Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1911. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1911
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über die räumliche Verteilung der Sterne im schematischen Sternsystem.

Von **H. Seeliger.**

Vorgetragen in der Sitzung am 10. Juni 1911.

1.

Dem Problem der räumlichen Verteilung der Sterne in unserem Sternsystem habe ich außer einigen supplementären Untersuchungen[1]) zwei größere Arbeiten, die ich im folgenden mit I und II[2]) bezeichnen werde, gewidmet. Indem ich nun weitere Betrachtungen hinzuzufügen gedenke, scheint es mir angezeigt den Inhalt meiner früheren Arbeiten kurz zusammenzufassen, denn ich glaube mich nicht zu irren, wenn ich behaupte, die Tendenz der genannten Arbeiten sei von mancher Seite nicht richtig beurteilt worden.

Betrachtungen über die räumliche Verteilung der Sterne müssen selbstverständlich solche über die scheinbare Verteilung der Sterne von verschiedener Helligkeit vorhergehen. Als ich anfing mich mit dem Gegenstande zu beschäftigen, lag ein einigermaßen bearbeitetes Material an Beobachtungsdaten nicht vor. Ich begann deshalb damit ein solches herbeizuschaffen, indem ich die Sterne der Bonner Durchmusterungen nach

---

[1]) a) Über die Größenklassen der teleskopischen Sterne der Bonner Durchmusterungen. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1898. — b) Über die Verteilung der Sterne am Himmel. Ebenda 1899.

[2]) I. Betrachtungen über die räumliche Verteilung der Sterne. Abhandlungen der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften in München, II. Kl., XIX. Bd., III. Abt., 1898. — II. unter gleichem Titel (2. Abhandlung). Ebenda, XXV. Bd., 3. Abhandl., 1909.

Größe und Lage abzählen ließ[1]). Schon ein flüchtiger Anblick der so entstandenen Tabellen zeigte, daß frühere Feststellungen, die nur auf ganz unsicheren Abschätzungen beruhen konnten, zum Teil gänzlich verfehlt waren. Schiaparellis Arbeit über die Verteilung der mit freiem Auge sichtbaren Sterne erschien mehrere Jahre später (1889). Der zweite Schritt, der auszuführen war, bestand darin, die Bonner Größenschätzungen mit einer sicheren, d. h. photometrischen Skala in Verbindung zu setzen und dies wurde erst durch die photometrischen Arbeiten der Harvard-Sternwarte ermöglicht. Durch die dort erhaltenen Resultate konnte ich die Größen der D. M. bis zur 9.2 Größe in ihrer Abhängigkeit von der Lage zur Milchstraße untersuchen und zuerst eine provisorische (in (a) und (I)) und dann eine verbesserte (b) Reduktion auf photometrische Größen vornehmen.

In der Folge zeigte sich, daß nur eine recht genaue Feststellung der Zahlen A_m, d. i. der Anzahlen der Sterne von den hellsten bis zu einer photometrisch bestimmten Größe m herab, brauchbar ist und daß eine beiläufige Angabe über die A_m ebensowenig wie eine rohe Darstellung ermittelter A_m in großen Zügen geeignet ist, einen Beitrag zur Kenntnis der räumlichen Verteilung der Sterne zu liefern, vielmehr, daß solche Versuche nur Verwirrung anrichten können. Eine möglichst sorgfältige Festlegung der Bonner Größenschätzungen in der photometrischen Skala war deshalb eine sehr nötige Vorarbeit, deren Resultate leider oft genug nicht die genügende Beachtung gefunden hat. Für schwächere Sterne, als in der Bonner Durchmusterung in erforderlicher Vollständigkeit vorkommen, also für Sterne schwächer als von der Größe 9.2, fehlt es auch jetzt noch an genügend gesicherten Angaben und wenn auch, wie II art. IV angibt, einige Fixpunkte sich herstellen lassen, so ist deren Festlegung, vielleicht mit Aus-

---

[1]) a) Über die Verteilung der Sterne auf der nördlichen Halbkugel nach der Bonner Durchmusterung. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1884. — b) Über die Verteilung der Sterne auf der südlichen Halbkugel nach Schönfelds Durchmusterung. Ebenda 1886.

nahme der Resultate aus den Herschelschen Sterneichungen, doch keineswegs ebenso gesichert, wie es etwa die Angaben, welche auf der D. M. beruhen, sind. Indessen ist zu hoffen, daß die Hauptschwierigkeit, nämlich die photometrische Bestimmung genügend schwacher Sterne an vielen Punkten des Himmels, in naher Zukunft sehr erheblich vermindert werden wird.

Was den Zusammenhang zwischen der scheinbaren Verteilung der Sterne mit der räumlichen betrifft, so habe ich die nötigen Formeln vor 13 Jahren in I entwickelt. Ich habe dann in II die Voraussetzungen, auf denen diese Formeln beruhen, sehr verallgemeinert, indem ich u. a. sowohl auf eine allgemeine Absorption als auch darauf Rücksicht nahm, daß die Häufigkeitsfunktion φ der Leuchtkräfte i die Entfernung r von uns explizite enthalten kann. Bewegt sich i in dem endlichen Spielraum 0 bis $H(r)$, ist weiter $\psi(r)$ der Betrag der Absorption dergestalt, daß die scheinbare Helligkeit h in der Entfernung r durch

$$h = \frac{i\,\psi(r)}{r^2}$$

gegeben ist, ist ferner r_1 die Entfernung, in der die Grenze des Sternsystems in jener Richtung sich befindet, in welcher der betrachtete Himmelsteil ω liegt, auf den die Zahlen A_m sich beziehen, π_m die mittlere Parallaxe der Sterne der Größen m, dann entstehen Formeln, von denen nur die für A_m angeführt werden mögen und zwar für den Fall, daß $\frac{\psi(r)\,H(r)}{r^2}$ eine abnehmende Funktion ist.:

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \omega \int\limits_0^{\sigma} D\,r^2\,d\,r \int\limits_{h_m \frac{r^2}{\psi(r)}}^{H} \varphi(x,r)\,d\,x;\quad r_1 > \sigma \\ A_m &= \omega \int\limits_0^{r_1} D\,r^2\,d\,r \int\limits_{h_m \frac{r^2}{\psi(r)}}^{H} \varphi(x,r)\,d\,x;\quad r_1 < \sigma \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(I)}$$

Hierbei ist σ bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{H(\sigma)\cdot\psi(\sigma)}{\sigma^2} = h_m$$

und $D(r)$ ist die Funktion, welche die Dichtigkeit der Sternverteilung angibt. Läßt man noch H_1 eine Konstante sein und setzt

$$H(r) = H_1 F(r); \quad \frac{r^2}{F(r)\,\psi(r)} = \varrho^2, \; r = f(\varrho),$$

führt weiter die zwei Funktionen $\varDelta(\varrho)$ und $\varPhi$ ein durch

$$\varDelta(\varrho) = D\,[f(\varrho)]\cdot\left(\frac{f(\varrho)}{\varrho}\right)^2 f'(\varrho); \quad \varPhi(y, \varrho) = F(r)\cdot\varphi\,[y\,F(r), r],$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \omega\cdot\int\limits_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_m}}} \varDelta(\varrho)\,\varrho^2\,d\varrho\cdot\int\limits_{h_m\varrho^2}^{H_1} \varPhi(y, \varrho)\,dy; \; m < n \\ A_m &= \omega\int\limits_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_n}}} \varDelta(\varrho)\,\varrho^2\,d\varrho\int\limits_{h_m\varrho^2}^{H_1} \varPhi(y, \varrho)\,dy; \; m > n \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II)}$$

Es ist dabei die Sterngröße n definiert durch

$$h_n r_1^2 = H(r_1)\,\psi(r_1).$$

Ferner ergibt sich für die m. Parallaxen

$$\frac{\pi_m}{0''2}\cdot\int\limits_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_m}}} \varDelta(\varrho)\cdot\varrho^4\cdot\varPhi(h_m\varrho^2, \varrho)\,d\varrho = \int\limits_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_m}}} \varDelta(\varrho)\cdot\frac{\varrho^4}{f(\varrho)}\,\varPhi(h_m\varrho^2, \varrho)\,d\varrho, \qquad \text{(III)}$$

solange $m < n$. Für größere m ist in den Grenzen der Integrale h_m durch h_n zu ersetzen. Schließlich sei noch erwähnt, daß für $F(r) = 1$ sich ergibt

$$D(r) = \frac{\psi(r) - \frac{1}{2} r \psi'(r)}{\psi^{\frac{5}{2}}(r)} \cdot \Delta\left(\frac{r}{\sqrt{\psi(r)}}\right)$$

und speziell für $\Delta(\varrho) = \varrho^{-\lambda}$

$$D(r) = r^{-\lambda} \cdot \frac{\psi(r) - \frac{1}{2} r \psi'(r)}{\psi^{\frac{5}{2}-\lambda}(r)}.$$

Bei der Ausarbeitung von (I) waren nur bei Bestimmungen des Apex der Sonnenbewegung gelegentlich erhaltene mittlere Parallaxenwerte bekannt und etwa gleichzeitig hatte Herr Kapteyn seine bekannten Parallaxenbestimmungen aus den Eigenbewegungen veröffentlicht. Deshalb trat damals die Frage als besonders wichtig in den Vordergrund, ob durch Ermittlung der Zahlen A_m allein ein Beitrag zur Erkenntnis der räumlichen Verteilung der Sterne erlangt werden kann. Daß diese Frage prinzipiell bejaht werden muß, zeigen die Formeln (I) oder (II). Ist, wie angenommen werden soll, die Funktion φ überall dieselbe oder enthält sie wenigstens r nicht explizite, dann sind die beiden Funktionen Δ und φ durch zwei sogenannte Integralgleichungen, wenn auch wohl nicht immer eindeutig, bestimmt. Ferner ersieht man aus den Formeln (II), daß dort die Dichtigkeit D gar nicht vorkommt, sondern nur die Funktion $\Delta(\varrho)$ und daß man also zur Kenntnis von D noch die Absorption braucht oder die Berechtigung von ihr absehen zu dürfen anerkennen muß.

Dadurch, daß in gewissem Sinne von den m. Parallaxen gar kein Gebrauch gemacht wird, ist das ganze Problem wesentlich vereinfacht, denn die Ermittlung der Zahlen A_m bis zu größeren Werten von m bietet, wie schon erwähnt, zwar nicht geringe praktische Schwierigkeiten dar, aber wesentliche Beiträge zur Lösung sind mit Sicherheit in absehbarer Zeit zu erwarten. Ich habe deshalb schon vor 13 Jahren diese Aufgabe der praktischen Astronomie als eine der wichtigsten und lohnendsten bezeichnet für Beobachter, die über die nötigen Hilfsmittel, wie Einrichtungen zu photographischen Daueraufnahmen, verfügen.

Bei der überaus verwickelten, von Ort zu Ort schnell wechselnden Sternverteilung am Himmel wird man sich vorerst begnügen können, die von mir als „typisch“ bezeichnete räumliche Verteilung der Sterne zu studieren. In der Tat bietet diese einen passenden Rahmen für die spätere Einordnung des Details, dessen Erkenntnis doch sicherlich weniger wichtig ist. Kurz gesagt, entsteht dieses typische Bild des Sternsystems dadurch, daß man von den sicherlich weniger auffallenden Verschiedenheiten absieht, die man beim Vorwärtsschreiten längs eines galaktischen Breitenkreises antrifft und die Sterndichtigkeit also nur als Funktion dieser Breite und der Entfernung r auffaßt. Die Arbeit I beschäftigt sich hauptsächlich mit dieser typischen Sternverteilung. Zur Bestimmung von $\varDelta$ und φ aus den Integralgleichungen (II) reichte das verfügbare Material nicht aus, da für Werte $m > 10$ damals nur die Resultate der Herschelschen Sterneichungen vorlagen und es wäre nicht möglich gewesen, etwas über die Funktion $\varDelta$ auszusagen, wenn ich nicht die merkwürdige Tatsache gefunden hätte, daß die Größe

$$\alpha_m = \log \frac{A_{m+\frac{1}{2}}}{A_{m-\frac{1}{2}}}$$

innerhalb derselben galaktischen Breite nahezu unveränderlich ist für die in der D. M. vorkommenden Sterne, aber für alle m, die kleiner als etwa 9.2 sind und daß eine systematische Abhängigkeit von m nicht hervortritt.

