Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1913. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1913
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über die Entstehung einer turbulenten Flüssigkeitsbewegung.

Von **Fritz Noether** in Karlsruhe.

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 3. Mai 1913.

§ 1. Einleitung.

Die folgende Untersuchung beschäftigt sich mit der ebenen Strömung einer Flüssigkeit zwischen zwei parallelen, ebenen, vertikal stehenden Wänden, von denen die eine ruht, während die andere mit konstanter Geschwindigkeit in ihrer eigenen Ebene horizontal bewegt wird. Dies ist die den theoretischen Untersuchungen von H. A. Lorentz[1]) und A. Sommerfeld[2]) zu Grunde gelegte vereinfachte Darstellung der von Couette[3]) verwandten, experimentellen Anordnung, bei der die Flüssigkeit zwischen koaxialen Kreiszylindern strömte, von denen der eine ruhte, während der andere gleichförmig umgedreht wurde. Die Versuche zeigten wieder das Auftreten der von O. Reynolds[4]) bei anderer Anordnung entdeckten „kritischen" Geschwindigkeit (in diesem Fall für die bewegte Wand), unterhalb deren die theoretisch bekannte, stationäre Laminarströmung tatsächlich eintritt, während sie oberhalb, obwohl theoretisch möglich, im allgemeinen nicht hergestellt werden kann. An ihre Stelle tritt der „turbulente" Zustand, der vor allem durch

---

[1]) Abhandlungen über theoretische Physik, Nr. 3, S. 43.

[2]) Verhandlungen d. IV. Intern. Math. Kongresses. Rom 1908, S. 116.

[3]) Annales de chimie et physique, Vol. 21 (1890), S. 433.

[4]) Phil. Trans. London R. Soc., Vol. 174 (1883), S. 935.

die veränderte Verteilung der mittleren Geschwindigkeit — stärkerer Anstieg in der Nähe der Wände, geringere Veränderlichkeit der Geschwindigkeit in der Mitte — charakterisiert ist.

Seit den Untersuchungen von O. Reynolds[1]) wird diese Abweichung von der theoretisch bekannten Strömungsform als Instabilität der letzteren erklärt, ohne daß es bisher gelungen wäre, auf Grund der hydrodynamischen Gleichungen die tatsächliche Instabilität zu beweisen. Wohl ist es O. Reynolds und H. A. Lorentz gelungen, die Stabilität der Laminarbewegung bis zu einer gewissen Geschwindigkeit hin mittels eines Energiekriteriums nachzuweisen, die natürlich unter der kritischen liegt, also eine untere Grenze für den Eintritt der Labilität zu berechnen. A. Sommerfeld (l. c.) suchte, wie früher in verwandter Weise schon Lord Kelvin[2]), die Stabilitätsgrenze selbst durch Anwendung der Methode der kleinen Schwingungen zu ermitteln, die in diesem Fall, da unendlich viele Eigenschwingungen existieren, die Lösung einer transzendenten Gleichung erfordert. Doch zeigte die weitere Verfolgung dieses Weges durch R. von Mises[3]) und L. Hopf, daß diese sämtlichen Eigenschwingungen, auch bei beliebig großer Geschwindigkeit, stabilen Charakter haben, daß er also nicht zur Auffindung der gesuchten kritischen Geschwindigkeit führen kann.

Inwieweit nun bei diesem Fall von unendlich vielen Freiheitsgraden für die Stabilität des ganzen Systems die Stabilität der einzelnen Eigenschwingungen entscheidend ist, diese von G. Hamel[4]) angeregte Frage soll hier nicht erörtert werden. Sicher ist, daß die Instabilität eines Freiheitsgrades auch für das ganze System Instabilität bedingen würde. Jedenfalls aber wäre es verfrüht, auf die Unzulänglichkeit der allgemein an-

---

[1]) Phil. Trans. London R. Soc., Vol. 174 (1883), S. 935.

[2]) Phil. Mag. (15), August 1887.

[3]) H. Weber-Festschrift. Leipzig 1912, S. 252. · S. auch C. W. Oseen, Arkiv för Mathematik 7 (1911), Nr. 15.

