die Thermen von Gastein. 1889 S. 341.
* — Geolog. Bemerkungen über die Thermen von Bormio und über das Ortlergebirge. 1891 S. 79.
* — Geologische Bemerkungen über die warmen Quellen vom Brennerbad. 1892 S. 139.
* — Die Amberger Eisenerzformation. 1893 S. 293.
* — Ueber die Grünerde am Monte Baldo. 1896 S. 545.
Günther, S. Akustisch-geographische Probleme I. 1901, 1 40 ♂
— Akustisch-geographische Probleme II. 1901, 3 1 M
-- Ueber gewisse hydrologisch-topographische Grundbegriffe. 1902, 1 40 ♂
— Glaziale Denudationsgebilde im mittleren Eisacktale. 1902, 3 40 ♂
— und Reindl, J. Seismologische Untersuchungen. 1903, 4 60 ♂
— Das Pothenotsche Problem auf der Kugelfläche. 1904, 2 20 ♂
— Erdpyramiden und Büsserschnee als gleichartige Erosionsgebilde. 1904, 3 60 ♂
— Neue Beiträge zur Theorie der Erosionsfiguren. 1905, 3 40 ♂
— Ein Naturmodell der Dünenbildung. 1907, 2 20 ♂
— und Dannbeck, S. Die Vorgeschichte des barischen Windgesetzes. 1905, 3 60 ♂
Haushofer, K. Franz von Kobell. Denkschrift. 1884 80 ♂
Liebig, Justus Frhr. v. Rede am 28. März 1863 (Francis Bacon von Verulam) 1 M 60 ♂
— Rede am 28. März 1865 (Induction und Deduction) 50 ♂
— Rede am 25. Juli 1866 (Entwicklung der Ideen in der Naturwissenschaft). 8^o. 50 ♂
Pfaff, F. Bewegung des Firnes und der Gletscher. XII,2 1876 60 ♂
Pohlig, Hans. Eine Elefantenhöhle Siciliens. XVIII,1. 1893 2 M 80 ♂
Rauff, Herm. Untersuchungen üb. d. Receptaculitiden. XVII,3 1892 5 M

- Roth, J. u. Wagner, A. Fossile Knochenüberreste von Pikermi. VII, 2
1854 3 M
- Rothpletz, A. Ueber eigentümliche Deformationen jurassischer Am-
moniten. 1900, 1 60 J
- Ueber die Jodquellen bei Tölz. 1901, 1 60 J
- Ueber den Ursprung der Thermalquellen von St. Moriz. 1902, 2 40 J
- Ueber die Möglichkeit, den Gegensatz zwischen Kontraktions- und
Expansionstheorie aufzuheben. 1902, 3 40 J
- Die fossilen, oberoligocänen Wellenfurchen des Peissenberges etc.
1904, 3 40 J
- Gedächtnisrede auf Karl Alfred von Zittel am 15. März 1905 60 J
- Schlagintweit, Herm. v. Salzseen im westl. Tibet. Thl. I. XI, 1.
1871 2 M
- Sendtner, O. Vegetationsverhältnisse Südbayerns. 1854 8° 15 M
- Voit, E. Vergleichung von Bergkristall-Gewichten. 1880 3 M
- Wagner, Andr. Spezif. Differenzen der *Hyaena brunnea* von der *Hyaena striata*. III, 3 1842 50 J
- Geograph. Verbreitung der Säugethiere. 1, 2 u. 3. IV, 1, 2 u. 3
1844, 45 u. 46. I. à 3 M 80 J, II. à 2 M. III. à 4 M
- Säugethiere Amerikas. 1, 2 u. 3. V, 1 u. 2 1847 u. 48.
I. II. III. jedes à 2 M
- Urweltliche Säugethier-Ueberreste aus Griechenland. V, 2 1848
2 M 60 J
- Foss. Ueberreste gavialart. Saurier. V, 3 1849 3 M 40 J
- Urweltliche Fische in d. lithogr. Schiefer. VI, 1 1850 2 M 40 J
- Neue Art von *Ornithocephalus*. VI, 1 1850 1 M 60 J
- Urweltliche Säugethiere in den Höhlen von Muggendorf. VI, 1
1850 1 M 50 J
- Ichthyosaurus im süddeutschen Lias. VI, 2 1851 1 M 40 J
- Neu aufgefundene Saurier-Ueberreste a. d. lithograph. Schiefer.
VI, 3 1852 2 M 40 J
- Beschreib. einer fossilen Schildkröte v. Kelheim. VII, 1 1853 90 J
- Fossile Säugethier-Ueberreste v. Pikermi. VIII, 1 1857 3 M 70 J
- Urweltliche Fauna des lithogr. Schiefers 1 u. 2. VIII, 2 u. IX, 1
1858 u. 61 I. à 2 M 80 J, II. à 2 M 20 J
- Fossile Ueberreste von nackten Dintenfischen. VIII, 3 1860 2 M
- Monographie der fossilen Fische a. d. lithogr. Schiefer. 1 u. 2
IX, 2 u. 3 1861 u. 63 I. à 2 M 70 J, II. à 3 M 60 J
- Weinschenk, Ernst. Beiträge zur Petrographie der östl. Zentralalpen.
XVIII, 3 1894 I. Abhdlg. 3 M, II. Abhdlg. 1 M 50 J
- XXII, 2 1903 III. Abhdlg. 3 M
- Zur Kenntnis der Graphitlagerstätten. XIX, 2 1897 3 M
- Zittel, Karl Alfr. Denkschrift auf Christ. Erich Herm. v. Meyer. 1870
1 M 40 J
- Ueber *Coeloptychium*. XII, 3 1876 3 M 70 J
- Studien über fossile Spongien. 1, 2 u. 3. XIII, 1 u. 2 1877 u. 78.
I. à 1 M 80 J, II. à 5 M, III. à 2 M
- Geolog. Bau der libyschen Wüste. Rede. 1880 2 M 40 J
- Rückblick auf die Gründung u. die Entwicklung der k. b. Akademie
der Wissenschaften im XIX. Jahrh. Rede. 1899 80 J
- * — Die Räuberhöhle im Schelmengraben. 1872 S. 28.
- * — Ueber Gletschererscheinungen in der bayer. Hochebene. 1874 S. 252.
- * — Ueber *Plicatocrinus*. 1881 S. 105.

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 10. Abhandlung

Über

die Verbiegung geodätischer Netze

von

M. Lagally

Vorgelegt am 2. Juli 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN
der
KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
(mathematisch-physikalische Klasse)

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

- Bauernfeind, C. M. v. Beobachtungen und Untersuchungen über Naudet'sche Aneroidbarometer. 1874 1 M. 80 ₤
 — Gedächtnissrede auf Jos. v. Fraunhofer. 1887 80 ₤
 Beetz, W. Antheil der bayer. Akademie der Wissenschaften an der Entwicklung der Electricitätslehre. Rede. 1873 90 ₤
 Cranz, C. und K. R. Koch. Untersuchungen über die Vibrationen des Gewehrlaufs. Abh. XIX,3 1899 I. 2 M.
 — — — Fortsetzung XX,3 1900 I. 1 M. 60 ₤
 — — — Abh. XXI,3 1901 II. 80 ₤
 * Ebert, Herm. Unsichtbare Vorgänge bei electricischen Entladungen. Sitzb. 1893 XXVIII. Bd. Heft 4.
 * — Zur Mechanik der Glimmlichtphänomene. Sitzb. 1899 XXIX. Bd. Heft 1.
 — Periodische Seespiegelschwankungen (Seiches) am Starnberger See. Sitzb. 1900 Heft 3.
 — Messungen der elektrischen Zerstreuung im Freiballon. Sitzb. 1900 Heft 3.
 — Weitere Beobachtungen der Luftpolektrizität in grösseren Höhen. Sitzb. 1901 Heft 1.
 — Ueber die Möglichkeit radioaktivirende Emanationen in flüssiger Luft anzureichern. Sitzb. 1903 Heft 1.
 Ebert, Herm. und Hoffmann, B. Versuche mit flüssiger Luft. Sitzb. 1900 XXX. Bd. 20 ₤
 — Ueber Pultationen von geringer Periodendauer in der erdmagnetischen Feldkraft. 1906, 3 40 ₤
 Elster, J. und Geitel, H. Ueber die radioaktive Emanation in der atmosphärischen Luft. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
 — Ueber Methoden zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit der atmosphärischen Luft an der Erdoberfläche sowie ihres Gehalts an radioaktiver Emanation und die nächsten Ziele dieser Untersuchungen. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
 Endrös, A. Die Seeschwankungen (Seiches) des Chiemsees mit 2 Tafeln. 1906, 2 1 M.
 Exner, F. Potentialmessungen. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
 — Bericht über die Thätigkeit der luftpolektrischen Stationen der Wiener Akademie im abgelaufenen Jahre. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
 Finsterwalder, S. Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Mit 3 Tafeln. Abh. XVII,3 1891 3 M.
 — Ueber die Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen (mit 1 Tafel). Sitzb. 1900 Heft 2.
 — Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abh. 1903.