Dagegen zeigte sich bei den aus den Herschelschen Eichungen abgeleiteten A_m eine starke Verminderung und zwar war diese um so bedeutender, je größer die galaktische Breite war. Des näheren konnte man also die Zahlen A_m bis zu den Sternen der 10. Größe durch die Formel

$$A_m = c \cdot h_m^{\frac{\lambda-3}{2}}$$

darstellen, wo λ mit der galaktischen Breite variierte, für die schwächeren Sterne aber war diese Darstellung nicht mehr möglich. Die einfachste und naheliegendste Interpretation dieser Tatsachen auf Grund der entwickelten Formel war diese: 1. Die Dichtigkeit oder die Sternfülle nimmt wie $r^{-\lambda}$ ab; 2. das Sternsystem ist begrenzt und seine Grenze liegt dort, wo die hellsten Sterne ($i = H$) die scheinbare Größe n haben, für welchen Wert von m die einfache Formel

$$A_m = c h_m^{\frac{\lambda-3}{2}}$$

zu gelten aufhört. Dieses n ist in der Nähe der Milchstraße erheblich größer als an ihren Polen und scheint sich sukzessive zu verkleinern, wenn man sich von der Milchstraße entfernt, wonach also das Sternsystem in der Richtung, in welcher die Milchstraße liegt, seine größte Ausdehnung zeigt. Daraus muß weiter gefolgert werden, daß die Milchstraße mit der ganzen Konstitution des Sternsystems zusammenhängt. Zur Feststellung dieser Sachlage ist die Kenntnis der Funktion φ nicht erforderlich, insbesondere ist die Feststellung des Dichtigkeitsgesetzes $\Delta(\varrho) = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$ davon ganz unabhängig und so war zum ersten Male und zwar ohne umfangreiche Rechnungen eine Vorstellung von der räumlichen Anordnung im Fixsternsystem gewonnen, die nicht auf vagen Hypothesen beruhte. Die genauere Angabe der Größe n, welche die Grenze des Sternsystems definiert, läßt sich allerdings nur mit einer bestimmten Funktion φ ausführen, aber der Einfluß derselben auf diese Bestimmung ist nicht sehr bedeutend. Ähnliches gilt für die Verwertung der Veränderlichkeit des Exponenten λ zur Feststellung der Kurven gleicher Dichtigkeit insofern, als diese mangels genauerer Zahlen A_m für die schwachen Sterne in verschiedenen galaktischen Breiten zuerst hypothetisch gewonnen werden mußten. Diese letzteren Ausrechnungen in (I) habe ich übrigens ausdrücklich nur als Beispiel bezeichnet, um die ganze Methode zu illustrieren.

Es ist schon erwähnt worden, daß ich in der zweiten Abhandlung (II) die Grundformeln auf allgemeineren Prämissen entwickelt habe, also mit Rücksicht auf eine etwaige Absorption etc. Es geschah dies keineswegs, um einem mehr oder weniger unfruchtbaren Formalismus zu genügen, sondern weil mit solchen Formeln sich ganz strenge und mühelos gewisse Betrachtungen anstellen lassen, die von andrer Seite in höchst umständlicher und auch nicht immer zutreffender Weise versucht worden sind. Daneben habe ich die allerdings geringen Fortschritte, die in der Feststellung der Zahlen A_m für schwächere Sterne seit 1898 erzielt worden sind, berücksichtigt und die vermeintlichen Fortschritte kritisiert, auch Betrachtungen allgemeinerer Art, wie über die Helligkeit des Himmelsgrundes, die ich schon früher[1]) angeregt hatte, weitergeführt. Ich habe mich dabei auf das von mir als schematisch bezeichnete Sternsystem beschränkt, weil für dieses allein die nötigen Daten von ausreichender Zuverlässigkeit vorhanden zu sein schienen. Als schematisches Sternsystem habe ich dasjenige bezeichnet, bei welchem auch die Abhängigkeit von der galaktischen Breite außer Betracht bleibt. Es werden also die Anzahlen A_m, ebenso wie mittleren Parallaxen π_m für den ganzen Himmel ermittelt. Das Studium dieses schematischen Sternsystems, das sich vom wahren natürlich sehr viel weiter entfernt als das typische und bei dem die auftretenden Mittelwerte nicht in allen Punkten eine genau definierbare Bedeutung haben, bietet trotzdem ein gewisses Interesse dar. Namentlich ist die Benutzung und Ausprobierung der angewandten Methoden in einem so viel einfacheren Falle, dem viel sicherer bestimmte Daten unterlegt werden können, einigermaßen instruktiv. Bei der Darstellung der m. Parallaxen und auch bei der Verwertung der Zahlen A_m für schwache Sterne ist, wie erwähnt, die Kenntnis von φ nötig. Ich habe nun in II einen Ansatz verwendet, der zuerst von Herrn Comstock aus den bisher beobachteten Parallaxen abgeleitet worden ist und dessen Gültigkeitsbereich ich allerdings überschätzt habe. Für ganz große i aber gibt diese Formel mit einiger Sicherheit die Eigenschaft von $\varphi(i)$ zu erkennen, die in meiner Theorie die größte Bedeutung hat, nämlich die starke Abnahme von $\varphi(i)$ mit wachsendem i so zwar, daß, wenn i drei oder vier nega-

---

[1]) Über kosmische Staubmassen und das Zodiakallicht. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften. München 1901.

tiven Sterngrößen entspricht, $\varphi(i)$ gleich Null gesetzt werden kann. Da die räumliche Dichtigkeit Δ von der Kenntnis von φ unabhängig ist, so habe ich also tatsächlich die genannte Formel nicht bei der Ableitung dieser Dichtigkeit benutzt. Ich habe meinen Rechnungen mit der Comstockschen Formel im wesentlichen nur einen informatorischen Charakter zugesprochen (vgl. II, S. 22), ihre Sicherheit für nicht ganz große i nicht hoch, aber vielleicht doch noch zu hoch angeschlagen. Ich glaube jetzt auch, daß für mittlere i die Funktion $\varphi(i)$ viel stärker abfällt, als die Formel angibt und daß auch die beobachteten Parallaxen ein gleiches Verhalten andeuten. Aber das von den direkt bestimmten Parallaxen gelieferte Material reicht keineswegs hin, um genauere Angaben machen zu können. Dazu kommt noch der Umstand, daß man wohl berechtigt sein kann, $\varphi(i)$ als unabhängig vom Ort zu betrachten, daß damit aber nicht gesagt ist, daß in kleineren Bezirken sich schon diese mittleren Zustände genau genug aussprechen werden. Die meßbaren Parallaxen, und hier kommt ihr absoluter Wert in Betracht, sind bestenfalls auf 4 bis 5 hundertel Sekunden genau bestimmbar. Parallaxen, die unter diesem Betrage liegen, sind durchaus illusorisch und die aus ihnen berechneten Leuchtkräfte gänzlich problematisch. Man muß sich aber auf die Sterne beschränken, deren Parallaxen größer als etwa $0''05$ sind und das ist ein außerordentlich kleiner Raum gegenüber dem, den unser Sternsystem einnimmt. Zudem hat dieser eine exzeptionelle Lage, nämlich sicherlich nicht sehr weit von den innersten Partien des Sternsystems entfernt.

Bekanntlich hat Herr Kapteyn aus den Eigenbewegungen der Sterne und dem hieraus hervorgehenden Apex der Sonnenbewegung zuerst systematisch die mittleren Parallaxen π_m abgeleitet. Ich glaube nicht, daß man in den Verdacht kommen muß, das große Verdienst dieser Bemühungen verkleinern zu wollen, wenn man hinzufügt, daß diese Parallaxen auf hypothetischer Grundlage ruhen und daß bis jetzt jeder Nachweis der Unschädlichkeit dieser sicherlich nicht ganz zutreffenden Hypothesen fehlt. Es scheint mir deshalb nach keiner Richtung begründet, wenn man die Darstellung dieser Parallaxen für ebenso wichtig wie die der Zahlen A_m, namentlich der von mir aus der D. M. gefolgerten, ansieht. Der Versuch, etwa die Kapteynschen Parallaxen genau darzustellen und den Zahlen A_m ganz unbefriedigend zu entsprechen, kann unmöglich als berechtigt angesehen werden.

Die Kapteynschen Parallaxen lassen sich mit der Annahme allerdings starker Absorption und sehr verschieden verlaufenden φ leicht darstellen. Sieht man aber von Absorptionen ab, so ist diese Darstellung mit einigen Umständlichkeiten verbunden. In II, S. 44 habe ich indessen erwähnt, daß diese Darstellung immerhin in gewissen Umfange nicht schwer zu erreichen ist. Ich konnte dies sagen, da ich vor Jahren eine ganze Serie solcher Rechnungen ausgeführt, aber nicht veröffentlicht hatte, weil die zu Grunde gelegten A_m mir nicht genügend genau erschienen. Andererseits muß ich zugeben, daß die Sache insofern anders liegt, als in II erwähnt wurde, als ein anderer Umstand hier größere Bedeutung erlangt, als ich vermutete. Die Abweichungen zwischen den berechneten und tatsächlich festgestellten A_m treten in stärkerem Maße hauptsächlich für kleine, zum Teil für sehr kleine m auf und da diese A_m schon wegen ihrer relativen Kleinheit unsicher sind, hat die Mißstimmung wohl keine entscheidende Bedeutung.

Ich möchte nun noch den Inhalt der folgenden Auseinandersetzungen zusammenfassen, die sich ausschließlich auf das schematische Sternsystem beziehen und eine Ergänzung zu meinen früheren Arbeiten liefern sollen. Im ersten Artikel werden allgemeine Betrachtungen über die Häufigkeitsfunktion φ der absoluten Leuchtkräfte i und ihre Veränderung mit der Zeit angestellt. Es wird dann gezeigt, wie man aus den Sternzahlen A_m allein, wenn diese in genügender Ausdehnung ermittelt vorliegen, für das endliche schematische Sternsystem sowohl die mit der Dichtigkeit zusammenhängende Funktion $\Delta(\varrho)$ als auch die Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ bestimmen kann. In erster Annäherung ist die in Frage kommende Integralgleichung leicht zu integrieren. Die gegenwärtig noch sehr rudimentäre Kenntnis des Verlaufs von A_m für $m > 10$ läßt selbstverständlich nur eine provisorische Bestimmung von φ zu. Immerhin ist es merkwürdig, daß diese Bestimmung auf einen ähnlichen Verlauf von $\varphi(i)$ führt, wie der Versuch der Darstellung der Kapteynschen Parallaxen weiterhin ergibt.

Im zweiten Artikel wird eine numerische Darstellung der Kapteynschen Parallaxen wirklich durchgeführt. Bei dem immerhin hypothetischen Charakter dieser Parallaxen genügt gegenwärtig sicherlich eine Annäherung. Wie schon aus den früheren Bemerkungen hervorgeht, und die folgende Rechnung bestätigt diese, ist ein Erfolg nur möglich, wenn man $\Delta(\varrho)$ etwas abändert, da der Ausdruck $\Delta(\varrho) = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$ stets zu den „normalen" Parallaxen führen muß. Es zeigt sich aber, daß die Abweichungen des neuen Δ gegen das alte nur in der nächsten Umgebung des Sonnensystems stärker hervortritt. Schon in der Entfernung 2, die einer Parallaxe 0″1 entspricht, ist die Differenz zwischen den beiden Δ schon auf 20 % gesunken, in der Entfernung 4 beträgt sie nur noch 6 %. Man darf also behaupten, daß die Dichtigkeitsverteilung im Sternsystem in ihrem allgemeinen Verlauf auch bei Akzeptierung der Kapteynschen Parallaxen sich so gestaltet, wie meine Arbeit vom Jahre 1898 aus allgemeinen Überlegungen angegeben hat. Die Grenze des schematischen Sternsystems liegt nach den jetzt vorliegenden Rechnungen in der Entfernung 910, was einer Parallaxe 0″00022 entspricht.

Schließlich wird der Einfluß einer Absorption unter zwei Annahmen untersucht. Nach der ersten ist der Absorptionskoeffizient proportional der an jeder Stelle des Sternsystems stattfindenden wirklichen Dichtigkeit D. Die zweite setzt eine „allgemeine" Absorption voraus, wonach der Absorptionskoeffizient konstant ist. Als hypothetisches Prinzip wird angenommen, daß die Dichtigkeit D nicht auf größeren Strecken bedeutend anwachsen darf. Dann ergibt sich, daß beide Absorptionen sehr gering sein müssen. Die Absorption beträgt für Sterne an der Grenze des Sternsystems im ersten Falle

0.34, im zweiten 0.27 Größenklassen und die Ausdehnung des Systems verkleinert sich dementsprechend. Sie wird durch 770 bzw. 805 Siriusweiten angegeben, wobei eine Siriusweite nach meinem Vorschlage einer Parallaxe 0″2 entspricht. Die wahren Dichtigkeiten D zeigen in beiden Fällen nahezu denselben Verlauf und nehmen etwas langsamer ab, wie in dem Falle, in dem von jeder Absorption abgesehen wird.

2.