[4]) Göttinger Nachrichten, math.-phys. Kl., 1911, S. 261; Monatshefte f. Math. u. Physik 1912, S. 312. Vgl. auch O. Haupt, Sitzungsber. der K. B. Ak. d. Wiss., Mai 1912.

genommenen hydrodynamischen Gleichungen zur Erklärung der Turbulenzerscheinung zu schließen, zumal auch gerade die neuesten experimentellen Untersuchungen von Sorkau[1]) gegen eine solche Vermutung sprechen. Das Resultat von v. Mises legt es vielmehr nahe, anzunehmen, daß die Laminarbewegung zwar tatsächlich für alle Geschwindigkeiten stabil ist, solange nur kleine, störende Kräfte auf sie wirken, daß sie aber oberhalb der kritischen Geschwindigkeit labil wird, wenn die Größe der Störungen eine gewisse Grenze überschreitet. Ähnlich wie eine Kugel, die auf der Spitze eines Berges in einer kleinen Vertiefung liegt, nach der Methode der kleinen Schwingungen sich als stabil herausstellen würde, während recht kleine, aber endliche Anstöße schon genügen, um sie ins Rollen zu bringen. Diese Auffassung wird noch gestützt durch das experimentelle Ergebnis von V. W. Ekman[2]), daß in sorgfältig geglätteten Röhren die Laminarströmung nicht die früher beobachtete scharfe Begrenzung habe, vielmehr die Reynoldssche kritische Zahl noch beträchtlich überschreiten könne, während eine Instabilität im Sinne des Sommerfeldschen Ansatzes zu sofortiger Umwandlung in turbulente Bewegung führen müßte.

Wir versuchen im folgenden dieser Frage näher zu kommen, indem wir von einer gleichfalls laminaren[3]) anfänglichen Geschwindigkeitsverteilung ausgehen, die aber von der Geschwindigkeitsverteilung der stationären Laminarbewegung endlich verschieden ist. Der nun folgende Strömungszustand kann eine nichtstationäre Laminarbewegung sein, vermittels derer die Geschwindigkeitsverteilung sich asymptotisch der der stationären Laminarbewegung nähert. Wird diese nichtstationäre Laminarbewegung stabil sein? Wir beweisen für einen speziellen Fall, indem wir ein einfaches Gesetz für den anfäng-

[1]) Phys. Zeitschr. 1912, S. 805; 1913, S. 147. Bemerkungen hierzu von Cl. Schaefer und G. Frankenberg, ebd. 1913, S. 89; G. Mie, ebd. 1913, S. 93. S. auch Th. v. Kármán, ebd. 1911, S. 283.

[2]) Arkiv för Matematik 6, Nr. 12 (1910).

[3]) Unter „Laminarbewegung" verstehen wir allgemein jede Strömung, bei der alle Geschwindigkeiten den Wänden parallel gerichtet sind.

lichen Strömungszustand annehmen, daß sie es für genügend große Wandgeschwindigkeiten nicht mehr ist. Die nichtstationäre Laminarbewegung, die zur stationären zurückführen würde, tritt also dann tatsächlich nicht ein, sondern eine nichtlaminare, turbulente Bewegung. Ihr näherer Charakter bleibt noch unbekannt, aber es ist zu vermuten, daß sie nicht zur stationären Laminarbewegung führt, sondern zu der experimentell bekannten turbulenten Strömungsform. Wir finden so einen tatsächlichen Hinweis auf den instabilen Charakter der stationären Laminarbewegung. Der Eintritt der Instabilität in diesem Sinne bedeutet eine obere Grenze für die „kritische" Geschwindigkeit.

§ 2. Grundgleichungen.

Wir nehmen an, daß nicht nur die zu Grunde gelegten laminaren Bewegungen sondern auch die überlagerten Störungsbewegungen eben und zwar horizontal seien. Die hydrodynamischen Gleichungen für inkompressible Strömung lauten für diesen kräftefreien Fall:

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\mu D(u)-\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$(1)\qquad \varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\mu D(v)-\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

wobei u, v die Geschwindigkeitskomponenten bzw. nach den Richtungen x und y, p den Druck, ϱ und μ die Flüssigkeitskonstanten Dichte und Viskositätskoeffizient bezeichnen und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=D(f)$$

gesetzt ist.