- Finsterwalder, S. Ueber die Aufgabe, zwei Punkthaufen durch Drehung ohne Maassstabveränderung möglichst nahe zusammenzulegen. Abh. 1903.
- Fischer, K. T. und Alt. Siedepunkt, Gefrierpunkt und Dampfspannung des reinen Stickstoffes bei niedrigen Drucken (mit 2 Tafeln). Sitzb. 1902 Heft 2.
 — Erstarrungs- und Schmelzdruck des Stickstoffes. Sitzb. 1902 Heft 2.
- *Fomm, L. Ueber eine neue Erscheinung bei electricischen Entladungen in verdünnten Gasen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 3 1 M. 20 S
- Föppl, A. Ueber eine mögliche Erweiterung des Newton'schen Gravitationsgesetzes. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 1 1 M. 20 S
- Fraunhofer, Jos. v. Neue Modifikation des Lichtes. Denkschr. VIII. 1821—22 3 M.
 — Gesammelte Schriften, herausgegeben von E. Lommel 1888 12 M
- Gerdien, H. Registrirung der Niederschlags-Elektrizität im Göttinger Geophysikalischen Institut. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- *Glan, P. Theoretische Untersuchungen über elastische Körper und Electricität. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 1.
- *Grätz, L. Ein electrochemisches Verfahren, um Wechselströme in Gleichströme zu verwandeln. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 2.
- Groth, P. Ueber die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. Rede 1888 80 S
- Jolly, Ph. v. Physik der Molekularkräfte. Rede 1857 50 S
 — Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation. Abh. I. Abtlg. XIII,1 1878 60 S und II. Abtlg. XIV,2 1881 80 S
 — Zusammensetzung der atmosphär. Luft. Abh. XIII,2 1879 1 M.
- Kohlrausch, Friedr. Ueber den absoluten electricischen Leitungswiderstand des Quecksilbers. Abh. XVI,3 1888 3 M. 50 S
- Korn, A. Ueber die natürliche, elektrische Belegung einer beliebigen, stetig gekrümmten Konduktoroberfläche. Sitzb. 1901 Heft 4.
 — Allgemeine Lösung des Problems der magnetischen Induktion. Sitzb. 1901 Heft 4.
 — Ueber ein Verfahren der elektrischen Fernphotographie. Sitzb. 1902 Heft 1.
 — Einige Sätze über die Potentiale von Doppelbelegungen. Sitzb. 1903 Heft 1.
 — Ueber eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes. I. Sitzb. 1903 Heft 3. II. Sitzb. 1903 Heft 4.
- *Linde, C. v. Ueber die Veränderlichkeit der specifischen Wärme der Gase. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 3.
- * — Ueber Vorgänge bei Verbrennung in flüssiger Luft. Sitzb. 1899 XXIX. Bd. Heft 1.
- Lommel, Eug. v. Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Öffnung etc. Abh. XV,2 1884 4 M. 50 S
 — Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. Abh. XV,3 1886 4 M. 50 S
 — G. S. Ohms wissenschaftliche Leistungen. Rede 1889 60 S
 — Berechnung von Mischfarben. Mit 2 Taf. Abh. XVII,2 1891 1 M.
 — Theorie der Dämmerungsfarben. Abh. XIX,2 1897 2 M. 40 S
 Nachtrag dazu XIX,3 1899 40 S
- * — Ueber aus Kalkspath u. Glas zusammengesetzte Nicol'sche Prismen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 1.
- Lüdeling, Bericht über luftelektrische Arbeiten. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Meinardus, W. Bericht über einige Messungen der Elektrizitätszerstreuung auf dem Meere. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- *Merz, S. v. Das Fraunhofer-Objectiv. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd.

- Miller, Andr. Der primäre und secundäre longitudinale Elastizitätsmodul und die thermische Constante des letzteren. Abh. XV,3 1886 1 M. 80 *ſ*
- Ueber die Grundlagen der Bestimmungsmethode des longitudinalen Elastizitätsmoduls. Abh. XVI,3 1888 1 M. 70 *ſ*
- Ohm, H. S. Erklärung aller . . . Interferenz-Erscheinungen (in einaxigen Krystallplatten) VII,1 u. 2 1853 I. 3 M. II. 2 M. 50 *ſ*
- Orff, C. v. Länge d. einfachen Secundenpendels. Abh. XIV,3 1883 4 M.
- * — Bemerkungen über die Beziehung zwischen Schweremessungen und geologischen Untersuchungen und Bericht über die in Bayern begonnene Pendelbestimmung. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 1.
- Ueber die Hilfsmittel, Methoden und Resultate der internationalen Erdmessung. Rede. 1899 2 M.
- Pfaff, F. Bewegung d. Firnes u. d. Gletscher. Abh. XII,2 1876 60 *ſ*
- Recknagel, Gg. Ueber Abkühlung geschlossener Lufträume durch Wärmeleitung. Sitzb. 1901 Heft 2.
- Riecke, E. Neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Lufterlektrizität. Sitzb. 1903 Heft 2.
- Schmauss, A. Magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in selektiv absorbirenden Medien (mit 4 Tafeln). Sitzb. 1902 Heft 3.
- Schmidt, Adolf. Mittheilungen über eine neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials. XIX,1 1895 2 M.
- Schmidt, M. Untersuchung über die Umlaufbewegung hydrometrischer Flügel. Sitzb. 1903 Heft 2.
- Schwarzschild, K. Die Poincaré'sche Theorie des Gleichgewichts. Aus den neuen Annalen der k. Sternwarte. Bd. 3 1897 5 M.
- * — Ueber die Beugungsfigur im Fernrohr weit ausserhalb des Focus. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 2.
- * Seidel, L. v. Ueber die Bedingungen möglichst präziser Abbildung eines Objects von endlicher scheinbarer Grösse durch einen dioptrischen Apparat. Herausgegeben von S. Finsterwalder. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 3.
- Sohncke, Leonh. Ueber die Bedeutung wissenschaftlicher Ballonfahrten. Rede. 1894. 80 *ſ*
- Gewitterstudien auf Grund von Ballonfahrten. Abh. XVIII,3 1894 1 M. 80 *ſ*
- * — Ueber die Aenderung der specifischen Wärme mit der Temperatur. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 2.
- Sprung, Bericht über die lufterlektrischen Arbeiten des Meteorologisch-Magnetischen Observatoriums zu Potsdam. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Steinheil, C. A. und Seidel, L. Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse verschiedener Medien. Abh. V,2 1848 40 *ſ*
- Straubel, Rud. Theorie der Beugungserscheinungen kreisförmig begrenzter symetrischer, nicht sphärischer Wellen. Abh. XVIII,1 1893 3 M.

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

Jahrgang 1910. 11. Abhandlung

Koordinatenberechnung und Netzanschlüsse der südbayerischen Dreieckskette

von

M. Schmidt

Vorgelegt am 5. November 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

- Bauer, Gustav. Ueber einen Kettenbruch Eulers. A. 112, 1872 *M.* —.50
 — Pascal's Theorem. A. 113, 1874 *M.* 1.—
 — Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 *M.* —.60
 — Von der Hesse'schen Determinante. A. 143, 1883 *M.* —.50
 * — Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sb. 1897, p. 359—366.
- Brill, Al. Zur Theorie der geodät. Linie etc. A. 142, 1883 *M.* 1.—
 * — Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
 * — Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
 — Multiplicität d. Schnittp. zweier ebener Curven. Sb. 1888, p. 81—94.
 — Die reducirte Resultante. A. 171, 1889 *M.* —.40.
 — Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sb. 1891, p. 207—220.
- Burmester, L. Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme und räumlicher Systeme. 1907, 1 *M.* —.40
- Dyck, W. v. Die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Diff.-Gl. 1^{ter} O. definirten Curvensysteme. I. (mit 4 Taf.) Sb. 1891, p. 23—57; II. (mit 3 Taf.) Sb. 1892, p. 101—138.
 * — Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sb. 1895, p. 261—277. — II. Umschlingung zweier Mannigf. Desgl. p. 447—500. — III. Nullstellen eines Syst. von Funkt. mehrerer Veränderl. Sb. 1898, p. 203—224.
 — Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede. Nov. 1896 *M.* 1.20
 — Rede v. C. G. J. Jacobi. Sb. 1901, p. 203—208 *M.* —.20
- Finsterwalder, S. Katoptr. Eigensch. der F_2 . Sb. 1887, p. 33—42.
 — Ueber die Vertheilung der Biegungselasticität in dreifach symmetrischen Krystallen (mit 1 Taf.). Sb. 1888, p. 257—266.
 — Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. Sb. 1890, p. 35—82.
 — Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. A. 17, 1891, p. 517—537 *M.* 3.—
 — Analogie zwischen Aufg. der Ausgl.-Rechnung und Statik. Sb. 1903, p. 683—689 *M.* —.20
 — Neue Anwend. d. Photogrammetrie. Sb. 1904, p. 683—689 *M.* —.40
 — u. W. Scheufele. Rückwärts-Einschneiden im Raume. Sb. 1903, p. 591—614 *M.* —.40
 — Ueber Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. 1900, 2 *M.* —.40
 — Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen. 1900, 3 *M.* —.20