Wenn man Häufigkeits- oder Verteilungsfunktionen von der Art des φ auf Grund von Abzählungen bestimmen will, so kann dies natürlich nur mit einer beschränkten Genauigkeit geschehen, denn selbst im Falle, daß eine überaus große Menge von Einzelgegenständen vorliegt, werden Schwankungen gegen einen normalen durch eine mathematische Formel darstellbaren Verlauf auftreten, auch können einzelne als Abnormitäten zu bezeichnete Dinge isoliert vorkommen. Sehr oft, vielleicht in der Regel, verläuft die Verteilungsfunktion so, daß sie für bestimmte Werte des Arguments ein Maximum aufweist und von diesem nach beiden Seiten, aber gewöhnlich unsymmetrisch abfällt. Für große oder kleine Argumente, manchmal auch für beide wird die Funktion klein werden, was natürlich von der Wahl des Arguments abhängt und sich dadurch ausspricht, daß hier nur wenige Exemplare des „Kollektivgegenstandes“ vorkommen. Immer werden sie über eine gewisse Grenze hinaus, nach der einen oder anderen oder auch nach beiden Seiten schließlich ganz fehlen. Um also aus dem Resultate der Abzählung, also aus den Angaben der sogenannten Verteilungstafel, eine mathematische Formel für die Häufigkeit aufstellen zu können, muß, da von einer absolut genauen Darstellung keine Rede sein kann, gewissermaßen eine Idealisierung vorgenommen werden. Außerhalb der Grenzen des Arguments, wo Werte der Verteilungsfunktion nicht mehr durch Exemplare vertreten sind, wird man nach Belieben die Funktionswerte als klein genug oder auch als genau der Null gleich annehmen können. Das erste Verfahren, das darauf hinauskommt die Argumentenwerte bis ins Unendliche sich ausdehnen zu lassen, ist in vielen Fällen das analytisch Einfachere und wird sowohl in der Fehlertheorie wie auch in der Kollektivmaßlehre fast ausschließlich eingeschlagen. Aber dies Verfahren ist trotzdem nicht immer das naturgemäße und es kann vorkommen, daß gewisse Eigenschaften dadurch verdeckt werden, die sehr deutlich hervortreten, wenn man die Argumentwerte von vornherein auf ein endliches Intervall einschränkt und somit gewissermaßen die Idealisierung im entgegengesetzten Sinne vornimmt.

Was speziell die Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ der absoluten Leuchtkräfte betrifft, so ist von vornherein selbstverständlich, daß Leuchtkräfte, die einen gewissen endlichen Wert H überschreiten, überhaupt nicht vorkommen. Es kann sich nur darum handeln, welchen Betrag man diesem Grenzwerte H zuerteilen soll. Die Genauigkeit der direkt beobachteten Parallaxen wird nun gewiß nicht unterschätzt, wenn man behauptet, daß der absolute Wert einer Parallaxe, der sich aus den Messungen kleiner als vielleicht 0″04 oder 0″05 ergibt, wirklich als unter dieser Grenze liegend angesehen werden kann. Für einen Stern von der Helligkeit m und der Parallaxe π'' wird seine Größe m_0 in der Entfernung 1, die in meinen Rechnungen immer der Parallaxe 0″2 entspricht, gegeben sein durch:

$$m_0 = m + 3.495 + 5 \log \pi''.$$

Man wird danach, da m_0 die Leuchtkraft in Größenklassen ausdrückt, gegenwärtig nicht nachweisen können, daß Sterne beobachtet worden sind, deren m_0 unter 3 bis 4 negativen Einheiten liegt, was auch die bisher gemessenen Parallaxen, deren Zahl doch immerhin 2—300 ist, bestätigen. Im übrigen würden etwaige abnorme Fälle das Gesagte auch nicht widerlegen können. Die Beschränkung der Leuchtkräfte auf ein Intervall in dem H einige negative Einheiten ist — aus dem Folgenden wird — 4.3 hervorgehen, — deckt nun in der Tat Eigentümlichkeiten des Sternsystems auf, die im anderen Falle nicht ohne weiteres erkennbar sind. Man mag diese Beschränkung als einen Kunstgriff bezeichnen; jedenfalls ist er erlaubt und hat sich als sehr nützlich erwiesen.

Ich hatte schon früher bemerkt, daß sich $\varphi(i)$ wegen der fortschreitenden Abkühlung der Sterne mit der Zeit verändert und deshalb sehr verschiedene Formen annehmen kann. Selbst wenn z. B. $\varphi(0)$ für irgend eine Zeit der Null gleich wäre, so wird diese Eigenschaft mit der Zeit verloren gehen und es ist nicht unwahrscheinlich, daß mit dem Fortschreiten der Zeit $\varphi(i)$ für große i einen stärkeren Abfall aufweisen wird; sicherlich wird sich H verkleinern müssen. Im übrigen hängt die Veränderung mit der Zeit von verwickelten Umständen ab und wenn man nicht willkürliche Annahmen hinzufügen will, läßt sie sich nur ganz allgemein charakterisieren. Jedem Stern wird zu einer bestimmten Zeit t ein bestimmter Wert des Differentialquotienten

$$-\frac{di}{dt} = \xi$$

eigentümlich sein. ξ ist wesentlich positiv und wird von t und i abhängen. Es sei nun $A \cdot di$ die dem φ proportionale Anzahl der Sterne, welche zur Zeit t eine zwischen i und $i + di$ liegende Leuchtkraft besitzen. Ein gewisser Prozentsatz dieser Sterne wird einen zwischen ξ und $\xi + d\xi$ gelegenen Wert von $-\frac{di}{dt}$ haben. Es wird also die Anzahl dieser Sterne sein:

$$A(t, i) \cdot \psi(i, \xi, t)\, d\xi \cdot di,$$

wenn man mit ψ eine auch von t und i abhängige Verteilungsfunktion bezeichnet, welche den Entwicklungszustand des Sternsystems charakterisiert. Dabei wird

$$\int_{\sigma}^{\sigma'} \psi(i, \xi, t)\, d\xi = 1$$

sein müssen für jedes i und t. σ und σ' können unter Umständen, und im allgemeinen wird man dies annehmen dürfen,

$\pm\infty$ sein. Nun wird die Zahl der Sterne mit der Leuchtkraft i zur Zeit $t + dt$, denen außerdem der Wert ξ von $\frac{di}{dt}$ zukommt, dieselbe sein, wie die Zahl der Sterne, deren i zur Zeit t, $i - \xi\,dt$ war, also gleich sein

$$A(t, i - \xi\,dt) \cdot \psi(i - \xi\,dt, \xi, t) \cdot d\xi\,di$$

und da ξ alle Werte von σ bis σ' annehmen kann, wird man haben

$$A(t + dt, i) = \int_{\sigma}^{\sigma'} d\xi \cdot A(t, i - \xi\,dt)\,\psi(i - \xi\,dt, \xi, t)$$

und hieraus ergibt sich

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\int_{\sigma}^{\sigma'} \frac{\partial (A \cdot \psi)}{\partial i}\,\xi \cdot d\xi.$$

Ist, was man in den meisten Fällen erreichen kann, σ und σ' unabhängig von i, so wird

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial (A f)}{\partial i}; \qquad f(i, t) = \int_{\sigma}^{\sigma'} \psi(i, t, \xi) \cdot \xi \cdot d\xi.$$

A und f sind also Funktionen der beiden Variablen i und t. Diese partielle Differentialgleichung ist nur in speziellen Fällen integrabel. Wenn z. B. f entweder i oder t nicht enthält, was in dem allgemeineren Ansatz

$$f = \varphi(i) \cdot \chi(t)$$

zusammengefaßt werden kann, dann ergibt sich sofort

$$A(t, i) = \frac{1}{\varphi(i)} \cdot F\left\{\int \chi(t)\,dt - \int \frac{di}{\varphi(i)}\right\},$$

worin F eine willkürliche Funktion bedeutet. Ist, um den Fall, in dem die Integrationsgrenzen von i abhängig sind, zu illustrieren, in jedem Punkt direkt $-\frac{di}{dt} = \varphi(i, t)$, ohne daß eine Verteilungsfunktion ψ wirksam wird, so ergibt sich

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\varphi(i, t) \cdot \frac{\partial A}{\partial i},$$

und falls weiter φ t nicht explizite enthält,

$$A = F\left(A - \int \frac{di}{\varphi(i)}\right).$$

Wenn auch von vornherein die Zulässigkeit der Annahme, daß $\varphi(i) = 0$ für $i \geq H$ unzweifelhaft feststeht, besonders wenn H als eine erst noch zu bestimmende Größe betrachtet wird, so wird doch der große Vorteil, den diese Annahme darbietet, erst hervortreten, wenn man die Tatsache berücksichtigt, daß die Anzahlen A_m und zwar für die kleinsten Werte von m bis zu etwa $m = 9$ oder 10 sehr genähert durch die Formel

$$\log A_m = a + b \cdot m \qquad \text{oder} \qquad A_m = \gamma \cdot h_m^{\frac{\lambda-3}{2}}$$

dargestellt werden können. Im speziellen hatte ich gefunden

$$\log A_m = 4.394 + 0.514\,(m - 7.5),$$

woraus $\lambda = 0.43$ folgt. Es ist, wenn man will, ein glücklicher Zufall, daß sich diese einfache Formel den Abzählungen so zufriedenstellend anschmiegt, wobei ausdrücklich konstatiert werden muß, daß meine sorgfältigen Ermittlungen der Zahlen A_m diese Übereinstimmung um so mehr hervortreten ließen, als die Sicherheit dieser Zahlen zunahm. Für sehr kleine m werden die A_m sehr klein und im Sinne einer Statistik, die mit großen Mengen zu rechnen hat, illusorisch. Wenn man aber an dem analytischen Charakter der vorkommenden Funktionen festhält, wird man die Gültigkeit der gefundenen Formel auch für kleine m anerkennen müssen oder dies wenigstens tun können. Da man außerdem dem schematischen Sternsystem eine angemessene Ausdehnung zuerkennen muß, ist die Anwendbarkeit der oben gegebenen Hauptformel II für $0 < m < n$ zweifellos. Dann folgt aber, wie ich in I schon, dann strenger in II, S. 14 nachgewiesen habe, eindeutig, daß $\varDelta(\varrho) = \varrho^{-\lambda}$ sein muß.

Die Methode, die ich in (I) diskutiert habe und die in der Tat unter den gemachten Voraussetzungen erlaubt aus den Abzählungsresultaten A_m allein die beiden Funktionen $\varDelta(\varrho)$ und $\varphi(i)$ zu bestimmen, besteht in der Anwendung der beiden Formeln II, wo nur der Einfachheit wegen $\omega = 1$ gesetzt und von einer expliziten Abhängigkeit der Funktion φ von ϱ abgesehen wird:

$$A_m = \int\limits_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \varDelta(\varrho) \cdot \varrho^2 \, d\varrho \int\limits_{h_m \varrho^2}^{H} \varphi(y)\, dy; \quad m < n \tag{1}$$

$$A_m = \int\limits_0^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \varDelta(\varrho) \varrho^2 \, d\varrho \int\limits_{h_m \varrho^2}^{H} \varphi(y)\, dy; \quad m > n. \tag{2}$$

Dabei ist die Grenze des Sternsystems gegeben durch

$$r_1 = \sqrt{\frac{H}{h_n}}.$$

Man sieht also, daß zur Bestimmung von r_1 außer m auch H bekannt sein muß, worauf noch zurückzukommen sein wird. Die beiden Integralgleichungen, welche leicht auf die übliche Form (vgl. II, S. 13) von Integralgleichungen der ersten Art gebracht werden können, bestimmen die beiden Funktionen $\varDelta$ und φ, im allgemeinen wohl nicht eindeutig. Um weitere Kontrollen bzw. Entscheidungen zu gewinnen, können die m. Parallaxen, wenn man ihnen die nötige Sicherheit zuerkennen will, herangezogen werden, wobei natürlich nur der Fall $m < n$ in Frage kommen wird. Auf diese Weise liegt also eine dritte Integralgleichung vor, die ebenfalls die Funktionen $\varDelta$ und φ und die Größe H enthält. Der hierbei einzuschlagende Weg ist wegen der speziellen Formen der Integralgleichungen vielleicht in jedem einzelnen Fall einfacher numerisch zu verfolgen, als durch allgemeine Entwicklungen. Glücklicherweise wird die Sachlage durch die von mir aufgedeckten Gesetzmäßigkeiten im schematischen Sternsystem überaus einfach und durchsichtig, indem aus der Gleichung (1) hervorging, daß die Funktion Δ jedenfalls angenähert durch $\gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$ dargestellt wird. Hierfür ist dann die Bestimmung der Funktion φ aus (2) strenge und sehr einfach auszuführen. Was die mittleren Parallaxen π_m betrifft, so genügt es, wenn der Einfluß der Absorption beiseite gelassen wird, die Integralgleichung heranzuziehen

$$\frac{\pi''_m}{0''2} = \frac{\int\limits_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(\varrho) \cdot \varrho^3 \cdot \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho}{\int\limits_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(\varrho) \cdot \varrho^4\, \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho}. \tag{3}$$