Wenn wir für eine laminare Strömung die x-Achse parallel zu den Wänden annehmen, wird $v=0$ und für deren Geschwindigkeitskomponente u_1 und den Druck p_1 erhalten wir aus (1):

$$
(2) \qquad \begin{aligned} &\varrho \frac{\partial u_1}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \frac{\partial p_1}{\partial x}; \\ &\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0. \end{aligned}
$$

Aus den ersten beiden dieser Gleichungen folgt:

$$
\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0,
$$

der Druckabfall muß also linear sein. Da wir unsere geradlinige Strömung als eine vereinfachte Darstellung der geschlossenen kreiszylindrischen bei Couette betrachten, so muß somit der Druckabfall $\frac{\partial p_1}{\partial x}$ überall 0 sein, und es bleibt die Gleichung:

$$
(3) \qquad \varrho \frac{\partial u_1}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}.
$$

Aus dieser Grundgleichung für die nichtstationäre Laminarbewegung folgt, daß der Ausgleich der Geschwindigkeiten nach der stationären Laminarbewegung hin nach den Gesetzen der Wärmeleitung vor sich geht und als solcher, solange man im Gebiet der laminaren Strömung bleibt, stabil wäre. Dies ist wichtig zu bemerken, weil daraus hervorgeht, daß es sich bei der weiterhin nachgewiesenen Instabilität nicht bloß um eine Veränderung des laminaren Ausgleichs, sondern wirklich um eine Abweichung von der laminaren Strömung handelt.

Wir bezeichnen nun mit U die Geschwindigkeit der bewegten Wand und beziehen aus Zweckmäßigkeitsgründen die Gleichungen auf ein Koordinatensystem, das sich mit der Geschwindigkeit $\frac{U}{2}$ in gleicher Richtung bewegt, der Nullpunkt liege in der Mittelebene des Kanals. Dessen Breite sei h; dann lauten die Randbedingungen für die allgemeine Strömung:

$$
(4) \qquad \begin{aligned} &\text{Für } y = +\frac{h}{2} \quad \text{ist: } u = +\frac{U}{2}; \quad v = 0. \\ &\text{Für } y = -\frac{h}{2} \quad \text{ist: } u = -\frac{U}{2}; \quad v = 0. \end{aligned}
$$

Führen wir vorerst noch unbenannte Größen in unsere Gleichungen ein, die alle der Natur der Aufgabe nach reell sind:

$$\mathfrak{x} = \frac{x}{h}; \quad \mathfrak{y} = \frac{y}{h}; \quad \mathfrak{u} = \frac{u}{U}; \quad \mathfrak{v} = \frac{v}{U}; \quad \mathfrak{t} = \frac{tU}{h}; \quad \mathfrak{R} = \frac{\varrho U h}{\mu}.$$

Die letzte ist die „Reynoldssche" Zahl, von deren numerischem Wert nach Reynolds der Turbulenzeintritt abhängt. Dann geht die Gleichung (3) über in

$$\mathfrak{R} \frac{\partial \mathfrak{u}_1}{\partial \mathfrak{t}} = \frac{\partial^2 \mathfrak{u}_1}{\partial \mathfrak{y}^2} \tag{3'}$$

und die Bedingungen (4) in:

$$\begin{aligned} &\text{Für } \mathfrak{y} = +\tfrac{1}{2} \text{ ist: } \mathfrak{u} = +\tfrac{1}{2}; \quad \mathfrak{v} = 0. \\ &\text{Für } \mathfrak{y} = -\tfrac{1}{2} \text{ ist: } \mathfrak{u} = -\tfrac{1}{2}; \quad \mathfrak{v} = 0. \end{aligned} \tag{4'}$$

Die Gleichung (3') mit den Randbedingungen (4') kann bei beliebig vorgegebener Anfangsverteilung nach bekannten Methoden gelöst werden, es kommt aber für uns hauptsächlich auf die Feststellung an, daß die zeitliche Veränderlichkeit dieser nichtstationären Laminarströmung um so geringer ist, je größer $\mathfrak{R}$ und je kleiner der anfängliche Wert von $\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_1}{\partial \mathfrak{y}^2}$ ist. Die Stabilität dieser Strömung soll untersucht werden.