- Finsterwalder, S. Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. *Abh. II. Kl. XXII, 2.* 1903 *M.* 1.20
- Der gefährliche Ort beim Rückwärtseinschneiden auf der Kugel. 1905, 1 *M.* —.20
- Föppl, A. Absol. u. relat. Bewegung. *Sb.* 1904, p. 383—395 *M.* —.40
- Kreiserversuch zur Messung zur Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. 1904, 1 *M.* —.40
- Ueber die Torsion von runden Stäben mit veränderlichem Durchmesser. 1905, 2 *M.* —.40
- Günther, S. Pothenot'sches Problem auf d. Kugel. *Sb.* 1904, p. 115—123 *M.* —.20
- Gordan, P. Discriminante einer ternären Form. *Sb.* 1887, p. 477—478.
- *Klein, F. Elliptische Modulfunctionen. *Sb.* 1880, p. 89—100.
- * — Unendl. viele Normalf. des ellipt. Integr. 1. Gtg. *Sb.* 1880, p. 533—541.
- Königsberger, L. Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des Abel'schen. *Sb.* 1885, p. 462—468.
- Algebraische Bez. zw. Fund.-Integralen etc. *Sb.* 1887, p. 423—431.
- Irreducibilität der algebr. part. Diff.-Gl.-Syst. *Sb.* 1891, p. 275—279.
- Lindemann, F. Conforme Abbild. d. Halbebene auf ein einf. zusammenh., von algebr. Curve begrenztes Flächenst. *Sb.* 1894, p. 403—422.
- Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird. *Sb.* 1895, p. 219—237.
- Lineare Transf. einer quadrat. Mannigf. in sich. *Sb.* 1896, p. 31—66.
- * — Analyt. Forts. derj. Funktionen, welche das Innere eines Kegelschn. conform auf die Halbebene abbilden. *Sb.* 1896, p. 401—424.
- Zur Gesch. d. Polyeder u. Zahlzeichen. *Sb.* 1896, p. 625—756.
- Gedächtnissrede auf Phil Ludw. von Seidel. März 1897 *M.* 3.—
- Umkehrprobleme aus d. Theorie der ellipt. Integrale. *Sb.* 1898, p. 37—54.
- * — Drehung eines Körpers um d. Schwerpunkt. *Sb.* 1898, p. 181—202.
- * — Prähistorische Gewichte. I. *Sb.* 1899, p. 71—136.
- * — Zur Theorie der automorphen Funktionen. I. *Sb.* 1899, p. 423—454. II. Desgl. p. 493—510.
- Fermat'scher Satz betr. d. Gl. $x^n = y^n + z^n$. *Sb.* 1901, p. 185—202 und p. 495 *M.* —.40
- Zur Theorie der Spectrallinien. I. *Sb.* 1901, p. 451—491 *M.* —.80
- II. *Sb.* 1903, p. 27—100 *M.* 1.—
- Das Pascal'sche Sechseck. *Sb.* 1902, p. 153—161 *M.* —.20
- Das d'Alembert'sche Prinzip. *Sb.* 1904, p. 77—101 *M.* —.60
- Lüroth, J. Kanon. Perioden d. Abel'schen Integrale. I. *A.* 152, 1885 *M.* 1.30
- II. *A.* 161, 1887 *M.* 1.30
- Bestimmung einer Fläche durch geod. Messungen. *Sb.* 1892, p. 27—52.
- Nöther, M. Berührungscurven der C_4 . *A.* 171, 1889, p. 103—150 *M.* 1.50
- Die sieben Systeme von Kegelschnitten durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen C_4 . *Sb.* 1895, p. 93—100.
- Pringsheim, A. Zur Theorie d. Taylor'schen Reihe. *Sb.* 1892, p. 211—245.
- Ueber den Cauchy'schen Integralsatz. *Sb.* 1895, p. 39—72.
- Entwickelung eind. analyt. Funkt. in Potenzreihen. *Sb.* 1895, p. 75—92.
- Zum Cauchy'schen Integralsatz. *Sb.* 1895, p. 295—304.
- Potenzreihen a. Conv.-Kr. u. Fourier'sche Reihen. *Sb.* 1895, p. 337—364.
- Zur Theorie der synektischen Funktionen. *Sb.* 1896, p. 167—182.
- Sog. Grenze u. Grenzgebiete zw. Conv. u. Div. *Sb.* 1896, p. 605—624.
- Elementare Theorie d. unendl. Doppelreihen. *Sb.* 1897, p. 101—152.
- Du Bois-Reymond'sche Conv.-Grenze etc. *Sb.* 1897, p. 303—344 und 356—358.

- Pringsheim, A. Zwei Abel'sche Sätze, betr. Reihen-Stetigkeit. Sb. 1897, p. 343—356.
- Zur Theorie des Doppelintegrals. Sb. 1898, p. 59—74.
 - Convergenz unendlicher Kettenbrüche. Sb. 1898, p. 295—324.
 - Die ersten Beweise d. Irrationalität von e u. π . Sb. 1898, p. 325—337.
 - Zur Theorie des Doppelintegrals, des Green'schen und Cauchy'schen Integralsatzes. Sb. 1899, p. 39—62 und 263—271.
 - Convergenzkrit. f. Kettenbr. mit pos. Gliedern. Sb. 1899, p. 261—268.
 - Potenzreihen auf d. Conv.-Kreise. Sb. 1900, p. 37—100 *M.* 1.20
 - Zweiter Mittelw.-Satz f. Summen u. Integrale. Sb. 1900, p. 209—233. *M.* —.40
 - Conv. periodischer Kettenbrüche. Sb. 1900, p. 463—488 *M.* —.40
 - Fund.-Satz f. period. Funktionen. Sb. 1900, p. 541—552 *M.* —.20
 - Divergenz gewisser Potenzreihen an der Convergenz-Grenze. Sb. 1901, p. 505—524 *M.* —.40
 - Zur Theorie der ganzen transzendenten Funktionen. Sb. 1902, p. 163—192 u. 295—304 *M.* —.40
 - Ganze transz. Funkt. v. endl. Range. Sb. 1903, p. 101—130 *M.* —.40
 - Cauchy-Goursat'scher Integralsatz f. reelle Curven-Integrale. Sb. 1903, p. 673—682 *M.* —.40
 - Ueber Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. Festrede. März 1904 *M.* 1.20
 - Ueber einige Konvergenz-Kriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. 1905, 3 *M.* —.40
 - Ueber das Additions-Theorem der elliptischen Funktionen. 1906, 2 *M.* —.20
 - Ueber Konvergenz- und Divergenz-Kriterien für zwei- und mehrfach unendliche Reihen mit positiven Gliedern. 1908, 1 *M.* —.20
- Seeliger, H. v. Interpolat. Darst. einer Function durch eine nach Kugelfunctionen fortschr. Reihe. Sb. 1890, p. 499—511.
- * — Verteilung d. nach Ausgleichung übrigbl. Fehler. Sb. 1899, p. 3—21.
- Voss, A. Ueber die projective Centrafläche einer algebraischen Fläche n ter Ordnung. A. 16, 1887, p. 245—324 *M.* 2.40
- Ueber einen Satz aus der Theorie der Formen. Sb. 1888, p. 15—19.
 - Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Schaaeren geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden. Sb. 1888, p. 90—102.
 - Conjug. Transf. einer bilin. Form in sich selbst. Sb. 1889, p. 175—211.
 - Mit bilin. Form vertauschb. bilin. Formen. Sb. 1889, p. 283—300.
 - Satz aus der Theorie der Determinanten. Sb. 1889, p. 329—339.
 - Cogred. Transf. bilin. Formen in sich. A. 17, 1890, p. 237—356 *M.* 3.60
 - Die Fundamentalggl. der Flächentheorie. Sb. 1892, p. 247—278.
 - Cogred. Transf. der bilin. Formen in sich. Sb. 1896, p. 1—23.
 - Cogred. u. adjung. Transf. einer bilin. Form. Sb. 1896, p. 211—272.
 - Symmetr. u. altern. Lösungen der Gl. $SX=XS'$. Sb. 1896, p. 273—281.
 - Infinites. Biegungsdeform. einer Fläche. Sb. 1897, p. 229—301.
 - Energet. Grundgesetz d. Mechanik. Sb. 1901, pag. 53—62 *M.* —.20
 - Prinzipien d. Mechanik. Sb. 1901, p. 167—182 *M.* —.40
 - Unendl. kl. Deform. einer Fläche. Sb. 1904, p. 141—199 *M.* 1.—
 - Ueber diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. 1906, 2 *M.* —.80
 - Ueber die Krümmung und konforme Transformation. 1907, 1 *M.* —.60

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 12. Abhandlung

Über

einige spezielle Bieungsgruppen

von

E. Stübler

Vorgelegt am 5. November 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(mathematisch-physikalische Klasse).