Wie ich in den beiden früheren Arbeiten erwähnt habe, ergibt (3) das Resultat, daß die Funktion $\Delta(\varrho) = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$ strenge genommen niemals andere als „normale“ Parallaxen liefern kann, d. h. solche, die durch die Formel

$$\pi''_m = \Gamma \cdot h_m^{\frac{1}{2}}$$

gegeben sind. Es zeigt sich aber und ist wohl auch von vornherein zu übersehen, daß verhältnismäßig kleine Änderungen im Verlaufe von $\Delta(\varrho)$, die nur für relativ kleine ϱ von der Formel $\gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$ stärker abweichen und somit das Bild, das man von der Dichtigkeitsverteilung im Sternsystem erlangt hat, nur geringfügig modifizieren, recht beträchtliche Änderungen in den Werten π_m erzeugen. Man wird also erwarten dürfen, durch solche Änderungen von Δ einen angenäherten Anschluß an die Kapteynschen m. Parallaxen erreichen zu können. Die weiteren Rechnungen werden in der Tat das Gesagte bestätigen. Indessen hört das Problem damit auf ein rein mathematisches zu sein und man wird durch versuchsweises Rechnen, wie es scheint, leichter zum Ende gelangen. Da nämlich durch eine Veränderung von Δ auch eine Veränderung der Zahlen A_m notwendigerweise eintreten muß, wird man durch Berücksichtigung der m. Parallaxenwerte nicht mehr erreichen können, als eine gerade noch erträgliche Übereinstimmung mit den direkt ermittelten Abzählungsresultaten A_m und dann kommt ein Moment in die Betrachtung, das sich nicht genau präzisieren läßt. Indessen läßt sich der Weg der weiteren sukzessiven Annäherungen immerhin skizzieren. Mit dem veränderten Wert von $\Delta(\varrho)$ ist die Integralgleichung (2) von neuem aufzulösen; man erhält so einen neuen Wert von φ und behandelt mit diesem die Integralgleichung (3) zur Gewinnung eines verbesserten Wertes von Δ u. s. f. Aber die Behandlung der Integralgleichung (2) hört dann auf so einfach, wie früher, zu sein, da man auf Formen kommt, die, wie es scheint, noch nicht behobene Schwierigkeiten darbieten. — Der erste Schritt auf dem Weg der Annäherungen aber ist, wie erwähnt, sehr leicht auszuführen. Die Gleichungen (1) und (2) geben, wenn $\Delta = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$ gesetzt wird, nachdem sie differenziert worden sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A_m}{\partial h_m} &= -\gamma\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \cdot \int_0^1 x^{4-\lambda} \cdot \varphi(Hx^2)\,dx; \quad m < n \\ \frac{\partial A_m}{\partial h_m} &= -\gamma\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \int_0^{\sqrt{\frac{h_m}{h_n}}} x^{4-\lambda}\,\varphi(Hx^2)\,dx; \quad m > n \end{aligned}\right\}. \quad (4)$$

Setzt man

$$\xi = \sqrt{\frac{h_m}{h_n}}, \quad \frac{\partial A_m}{\partial h_m} = f(\xi),$$

so wird die 2. Integralgleichung:

$$f(\xi) = -\gamma\left(\frac{H}{h_n}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \cdot \frac{1}{\xi^{5-\lambda}} \int_0^{\xi} x^{4-\lambda}\,\varphi(Hx^2)\,dx$$

und hieraus folgt ohne weiteres

$$\gamma\,\varphi(H\xi^2) = -\left(\frac{h_n}{H}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \cdot \frac{1}{\xi^{4-\lambda}}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\xi^{5-\lambda} f(\xi)\right].$$

Die beiden Formeln (4) zeigen, daß für $m = n$ der erste Differentialquotient $\frac{dA_m}{dh_m}$ stetig verläuft. Das gleiche findet statt für den zweiten Differentialquotienten, wenn $\varphi(H) = 0$. Danach muß die Funktion ψ im folgenden Ausdruck gewählt werden. Für den brigg. Logarithmus von A_m werde nun gesetzt:

$$\log A_m = a_1 + b_1(m-n) + c_1\,\psi(m-n).$$

Ist weiter

$$\varepsilon = 0.43429\ldots,\quad a = \frac{a_1}{\varepsilon};\qquad b = \frac{b_1}{\varepsilon},\quad c = \frac{c_1}{\varepsilon},$$

so wird

$$\log\text{nat}\,A_m = a + b(m-n) + c\,\psi(m-n),$$

also

$$\frac{dA_m}{dh_m} = -\frac{5\varepsilon}{2h_m} \cdot e^{a+b(m-n)+c\psi(m-n)} \cdot \{b + c\,\psi'(m-n)\}.$$

Nach der empirischen Formel für $\log A_m$ $(m < n)$ war $5b_1 = 3 - \lambda$ und dieser Wert muß nach den obigen Bemerkungen beibehalten werden. Da weiter $m - n = -5\log\xi$ ist, erhält man

$$\frac{\partial(\xi^{5-\lambda} f(\xi))}{\partial\xi} = +\frac{25\,\varepsilon^2 c}{2h_n\,\xi} \cdot e^{a+c\psi(-5\log\xi)}$$
$$\times\{[b + c\,\psi'(-5\log\xi)]\,\psi'(-5\log\xi) + \psi''(-5\log\xi)\}.$$

Führt man zur Abkürzung Γ ein

$$\Gamma = -\frac{25\,\varepsilon^2 c}{2h_n\gamma}\left(\frac{h_n}{H}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}},$$

so wird

$$\varphi(H\xi^2) = \Gamma \cdot e^{-\frac{(5-\lambda)}{\varepsilon}\log\xi + c\psi(-5\log\xi)}$$
$$\times\{b\,\psi'(-5\log\xi) + \psi''(-5\log\xi) + c\,\psi'^2(-5\log\xi)\}.$$

Setzt man nun noch $\xi = \sqrt{\frac{i}{H}}$ so wird

$$\varphi(i) = \Gamma \cdot e^{-\frac{5-\lambda}{2\varepsilon}\log\left(\frac{i}{H}\right) + c\,\psi\left(-\frac{5}{2}\log\frac{i}{H}\right)}$$

$$\times\left\{b\,\psi'\left(-\frac{5}{2}\log\frac{i}{H}\right) + \psi''\left(-\frac{5}{2}\log\frac{i}{H}\right) + c\,\psi'^{2}\left(-\frac{5}{2}\log\frac{i}{H}\right)\right\}.$$

Will man, was vielleicht plausibel erscheint, $\varphi(H) = 0$ voraussetzen, so könnte man z. B. $\psi(x) = x^p$ setzen, wo p ein wenig größer als 2 ist. Gegenwärtig ist man noch weit entfernt davon für ψ einen irgendwie zuverlässigen Wert zu erlangen; dazu müßte eine weit größere Anzahl gut bestimmter Werte der Zahlen A_m für $m > n$ vorliegen. Man wird deshalb keine ernsten Bedenken dagegen erheben können, wenn genähert $\psi(x) = x^2$ gesetzt wird, da es sich zunächst nur um orientierende Rechnungen handeln kann. Macht man also den interpolatorischen Ansatz

$$\log A_m = a_1 + b_1(n - n) + c_1(m - n)^2,$$

so wird

$$\varphi(i) = 2\,\Gamma \cdot e^{-\frac{5-\lambda}{2\varepsilon}\log\frac{i}{H} + \frac{25}{4}c_1\left(\log\frac{i}{H}\right)^2}$$

$$\times\left\{1 - \frac{5}{2}b_1\log\left(\frac{i}{H}\right) + \frac{25}{2}c_1\left(\log\frac{i}{H}\right)^2\right\}.$$

Zur Verfügung stehen (s. II, S. 33), wenn $n < 11.16$, die Werte $\log A_m$:

m	$\log A_m$	f
11.16	6.222	6.265
13.90	7.433	7.406
14.80	7.688	7.702

Zur angenäherten Darstellung genügt die Formel:

$$\log A_m = 4.394 + 0.514(m - 7.5) - 0.0240(m - n)^2,$$

wie die danach berechneten Zahlen f zeigen, welche mit dem aus den späteren Rechnungen hervorgehenden $n = 10.5$ berechnet sind.

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\Gamma}\varphi(i) &= e^{-5.261\log\left(\frac{i}{H}\right)-0.345\left(\log\frac{i}{H}\right)^2}\\ &\times\left\{1-2.959\log\left(\frac{i}{H}\right)-0.691\left(\log\frac{i}{H}\right)^2\right\}.\end{aligned}\tag{5}$$

Mit Weglassung der Konstanten und $\log\frac{i}{H}=-x$ gesetzt

$$\varphi(i)=e^{+5.261\,x-0.345\,x^2}\cdot\{1+2.959\,x-0.691\,x^2\}.$$

Es ist selbstverständlich, daß eine solche Verteilungsfunktion nur in einem beschränkten Umfang gelten kann, da $\varphi(i)$ immer positiv bleiben muß und das in x quadratische Glied einen negativen Koeffizienten hat. Auch die für $\log A_m$ angesetzte Interpolationsformel kann ja nur bestenfalls für nicht zu große Werte von $m-n$ gelten. Merkwürdig ist nun aber, daß die gefundene Formel für $\varphi(i)$ große Ähnlichkeit mit derjenigen hat, die man erhält, wenn man die Kapteynschen Parallaxen, wie im folgenden geschehen wird, darzustellen versucht. Es wird sich nämlich für die Häufigkeitsfunktion ergeben

$$\varphi_1(i)=e^{+5.385\,x-0.230\,x^2}.$$

Die Vergleichung beider φ ergibt:

x	$\frac{\varphi}{\varphi_1}$
0	1
$\frac{1}{2}$	2.1
1	2.6
2	2.0
3	0.9
4	0.2

Da die Einheit in x $2^1/_2$ Sterngrößen entspricht, muß man zweifellos in einem ziemlich weiten Bezirk den Verlauf der beiden Funktionen als sehr ähnlich bezeichnen, im besonderen, wenn die große Unsicherheit der Werte in Betracht gezogen wird. Das ist aber, wie mir scheint, noch kein direkter Beweis für die Richtigkeit der m. Parallaxen, denn auch die normalen Parallaxen werden durch dieses φ ebenso wie durch jedes andere dargestellt und zwar genau. Vielmehr hat der etwas abgeänderte Verlauf von Δ in der Hauptsache die Darstellung der Werte π_m ermöglicht.

Ausdrücklich muß noch auf einen Punkt hingewiesen werden. Die Größe H ist zunächst aus den Abzählungsresultaten allein nicht bestimmbar. Es ergibt sich dies sofort aus den obigen Formeln. Danach ist

$$\gamma \left(\frac{H}{h_n}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \varphi(Hx^2)$$

nur Funktion von h_n und x und enthält H gar nicht. Man muß also H aus anderen Daten ableiten. Hierzu eignen sich die Werte der Parallaxen der helleren und hellsten Sterne. Man kann dazu eine Zusammenstellung derselben benutzen und daraus den Verlauf von $\varphi(i)$ für große i ableiten, was immerhin mit einiger Sicherheit geschehen kann und daraus H durch Extrapolation bestimmen. So habe ich in II aus der Comstockschen Formel H entsprechend der Größe -3.7 gefunden. Man kann aber auch, und das wird sicherer sein, die m. Parallaxen der Sterne z. B. der zweiten Größe ableiten und diese mit dem gefundenen φ berechnen, woraus sich dann m_0, das der Helligkeit H entspricht, ergibt. Ich will diese Rechnung wirklich aus dem hier auf noch recht unsicherer Grundlage abgeleiteten Wert (5) von $\varphi(i)$ vornehmen, um ganz im Rahmen der hier besprochenen Methode zu bleiben. Es wird also die Formel (3) unter der Voraussetzung $\Delta(\varrho) = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$, $\lambda = 0.43$, berechnet.

Danach wird

$$\frac{\pi_m''}{0''2} = \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{J_{3-\lambda}}{J_{4-\lambda}}$$

und allgemein ist

$$J_m = \tfrac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{m-1}{2}} \varphi(Hx)\, dx.$$

Die Gleichung (5) hat die Form

$$\varphi(Hx) = e^{a\log x - b(\log x)^2} \cdot \{1 - c\log x - d(\log x)^2\}.$$

Setzt man noch

$$\varepsilon = 0.43429 \ldots p = -\frac{m+1}{2\varepsilon} - a; \quad \log x = -\frac{1}{\sqrt{b}}\left(z + \frac{p}{2\sqrt{b}}\right),$$

so kann man leicht die Formel aufstellen

$$J_m = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{b}}\, e^{\frac{p^2}{4b}} \int\limits_{-\frac{p}{2\sqrt{b}}}^{+\infty} e^{-z^2} dz \left[1 + \frac{c}{\sqrt{b}}\left(z + \frac{p}{2\sqrt{b}}\right) - \frac{d}{b}\left(z + \frac{p}{2\sqrt{b}}\right)^2\right].$$

Abgesehen von konstanten, von p unabhängigen, Faktoren findet sich:

Man setze:

$$A = \left(1 + \frac{pc}{2b} - \frac{d}{2b} \cdot \frac{p^2}{2b} - \frac{d}{2b}\right)$$

$$B = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left(c - \frac{2dp}{2b} - \frac{d}{2b}p\right)$$

$$J_p = e^{\frac{p^2}{4b}} \cdot A \cdot \int\limits_{-\frac{p}{2\sqrt{b}}}^{\infty} e^{-z^2} dz + B.$$

$J_{3-\lambda}$ ergibt sich, wenn $p = -\frac{4-\lambda}{2\varepsilon} - a$ gesetzt wird, und $J_{4-\lambda}$, wenn $p = p_1 = -\frac{5-\lambda}{2} - a$. Die Rechnung vereinfacht sich dadurch, daß mit den Zahlenwerten in (5) sich $\frac{d}{2b} = 1$ herausstellt. Ferner ist $p_1 = 0$, $p = +1.151$. Man findet

$$\pi''_m = 0''\!.2\,[0.7460]\left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\log \pi''_m = 0.0470 + \tfrac{1}{5}(m_0 - m).$$

Die m. Parallaxen der helleren Sterne dürften ziemlich gut bestimmt sein. Ich entnehme den Angaben Herrn Kapteyns: $\pi'' = 0''.0383$ für $m = 2.7$. Dann ergibt sich

$$m_0 = -4.62.$$

Aus den späteren Rechnungen, die gänzlich unabhängig von den eben angestellten Betrachtungen sind, wird $m_0 = -4.3$ gefunden werden. Die Übereinstimmung der beiden Resultate ist in Anbetracht aller Umstände eine unerwartet vorzügliche.