Wir eliminieren hierzu aus (1) zunächst den in den Randbedingungen nicht vorkommenden Druck p, wodurch sich ergibt:

$$\varrho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$
$$= \mu D\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

und führen hier gleichfalls die oben definierten unbenannten Größen ein. So folgt:

$$\Re\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{y}}-\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{x}}\right)+\mathfrak{u}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}}\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{y}}-\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{x}}\right)+\mathfrak{v}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{y}}\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{y}}-\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{x}}\right)\right]$$

$$(5) \qquad = \Delta\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{y}}-\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{x}}\right)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \mathfrak{x}}+\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{y}}=0,$$

wobei jetzt $\Delta(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial \mathfrak{x}^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \mathfrak{y}^2}$ gesetzt ist.

Die zweite Gleichung (5) läßt sich identisch befriedigen durch Einführung der Stromfunktion $\mathfrak{f}(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$:

$$(6) \qquad \mathfrak{u}=\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{y}}; \quad \mathfrak{v}=-\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}},$$

und die erste Gleichung (5) ergibt dann:

$$(7) \qquad \Re\left[\frac{\partial}{\partial t}\Delta(\mathfrak{f})+\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{y}}\frac{\partial \Delta(\mathfrak{f})}{\partial \mathfrak{x}}-\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}}\frac{\partial \Delta(\mathfrak{f})}{\partial \mathfrak{y}}\right]=\Delta\Delta(\mathfrak{f}).$$

Die Stabilität der „Grundbewegung“ $\mathfrak{u}_1$ untersuchen wir nach der Methode der kleinen Schwingungen, setzen also:

$$\mathfrak{u}=\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2, \qquad \mathfrak{v}=\mathfrak{v}_2, \qquad \mathfrak{f}=\mathfrak{f}_1+\mathfrak{f}_2,$$

wo $\mathfrak{f}_1$ die zu $\mathfrak{u}_1$ gehörige Stromfunktion bezeichnet, und vernachlässigen die in $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{f}_2$ quadratischen Glieder von (7). So ergibt sich:

$$(8) \qquad \frac{\partial \Delta(\mathfrak{f}_2)}{\partial t}+\mathfrak{u}_1\frac{\partial \Delta(\mathfrak{f}_2)}{\partial \mathfrak{x}}-\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_1}{\partial \mathfrak{y}^2}\frac{\partial \mathfrak{f}_2}{\partial \mathfrak{x}}=\frac{1}{\Re}\Delta\Delta(\mathfrak{f}_2).$$

Da $\mathfrak{u}_1$ die Randbedingungen (4') erfüllt, so müssen auf Grund von (6) für $\mathfrak{f}_2$ noch die Bedingungen gefordert werden:

Für $\mathfrak{y}=\pm\frac{1}{2}$ ist:

$$(9) \qquad -\mathfrak{v}_2=\frac{\partial \mathfrak{f}_2}{\partial \mathfrak{x}}=0; \quad \mathfrak{u}_2=\frac{\partial \mathfrak{f}_2}{\partial \mathfrak{y}}=0.$$

Die Frage ist, ob die hier formulierte Aufgabe für reelle Werte von $\Re$ Lösungen von instabilem Typus zuläßt; in ihr ist die von A. Sommerfeld gestellte als Spezialfall enthalten, indem dort $\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_1}{\partial \mathfrak{y}^2}$ verschwindet und $\mathfrak{u}_1$ selbst von t unabhängig ist.

§ 3. Ansatz zur Stabilitätsuntersuchung.

