Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1911. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1911

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe.

Von **W. H. Young.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 10. Juni 1911.

§ 1.

Herr Pringsheim[1]) hat auf die Tatsache aufmerksam gemacht, daß die Existenz von

$$\int_0^t \left| \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \right| dt \tag{1}$$

für die Konvergenz der Reihe

$$\sum \{b_n \cos n x - a_n \sin n x\}, \tag{2}$$

die ich als verwandte Reihe der Fourierschen Reihe

$$f(x) \backsim \tfrac{1}{2} a_0 + \sum (a_n \cos n x + b_n \sin n x) \tag{3}$$

bezeichne, zwar hinreichend, aber nicht notwendig ist.

Es sei diese Bedingung erfüllt, dann wissen wir, daß die verwandte Reihe (2) nach

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{f(x+t) - f(x-t)\} \cot \frac{t}{2} \, dt \tag{4}$$

---

[1]) A. Pringsheim, „Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreis“, 1900. Sitzungsber. d. math.-phys. Klasse der K. Bayer. Akad. d. Wiss. XXX, p. 87. In dieser Abhandlung betrachtet Pringsheim nur Integrale im Riemannschen Sinne; die Erweiterung auf Lebesguesche und Harnack-Lebesguesche Integrale folgt ohne weiteres.

konvergiert. Im entgegengesetzten Fall aber kann es wohl vorkommen, daß das Integral (4) im Riemannschen oder Harnack-Lebesgueschen Sinne als ein bedingt konvergentes existiert, obwohl es im Lebesgueschen Sinne, infolge der Nichtexistenz von (1), nicht existiert. Mit anderen Worten: die Existenz von

$$\lim_{\varepsilon=0} \cdot \int_{\varepsilon}^{t} \{f(x+t) - f(x-t)\} \cot \frac{t}{2} \cdot dt$$

erfordert nicht die Existenz von (1).

Die gewöhnlichen Bedingungen für die Konvergenz der Fourierschen Reihe (3) sind zweierlei

I) $\dfrac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t}$ mag einer Lebesgueschen Integration fähig sein;

oder:

II) $f(x)$ mag beschränkte Schwankung besitzen.

Dem Fall I) entspricht genau die Bedingung:

Ia) $\dfrac{f(x+t) - f(x-t)}{t}$ mag einer Lebesgueschen Integration fähig sein,

die für die Konvergenz der verwandten Reihe (2) genügt. Dem Falle II) entspricht eine Bedingung, die bis jetzt nicht formuliert wurde.

Bedenken wir nur, daß die Existenz von

$$\tfrac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$$

eine sozusagen zufällige Folge der Erfüllung der Bedingung II) ist, und daß deshalb der Ausdruck, welcher hinterher sich als Summe der Fourierschen Reihe (3) nachweist, a priori einen Sinn hat, so liegt es auf der Hand, im Falle der verwandten Reihe (2) eine ausdrückliche Voraussetzung der Existenz des Ausdrucks, welche die fragliche Summe darstellen soll, zu erwarten. Dieser Ausdruck bietet sich in der Form eines

Integrals dar, und das Ziel dieser Note in erster Linie ist, diese Erwartung zu bestätigen, indem ich zeige, daß mit dieser Zufügung die Bedingung II) auch hinreichend ist, die Konvergenz der verwandten Reihe (2) zu sichern. Ich schließe mit einem Satz allgemeineren Umfanges, welcher noch weiterer Verallgemeinerung fähig ist.

§ 2.

Theorem.

Ist $f(x)$ eine Funktion mit beschränkter Schwankung, so konvergiert die verwandte Reihe

$$\sum (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

der Fourierschen Reihe von f, nach

$$\lim_{n=\infty} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \{f(x+t) - f(x-t)\} \cot \frac{t}{2}\, dt,$$

vorausgesetzt, daß dieser Limes einen bestimmten, endlichen Wert hat.