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

- Bauernfeind, C. M. v. Beobachtungen und Untersuchungen über Naudet'sche Aneroidbarometer. 1874 1 M 80 ₤
 — Gedächtnissrede auf Jos. v. Fraunhofer. 1887 80 ₤
 Beetz, W. Antheil der bayer. Akademie der Wissenschaften an der Entwicklung der Electricitätslehre. Rede. 1873 90 ₤
 Cranz, C. und K. R. Koch. Untersuchungen über die Vibrationen des Gewehrlaufs. Abh. XIX,3 1899 I. 2 M
 — — — Fortsetzung XX,3 1900 I. 1 M 60 ₤
 — — — — — Abh. XXI,3 1901 II. 80 ₤
 * Ebert, Herm. Unsichtbare Vorgänge bei electricischen Entladungen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 4.
 * — Zur Mechanik der Glimmlichtphänomene. Sitzb. 1899 XXIX. Bd. Heft 1.
 — Periodische Seespiegelschwankungen (Seiches) am Starnberger See. Sitzb. 1900 Heft 3.
 — Messungen der elektrischen Zerstreuung im Freiballon. Sitzb. 1900 Heft 3.
 — Weitere Beobachtungen der Luftelektrizität in grösseren Höhen. Sitzb. 1901 Heft 1.
 — Ueber die Möglichkeit radioaktivirende Emanationen in flüssiger Luft anzureichern. Sitzb. 1903 Heft 1.
 Ebert, Herm. und Hoffmann, B. Versuche mit flüssiger Luft. Sitzb. 1900 XXX. Bd. 20 ₤
 — Ueber Pultationen von geringer Periodendauer in der erdmagnetischen Feldkraft. 1906, 3 40 ₤
 Elster, J. und Geitel, H. Ueber die radioaktive Emanation in der atmosphärischen Luft. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
 — Ueber Methoden zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit der atmosphärischen Luft an der Erdoberfläche sowie ihres Gehalts an radioaktiver Emanation und die nächsten Ziele dieser Untersuchungen. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
 Endrös, A. Die Seeschwankungen (Seiches) des Chiemsees mit 2 Tafeln. 1906, 2 1 M
 Exner, F. Potentialmessungen. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
 — Bericht über die Thätigkeit der luftelektrischen Stationen der Wiener Akademie im abgelaufenen Jahre. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
 Finsterwalder, S. Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Mit 3 Tafeln. Abh. XVII,3 1891 3 M
 — Ueber die Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen (mit 1 Tafel). Sitzb. 1900 Heft 2.
 — Eine Grundaufgabe der Photogrammetrie und ihre Anwendung auf Ballonaufnahmen. Abh. 1903.

- Finsterwalder, S. Ueber die Aufgabe, zwei Punkthaufen durch Drehung ohne Maassstabveränderung möglichst nahe zusammenzulegen. Abh. 1903.
- Fischer, K. T. und Alt. Siedepunkt, Gefrierpunkt und Dampfspannung des reinen Stickstoffes bei niedrigen Drucken (mit 2 Tafeln). Sitzb. 1902 Heft 2.
- Erstarrungs- und Schmelzdruck des Stickstoffes. Sitzb. 1902 Heft 2.
- *Fomm, L. Ueber eine neue Erscheinung bei electrischen Entladungen in verdünnten Gasen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 3 1 M. 20 \mathcal{J}
- Föppl, A. Ueber eine mögliche Erweiterung des Newton'schen Gravitationsgesetzes. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 1 1 M. 20 \mathcal{J}
- Fraunhofer, Jos. v. Neue Modifikation des Lichtes. Denkschr. VIII. 1821—22 3 M.
- Gesammelte Schriften, herausgegeben von E. Lommel 1888 12 M.
- Gerdien, H. Registrierung der Niederschlags-Elektrizität im Göttinger Geophysikalischen Institut. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- *Glan, P. Theoretische Untersuchungen über elastische Körper und Electricität. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 1.
- *Grätz, L. Ein electrochemisches Verfahren, um Wechselströme in Gleichströme zu verwandeln. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 2.
- Groth, P. Ueber die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. Rede 1888 80 \mathcal{J}
- Jolly, Ph. v. Physik der Molekularkräfte. Rede 1857 50 \mathcal{J}
- Anwendung der Waage auf Probleme der Gravitation. Abh. I. Abtlg. XIII,1 1878 60 \mathcal{J} und II. Abtlg. XIV,2 1881 80 \mathcal{J}
- Zusammensetzung der atmosphär. Luft. Abh. XIII,2 1879 1 M.
- Kohlrausch, Friedr. Ueber den absoluten electrischen Leitungswiderstand des Quecksilbers. Abh. XVI,3 1888 3 M. 50 \mathcal{J}
- Korn, A. Ueber die natürliche, elektrische Belegung einer beliebigen, stetig gekrümmten Konduktoroberfläche. Sitzb. 1901 Heft 4.
- Allgemeine Lösung des Problems der magnetischen Induktion. Sitzb. 1901 Heft 4.
- Ueber ein Verfahren der electrischen Fernphotographie. Sitzb. 1902 Heft 1.
- Einige Sätze über die Potentiale von Doppelbelegungen. Sitzb. 1903 Heft 1.
- Ueber eine mögliche Erweiterung des Gravitationsgesetzes. I. Sitzb. 1903 Heft 3. II. Sitzb. 1903 Heft 4.
- *Linde, C. v. Ueber die Veränderlichkeit der specifischen Wärme der Gase. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 3.
- * — Ueber Vorgänge bei Verbrennung in flüssiger Luft. Sitzb. 1899 XXIX. Bd. Heft 1.
- Lommel, Eug. v. Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Oeffnung etc. Abh. XV,2 1884 4 M. 50 \mathcal{J}
- Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. Abh. XV,3 1886 4 M. 50 \mathcal{J}
- G. S. Ohms wissenschaftliche Leistungen. Rede 1839 60 \mathcal{J} .
- Berechnung von Mischfarben. Mit 2 Taf. Abh. XVII,2 1891 1 M.
- Theorie der Dämmerungsfarben. Abh. XIX,2 1897 2 M. 40 \mathcal{J} .
- Nachtrag dazu XIX,3 1899 40 \mathcal{J} .
- * — Ueber aus Kalkspath u. Glas zusammengesetzte Nicol'sche Prismen. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 1.
- Lüdeling, Bericht über luftelektrische Arbeiten. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Meinardus, W. Bericht über einige Messungen der Elektrizitätszerstreuung auf dem Meere. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- *Merz, S. v. Das Fraunhofer-Objectiv. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd.

- Miller, Andr. Der primäre und secundäre longitudinale Elastizitätsmodul und die thermische Constante des letzteren. Abh. XV,3 1886 1 M. 80 ₤
- Ueber die Grundlagen der Bestimmungsmethode des longitudinalen Elastizitätsmoduls. Abh. XVI,3 1888 1 M. 70 ₤
- Ohm, H. S. Erklärung aller . . . Interferenz-Erscheinungen (in einaxigen Krystallplatten) VII,1 u. 2 1853 I. 3 M. II. 2 M. 50 ₤
- Orff, C. v. Länge d. einfachen Secundenpendels. Abh. XIV,3 1883 4 M.
- * — Bemerkungen über die Beziehung zwischen Schweremessungen und geologischen Untersuchungen und Bericht über die in Bayern begonnene Pendelbestimmung. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 1.
- Ueber die Hilfsmittel, Methoden und Resultate der internationalen Erdmessung. Rede. 1899 2 M.
- Pfaff, F. Bewegung d. Firnes u. d. Gletscher. Abh. XII,2 1876 60 ₤
- Recknagel, Gg. Ueber Abkühlung geschlossener Lufträume durch Wärmeleitung. Sitzb. 1901 Heft 2.
- Riecke, E. Neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelektrizität. Sitzb. 1903 Heft 2.
- Schmauss, A. Magnetische Drehung der Polarisationssebene des Lichtes in selektiv absorbirenden Medien (mit 4 Tafeln). Sitzb. 1902 Heft 3.
- Schmidt, Adolf. Mittheilungen über eine neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials. XIX,1 1895 2 M.
- Schmidt, M. Untersuchung über die Umlaufbewegung hydrometrischer Flügel. Sitzb. 1903 Heft 2.
- Schwarzschild, K. Die Poincaré'sche Theorie des Gleichgewichts. Aus den neuen Annalen der k. Sternwarte. Bd. 3 1897 5 M.
- * — Ueber die Beugungsfigur im Fernrohr weit ausserhalb des Focus. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 2.
- * Seidel, L. v. Ueber die Bedingungen möglichst präziser Abbildung eines Objects von endlicher scheinbarer Grösse durch einen dioptrischen Apparat. Herausgegeben von S. Finsterwalder. Sitzb. 1898 XXVIII. Bd. Heft 3.
- Sohncke, Leonh. Ueber die Bedeutung wissenschaftlicher Ballonfahrten. Rede. 1894. 80 ₤
- Gewitterstudien auf Grund von Ballonfahrten. Abh. XVIII,3 1894 1 M. 80 ₤
- * — Ueber die Aenderung der specifischen Wärme mit der Temperatur. Sitzb. 1897 XXVII. Bd. Heft 2.
- Sprung, Bericht über die luftelektrischen Arbeiten des Meteorologisch-Magnetischen Observatoriums zu Potsdam. Sitzb. 1903 XXXIII. Bd. Heft 2.
- Steinheil, C. A. und Seidel, L. Brechungs- und Zerstreungsverhältnisse verschiedener Medien. Abh. V,2 1848 40 ₤
- Straubel, Rud. Theorie der Beugungserscheinungen kreisförmig begrenzter symmetrischer, nicht sphärischer Wellen. Abh. XVIII,1 1893 3 M.