Es sei beispielsweise die anfängliche Strömungsverteilung gegeben durch

$$\mathfrak{u}_1^{(0)} = 4\,\mathfrak{y}^3, \tag{10}$$

wodurch den Bedingungen (4′) genügt wird. Diese Verteilung weicht endlich von der der stationären Poiseuilleschen Laminarströmung ab, für die

$$\mathfrak{u}_p = \mathfrak{y}$$

zu setzen wäre. Obwohl die Strömungsverteilung (10) der mittleren hydraulischen Bewegung näher liegt, als die Poiseuillesche Verteilung, so wollen wir doch mit diesem einfachen Gesetz keineswegs eine Annäherung an die in Wirklichkeit viel kompliziertere hydraulische Bewegung suchen. Für unseren Zweck reicht ja die Behandlung eines einfachen Beispiels einer von der Poiseuilleschen Strömung endlich abweichenden Anfangsströmung aus.

Die Abweichung $\mathfrak{u}_1^{(0)} - \mathfrak{u}_p$ können wir durch ihre Fouriersche Entwicklung für das Gebiet $-\frac{1}{2} < \mathfrak{y} < +\frac{1}{2}$ ersetzen und finden so:

$$\mathfrak{u}_1^{(0)} = \mathfrak{y} - \sum_1^\infty{}_n \frac{6}{n^3\pi^3} \sin 2\,n\,\pi\,\mathfrak{y}. \tag{10′}$$

Für die nichtstationäre Laminarströmung ergibt sich dann aus (3′) und (4′):

$$\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{y} - \sum_1^\infty{}_n \frac{6}{n^3\pi^3} \sin 2\,n\,\pi\,\mathfrak{y}\, e^{-\frac{4\,n^2\pi^2}{\mathfrak{R}}\mathfrak{t}}, \tag{11}$$

also

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_1}{\partial \mathfrak{y}^2} = \sum_1^\infty{}_n \frac{24}{n\,\pi} \sin 2\,n\,\pi\,\mathfrak{y}\, e^{-\frac{4\,n^2\pi^2}{\mathfrak{R}}\mathfrak{t}}. \tag{11′}$$

Die Stabilitätsuntersuchung ist erschwert durch die zeitliche Veränderlichkeit dieser beiden Koeffizenten der Gleichung (8), doch läßt sich diese Schwierigkeit durch geeignete quasistationäre Behandlung umgehen. Gleichung (11) zeigt unmittelbar, daß $\mathfrak{u}_1$ um so langsamer zeitlich veränderlich ist, je größer die Reynoldssche Zahl $\mathfrak{R}$ ist. Nach den Experimentalergebnissen von Reynolds und Couette liegt nun die uns interessierende kritische Geschwindigkeit bei sehr hohen Werten von $\mathfrak{R}$ (ca. 2000). Wir können daher zunächst versuchsweise $\mathfrak{u}_1$ als zeitlich unveränderlich in die Rechnung einführen. Diese Vernachlässigung rechtfertigt sich nachträglich durch das Ergebnis, daß von einem gewissen $\mathfrak{R}$ ab kleine Schwingungen von labilem Typus existieren, deren logarithmisches Inkrement mit wachsendem $\mathfrak{R}$ zunimmt.

Beschränken wir uns auf die erste Zeit des Strömungsvorganges, so können wir also in (11) $\mathfrak{t}$ durch den konstanten Wert 0 ersetzen, also $\mathfrak{u}_1$ durch den Anfangswert $\mathfrak{u}_1^{(0)} = 4\,\mathfrak{y}^3$. Ebenso können wir den Koeffizienten $\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_1}{\partial \mathfrak{y}^2}$ durch seinen Grenzwert für $\mathfrak{t} = 0$ ersetzen, der mit

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{u}_1^{(0)}}{\partial \mathfrak{y}^2} = 24\,\mathfrak{y}$$

im Gebiet $-\frac{1}{2} < \mathfrak{y} < +\frac{1}{2}$ bis in beliebige Nähe der Grenzen (für das Folgende ist das ausreichend) übereinstimmt. Mit anderen Worten: wir denken uns ein System von sehr kleinen, geeignet verteilten Kräften angebracht, die den Zustand $\mathfrak{u}_1^{(0)}$ entgegen den Reibungskräften aufrecht erhalten würden, wenn andere Störungen ausgeschlossen wären.