Ist H und h_n bekannt, so ergibt sich nunmehr die Dimension des schematischen Sternsystems

$$r_1 = \sqrt{\frac{H}{h_n}}.$$

Einheit ist die Siriusweite, die einer Parallaxe $0''.2$ entspricht.

3.

Ich gehe zur Berechnung der m. Parallaxen über, indem die Dichtigkeitsfunktion $\Delta(\varrho)$ etwas verändert wird. Nach den Resultaten im Artikel 3 liegt es nahe eine Exponentialfunktion von φ anzusetzen, die von ähnlicher Form ist, wie die in (2) benutzte. Solche Formen sind in der Tat naheliegend, auch abgesehen von den Resultaten des letzten Artikels, sind auch in der letzten Zeit von anderer Seite benutzt worden. Ich gehe also aus von der Funktion

$$\psi(i) = \Gamma_1 \cdot \left(\frac{H}{i}\right)^{\nu} e^{-k^2\left[\left(\log\frac{i}{H}\right)^2 + b\log\left(\frac{i}{H}\right) + c\right]},$$

wobei natürliche Logarithmen gemeint sind. Es ist selbstverständlich, daß das Glied

$$\left(\frac{H}{i}\right)^{\nu} = e^{-\nu\log\frac{i}{H}}$$

in den Exponenten gebracht werden kann, aber es ist unter Umständen zweckmäßig, dies nicht gleich von Anfang an zu tun. Um nun die vielleicht an sich plausible Bedingung

$\varphi(H) = 0$ einzuhalten, soll eine geringfügige Asymmetrie erzeugt werden, was auf unendlich viele Arten erreicht werden kann. Wie dies geschieht, ist beim augenblicklichen Stand der zu erreichenden Genauigkeit gänzlich willkürlich. Hier mag das Koordinatensystem, in dem i die Abszisse und ψ die Ordinate ist, um einen Winkel ε gedreht werden, so daß also

$$\varphi(i) = \psi(i)\cos\varepsilon - i\sin\varepsilon.$$

Die Bedingung $\varphi(H) = 0$ wird so

$$0 = \Gamma_1 e^{-k^2 c}\cos\varepsilon - H\sin\varepsilon; \quad \operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\Gamma_1}{H} e^{-k^2 c},$$

demnach wird ($\Gamma_1 \cos\varepsilon = \Gamma$)

$$\varphi(i) = \Gamma \cdot \left\{ \left(\frac{H}{i}\right)^{\nu} \cdot e^{-k^2\left[\left(\log\frac{i}{H}\right)^2 + b\log\frac{i}{H} + c\right]} - \frac{i}{H} e^{-k^2 c} \right\}. \quad (1)$$

Dabei treten allerdings für ganz kleine i negative φ auf, denn $\varphi(i)$ wird $= 0$, wenn, $\log\frac{i}{H} = \xi$ gesetzt,

$$-k^2(\xi + b) = \nu + 1.$$

Für die im folgenden vorkommenden Zahlenwerte $\nu = 0$, $k = \frac{5}{24}$, H entsprechend der Größe -4.3, $b = 53$ wird $\xi = -76$. Die entsprechenden Werte von i können also, wie leicht zu sehen, auch nicht den geringsten Einfluß ausüben.

Ich berechne nun das Integral

$$J_\mu = \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \varrho^\mu \cdot \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho.$$

Führt man $x = \frac{h_m \varrho^2}{H}$ ein, so wird

$$J_\mu = \tfrac{1}{2}\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{\mu-1}{2}} \int_{h_m \frac{r_0^2}{H}}^{1} x^{\frac{\mu-1}{2}}\, dx \cdot \left\{ x^{-\nu} \cdot e^{-k^2[(\log x)^2 + b\log x + c]} - x e^{-k^2 c} \right\}.$$

Der zweite Term hierin wird:

$$\frac{2\,e^{-k^2 c}}{\mu+3}\left\{1-\left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{\mu+3}{2}}\right\}.$$

Der erste nach Einführung von $y = \log x$:

$$\int\limits_{\log\frac{h_m r_0^2}{H}}^{0} d\,y\cdot e^{-k^2[y^2+b\,y+c]+\frac{\mu+1-2\nu}{2}y}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$q=\frac{\mu-2\nu+1}{2};\quad \sigma=\frac{b k^2-q}{2k};\quad a=-\sigma-k\log\frac{h_m r_0^2}{H} \tag{2}$$

und nimmt als neue Integrationsvariable

$$z = k\,y+\sigma,$$

so wird das letzte Integral

$$\frac{e^{\sigma-k^2 c}}{k}\cdot\int\limits_{-\sigma}^{a} e^{-z^2}\,d\,z$$

und auf diese Weise schließlich

$$J_\mu=\frac{\sqrt{\pi}}{4k}\cdot\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} e^{-k^2 c}$$
$$\times\left\{\sigma^2\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{a} e^{-z^2}\,d\,z-\frac{4k}{(\mu+3)\sqrt{\pi}}\left[1-\left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{\mu+3}{2}}\right]\right\}. \tag{3}$$

Mit dieser Formel lassen sich nunmehr die Integralgleichungen für A_m und π_m, in denen die innere Grenze des Sternsystems durch die Strecke r_0 bestimmt ist, darstellen. Es hat sich gezeigt, daß es genügt, die früher benutzte Funktion $\Delta(\varrho)$ in

$$\Delta(\varrho)=\varrho^{-\lambda}-a\,\varrho^{-\lambda_1} \tag{4}$$

umzuändern. Nun kann freilich für kleine ϱ, $\Delta(\varrho)$ negativ werden, was natürlich unzulässig ist. Um die dadurch entstehende Ungenauigkeit zu vermeiden, wurde die untere Grenze der ursprünglichen Integrale nicht $= 0$ sondern $= r_0$ gesetzt, oder, was dasselbe bedeutet, es wird angenommen, daß im Umkreis um die Sonne, dessen Radius $< r_0$ ist, keine Sterne stehen oder so wenige, daß von ihnen abgesehen werden kann. Da hier der Einfluß einer Absorption außer Betracht bleiben soll, wird nach Formel (3) des vorigen Artikels gerechnet werden können. Man erhält so

$$\frac{\pi_m}{0''2} = \frac{J_{3-\lambda} - \alpha J_{3-\lambda_1}}{J_{4-\lambda} - \alpha J_{4-\lambda_1}} = \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{Z}{N} \tag{5}$$

und für Z und N findet man

$$Z = e^{\sigma^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sigma}^{a} e^{-z^2} dz - \alpha \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sigma_1}^{a_1} e^{-z^2} dz$$
$$- \frac{4k}{(6-\lambda)\sqrt{\pi}} \left[1 - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{6-\lambda}{2}}\right] + \frac{4k\alpha}{(6-\lambda_1)\sqrt{\pi}} \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \cdot \left[1 - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{6-\lambda_1}{2}}\right].$$

$$N = e^{\sigma'^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sigma'}^{a'} e^{-z^2} dz - \alpha \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sigma_1'}^{a_1'} e^{-z^2} dz$$
$$- \frac{4k}{(7-\lambda)\sqrt{\pi}} \left[1 - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{7-\lambda}{2}}\right] + \frac{4k\alpha}{(7-\lambda_1)\sqrt{\pi}} \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \cdot \left[1 - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{7-\lambda_1}{2}}\right],$$

wobei

$$\sigma = \frac{bk}{2} - \frac{4-2\nu-\lambda}{4k} \qquad \sigma_1 = \frac{bk}{2} - \frac{4-2\nu-\lambda'}{4k} = \sigma + \frac{\lambda_1-\lambda}{4k}$$

$$a = -\sigma - k \log\left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right) \qquad a_1 = -\sigma_1 - k \log\left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)$$

$$\sigma' = \frac{bk}{2} - \frac{5-2\nu-\lambda}{4k} = \sigma - \frac{1}{4k} \qquad \sigma_1' = \frac{bk}{2} - \frac{5-2\nu-\lambda_1}{4k} = \sigma + \frac{\lambda_1-\lambda-1}{4k}$$

$$a' = -\sigma' - k \log\left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right) \qquad a_1' = -\sigma_1' - k \log\left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right).$$

Nochmals sei erwähnt, daß alle vorkommenden Logarithmen natürliche sind. Die numerische Anwendung dieser Formeln erfolgte durch Versuche und diese wurden so eingerichtet, daß m. Parallaxen erhalten werden, die ähnlich verlaufen wie die von Herrn Kapteyn angegebenen. Danach wurden insbesondere α und λ_1 gewählt. Nach einigen Versuchen bin ich bei folgenden Annahmen stehen geblieben:

$$H \text{ entspricht } -4.3 \text{ Sterngrößen},$$
$$r_0 = \tfrac{1}{3},\ \ \sigma = 1.4,\ \ \sigma' = 0.2;\ \ \ \sigma_1 = 2.0,\ \ \sigma_1' = 0.8,\ \ \lambda_1 - \lambda = 0.5,$$
$$4k = \tfrac{5}{6};\ \ \log \alpha = 9.7600 - 10.$$

Schließlich wurde von $\lambda = 0.556$ zufälligerweise ausgegangen. Es ist leicht zu übersehen, daß die Substitution des später gefundenen definitiven Wertes $\lambda = 0.49$ bei den Formeln für π_m keine merkbare Verbesserung notwendig machen wird. Die Dichtigkeitsfunktion $\varDelta$ ist jetzt

$$\varDelta(\varrho) = \varrho^{-\lambda-\frac{1}{2}} \cdot (\varrho^{\frac{1}{2}} - \alpha)$$

und man sieht, daß in der Tat $\varDelta(\varrho)$ für $\varrho \geqq \frac{1}{3}$ stets positiv bleibt. Ich teile nun die numerische Rechnung in einer Ausdehnung mit, welche die Nachrechnung ohne Mühe gestattet. Dies halte ich für durchaus nötig, wenn solche doch immerhin nicht ganz einfachen Rechnungen nicht wertlos sein sollen. Die Rechnung ist von $m = 0.5$ bis $m = 11.5$ ausgeführt und zwar dürfte die dritte Dezimale höchstens um ein oder zwei Einheiten unrichtig sein. Sie wurde so angelegt:

$$\psi_m(\lambda) = \frac{4k}{(6-\lambda)\sqrt{\pi}}\left[1 - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{6-\lambda}{2}}\right]$$

$$\chi_m(\lambda) = \frac{4k}{(7-\lambda)\sqrt{\pi}}\left[1 - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{7-\lambda}{2}}\right]$$

$$Z_m = -\psi_m(\lambda) + \alpha\left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \cdot \psi_m(\lambda_1)$$

$$N_m = -\chi_m(\lambda) + \alpha\left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \chi_m(\lambda_1).$$

Weiter wird bezeichnet

$$(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^a e^{-z^2}\, dz$$

und damit berechnet

$$Z = Z_0 + Z_m = e^{\sigma^2}\left[(a) + (\sigma)\right] - \alpha\, e^{\sigma_1^2} \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{4}} \left[(a_1) + (\sigma_1)\right] + Z_m$$

$$N = N_0 + N_m = e^{\sigma'^2}\left[(a') + (\sigma')\right] - \alpha\, e^{\sigma_1'^2} \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{4}} \left[a_1' + (\sigma_1')\right] + N_m.$$

Es ergibt sich, wobei außer den bekannten Tafeln für die Krampschen Integrale die Tafeln von G. F. Becker und C. E. van Ostrand, „Hyperbolic functions“, Washington 1909, gute Dienste leisteten, für die brigg. Logarithmen

$\log e^{\sigma^2} = 0.8512$ | $\log e^{\sigma'^2} = 0.0174$

$\log e^{\sigma_1^2} = 1.7372$ | $\log e^{\sigma_1'^2} = 0.2779$

$(\sigma) = 0.9523$ | $(\sigma') = 0.2227$

$(\sigma_1) = 0.9953$ | $(\sigma_1') = 0.7421$

Die weiter folgenden Tabellen bedürfen wohl keiner näheren Erklärung.