Schreiben wir:

$$s_m = \sum_{n=1}^{m-1} (b_n \cos nx - a_n \sin nx),$$

wobei:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

Durch einen gewöhnlichen Summationsprozeß erhalten wir:

$$s_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left\{ \frac{1}{2} \cot \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{t}{2} \cos \frac{2n-1}{2}\, t \right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \{f(2t+x) - f(2t-x)\} \{\cot t - \operatorname{cosec} t \cos \overline{2n-1}\, t\}\, dt.$$

Schreiben wir der Kürze halber $f_1(t)$ anstatt

$$f(2t+x)-f(x-2t),$$

so ist $f_1(t)$ von beschränkter Schwankung, hat im Punkte $t=0$ den Wert Null und ist daselbst infolge der Voraussetzung stetig. Bezeichnen wir durch $P(t)$ und $-N(t)$ die positive und negative Schwankung von $f_1(t)$ im Intervall $(0, t)$, so ist:

$$f_1(t) = P(t) - N(t),$$

und es erweisen sich $P(t)$ und $N(t)$, wie $f_1(t)$ als stetig im Punkte $t=0$, woselbst sie den Wert Null haben.

Nehmen wir eine positive Größe ε so klein an, daß für alle positiven Werte von $t<\varepsilon$, $P(t)$ und $N(t)$ beide $<e$ sind, und außerdem:

$$\left| f_1(t) \left\{ \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right\} \right| < e.$$

Betrachten wir dann nur solche Werte von n, daß

$$\frac{\pi}{n} < \varepsilon.$$

Wir haben nun

$$\pi s_n = \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} f_1(t) \cot\frac{t}{2}\, dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} f_1(t) \frac{\cos t - \cos \overline{2n-1}\, t}{\sin t}\, dt$$

$$-\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} f_1(t) \operatorname{cosec} t \cos \overline{2n-1}\, t\, dt - \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\varepsilon} f_1(t) \operatorname{cosec} t \cos \overline{2n-1}\, t\, dt. \quad \text{(A)}.$$

Das Theorem von Riemann-Lebesgue läßt uns darauf schließen, daß das dritte Integral nach Null konvergiert, wenn n ohne Schranke wächst, da $f_1(t) \operatorname{cosec} t$ im Intervall $\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$ eine Lebesguesche Integration zuläßt.

Das zweite Integral spaltet man in die beiden folgenden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} f_1(t) \frac{\cos t - \cos \overline{2n-1}\, t}{t} dt$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{n}} f_1(t) \left\{ \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right\} \{\cos t - \cos \overline{2n-1}\, t\}\, dt,$$

deren zweites absolut genommen

$$\leq \left| 2 \int_0^{\frac{\pi}{n}} f_1(t) \left\{ \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right\} dt \right|$$

ist, also mit $\frac{1}{n}$ nach Null konvergiert, während für den Absolutwert des ersten sich ergibt:

$$\left| 2 \int_0^{\frac{\pi}{n}} f_1(t) \frac{\sin nt \sin \overline{n-1}\, t}{t} dt \right| \leq 2c \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left| \frac{\sin nt}{t} \right| dt$$

$$< 2c \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt < 2\pi c. \tag{5}$$

Um das letzte Integral in (A) zu behandeln, benützen wir die Voraussetzung, daß f_1 beschränkte Schwankung besitzt. Wir ersetzen zugleich $\operatorname{cosec} t$ durch $\frac{1}{t}$, was erlaubt ist, da ja:

$$\left| \int_{\frac{\pi}{n}}^{\varepsilon} f_1(t) \left\{ \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right\} \cos \overline{2n-1}\, t\, dt \right| < \int_{\frac{\pi}{n}}^{\varepsilon} |f_1(t)| \left\{ \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right\} dt < c\left(\varepsilon - \frac{\pi}{n}\right). \tag{6}$$

Nun wenden wir den zweiten Mittelwertsatz auf das Integral

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\varepsilon} P(t) \frac{\cos \overline{2n-1}\, t}{t} dt$$

zweimal an und erhalten als gleichwertig

$$\frac{n}{\pi} P(\varepsilon) \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \cos \overline{2n-1}\, t\, dt < \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{P(\varepsilon)}{\pi} < \frac{2c}{\pi}. \tag{7}$$

In gleicher Weise

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\varepsilon} N(t) \frac{\cos \overline{2n-1}\, t}{t}\, dt < \frac{2c}{\pi}. \tag{8}$$

Es hat sich also ergeben, daß die drei letzten Integrale in (A) einen Beitrag zu dem gesamten Grenzwerte liefern, der numerisch kleiner als $c\left\{2\pi + \varepsilon + \frac{4}{\pi}\right\}$ ist.