Die Gleichung (8) lautet jetzt:

$$\frac{\partial \Delta(\mathfrak{f}_2)}{\partial \mathfrak{t}} + 4\,\mathfrak{y}^3 \frac{\partial \Delta(\mathfrak{f}_2)}{\partial \mathfrak{x}} - 24\,\mathfrak{y}\frac{\partial \mathfrak{f}_2}{\partial \mathfrak{x}} = \frac{1}{\mathfrak{R}} \Delta\Delta(\mathfrak{f}_2). \tag{12}$$

Indem wir, analog dem Sommerfeldschen Ansatz, in der Stromrichtung fortschreitende Wellen betrachten, setzen wir:

$$\begin{aligned} \Delta \mathfrak{f}_2 &= e^{i(\beta \mathfrak{t} - \alpha \mathfrak{x})}\varphi(\mathfrak{y}) \\ \mathfrak{f}_2 &= e^{i(\beta \mathfrak{t} - \alpha \mathfrak{x})}\psi(\mathfrak{y}), \end{aligned} \tag{13}$$

worin α eine beliebige reelle Zahl bedeutet. Eine Partikularlösung von (12) erhält man hieraus, wenn φ und ψ den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{d^2\varphi}{d\mathfrak{y}^2}-a^2\varphi=i\Re\left[(\beta-4a\mathfrak{y}^3)\varphi+24a\mathfrak{y}\psi\right]\\
&\frac{d^2\psi}{d\mathfrak{y}^2}-a^2\psi=\varphi.
\end{aligned}
$$

Die betrachtete Welle gehört dem instabilen Typus an, wenn der imaginäre Teil von β negativ ist, dem stabilen, wenn er positiv ist und bei reellem β handelt es sich um eine mit unveränderter Amplitude fortschreitende Welle. Bei kleinen Werten von $\Re$ gehören sicher alle Wellen zum zweiten Typus, wir fragen daher, ob für genügend große Werte von $\Re$ Wellen durch den dritten Typus hindurch zum ersten gehen, untersuchen also den Grenzfall (β reell). Dann ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle in unserem Bezugssystem gleich dem Verhältnis $\frac{\beta}{a}$. Wir wollen nun nur solche Wellen auswählen, die sich in dem Kanal mit der halben Wandgeschwindigkeit bewegen, und die infolgedessen in unserem Bezugssystem, das sich mit der nämlichen Geschwindigkeit bewegt, stationär sind. Für diese ist $\beta=0$. Die Gleichungen (14) lauten jetzt:

$$
(14')\qquad
\begin{aligned}
&\frac{d^2\varphi}{d\mathfrak{y}^2}-a^2\varphi=-4a\Re i(\mathfrak{y}^3\varphi-6\mathfrak{y}\psi)\\
&\frac{d^2\psi}{d\mathfrak{y}^2}-a^2\psi=\varphi
\end{aligned}
$$

und die Randbedingungen (9) gehen über in folgende:

$$
(9')\qquad \text{Für } \mathfrak{y}=\pm\tfrac{1}{2} \text{ soll } \psi=\frac{d\psi}{d\mathfrak{y}}=0 \text{ sein.}
$$

Gibt es solche Wellen bei reellen Werten von $\Re$?

§ 4. Allgemeine Lösung. Diskussion der Stabilitätsbedingung.

Der Parameter a ermöglicht noch die unendliche Mannigfaltigkeit von Wellen jeder beliebigen Länge, da das Strömungsgebiet in der x-Richtung unendlich ausgedehnt ist. Wir wollen nur im Vergleich zur Kanalbreite lange Wellen betrachten, näher präzisiert solche mit so kleinem a, daß auf der linken Seite der beiden Gleichungen (14') $a^2\varphi$ bzw. $a^2\psi$ vernachlässigt werden können. Es wird sich nachträglich quantitativ ergeben, in welchem Maß durch diese Forderung a eingeschränkt ist. Die rechte Seite der ersten Gleichung, wo a linear und mit der großen Zahl $4\,\mathfrak{R}$ multipliziert vorkommt, wird natürlich nicht vernachlässigt. Wir setzen die rein imaginäre Größe