Sitzungsberichte

der

Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch - physikalische Klasse

Jahrgang 1910, 13. Abhandlung

Metamorphe Fremdlinge in Erstarrungsgesteinen

von

M. Weber

Mit 2 Tafeln

Vorgelegt am 3. Dezember 1910



München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(mathematisch-physikalische Klasse)

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfgr. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

- | | |
|---|------------|
| Bergeat, Alfr. Die äolischen Inseln. XX,1 1899 | 16 M. |
| Egger, Jos. G. Foraminiferen und Ostrakoden der Kreidebildungen in den bayerischen Alpen. XXI,1 1899 | 14 M. |
| Fraunhofer, Jos. Gesammelte Schriften. 1888 | 12 M. |
| Fuchs, J. Nep. Chemie und Mineralogie. Rede. 1824 | 60 S. |
| — Theoretische Bemerkungen über die Gestaltungszustände des Eisens. VII, 1 1852 | 60 S. |
| Glungler G., Das Eruptivgebiet zwischen Weiden und Tirschenreut und seine kristalline Umgebung 1905, 2. | 1 M. |
| Groth, Paul. Ueber die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. Festrede. 1888 | 80 S. |
| — Führer durch die Mineraliensammlung des bayerischen Staates. 1891. 8 ^o | 1 M. |
| *Gümbel, Karl Wih. Ueber das Vorkommen des Antozon-haltigen Flussspathes bei Wölsenberg. 1863 I S. 301. | |
| * — Ueber das fränkische Knochenbett des Keupers und seine Pflanzenschichten. 1864 I S. 215. | |
| * — Vorkommen von unteren Triasschichten in Hochasien. 1865 II S. 348. | |
| * — Ueber neue Funde von Gosauschichten und Vilsenkalk. 1866 II S. 158. | |
| * — Weitere Mittheilungen über das Vorkommen von Phosphorsäure in Schichtgesteinen Bayerns. 1867 II S. 147. | |
| * — Ueber die geognostischen Verhältnisse des Montblanc nach Favre. 1867 II S. 603. | |
| * — Ueber Pyrophyllit als Versteinerungsmittel. 1868 I S. 498. | |
| — Ueber Gliederung der Procänschichten in Böhmen. X,2 1868 S. 501 | 2 M. 60 S. |
| * — Der Riesvulkan. 1870 I S. 153. | |
| * — Ueber die Foraminiferen der Gosau- und Belemniten-Schichten. 1870 II S. 278. | |
| * — Geognostische Verhältnisse des Ulmer Cementmergels und über seine Foraminiferen. 1871 S. 38. | |
| — Sogenannte Nulliporen, I. Abtlg. Nulliporen des Pflanzenreichs (Litiothamnium). XI,1 1871 S. 1 | 1 M. 50 S. |
| — Desgl. II. Abtlg. Nulliporen des Thierreichs (Dactyloporen). XI,1 1871 S. 60 | 2 M. 40 S. |
| * — Gletschererscheinungen aus der Eiszeit. 1872 S. 223. | |

- * Gumbel, Karl Wilh. Im. Geognostische Mitteilungen aus den Alpen I. Mendel- und Schlerngebirge. 1873 S. 14.
 — Desgl. II. Ein Profil aus dem Kaisergebirge. 1874 S. 177
 * — Ueber Conodictyum bursiforme. 1873 S. 282.
 * — Ueber die Beschaffenheit der Steinmeteoriten von Jowa 1875 S. 313
 — Beiträge zur Kenntniss der Organisation und systematischen Stellung von Receptaculites. XII,1 1875.
 * — Geognostische Mitteilungen aus der Umgegend v. Trient. 1876 S. 51.
 — Die geognostische Durchforschung Bayerns. Rede. 1877 2 M 30 S
 — Die in Bayern gefallenen Steinmeteorite. 1878 S. 14.
 * — Die am Grunde d. Meeres vorkomm. Manganknollen. 1878 S. 189.
 * — Geognostische Mitteilungen aus den Alpen. V. Die Pflanzenresteführenden Schichten von Recoaro. 1879 S. 33.
 * — Das Eruptionsmaterial des Schlammvulkans v. Paterno. 1879 S. 217.
 * — Geognostische Mitteilungen aus den Alpen. VI. Ein Streifzug durch die Bergamasker Alpen. 1880 S. 164.
 * — Desgl. VII. Das Gebirge am Comersee und über Gebirgsfaltung. 1880 S. 542.
 * — Ueber die mit einer Flüssigkeit gefüllten Chalzedon-Mandeln (Enhydros) aus Uruguay. 1880 S. 241.
 * — Beiträge zur Geologie der Goldküste in Afrika. 1882 S. 170.
 * — Geologische Fragmente aus der Umgegend von Ems. 1882 S. 197.
 * — Die miocänen Ablagerungen im oberen Donaugebiete und die Stellung des Schliers von Ötznang 1887 S. 221.
 * — Das Erdbeben vom 27 Februar 1889 S. 79.
 * — Geolog. Bemerkungen über die Thermen von Gastein. 1889 S. 341.
 * — Geolog. Bemerkungen über die Thermen von Borinio und über das Ortlergebirge. 1891 S. 79.
 * — Geologische Bemerkungen über die warmen Quellen vom Brennerbad. 1892 S. 139.
 * — Die Amberger Eisenerzformation. 1893 S. 293.
 * — Ueber die Grünerde am Monte Baldo. 1896 S. 545
- Günther, S. Akustisch-geographische Probleme I. 1901, 1 40 S
 — Akustisch-geographische Probleme II. 1901 3 1 M
 — Ueber gewisse hydrologisch-topographische Grundbegriffe. 1902, 1 40 S
 — Glaziale Denudationsgebilde im mittleren Eisacktale. 1902, 3 40 S
 — und Reindl, J. Seismologische Untersuchungen. 1903, 4 60 S
 — Das Pothenotsche Problem auf der Kugelfläche. 1904, 2 20 S
 — Erdpyramiden und Büsserschnee als gleichartige Erosionsgebilde. 1904, 3 60 S
 — Neue Beiträge zur Theorie der Erosionsfiguren. 1905, 3 40 S
 — Ein Naturmodell der Dünenbildung. 1907, 2 20 S
 — und Dannbeck, S. Die Vorgeschichte des barischen Windgesetzes. 1905, 3 60 S
- Haushofer, K. Franz von Kobell. Denkschrift. 1884 80 S
- Liebig, Justus Frhr. v. Rede am 28. März 1863 (Francis Bacon von Verulam) 1 M 60 S
 — Rede am 28. März 1865 (Induction und Deduction) 50 S
 — Rede am 25. Juli 1866 (Entwicklung der Ideen in der Naturwissenschaft). 60. 50 S
- Pfaff, F. Bewegung des Firnes und der Gletscher. XII,2 1876 60 S
- Pohlig, Hans. Eine Elefantenhöhle Siciliens. XVIII,1. 1893 2 M 80 S
- Rauff, Herm. Untersuchungen üb. d. Receptaculitiden. XVII,3 1892 5 M