m	a	a_1	a'	a_1'	Z_m	N_m	$\log \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{4}}$
0.5	− 0.0211	− 0.6212	+ 1.1788	+ 0.5788	− 0.0683	− 0.0567	− 0.48
1.5	+ 0.1707	− 0.4293	+ 1.3707	+ 0.7707	723	598	− 0.58
2.0	+ 0.2666	− 0.3334	+ 1.4666	+ 0.8666	736	611	− 0.63
3.0	+ 0.4585	− 0.1415	+ 1.6585	+ 1.0585	762	633	− 0.73
4.0	+ 0.6456	+ 0.0456	+ 1.8456	+ 1.2456	783	651	− 0.83
5.0	+ 0.8423	+ 0.2423	+ 2.0423	+ 1.4423	800	665	− 0.93
6.0	+ 1.0352	+ 0.4352	+ 2.2352	+ 1.6352	813	676	− 1.03
7.0	+ 1.2261	+ 0.6261	+ 2.4261	+ 1.8261	823	684	− 1.11
8.5	+ 1.5139	+ 0.9139	+ 2.7139	+ 2.1139	835	694	− 1.28
10.0	+ 1.8018	+ 1.2018	+ 3.0018	+ 2.4018	844	701	− 1.43
11.5	+ 2.0895	+ 1.4895	+ 3.2895	+ 2.6895	878	706	− 1.58

m	(a)	(a_1)	(a')	(a'_1)	$\log e^{\sigma^2} \times [(a)+(\sigma)]$	$\log e^{\sigma^2} \times [(a)+(\sigma)]_1$	$\log e^{\sigma^2} \times [(a)+(\sigma)]'$	$\log e^{\sigma^2} \times [(a)+(\sigma)]'_1$
0.5	− 0.0238	− 0.6203	+ 0.9045	+ 0.5869	0.8190	1.3112	0.0694	0.4014
1.5	+ 0.1908	− 0.4562	0.9474	0.7242	0.9093	1.4689	0.0856	0.4441
2.0	0.2939	− 0.3627	0.9619	0.7796	0.9468	1.5383	0.0910	0.4601
3.0	0.4832	− 0.1586	0.9810	0.8656	1.0084	1.6598	0.0979	0.4841
4.0	0.6388	+ 0.0514	0.9909	0.9218	1.0529	1.7570	0.1015	0.4990
5.0	0.7665	+ 0.2681	0.9961	0.9587	1.0866	1.8387	0.1032	0.5085
6.0	0.8568	0.4618	0.9985	0.9792	1.1111	1.9007	0.1042	0.5138
7.0	0.9171	0.6241	0.9994	0.9901	1.1229	1.9466	0.1045	0.5165
8.5	0.9677	0.8038	0.9999	0.9972	1.1345	1.9923	0.1047	0.5183
10.0	0.9892	0.9108	1.0000	0.9993	1.1393	2.0173	0.1047	0.5188
11.5			1.0000	0.9999			0.1047	0.5190

m	$\log\left[0''2 \cdot \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$	$\log Z_0$	$\log N_0$	$\log Z$	$\log N$	π_0	π	π_k
0.5	8.3410	0.4296	9.8409	0.4185	9.8038	0''0851	0.0903	0.0892
1.5	8.1410	5635	9015	0.5549	9.8678	635	673	630
2.0	8.0410	6220	9263	0.6143	9.8937	545	578	530
3.0	7.8410	7242	9667	0.7179	9.9360	397	420	375
4.0	7.6410	8084	9977	0.8031	9.9683	283	299	265
5.0	7.4410	8776	0.0213	0.8730	9.9929	198	210	187
6.0	7.2410	9366	0398	0.9335	0.0121	137	145	132
7.0	7.0410	9777	0538	0.9739	0.0267	0.0092	0.0097	94
8.5	6.7410	1.0279	0693	1.0245	0.0428	50	53	56
10.0	6.4410	1.0628	0799	1.0597	0.0538	0.0027	28	33
11.5			0873		0.0615			

Hierbei gibt $\pi_0 = 0''2 \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{Z_0}{N_0}$ die Parallaxenwerte für $Z_m = N_m = 0$. Unter π_k sind die von Herrn Kapteyn in Nr. 3487 der A. N. aus den Eigenbewegungen abgeleiteten Parallaxenwerte angegeben. Die Differenzen der berechneten Werte π_0 und π und den π_k zeigen einen systematischen Gang, der indessen in keinem Falle bei dem hypothetischen Charakter der π_k in Frage kommen kann. Die ausgeführte Rechnung dürfte, da sie gar nicht zum Zwecke einer möglichst guten Darstellung der π_k angestellt worden ist, zeigen, daß man sehr leicht durch Veränderung der angenommenen Konstanten einen besseren Anschluß erreichen könnte. Einen solchen herbeizuführen oder eine neue Rechnung mit den später von Herrn Kapteyn gegebenen Parallaxenwerten anzustellen, scheint mir gegenwärtig ganz zwecklos und ich habe deshalb davon abgesehen um so mehr, als die obige Darstellung in Anbetracht der Umstände vollkommen zufriedenstellend ist.

Für die Ableitung der Zahlen A_m kommt in Betracht, daß man in der benutzten Bezeichnungsweise hat

$$\frac{d\,A_m}{d\,h_m} = -\,c \cdot \left(\frac{h_m}{h_2}\right)^{\frac{\lambda-5}{2}} \cdot N \qquad (6)$$

und man hieraus durch Integration A_m erhält. Der angestrebten Genauigkeit entsprechend empfiehlt sich dabei folgendes Verfahren. Man kann zwischen $m = 0.5$ und $m = 11.5$ N genügend genau durch die Formel

$$N = 1.2071 - (0.4250)\left(\frac{h_m}{h_k}\right)^{0.2340} + (0.0010)\left(\frac{h_m}{h_2}\right)^{2}$$

darstellen, wie die Gegenüberstellung der Werte dieser Formel N_f und der gegebenen Werte N zeigt.

	N_f	N	$\varDelta$
$m = 0.5$	0.6357	0.6365	+ 8
1.5	7366	7373	+ 7
2.0	7831	7828	− 3
3.0	8648	8629	− 19
4.0	9309	9297	− 12
5.0	9845	9837	− 8
6.0	1.0276	1.0283	+ 7
7.0	1.0624	1.0635	+ 11
8.5	1.1024	1.1636	+ 12
10.0	1.1313	1.1319	+ 6
11.5	1.1524	1.1520	− 4

Die Integration von (6) ergibt

$$A_m - A_{m_1} = J_m - J_{m_1},$$

wo

$$J_m = \Gamma\left(\frac{h_m}{h_2}\right)^{\frac{\lambda-3}{2}} X_m; \quad X_m = 1 - [9.6363 - 10]\left(\frac{h_m}{h_2}\right)^{0.2340}$$
$$- [7.145 - 10]\left(\frac{h_m}{h_2}\right)^{2}.$$

Der Zusammenhang zwischen c und Γ ist gegeben durch

$$\Gamma = \frac{2.4142}{3-\lambda}\, c\, h_2 = \frac{2.4142}{2.5100}\, c\, h_2 .$$

Hierbei wurde, auf einer orientierenden Rechnung fußend, $\lambda = 0.490$, also $\log \Gamma = 1.7010$ angenommen, woraus $\log (c\, h_2) = 1.7179$ folgt. Die Interpolationsformel für N gilt nur für $m > 0.5$. Man wird demnach $m_1 = 0.5$ setzen dürfen und man muß A_{m_1} aus der Bedingung berechnen, daß A_{m_0} strenge $= 0$ Null wird, wenn $h_{m_0} r_0^2 = H$, und da $r_0 = \frac{1}{3}$ genommen wurde, $h_{m_0} = 9\,H$. Da H der Größe -4.3 entspricht, ist also $m_0 = -6.68 \cdot A_{m_1}$, wird also strenge berechnet durch die Formel

$$A_{m_1} = -\frac{1}{h_2}\,[1.7179] \int\limits_{h_{m_0}}^{h_{m_1}} \left(\frac{h_2}{h_m}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} N \cdot d\, h_m$$

$$= [1.6822] \int\limits_{m_0}^{m_1} \left(\frac{h_2}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} N \cdot d\, m .$$

Eine beiläufige Berechnung der N ergab:

m	N
-6.5	0.001
-5.5	0.022
-4.5	0.081
-3.5	0.173
-2.5	0.284
-1.5	0.404
-0.5	0.524
$+0.5$	0.637

Die beiden ersten Werte geben keinen merkbaren Beitrag zum Integral.

Die anderen ergeben mit den Cotesschen Faktoren $A_{0.5} = 3.80$. Da nun $J_{0.5} = 3.35$ wird, so erhält man schließlich, indem die Konstante Γ zum Schluß um eine Kleinigkeit abgeändert (nämlich $\log c\, h_2 = 1.7159$) wird, die Formel

$$A_m = 0.45 + [1.6990] \left(\frac{h_2}{h_m}\right)^{1.255} X_m$$
$$X_m = 1 - [9.6363 - 10] \left(\frac{h_m}{h_2}\right)^{0.2340} - [7.145 - 10] \left(\frac{h_m}{h_2}\right)^2 . \qquad (7)$$

Mit dieser Formel ergeben sich nunmehr die folgenden Werte von $\log A_m$:

	log A_m	B	Δ
$m =$ 0.5	0.578	0.81 :	+ 0.23 :
1.5	1.172	1.312	+ 0.140
2.5	1.740	1.827	+ 0.087
3.75	2.427	2.450	+ 23
4.75	2.961	2.957	— 4
5.75	3.488	3.504	+ 16
6.75	4.010	4.008	— 2
7.50	4.398	4.394	— 4
9.20	5.272	5.268	— 4
10.00	5.680	5.678	— 2
11.16	6.270	6.222 :	+ 48 :

Die Darstellung ist jedenfalls eine gute, da keine wirkliche Ausgleichung stattgefunden hat und für die allerhellsten Sterne wegen der geringen Zahl größere Abweichungen, wie oben erwähnt, eventuell als zulässig bezeichnet werden müssen. Unter B sind die von mir aus den direkten Abzählungen ermittelten Anzahlen gegeben (s. z. B. II, S. 33).

Die Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ ergibt sich, da ohne die Allgemeinheit zu beschränken $\nu = 0$ gesetzt werden kann, abgesehen von einem konstanten Faktor

$$\varphi(i) = e^{-k^2\left[\left(\log \frac{i}{H}\right)^2 + b \log \frac{i}{H}\right]} - \frac{i}{H} .$$

Mit den gefundenen Zahlen ist

$$k = \frac{1}{4.8} ; \quad b = 53.875.$$

Da die Logarithmen natürliche sind, so wird jetzt, wenn man mit ξ den log Brigg $\frac{i}{H}$ bezeichnet:

$$\varphi(i) = e^{-0.2301\,\xi^2 - 5.3844\,\xi} - e^{\frac{1}{0.434}} \cdot \xi .$$

Drückt man i in Größenklassen (m_0) aus, so erhält man (H entspricht der Größe — 4.3) das Verhältnis des zweiten Terms der letzten Gleichung zum ersten

$$\log y = \log \frac{(2)}{(1)} = 0.016\, m_0^2 - 1.301\, m_0 - 5.891.$$

Für $m_0 = -4.3$ wird selbstverständlich $y = 1$. Aber schon für $m_0 = -4.0$ ist $y = 0.38$, für $m_0 = -2$, $y = 0.0006$. Die Abnahme ist daraufhin rapid und man kann also den Ausdruck für $\varphi(i)$ bis zu hohen Werten von i auf das erste Glied beschränken, wie schon oben erwähnt wurde, mit Ausschluß der ganz in der Nähe von H gelegenen Helligkeiten.

Um die Anzahlen A_m für $m > n$ zu finden, ist zunächst zu berechnen

$$J_\mu = \int\limits_0^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \varrho^\mu \, \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho\,.$$

Mit der Häufigkeitsfunktion (1) und mit Benutzung der früheren Bezeichnungen wird

$$J_\mu = \Gamma_1 \cdot \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}}$$

$$\times \left\{ e^{\sigma^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sigma - k \log \frac{h_m}{h_n}}^{-\sigma - k \log \frac{h_m r_0^2}{H}} e^{-z^2}\, dz - \frac{4k}{(\mu+3)\sqrt{\pi}} \left[\left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{\mu+3}{2}} - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{\mu+3}{2}} \right] \right\}.$$

Unter Vorbehalt der näheren Bestimmung der Konstante Γ_1 ist dann

$$-\frac{d A_m}{d h_m} = \Gamma_1 \cdot (J_{4-\lambda} - a\, J_{4-\lambda_1}).$$

Da $m > n$ und $n > 10$, so wird unter allen Umständen

$$\left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{\mu+3}{2}}$$

als unmerklich fortgelassen werden können. Aber auch im Integrale tritt die Vereinfachung ein, daß man die obere Grenze $+\infty$ annehmen kann. Es ist also

$$-\frac{dA_m}{dh_m} = \Gamma_1 \left[\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \cdot \left\{ e^{\sigma'^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sigma' - k \log \frac{h_m}{h_n}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz - \frac{4k}{(7-\lambda)\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{7-\lambda}{2}} \right\} \right.$$

$$\left. - a \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \left\{ e^{\sigma_1'^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sigma_1' - k \log \frac{h_m}{h_n}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz - \frac{4k}{(7-\lambda_1)\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{7-\lambda_1}{2}} \right\} \right].$$

Es darf nicht übersehen werden, daß hier stets natürliche Logarithmen gemeint sind.