Da aber c beliebig klein ist, so ist dieser Beitrag Null. Es bleibt also, nach (A)

$$\lim_{n\to\infty} \pi s_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} f_1(t) \cot \frac{t}{2}\, dt,$$

womit das ausgesprochene Theorem bewiesen ist.

§ 3.

Es sei nun auf den kürzlich [1]) von mir hergeleiteten Satz hingewiesen, wonach die verwandten Reihen der Fourierschen Reihe von $f(x)$ und derjenigen von

$$\frac{1}{2\sin u} \int_0^u \{f(x+2u) - f(x-2u)\}\, du$$

im Punkte $u = 0$ gleichzeitig konvergieren oder nicht konvergieren, und im letzteren Fall die Summen der beiden Reihen

[1]) „On the Convergence of a Fourier Series and of its allied Series", 1911. Proc. L. M. S.

einander gleich sind. Hiernach ergibt sich unmittelbar aus dem vorigen Paragraphen der folgende Satz, welcher als Erweiterung desjenigen von § 2 gelten kann:

Theorem.

Wenn

$$\frac{1}{u}\int_0^u \{f(x+u)-f(x-u)\}\,du,$$

als Funktion von u betrachtet, im Intervall $(0, u)$ beschränkte Schwankung besitzt, so konvergiert die verwandte Reihe der Fourierschen Reihe von $f(x)$ nach

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{4\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} du\,\operatorname{cosec}^2\frac{u}{2}\int_0^u \{f(x+2t)-f(x-2t)\}\,dt,$$

angenommen, daß dieser Limes existiert.

Dieser Satz läßt sich folgendermaßen umgestalten, indem wir die Werte von $f(x)$ außerhalb des Intervalles $(-\pi, \pi)$ periodisch wiederholen und das unbestimmte Integral von $f(x)$ durch $F(x)$ bezeichnen. Wir erhalten alsdann folgenden Satz:

Wenn

$$\frac{1}{u}\{F(x+u)+F(x-u)-2F(x)\},$$

als Funktion von u betrachtet, im Intervall $(0, u)$ beschränkte Schwankung besitzt, so konvergiert die verwandte Reihe der Fourierschen Reihe von $f(x)$ nach

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty u^{-2}\{F(x+u)+F(x-u)-2F(x)\}\,du,$$

angenommen, daß dieses Integral im Harnack-Lebesgueschen Sinne existiert.

Wir schließen sogar weiter, daß, wenn

$$\frac{1}{u}\int_0^u \{f(x+u)-f(x-u)\}\,du,$$

d. i.

$$\frac{F(x+u)+F(x-u)-2F(x)}{u}$$

eine Funktion des Veränderlichen u mit beschränkter Schwankung ist, so konvergiert die verwandte Reihe gegen

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{f(x+u)-f(x-u)}{u}\, du,$$

vorausgesetzt, daß dieser Limes bestimmt und endlich ist.

Denn man hat:

$$\frac{F(x+u)+F(x-u)-2F(x)}{u}$$

$$=\int_{u}^{\infty} \frac{F(x+u)+F(x-u)-2F(x)}{u^2}\, du - \int_{u}^{\infty} \frac{f(x+u)-f(x-u)}{u}\, du.$$

Da nun die linke Seite dieser Gleichung als Funktion beschränkter Schwankung jedenfalls einen bestimmten und endlichen Grenzwert besitzt, wenn u gegen Null konvergiert, so konvergieren beide Integrale auf der rechten Seite, oder es konvergiert keines von beiden. Letzteres tritt aber sicher ein, wenn der Grenzwert der linken Seite verschieden von Null ist, da die linke Seite durch u dividiert als Integrand in einem der beiden Integrale auftritt. Deshalb konvergieren die beiden Integrale gegen denselben bestimmten endlichen Wert, oder es konvergiert keiner der beiden. Der gesuchte Schluß folgt unmittelbar.

Endlich sei bemerkt, daß die Beweismethode, durch welche wir die Existenz des bestimmten und endlichen

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{f(x+u)-f(x-u)}{u}\, du$$

als hinreichende Bedingung für die Konvergenz der verwandten Reihe der Fourierschen Reihe von $f(x)$ erkannt haben, auch die Notwendigkeit dieser Bedingung nachweist, im Falle, daß entweder $f(x)$ selbst oder aber $\varphi(u)$, wobei $\varphi(0) = 0$,

$$\varphi(u) = \frac{F(x+u) + F(x-u) - 2F(x)}{u}, \quad (0 < u),$$

nicht nur beschränkte Schwankung besitzt, sondern auch stetig ist.