- Roth, J. u. Wagner, A. Fossile Knochenüberreste von Pikermi. VII, 2
1854 3 M.
- Rothpletz, A. Ueber eigentümliche Deformationen jurassischer Am-
moniten. 1900, 1 60 S.
- Ueber die Jodquellen bei Tölz. 1901, 1 60 S.
- Ueber den Ursprung der Thermalquellen von St. Moriz. 1902, 2 40 S.
- Ueber die Möglichkeit, den Gegensatz zwischen Kontraktions- und
Expansions-theorie aufzuheben. 1902, 3 40 S.
- Die fossilen, oberoligocänen Wellenfurchen des Peissenberges etc.
1904, 3 40 S.
- Gedächtnisrede auf Karl Alfred von Zittel am 15. März 1905 60 S.
- Schlagintweit, Herm. v. Salzseen im westl. Tibet. Thl. I. XI, 1.
1871 2 M.
- Sendtner, O. Vegetationsverhältnisse Südbayerns. 1854 8^o 15 M.
- Voit, E. Vergleichung von Bergkrystall-Gewichten. 1880 3 M.
- Wagner, Andr. Spezif. Differenzen der *Hyaena brunnea* von der *Hy-*
aena striata. III, 3 1842 50 S.
- Geograph. Verbreitung der Säugethiere. 1, 2 u. 3. IV, 1, 2 u. 3
1844, 45 u. 46. I. à 3 M. 80 S., II. à 2 M. III. à 4 M.
- Säugethiere Amerikas. 1, 2 u. 3. V, 1 u. 2 1847 u. 48.
I. II. III. jedes à 2 M.
- Urweltliche Säugethier-Ueberreste aus Griechenland. V, 2 1848
2 M. 60 S.
- Foss. Ueberreste gavialart. Saurier. V, 3 1849 3 M. 40 S.
- Urweltliche Fische in d. lithogr. Schiefeln. VI, 1 1850 2 M. 40 S.
- Neue Art von *Ornithocephalus*. VI, 1 1850 1 M. 60 S.
- Urweltliche Säugethiere in den Höhlen von Muggendorf. VI, 1
1850 1 M. 50 S.
- *Ichthyosaurus* im süddeutschen Lias. VI, 2 1851 1 M. 40 S.
- Neu aufgefundene Saurier-Ueberreste a. d. lithograph. Schiefeln.
VI, 3 1852 2 M. 40 S.
- Beschreib. einer fossilen Schildkröte v. Kelheim. VII, 1 1853 90 S.
- Fossile Säugethier-Ueberreste v. Pikermi. VIII, 1 1857 3 M. 70 S.
- Urweltliche Fauna des lithogr. Schiefels 1 u. 2. VIII, 2 u. IX, 1
1858 u. 61 I. à 2 M. 80 S., II. à 2 M. 20 S.
- Fossile Ueberreste von nackten Dintenfischen. VIII, 3 1860 2 M.
- Monographie der fossilen Fische a. d. lithogr. Schiefeln. 1 u. 2
IX, 2 u. 3 1861 u. 63 I. à 2 M. 70 S., II. à 3 M. 60 S.
- Weinschenk, Ernst. Beiträge zur Petrographie der östl. Zentralalpen.
XVIII, 3 1894 I. Abhdlg. 3 M., II. Abhdlg. 1 M. 50 S.
- XXII, 2 1903 III. Abhdlg. 3 M.
- Zur Kenntnis der Graphitlagerstätten. XIX, 2 1897 3 M.
- Zittel, Karl Alfr. Denkschrift auf Christ. Erich Herm. v. Meyer. 1870
1 M. 40 S.
- Ueber *Coeleptichium*. XII, 3 1876 3 M. 70 S.
- Studien über fossile Spongien. 1, 2 u. 3. XIII, 1 u. 2 1877 u. 78.
I. à 1 M. 80 S., II. à 5 M., III. à 2 M.
- Geolog. Bau der libyschen Wüste. Rede. 1880 2 M. 40 S.
- Rückblick auf die Gründung u. die Entwicklung der k. b. Akademie
der Wissenschaften im XIX. Jahrh. Rede. 1899 80 S.
- * — Die Räuberhöhle im Schelmengraben. 1872 S. 28.
- * — Ueber Gletschererscheinungen in der bayer. Hochebene. 1874 S. 252.
- * — Ueber *Plicatocrinus*. 1881 S. 105.

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 14. Abhandlung

Die Korallenbauten
als Objekt wissenschaftlicher Forschung
in der Zeit vor Darwin

von

Siegmond Günther.

Vorgelegt am 3. Dezember 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

(mathematisch-physikalische Klasse)

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Hoff der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

Bergeat, Alfr. Die äolischen Inseln. XX,1 1899	16 <i>M.</i>
Egger, Jos. G. Foraminiferen und Ostrakoden der Kreidebildungen in den bayerischen Alpen. XXI,1 1899	14 <i>M.</i>
Fraunhofer, Jos. Gesammelte Schriften. 1888	12 <i>M.</i>
Fuchs, J. Nep. Chemie und Mineralogie. Rede. 1824	60 <i>ſ.</i>
— Theoretische Bemerkungen über die Gestaltungszustände des Eisens. VII, 1 1852	60 <i>ſ.</i>
Glungler G., Das Eruptivgebiet zwischen Weiden und Tirschenreut und seine kristalline Umgebung 1905, 2.	1 <i>M.</i>
Groth, Paul. Ueber die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. Festrede. 1888	80 <i>ſ.</i>
— Führer durch die Mineraliensammlung des bayerischen Staates. 1891. 8 ^o	1 <i>M.</i>
* Gümbel, Karl Wilh. Ueber das Vorkommen des Antozon-haltigen Flussspathes bei Wölsenberg. 1863 I S. 301.	
* — Ueber das fränkische Knochenbett des Keupers und seine Pflanzenschichten. 1864 I S. 215.	
* — Vorkommen von unteren Triasschichten in Hochasien. 1865 II S. 348.	
* — Ueber neue Funde von Gosauschichten und Vilsenkalk. 1866 II S. 158.	
* — Weitere Mittheilungen über das Vorkommen von Phosphorsäure in Schichtgesteinen Bayerns. 1867 II S. 147.	
* — Ueber die geognostischen Verhältnisse des Montblanc nach Favre. 1867 II S. 603.	
* — Ueber Pyrophyllit als Versteinigungsmittel. 1868 I S. 498.	
— Ueber Gliederung der Procänschichten in Böhmen. X,2 1868 S. 501	2 <i>M.</i> 60 <i>ſ.</i>
* — Der Riesvulkan. 1870 I S. 153.	
* — Ueber die Foraminiferen der Gosau- und Belemniten-Schichten. 1870 II S. 278.	
* — Geognostische Verhältnisse des Ulmer Cementmergels und über seine Foraminiferen. 1871 S. 38.	
— Sogenannte Nulliporen, I. Abtlg. Nulliporen des Pflanzenreichs (Lithothamnium). XI,1 1871 S. 1	1 <i>M.</i> 50 <i>ſ.</i>
— Desgl. II. Abtlg. Nulliporen des Thierreichs (Dactyloporen). XI,1 1871 S. 60	2 <i>M.</i> 40 <i>ſ.</i>
* — Gletschererscheinungen aus der Eiszeit. 1872 S. 223.	

- * Gümbel, Karl Wilhelm. Geognostische Mitteilungen aus den Alpen.
I. Mendel- und Schlerngebirge. 1873 S. 14.
— Desgl. II. Ein Profil aus dem Kaisergebirge. 1874 S. 177.
* — Ueber Conodictyum barsiforme. 1873 S. 282.
* — Ueber die Beschaffenheit der Steinmeteoriten von Iowa. 1875 S. 313
— Beiträge zur Kenntnis der Organisation und systematischen Stellung von Receptaculites. XII, 1 1875.
* — Geognostische Mitteilungen aus der Umgegend v. Trient. 1876 S. 51.
— Die geognostische Durchforschung Bayerns. Rede. 1877 2 M. 30 
— Die in Bayern gefallenen Steinmeteorite. 1878 S. 14.
* — Die am Grunde d. Meeres vorkomm. Manganknollen. 1878 S. 189.
* — Geognostische Mitteilungen aus den Alpen. V. Die Pflanzenresteführenden Schichten von Recoaro. 1879 S. 33.
* — Das Eruptionsmaterial des Schlammvulkans v. Paterno. 1879 S. 217.
* — Geognostische Mitteilungen aus den Alpen. VI. Ein Streifzug durch die Bergamasker Alpen. 1880 S. 164.
* — Desgl. VII. Das Gebirge am Comersee und über Gebirgsfaltung. 1880 S. 542.
* — Ueber die mit einer Flüssigkeit gefüllten Chalzedon-Mandeln (Enhydros) aus Uruguay. 1880 S. 241.
* — Beiträge zur Geologie der Goldküste in Afrika. 1882 S. 170.
* — Geologische Fragmente aus der Umgegend von Ems. 1882 S. 197.
* — Die miocänen Ablagerungen im oberen Donaugebiete und die Stellung des Schliers von Ottnang. 1887 S. 221.
* — Das Erdbeben vom 27. Februar 1889 S. 79.
* — Geolog. Bemerkungen über die Thermen von Gastein. 1889 S. 341.
* — Geolog. Bemerkungen über die Thermen von Bormio und über das Ortlergebirge. 1891 S. 79.
* — Geologische Bemerkungen über die warmen Quellen vom Brennerbad. 1892 S. 139.
* — Die Amberger Eisernerzformation. 1893 S. 293.
* — Ueber die Grünerde am Monte Baldo. 1896 S. 545.
- Günther, S. Akustisch-geographische Probleme I. 1901, 1 40 
— Akustisch-geographische Probleme II. 1901, 3 1 M.
— Ueber gewisse hydrologisch-topographische Grundbegriffe. 1902, 1 40 
— Glaziale Denudationsgebilde im mittleren Eisacktale. 1902, 3 40 
— und Reindl, J. Seismologische Untersuchungen. 1903, 4 60 
— Das Pothenotsche Problem auf der Kugelfläche 1904, 2 20 
— Erdpyramiden und Büsserschnee als gleichartige Erosionsgebilde. 1904, 3 60 
— Neue Beiträge zur Theorie der Erosionsfiguren. 1905, 3 40 
— Ein Naturmodell der Dünenbildung. 1907, 2 20 
— und Dannbeck, S. Die Vorgeschichte des barischen Windgesetzes. 1905, 3 60 
- Haushofer, K. Franz von Kobell. Denkschrift. 1834 80 
- Liebig, Justus Frhr. v. Rede am 28. März 1863 (Francis Bacon von Verulam) 1 M. 60 
— Rede am 28. März 1865 (Induction und Deduction) 50 
— Rede am 25. Juli 1866 (Entwicklung der Ideen in der Naturwissenschaft). 8^o. 50 
- Pfaff, F. Bewegung des Firnes und der Gletscher. XII, 2 1876 60 
- Pohlig, Hans. Eine Elefantenhöhle Siciliens. XVIII, 1. 1893 2 M. 80 
- Rauff, Herm. Untersuchungen b. d. Receptaculitiden. XVII, 3 1892 5 M.