Die letzte Formel kann so geschrieben werden: man setze

$$\left\{ \begin{aligned} N &= C - D \cdot \left(\frac{h_n}{h_{11.5}}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \\ C &= e^{\sigma'^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{-\sigma' - k \log \frac{h_m}{h_n}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz - \frac{4k}{(7-\lambda)\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{7-\lambda}{2}} \\ D &= a \left(\frac{h_{11.5}}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \\ &\times \left\{ \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \cdot e^{\sigma_1'^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{-\sigma_1' - k \log \frac{h_m}{h_n}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz - \frac{4k}{(7-\lambda_1)\sqrt{\pi}} \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{7-\lambda}{2}} \right\} \\ -\frac{dA_m}{dh_m} &= \Gamma_1 \cdot \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \cdot N. \end{aligned} \right.$$

Die Konstante Γ_1 bestimmt sich aus der Bedingung, daß für $m = n$ die letzte Formel mit (6) übereinstimmen muß.

Es wird also

$$\Gamma_1 = \left(\frac{h_2}{H}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \cdot c$$

und man erhält so

$$A_m - A_n = [6.4492] \left(\frac{h_{11.5}}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \cdot \int\limits_n^m \left(\frac{h_n}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} N \cdot dm \,.$$

Für $\lambda = 0.49$ wird schließlich

$$A_m - A_n = [6.4492] \left(\frac{h_{11.5}}{h_n}\right)^{1.255} \cdot \int\limits_n^m e^{+1.1558\,(m-n)} \cdot N \cdot dm \,.$$

Für die Ausführung ist zu bemerken, daß wie oben

$$\sigma' = 0.2; \; \sigma'_1 = 0.8, \; \frac{\lambda_1 - \lambda}{2} = \tfrac{1}{4}, \; \log e^{\sigma'^2} = 0.0174;$$

$$\log e^{\sigma'^2_1} = 0.2779, \; k = \frac{1}{4.8}; \; \log a = 9.7600$$

anzunehmen ist. So erhält man:

$m-n$	$\log C$	$\log D$	$\log N_{10.5}$	$\log e^{1.1558\,(m-n)}$	$f_{10.5}$
0	0.0793	8.6886	0.0565	0.0000	0.0756
0.5	0.0593	8.6308	0.0384	0.2509	0.0400
1.0	0.0198	8.5641	0.0003	0.5019	0.0002
1.5	9.9718	8.4927	9.9533	0.7529	9.9534
2.0	9.9176	8.4173	9.9003	1.0039	9.9004
2.5	9.8578	8.3380	9.8410	1.2549	9.8413
3.0	9.7921	8.2544	9.7760	1.5059	9.7762
3.5	9.7204	8.1663	9.7049	1.7568	9.7049
4.0	9.6428	8.0735	9.6278	2.0078	9.6276
4.5	9.5590	7.9756	9.5445	2.2588	9.5441
5.0	9.4689	7.8726	9.4548	2.5098	9.4544

Das erste Intervall muß noch mehr geteilt werden.

$m-n$	$\log C$	$\log D$	$\log N_{11.5}$	$\log N_{10.5}$	$f_{10.5}$
0	0.0793	8.6886	0.0613	0.0565	0.0564
0.1	782	6782	606	559	556
0.2	754	6671	581	535	534
0.3	710	6553	540	495	497
0.4	656	6432	488	444	448
0.5	593	6308	428	384	384

Ich stelle nun weder die N durch Interpolationsformeln f dar und das gelingt, wie die Gegenüberstellung zeigt, beinahe vollkommen durch

$$\begin{aligned}
&\text{für } m-n \leq 0.5, \quad f_{10.5} = 0.0564 - 0.0010\,x - 0.0700\,x^2\\
&\text{für } m-n > 0.5, \quad f_{10.5} = 0.0756 - 0.0632\,x - 0.0122\,x^2.
\end{aligned}$$

Man kann auch schreiben

$$\begin{aligned}
m-n \leq 0.5, \quad N_{10.5} &= [0.0564] \cdot e^{-0.0023\,(m-n) - 0.1612\,(m-n)^2}\\
m-n > 0.5 \quad\qquad &= [0.0756] \cdot e^{-0.1455\,(m-n) - 0.0281\,(m-n)^2},
\end{aligned}$$

für $n = 10.5$ wird also

$$\left.\begin{aligned}
m-n \leq 0.5 \quad A_m - A_n &= [6.0036]\int\limits_0^{m-n} e^{1.1535\,x - 0.1612\,x^2}\,dx\\
m-n > 0.5 \quad A_m - A_{n_1} &= [6.0228]\int\limits_{n_1-n}^{m-n} e^{1.0103\,x - 0.0281\,x^2}\,dx
\end{aligned}\right\}. \quad (8)$$

Am einfachsten erfolgt die Berechnung solcher Integrale mit Hilfe bekannter Reihenentwicklungen. Man hat bekanntlich

$$J(\xi) = e^{\xi^2}\int\limits_\xi^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2\xi}\left\{1 - \frac{\frac{1}{2}}{\xi^2+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(\xi^2+1)(\xi^2+2)}\cdots\right\}.$$

Damit habe ich das Täfelchen berechnet:

ξ	$\log J(\xi)$	
2.0	9.3546 -10	
2.1	3368	178
2.2	3197	171
2.3	3031	166
2.4	2870	161
2.5	2714	156
2.6	2564	150
2.7	2418	146
2.8	2276	142
2.9	2138	138
3.0	2004	134

Die oben vorkommenden Integrale haben die Form

$$\mathrm{I} = \int\limits_{n_1-n}^{m-n} e^{b-ax^2}\,dx = e^{\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2} \cdot \int\limits_{n_1-n}^{m-n} e^{-\left(x\sqrt{a}-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2}\,dz.$$

Setzt man demnach

$$\xi = \frac{b}{2\sqrt{a}},$$

so kann man schreiben

$$\mathrm{I}\cdot\sqrt{a} = e^{\xi^2-[\xi-(m-n)\sqrt{a}]^2}\cdot J(\xi \quad (m-n)\sqrt{a})$$
$$- e^{\xi^2-[\xi-(n_1-n)\sqrt{a}]^2}\cdot J\{\xi-(n_1-n)\sqrt{a}\}.$$

Die Formel (7) gibt $\log A_{10.5} = 5.9348$. Damit ergibt sich nach der ersten Formel (8) mit Hilfe der vorhandenen Tafeln für die Krampschen Integrale

$$\log A_{n_1} = \log A_{11.0} = 6.1853.$$

Für die Berechnung der zweiten Formel (8) ist zu bemerken, daß $\log\xi = 0.47906$, ferner

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot e^{\xi^2-[\xi-(n_1-n)\sqrt{a}]^2}\cdot J[\xi-(n_1-n)\sqrt{a}] = [9.4262-10].$$

Und jetzt kann man mit verhältnismäßig geringer Mühe für die Sternzahlen A_m die folgenden Werte finden:

m	$\log A_m$	
11.0	6.185	
11.5	6.423	+238
12.0	6.648	225
12.5	6.864	216
13.0	7.071	207
13.5	7.271	200
14.0	7.465	194
14.5	7.653	188
15.0	7.835	182
15.5	8.010	175

Man findet dann durch Interpolation die mit R bezeichneten Werte:

	$\log \Delta_m$		
m	R	B	$B - R$
11.16	6.262	6.222	− 40
13.90	7.426	6.448	+ 22
14.84	7.777	7.681	− 96

Die Zahlen B sind meinen Ermittlungen in II (S. 33) als aus Abzählungen hervorgegangen entnommen. Bei dieser Darstellung kann man sich vorläufig beruhigen, da die Zahlen B höchst unsicher sind. Man darf überdies nicht vergessen, daß $n = 10.5$ nach ziemlich roher Schätzung angenommen wurde und eine weitere Variation von n, die zu einer besseren Darstellung führen könnte, gegenwärtig keine Bedeutung haben dürfte.

Für $n = 10.5$ folgt die Grenze des Sternsystems in der Entfernung $\log r_1 = 2.96$, also $r_1 = 910$ Siriusweiten, entsprechend einer Parallaxe 0″00022.

Die Dichtigkeit $\Delta(\varrho)$ war hierbei angesetzt:

$$\Delta(\varrho) = \varrho^{-0.49} \{1 - [9.7600] \varrho^{-0.5}\}.$$

Dabei wurde der Raum bis zu $\varrho = \frac{1}{3}$, was einer Parallaxe 0″6 entspricht, als sternleer angenommen. Stellt man nun diese Werte von Δ gegenüber den nach der alten Formel $\Delta = \varrho^{-0.430}$ berechneten, so findet sich:

ϱ	Δ	Δ_0
1	0.614	1.000
2	0.610	0.742
3	0.551	0.624
4	0.522	0.551
5	0.488	0.501
7.5	0.425	0.420
10	0.383	0.372
15	0.334	0.312
20	0.290	0.276
30	0.244	0.232
40	0.216	0.204

ϱ	Δ	Δ_0
50	0.195	0.186
75	0.163	0.156
100	0.143	0.138
150	0.121	0.116
200	0.103	0.102
300	0.086	0.086
400	0.075	0.076
500	0.067	0.069
750	0.057	0.058
1000	0.051	0.051

Hierbei wurde 0.16 zum $\log \Delta(\varrho)$ addiert, um die Zahlen vergleichbarer zu machen. Die Zahlen Δ und Δ_0 als parallel laufend und somit die alte Dichtigkeitsverteilung Δ_0 im Sternsystem als zutreffend bezeichnen zu können, dürfte wohl von niemandem bestritten werden.

Ich habe in beiden früheren Abhandlungen nachgewiesen, daß die Abzählungsresultate niemals die wirkliche Dichtigkeit D sondern eine Funktion Δ von r ergeben, welche außer von D, noch von der im Weltraum namentlich durch Verdeckungen, Dazwischentreten von Nebeln etc. verursachten Absorption abhängt. Den hier auftretenden Zusammenhang zwischen Δ und D habe ich II, Art. 1 ausführlich und vollständig angegeben. Wird das Licht eines Sternes in der Entfernung r nicht im quadratischen Verhältnis $\frac{1}{r^2}$, sondern gemäß der Formel $\frac{\psi(r)}{r^2}$ geschwächt, so ist nach II, S. 17

$$D(r) = \frac{\psi(r) - \frac{1}{2} r \psi'(r)}{\psi^{\frac{5}{2}}(r)} \Delta\left(\frac{r}{\sqrt{\psi(r)}}\right)$$

und da angenähert angenommen werden darf $\Delta(r) = r^{-\lambda}$, so wird

$$D(r) = r^{-\lambda} \cdot \frac{\psi(r) - \frac{1}{2} r \psi'(r)}{\psi^{\frac{5-\lambda}{2}}(r)}. \tag{9}$$

Setzt man

$$\varphi^{\frac{3-\lambda}{2}} = \frac{1}{y},$$

so kann man (9) auch schreiben

$$\frac{dy}{dr} + \frac{3-\lambda}{r} y - \frac{(3-\lambda) D(r)}{r^{1-\lambda}} = 0. \tag{10}$$

Durch das Zeugnis, welches viele Sternhaufen abgeben und vielleicht auch mit Hilfe von plausiblen Analogieschlüssen wird man zur Annahme geführt, daß die wirkliche Dichtigkeit D nirgends, wenigstens für größere r und auf weite Strecken hin, zunehmen darf. Diese Annahme, deren Berechtigung zunächst nicht näher untersucht werden soll, führt auf gewisse noch zulässige Maximalwerte der Absorption, die nun aufgesucht werden sollen. Zuvor mag darauf hingewiesen werden, daß durch (10) jedem gegebenen $D(r)$ eine Absorptionsgröße y zugeordnet ist. Das allgemeine Integral von (10) ist

$$y = \frac{1}{r^{3-\lambda}} \{C + (3-\lambda) \int D \cdot r^2 \, dr\},$$

wo C eine willkürliche Konstante ist. Soll z. B. $D = \gamma$ sein, wo γ eine Konstante ist, so wird

$$y = \frac{C}{r^{3-\lambda}} + \frac{(3-\lambda)\gamma}{3} \cdot r^{\lambda}.$$

Wenn etwas Ähnliches wie Absorption vorliegen soll, muß offenbar y und $\frac{dy}{dr}$ positiv sein, d. h.

$$-\frac{3-\lambda}{3} \gamma r^3 < C < \frac{\lambda}{3} \gamma r^3.$$

Man könnte nun voraussetzen, daß für alle $0 < r < \sigma$ keine Absorption vorkommt, dann würde also C innerhalb gewisser Grenzen gewählt werden können. Soll aber die Formel für alle r gelten, dann muß $C = 0$ sein. Wegen der

Schwierigkeit einer plausiblen Interpretation hat die weitere Verfolgung solcher oder ähnlicher Annahmen kein Interesse.