§ 4.

Beispiel.

Setzen wir im Intervalle $\frac{\pi}{r!} < t < \frac{\pi}{(r-1)!}$

$$f(t) = (-1)^r \frac{1}{r\{\log r\}^{k+1}}, \qquad (0 < k < 1; \ r = 2, 3, \ldots).$$

Und ferner

$$f(0) = 0, \qquad f(t) = -f(-t), \qquad f(t \pm 2\pi) = f(t).$$

Diese streckenweise konstante Funktion $f(t)$ hat beschränkte Schwankung. Denn in irgend einer im Intervall $(-\pi, \pi)$ enthaltenen Strecke kann die Schwankung die Summe der Sprünge nicht überschreiten. Deshalb bleibt die Schwankung in einer solchen Strecke stets unter der Summe der konvergenten Reihe

$$2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r(\log r)^{k+1}}.$$

Wir haben aber

$$\int_{\frac{\pi}{r!}}^{\frac{\pi}{(r-1)!}} \frac{f(t)}{t}\,dt = f\left\{\frac{\pi}{(r-1)!}\right\} \int_{\frac{\pi}{r!}}^{\frac{\pi}{(r-1)!}} \frac{dt}{t}$$

$$= f\left\{\frac{\pi}{(r-1)!}\right\} \log \frac{\frac{\pi}{(r-1)!}}{\frac{\pi}{r!}} = (-1)^r \frac{1}{r(\log r)^k},$$

während

$$\int_{\frac{\pi}{r!}}^{\frac{\pi}{(r-1)!}} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt = \frac{1}{r(\log r)^k}.$$

Da nun

$$\sum_{r=2}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r\{\log r\}^k}$$

konvergiert, dagegen

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r\{\log r\}^k}$$

divergiert, so leuchtet ein, daß $\int_0^\pi \frac{f(t)}{t} dt$ zwar als bedingt konvergentes, nicht aber als absolut konvergentes Integral existiert.

Man hat nämlich, wenn $\frac{\pi}{r!} < t < \frac{\pi}{(r-1)!}$:

$$\left|\int_{\frac{\pi}{r!}}^{t} \frac{f(t)}{t} dt\right| < \left|\int_{\frac{\pi}{r!}}^{\frac{\pi}{(r-1)!}} \frac{f(t)}{t} dt\right|,$$

mithin unterscheidet sich

$$\int_t^\pi \frac{f(t)}{t} dt \quad \text{von} \quad \int_{\frac{\pi}{r!}}^{\pi} \frac{f(t)}{t} dt$$

höchstens um $\frac{1}{r\{\log r\}^k}$. Nimmt nun t, und deshalb auch $\frac{1}{r}$, beständig ab, so konvergiert $\int_t^\pi \frac{f(t)}{t} dt$ gegen denselben endlichen und bestimmten Wert wie

$$\int_{\frac{\pi}{r!}}^{\pi} \frac{f(t)}{t} dt, \quad \text{d. i. gegen} \quad \sum_{r=2}^{\infty} (-)^r \frac{1}{r\{\log r\}^k};$$

aber

$$\int_{t}^{\pi} \left| \frac{f(t)}{t} \right| dt \quad \text{und} \quad \int_{\frac{\pi}{r!}}^{\pi} \left| \frac{f(t)}{t} \right| dt$$

divergieren gleichzeitig mit

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r\,\{\log r\}^k}.$$

Daraus folgt, daß

$$\int_0^{\pi} \frac{f(t) - f(-t)}{t}\, dt = 2 \int_0^{\pi} \frac{f(t)}{t}\, dt$$

ebenfalls als bedingt konvergentes (Riemannsches) Integral, nicht aber als absolut konvergentes (also nicht als Lebesguesches) Integral existiert. Da nun $f(t)$ eine Funktion mit beschränkter Schwankung ist, so konvergiert die verwandte Reihe der Fourierschen Reihe von $f(x)$ gegen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \{f(x+t) - f(x-t)\} \cot \frac{t}{2}\, dt,$$

obwohl auch dieses Integral nur als bedingt konvergentes existiert.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1911

Band/Volume: 1911

Autor(en)/Author(s): Young William H.

Artikel/Article: Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe 361-371