- Roth, J. u. Wagner, A. Fossile Knochenüberreste von Pikermi. VII, 2
1854 3 M
- Rothpletz, A. Ueber eigentümliche Deformationen jurassischer Am-
moniten. 1900, 1 60 J
- Ueber die Jodquellen bei Tölz. 1901, 1 60 J
- Ueber den Ursprung der Thermalquellen von St. Moriz. 1902, 2 40 J
- Ueber die Möglichkeit, den Gegensatz zwischen Kontraktions- und
Expansionstheorie aufzuheben. 1902, 3 40 J
- Die fossilen, oberoligocänen Wellenfurchen des Peissenberges etc.
1904, 3 40 J
- Gedächtnisrede auf Karl Alfred von Zittel am 15. März 1905 60 J
- Schlagintweit, Herm. v. Salzseen im westl. Tibet. Thl. I. XI, 1.
1871 2 M
- Sendtner, O. Vegetationsverhältnisse Südbayerns. 1854 8° 15 M
- Voit, E. Vergleichung von Bergkrystall-Gewichten. 1880 3 M
- Wagner, Andr. Spezif. Differenzen der *Hyaena brunnea* von der *Hyaena striata*. III, 3 1842 50 J
- Geograph. Verbreitung der Säugethiere. 1, 2 u. 3. IV, 1, 2 u. 3
1844, 45 u. 46. I. à 3 M 80 J, II. à 2 M III. à 4 M
- Säugethiere Amerikas. 1, 2 u. 3. V, 1 u. 2 1847 u. 48.
I. II. III. jedes à 2 M
- Urvweltliche Säugethier-Ueberreste aus Griechenland. V, 2 1848
2 M 60 J
- Foss. Ueberreste gavialart. Saurier. V, 3 1849 3 M 40 J
- Urvweltliche Fische in d. lithogr. Schiefer. VI, 1 1850 2 M 40 J
- Neue Art von Ornithocephalus. VI, 1 1850 1 M 60 J
- Urvweltliche Säugethiere in den Höhlen von Muggendorf. VI, 1
1850 1 M 50 J
- Ichthyosaurus im süddeutschen Lias. VI, 2 1851 1 M 40 J
- Neu aufgefundene Saurier-Ueberreste a. d. lithograph. Schiefer.
VI, 3 1852 2 M 40 J
- Beschreib. einer fossilen Schildkröte v. Kelheim. VII, 1 1853 90 J
- Fossile Säugethier-Ueberreste v. Pikermi. VIII, 1 1857 3 M 70 J
- Urvweltliche Fauna des lithogr. Schiefers 1 u. 2. VIII, 2 u. IX, 1
1858 u. 61 I. à 2 M 80 J, II. à 2 M 20 J
- Fossile Ueberreste von nackten Dintenfischen. VIII, 3 1860 2 M
- Monographie der fossilen Fische a. d. lithogr. Schiefer. 1 u. 2
IX, 2 u. 3 1861 u. 63 I. à 2 M 70 J, II. à 3 M 60 J
- Weinschenk, Ernst. Beiträge zur Petrographie der östl. Zentralalpen.
XVIII, 3 1894 I. Abhdlg. 3 M, II. Abhdlg. 1 M 50 J
- XXII, 2 1903 III. Abhdlg. 3 M
- Zur Kenntnis der Graphitlagerstätten. XIX, 2 1897 3 M
- Zittel, Karl Alfr. Denkschrift auf Christ. Erich Herm. v. Meyer. 1870
1 M 40 J
- Ueber *Coeloptychium*. XII, 3 1876 3 M 70 J
- Studien über fossile Spongien. 1, 2 u. 3. XIII, 1 u. 2 1877 u. 78.
I. à 1 M 80 J, II. à 5 M, III. à 2 M
- Geolog. Bau der libyschen Wüste. Rede. 1880 2 M 40 J
- Rückblick auf die Gründung u. die Entwicklung der k. b. Akademie
der Wissenschaften im XIX. Jahrh. Rede. 1899 50 J
- * — Die Räuberhöhle im Schelmengraben. 1872 S. 28.
- * — Ueber Gletscherscheinungen in der bayer. Hochebene. 1874 S. 252.
- * — Ueber *Plicatocrinus*. 1881 S. 105.

Sitzungsberichte
der
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
Mathematisch-physikalische Klasse
Jahrgang 1910, 15. Abhandlung

Meine Beobachtungen über den Sparagmit
und Birikalk am Mjösen in Norwegen

von

A. Rothpletz

Mit 2 Tafeln

Vorgetragen am 3. Dezember 1910

München 1910

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

DRUCKSCHRIFTEN
der
KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
(mathematisch-physikalische Klasse)

Die mit * bezeichneten Schriften sind zwar nicht in Sonderabdrücken erschienen, es kann aber das Heft der Sitzungsberichte, in dem sie gedruckt sind, zu 1 Mark 20 Pfg. bezogen werden.

In dem nachfolgenden Verzeichnisse ist A. = Abhandlungen, Sb. = Sitzungsberichte.

- | | |
|---|--------------------------|
| Bergeat, Alfr. Die äolischen Inseln. XX,1 1899 | 16 <i>M.</i> |
| Egger, Jos. G. Foraminiferen und Ostrakoden der Kreidebildungen in den bayerischen Alpen. XXI,1 1899 | 14 <i>M.</i> |
| Fraunhofer, Jos. Gesammelte Schriften. 1888 | 12 <i>M.</i> |
| Fuchs, J. Nep. Chemie und Mineralogie. Rede. 1824 | 60 <i>Œ.</i> |
| — Theoretische Bemerkungen über die Gestaltungszustände des Eisens. VII, 1 1852 | 60 <i>Œ.</i> |
| Glunzler G., Das Eruptivgebiet zwischen Weiden und Tirschenreut und seine kristalline Umgebung 1905, 2. | 1 <i>M.</i> |
| Groth, Paul. Ueber die Molekularbeschaffenheit der Krystalle. Festrede. 1883 | 80 <i>Œ.</i> |
| — Führer durch die Mineraliensammlung des bayerischen Staates. 1891. 8 ^o | 1 <i>M.</i> |
| *Gümbel, Karl Wilh. Ueber das Vorkommen des Antozon-haltigen Flussspathes bei Wölseberg. 1863 I S. 301. | |
| * — Ueber das fränkische Knochenbett des Keupers und seine Pflanzenschichten. 1864 I S. 215. | |
| * — Vorkommen von unteren Triasschichten in Hochasien. 1865 II S. 348. | |
| * — Ueber neue Funde von Gosauschichten und Vilserkalk. 1866 II S. 158. | |
| * — Weitere Mittheilungen über das Vorkommen von Phosphorsäure in Schichtgesteinen Bayerns. 1867 II S. 147. | |
| * — Ueber die geognostischen Verhältnisse des Montblanc nach Favre. 1867 II S. 603. | |
| * — Ueber Pyrophyllit als Versteinerungsmittel. 1868 I S. 49S. | |
| — Ueber Gliederung der Procänschichten in Böhmen. X, 2 1868 S. 501 | 2 <i>M.</i> 60 <i>Œ.</i> |
| * — Der Riesvulkan. 1870 I S. 153. | |
| * — Ueber die Foraminiferen der Gosau- und Belemniten-Schichten. 1870 II S. 278. | |
| * — Geognostische Verhältnisse des Ulmer Cementmergels und über seine Foraminiferen. 1871 S. 38. | |
| — Sogenannte Nullporen, I. Abtlg. Nullporen des Pflanzenreichs (Lithothamnium). XI, 1 1871 S. 1 | 1 <i>M.</i> 50 <i>Œ.</i> |
| — Desgl. II. Abtlg. Nullporen des Thierreichs (Dactyloporen). XI, 1 1871 S. 60 | 2 <i>M.</i> 40 <i>Œ.</i> |
| * — Gletschererscheinungen aus der Eiszeit. 1872 S. 223. | |