Die obengenannten Maximalwerte lassen sich natürlich nur ableiten, wenn über die Wirkungsweise der Absorption bestimmte Annahmen gemacht werden. Ich habe in II zwei solche Annahmen erwähnt, die ein gewisses Interesse darbieten. Zuerst die Annahme, daß vorgelagerte dunkle Massen die Lichtschwächung verursachen und ihre Verteilungsdichte der Dichtigkeit D der Sternverteilung proportional ist, zweitens die „allgemeine Absorption", bei der die Absorption nach einer einfachen Exponentialfunktion von r vor sich geht. Im ersten Falle ist

$$\psi(r) = e^{-\nu \int_0^r D\,dr},$$

also

$$\psi'(r) = -\nu \cdot D \cdot \psi(r).$$

Die Gleichung (1) wird so

$$\frac{\psi'(r)}{\psi(r)} = -\nu \cdot r^{-\lambda} \cdot \frac{\psi - \frac{1}{2} r \psi'}{\psi^{\frac{5-\lambda}{2}}}.$$

Durch Einführung einer neuen Variablen $\lambda = r^{1-\lambda}$ ergibt sich

$$(1-\lambda)\frac{d\psi}{dx}\left[\psi^{\frac{3-\lambda}{2}} - \frac{\nu x}{2}\right] = -\nu \cdot \psi.$$

Es werde weiter an Stelle ψ die Variable t eingeführt durch

$$t = \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{\nu} \cdot \sqrt{\frac{1-\lambda}{3-\lambda}}\left[\psi^{\frac{3-\lambda}{2}} - \frac{\nu x}{2}\right]$$

und der Kürze wegen werde bezeichnet

$$\xi = \sqrt{\frac{3-\lambda}{1-\lambda}}, \quad b = \xi + \frac{1}{\xi},$$

so wird die letzte Differentialgleichung

$$x\frac{dt}{dx} + t + \frac{1}{t} + b = 0.$$

deren Integration keine Schwierigkeit verursacht. Man kann das Integral leicht in die Form bringen:

$$x^2 \frac{(t+\xi)^{4-2\lambda}}{(t^2+b\,t+1)^{1-\lambda}} = C,$$

wo C eine willkürliche Konstante ist. Zu ihrer Bestimmung ist zu bemerken, daß für verschwindend kleine x, $\psi = 1$ werden muß, da dies der Wirkung einer Absorption entspricht. Bezeichnet man den Grenzwert von tx für $x = 0$ mit $(tx)_0$, so wird nach (11)

$$(t\,x)_0 \frac{\nu\,\xi}{2} = 1. \tag{11}$$

Es folgt also hieraus

$$C = (t\,x)_0^2 = \frac{4}{\nu^2\,\xi^2}.$$

Setzt man nunmehr

$$t = \frac{1}{z}, \quad x\,t = \eta; \quad x = \eta\,z,$$

so wird das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{4}{\nu^2\,\xi^2} = \eta^2 \frac{(1+z\,\xi)^{4-2\lambda}}{(1+b\,z+z^2)^{1-\lambda}}. \tag{12}$$

Aus (11) folgt weiter

$$\psi^{\frac{3-\lambda}{2}} = \frac{\nu\,x}{2} + \tfrac{1}{2}\,\nu\,t\,x\,\xi = \frac{\nu\,x}{2}(1+t\,\xi) = \frac{\nu}{2}\,\eta\,(z+\xi)$$

und damit folgt aus der Gleichung $-\nu\,D\,\psi(r) = \psi'(r)$ nach leichter Zwischenrechnung

$$D = \frac{2\,r^{-\lambda}}{\nu\,\xi\,\eta}.$$

Man hat nämlich, da

$$\frac{d\,x}{d\,r} = (1-\lambda)\,r^{-\lambda},$$

$$\frac{3-\lambda}{2} \cdot \frac{\psi'(r)}{\psi(r)} = (1-\lambda) \cdot r^{-\lambda} \cdot \frac{1+\xi\left(t+x\dfrac{d\,t}{d\,x}\right)}{\eta(z+\xi)},$$

also

$$D = -\frac{2\,r^{-\lambda}}{\nu\,\xi^2} \frac{\left(1-\xi\,b-\dfrac{\xi}{t}\right)}{x(1+t\,\xi)} = \frac{2\,r^{-\lambda}}{\nu\,\xi\,\eta}.$$

Weiter folgt aber aus (12)

$$\frac{2}{\nu\,\xi\,\eta} = \frac{(1+z\,\xi)^{2-\lambda}}{(1+b\,z+z^2)^{\frac{1-\lambda}{2}}} = \frac{2\,z}{\nu\,\xi\,x}$$

und hieraus

$$x = r^{1-\lambda} = \frac{2\,z}{\nu\,\xi\,A},$$

wenn gesetzt wird

$$A = \frac{(1+z\,\xi)^{2-\lambda}}{(1+b\,z+z^2)^{\frac{1-\lambda}{2}}}.$$

Man hat also zur numerischen Rechnung

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{(1+z\,\xi)^{2-\lambda}}{(1+b\,z+z^2)^{\frac{1-\lambda}{2}}} \\ r &= \left(\frac{2\,z}{\nu\,\xi\,A}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \\ D &= r^{-\lambda} \cdot A \end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Man wird für verschiedene z, von $z = 0$, angefangen, die zugehörigen A und D berechnen und dann für verschiedene ν die den z entsprechenden r, so daß sich die Rechnung recht einfach und übersichtlich gestaltet. Ich habe indessen noch eine kleine Änderung vorgenommen, indem ich

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} = \mu$$

setzte. Man hat dann nämlich in

$$\left(\frac{r}{\mu}\right) = \left(\frac{2z}{A\xi}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}; \quad D\cdot\mu^{\lambda} = A\left(\frac{r}{\mu}\right)^{-\lambda}$$

zwei von r unabhängige Größen. Die folgende Zusammenstellung einiger Werte ergibt, daß $D\mu^{\lambda}$ ein Minimum hat, bei z etwa $= 0.25$. Vorher nimmt also D ab, von da ab nimmt es zuerst langsam, sehr bald aber schnell zu. Will man also zunehmende Werte von D ausschließen, so wird man das dem Wert $z = 0.25$ entsprechende r als den Grenzwert von r, durch welchen das Sternsystem begrenzt ist, anzunehmen haben. Oben wurde der Grenzwert r_1 ohne Vorhandensein einer Absorption bestimmt zu

$$r_1 = \sqrt{\frac{H}{h_n}},$$

wo H der Sterngröße -4.3 entspricht und $n = 10.5$ war. Hieraus folgt $r_1 = 920$ Einheiten. Jetzt wäre durch die obigen Formeln r_1 gegeben durch

$$\frac{\psi(r_1)}{r_1^2} = \frac{h_n}{H}$$

und da gefunden wurde

$$\psi^{\frac{3-\lambda}{2}} = \frac{\nu}{2}\eta(z+\xi), \quad \frac{\nu}{2}\eta = \frac{1}{\xi A},$$

so ist

$$\psi = \left(\frac{z+\xi}{\xi A}\right)^{\frac{2}{3-\lambda}}.$$

Es folgt daraus

$$\left(\frac{\xi+z}{A\xi}\right)^{\frac{2}{3-\lambda}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{r}{\mu}\right)^2\mu^2} = [-5.92].$$

Weiter wurde angenommen $\lambda = 0.43$; daraus folgt $\log\xi = 0.3270$. Entnimmt man der folgenden Zahlentabelle die Werte A und $\left(\frac{r}{\mu}\right)$, die dem Argument $z = 0.25$ entsprechen, so wird

$$\log\left(\frac{\xi+z}{A\,\xi}\right)^{\frac{2}{3-\lambda}} = -\,0.1364, \quad \log\left(\frac{r_1}{\mu}\right)^2 = -\,2.9884.$$

Es findet sich auf diese Weise

$$\frac{1}{\mu^2}\,[2.8520] = [-5.92]; \quad \text{d. h. } \log\mu = 4.3860\,.$$

Damit ergibt sich weiter

$$\nu = \frac{1}{317} \text{ und } r_1 = 780 \text{ Einheiten.}$$

Die Ausdehnung des Sternsystems wird also kleiner und demzufolge die Sternfülle größer. Es wird weiter

$$\log\psi(r_1) = -\,0.1364\,,$$

d. h. die Absorption ist sehr gering; sie beträgt erst für die Sterne an der Grenze des Systems in 780 Siriusweiten 0.34 Größenklassen. Nimmt man die betrachtete Absorption nach Größe und Art an, so ergeben sich folgende Dichtigkeiten D in den wahren Entfernungen r, während D_0 die ohne Absorption nach der Formel $r^{-0.43}$ berechneten sind. Man sieht, daß sich die D nur wenig geändert haben.

r	D	D_0	D_1	A	A_1
1	1.00	1.00	1.00	0^m	0^m
6.5	0.46	0.45	0.45	0.02	0.00
21	0.28	0.27	0.27	0.04	0.00
65	0.18	0.17	0.17	0.07	0.02
122	0.15	0.13	0.14	0.10	0.04
187	0.13	0.11	0.12	0.13	0.07
256	0.11	0.09	0.11	0.16	0.09
400	0.10	0.08	0.10	0.21	0.14
612	0.10	0.06	0.09	0.29	0.21
780	0.10	0.06	0.09	0.34	0.26
802	—	0.06	0.09	—	0.27

Ich lasse nun die Tabelle folgen, aus der einige Werte den zuletzt angeführten Zahlen zugrunde liegen.

z	$\log A$	$\log\left(\frac{r}{\mu}\right)$	$\log\left(D\mu^{\lambda}\right)$
0.01	0.0112	— 3.574	1.548
0.02	0.0221	— 3.065	1.340
0.03	0.0327	— 2.775	1.226
0.04	0.0432	— 2.574	1.150
0.05	0.0534	— 2.422	1.095
0.06	0.0635	— 2.300	1.053
0.07	0.0733	— 2.201	1.020
0.08	0.0829	— 2.115	0.993
0.09	0.0924	— 2.042	0.971
0.10	0.1018	— 1.978	0.953
0.12	0.1199	— 1.871	0.925
0.14	0.1373	— 1.784	0.905
0.16	0.1542	— 1.712	0.891
0.18	0.1706	— 1.651	0.881
0.20	0.1863	— 1.599	0.874
0.25	0.2238	— 1.494	0.866
0.30	0.2586	— 1.417	0.868
0.40	0.3220	— 1.309	0.885
0.50	0.3776	— 1.236	0.908
1.00	0.5878	— 1.077	1.051

Betrachtet man in ähnlicher Weise die allgemeine Absorption, so liegt die Sache viel einfacher, da man die Formel (II, S. 17)

$$D_1 = r^{-\lambda}\left(1 + \frac{\nu}{2} r\right) e^{\frac{3-\lambda}{2} \nu r}$$

benutzen kann. Hier ist $\psi = e^{-\nu r}$ angenommen worden. Setzt man zur Abkürzung $\frac{\nu}{2} r = \varepsilon$, so wird

$$\frac{1}{D_1} \cdot \frac{d D_1}{d r} = \frac{3 - \lambda}{r(1 + \varepsilon)} \cdot \left\{\varepsilon^2 + \frac{2(2 - \lambda)}{3 - \lambda} \varepsilon - \frac{\lambda}{3 - \lambda}\right\}.$$

Das Minimum für D tritt dann ein, wenn

$$\varepsilon^2 + 2 \cdot \frac{2 - \lambda}{3 - \lambda} \varepsilon = \frac{\lambda}{3 - \lambda},$$

woraus folgt

$$\varepsilon = \frac{1}{3 - \lambda} \{-(2 - \lambda) + \sqrt{4 - \lambda}\}; \quad \log \varepsilon = 9.0944 - 10.$$

Es ist also für die Grenze des Sternsystems

$$\log \nu r_1 = 9.3954 - 10; \quad \log e^{-\nu r_1} = 9.8921 - 10$$

und da jetzt

$$\log\left(\frac{e^{-\nu r_1}}{r_1^2}\right) = -5.92$$

sein muß, folgt $r_1 = 805$ Einheiten, $\nu = \frac{1}{3240}$. Die Absorption macht hier an der Grenze im log -0.1079 oder 0.27 Sterngrößen aus und die Formel für die Dichtigkeit wird

$$D_1 = r^{-0.43}\left(1 + \frac{r}{6480}\right) e^{[6.5983-10]r}.$$

Danach ist das in die obige Zusammenstellung aufgenommene D_1 berechnet. Ich habe gleich die den verschiedenen r entsprechenden Absorptionen A und A_1 in Größenklassen angegeben. Es geht daraus hervor, daß beide Arten Absorptionen nahezu gleich wirken und wegen ihrer Kleinheit den Verlauf der wahren Sterndichtigkeit nur verhältnismäßig wenig ändern.

Berichtigungen:

S. 422, Zeile 18 v. o. lies: weil ein statt als ein
S. 437, „ 10 v. u. „ und sie sind statt sind
S. 442, „ 10 v. o. „ $\log e^{\sigma^2}$ „ $\log e^{\sigma}$
S. 446, „ 1 v. u. „ $e^{\frac{1}{0.434}\xi}$ „ $e^{\frac{1}{0.434}} \cdot \xi$

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1911

Band/Volume: 1911

Autor(en)/Author(s): Seeliger Hugo Johann

Artikel/Article: Über die räumliche Verteilung der Sterne im schematischen Sternsystem 413-461