- * Gumbel, Karl Wilhelm. Geognostische Mitteilungen aus den Alpen I. Mendel- und Schlerngebirge. 1873 S. 14.
 — Desgl. II. Ein Profil aus dem Kaisergebirge. 1874 S. 177.
 * — Ueber Conodictyum bursiforme. 1873 S. 282.
 * — Ueber die Beschaffenheit der Steinmeteoriten von Jowa. 1875 S. 313
 — Beiträge zur Kenntnis der Organisation und systematischen Stellung von Receptaculites. XII, 1 1875.
 * — Geognostische Mitteilungen aus der Umgegend v. Trient. 1876 S. 51.
 — Die geognostische Durchforschung Bayerns. Rede. 1877 2 M. 30 ♂
 — Die in Bayern gefallenen Steinmeteorite. 1878 S. 12.
 * — Die am Grunde d. Meeres vorkomm. Manganknollen. 1878 S. 189.
 * — Geognostische Mitteilungen aus den Alpen. V. Die Pflanzenresteführenden Schichten von Recoaro. 1879 S. 33.
 * — Das Eruptionsmaterial des Schlammvulkans v. Paterno. 1879 S. 217.
 * — Geognostische Mitteilungen aus den Alpen. VI. Ein Streifzug durch die Bergamasker Alpen. 1880 S. 164.
 * — Desgl. VII. Das Gebirge am Comersee und über Gebirgsfaltung. 1880 S. 542.
 * — Ueber die mit einer Flüssigkeit gefüllten Chalzedon-Mandeln (Enhydros) aus Uruguay. 1880 S. 241.
 * — Beiträge zur Geologie der Goldküste in Afrika. 1882 S. 170.
 * — Geologische Fragmente aus der Umgegend von Ems. 1882 S. 197.
 * — Die miocänen Ablagerungen im oberen Donaugebiete und die Stellung des Schliers von Ottmang. 1887 S. 221.
 * — Das Erdbeben vom 27. Februar 1889 S. 79.
 * — Geol. Bemerkungen über die Thermen von Gastein. 1889 S. 341.
 * — Geol. Bemerkungen über die Thermen von Bormio und über das Ortlergebirge. 1891 S. 79.
 * — Geologische Bemerkungen über die warmen Quellen vom Brennerbad. 1892 S. 139.
 * — Die Amberger Eisernerzformation. 1893 S. 293.
 * — Ueber die Grünerde am Monte Baldo. 1896 S. 545.
- Günther, S. Akustisch-geographische Probleme I. 1901, 1 40 ♂
 — Akustisch-geographische Probleme II. 1901, 3 1 M
 — Ueber gewisse hydrologisch-topographische Grundbegriffe. 1902, 1 40 ♂
 — Glaziale Denudationsgebilde im mittleren Eisacktale. 1902, 3 40 ♂
 — und Reindl, J. Seismologische Untersuchungen. 1903, 4 60 ♂
 — Das Pothenotsche Problem auf der Kugelfläche. 1904, 2 20 ♂
 — Erdpyramiden und Büserschnee als gleichartige Erosionsgebilde. 1904, 3 60 ♂
 — Neue Beiträge zur Theorie der Erosionsfiguren. 1905, 3 40 ♂
 — Ein Naturmodell der Dünenbildung. 1907, 2 20 ♂
 — und Dannbeck, S. Die Vorgeschichte des barischen Windgesetzes. 1905, 3 60 ♂
- Haushofer, K. Franz von Kobell. Denkschrift. 1884 80 ♂
- Liebig, Justus Frhr. v. Rede am 28. März 1863 (Francis Bacon von Verulam) 1 M. 60 ♂
 — Rede am 28. März 1865 (Induction und Deduction) 50 ♂
 — Rede am 25. Juli 1866 (Entwicklung der Ideen in der Naturwissenschaft). 8°. 50 ♂
- Pfaff, F. Bewegung des Firnes und der Gletscher. XII, 2 1876 60 ♂
- Pohlig, Hans. Eine Elephantenhöhle Siciliens. XVIII, 1. 1893 2 M. 80 ♂
- Rauff, Herm. Untersuchungen üb. d. Receptaculitiden. XVII, 3 1892 5 M.

- Roth, J. u. Wagner, A. Fossile Knochenüberreste von Pikermi. VII, 2
1854 3 M
- Rothpletz, A. Ueber eigentümliche Deformationen jurassischer Am-
moniten. 1900, 1 60 \mathcal{E}
- Ueber die Jodquellen bei Tölz. 1901, 1 60 \mathcal{E}
- Ueber den Ursprung der Thermalquellen von St. Moriz. 1902, 2 40 \mathcal{E}
- Ueber die Möglichkeit, den Gegensatz zwischen Kontraktions- und
Expansionstheorie aufzuheben. 1902, 3 40 \mathcal{E}
- Die fossilen, oberoligocänen Wellenfurchen des Peissenberges etc
1904, 3 40 \mathcal{E}
- Gedächtnisrede auf Karl Alfred von Zittel am 15. März 1905 60 \mathcal{E}
- Schlagintweit, Herm. v. Salzseen im westl. Tibet. Thl. I. XI, 1.
1871 2 M
- Sendtner, O. Vegetationsverhältnisse Südbayerns. 1854 8^o 15 M
- Voit, E. Vergleichung von Bergkrystall-Gewichten. 1880 3 M
- Wagner, Andr. Spezif. Differenzen der *Hyaena brunnea* von der *Hya-*
aena striata. III, 3 1842 50 \mathcal{E}
- Geograph. Verbreitung der Säugethiere. 1, 2 u. 3. IV, 1, 2 u. 3
1844, 45 u. 46. I. à 3 M 80 \mathcal{E} , II. à 2 M, III. à 4 M
- Säugethiere Amerikas. 1, 2 u. 3. V, 1 u. 2 1847 u. 48.
I. II. III. jedes à 2 M
- Urweltliche Säugethier-Ueberreste aus Griechenland. V, 2 1648
2 M 60 \mathcal{E}
- Foss. Ueberreste gavialart. Saurier. V, 3 1849 3 M 40 \mathcal{E}
- Urweltliche Fische in d. lithogr. Schiefeln. VI, 1 1850 2 M 40 \mathcal{E}
- Nene Art von *Ornithocephalus*. VI, 1 1850 1 M 60 \mathcal{E}
- Urweltliche Säugethiere in den Höhlen von Muggendorf. VI, 1
1850 1 M 50 \mathcal{E}
- Ichthyosaurus im süddeutschen Lias. VI, 2 1851 1 M 40 \mathcal{E}
- Neu aufgefundene Saurier-Ueberreste a. d. lithograph. Schiefeln.
VI, 3 1852 2 M 40 \mathcal{E}
- Beschreib. einer fossilen Schildkröte v. Kelheim. VII, 1 1853 90 \mathcal{E}
- Fossile Säugethier-Ueberreste v. Pikermi. VIII, 1 1857 3 M 70 \mathcal{E}
- Urweltliche Fauna des lithogr. Schiefeln. 1 u. 2. VIII, 2 u. IX, 1
1858 u. 61 I. à 2 M 80 \mathcal{E} , II. à 2 M 20 \mathcal{E}
- Fossile Ueberreste von nackten Dintenfischen. VIII, 3 1860 2 M
- Monographie der fossilen Fische a. d. lithogr. Schiefeln. 1 u. 2
IX, 2 u. 3 1861 u. 63 I. à 2 M 70 \mathcal{E} , II. à 3 M 60 \mathcal{E}
- Weinschenk, Ernst. Beiträge zur Petrographie der östl. Zentralalpen.
XVIII, 3 1894 I. Abhdlg. 3 M, II. Abhdlg. 1 M 50 \mathcal{E}
XXII, 2 1903 III. Abhdlg. 3 M
- Zur Kenntnis der Graphitlagerstätten. XIX, 2 1897 3 M
- Zittel, Karl Alfr. Denkschrift auf Christ. Erich Herm. v. Meyer. 1870
1 M 40 \mathcal{E}
- Ueber *Coeloptychium*. XII, 3 1876 3 M 70 \mathcal{E}
- Studien über fossile Spongien. 1, 2 u. 3. XIII, 1 u. 2 1877 u. 78.
I. à 1 M 80 \mathcal{E} , II. à 5 M, III. à 2 M
- Geolog. Bau der libyschen Wüste. Rede. 1880 2 M 40 \mathcal{E}
- Rückblick auf die Gründung u. die Entwicklung der k. b. Akademie
der Wissenschaften im XIX. Jahrh. Rede. 1899 80 \mathcal{E}
- * — Die Räuberhöhle im Schelmengraben. 1872 S. 28.
- * — Ueber Gletschererscheinungen in der bayer. Hochebene. 1874 S. 252.
- * — Ueber *Plicatocrinus*. 1881 S. 105.