$$-4\,a\,\mathfrak{R}\,i = -R\,i = S, \tag{15}$$

so daß die Differentialgleichungen (14') jetzt lauten:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\mathfrak{y}^2} &= S(\mathfrak{y}^3\varphi - 6\,\mathfrak{y}\,\psi) \\ \frac{d^2\psi}{d\mathfrak{y}^2} &= \varphi, \end{aligned} \tag{16}$$

woraus durch Elimination von φ die Differentialgleichung vierter Ordnung für ψ folgt:

$$\frac{d^4\psi}{d\mathfrak{y}^4} = S\left(\mathfrak{y}^3\frac{d^2\psi}{d\mathfrak{y}^2} - 6\,\mathfrak{y}\,\psi\right). \tag{16'}$$

Vier partikuläre Integrale dieser Gleichung finden wir in Form von Potenzreihen

$$\psi = \Sigma B_m \mathfrak{y}^m,$$

für deren Koeffizienten sich die Rekursionsformel ergibt:

$$(m+5)(m+4)(m+3)(m+2)\,B_{m+5} = S[m(m-1)-6]\,B_m,$$

d. i.:

$$B_{m+5} = S\frac{m-3}{(m+3)(m+4)(m+5)}B_m. \tag{17}$$

So folgen die vier Partikularlösungen:

$$\begin{aligned} \psi_0 = B_0\Bigg(1 &+ \frac{-3}{3\cdot4\cdot5}S\mathfrak{y}^5 + \frac{-3\cdot2}{3\cdot4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot10}S^2\mathfrak{y}^{10} \\ &+ \frac{-3\cdot2\cdot7}{3\cdot4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot10\cdot13\cdot14\cdot15}S^3\mathfrak{y}^{15} \\ &+ \frac{-3\cdot2\cdot7\cdot12}{3\cdot4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot10\cdot13\cdot14\cdot15\cdot18\cdot19\cdot20}S^4\mathfrak{y}^{20}\dots\Bigg) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\psi_1 = B_1 \Big(\mathfrak{y} + \frac{-2}{4 \cdot 5 \cdot 6} - S^6 + \frac{-2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} S^2 \mathfrak{y}^{11}$$
$$+ \frac{-2 \cdot 3 \cdot 8}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16} S^3 \mathfrak{y}^{16}$$
$$+ \frac{-2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 13}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21} S^4 \mathfrak{y}^{21} \dots \Big)$$

$$\psi_2 = B_2 \Big(\mathfrak{y}^2 + \frac{-1}{5 \cdot 6 \cdot 7} S \mathfrak{y}^7 + \frac{-1 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} S^2 \mathfrak{y}^{12}$$
$$+ \frac{-1 \cdot 4 \cdot 9}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17} S^3 \mathfrak{y}^{17}$$
$$+ \frac{-1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22} S^4 \mathfrak{y}^{22} \dots \Big)$$

$$\psi_3 = B_3 \mathfrak{y}^3 .$$

Das allgemeine Integral ψ setzt sich aus diesen partikulären mit beliebigen Koeffizienten B_0, B_1, B_2, B_3, additiv zusammen. Da $S = -iR$ eine rein imaginäre Größe ist, so ist jedes dieser partikulären Integrale eine komplexe Funktion der reellen Variabeln $\mathfrak{y}$, und die Randbedingungen (9′) müssen daher durch den reellen und den imaginären Teil von ψ für sich erfüllt werden. Wegen der Symmetrie dieser Randbedingungen zum Punkte $\mathfrak{y} = 0$ suchen wir sie dadurch zu erfüllen, daß wir ψ_r, den reellen Teil von ψ, als gerade, ψ_i, den imaginären Teil, als ungerade Funktion von $\mathfrak{y}$ einführen. Das wird erreicht, wenn B_0, B_2 reell, B_1 und B_3 rein imaginär gewählt werden. Sei also $B_1 = iB_1'$; $B_3 = iB_3'$ und B_1' und B_3' reell.

Die Koeffizienten B sind so zu bestimmen, daß für $\mathfrak{y} = \frac{1}{2}$ die Gleichungen

$$\psi_r = \psi_r' = \psi_i = \psi_i' = 0 \left(\psi' = \frac{d\psi}{d\mathfrak{y}} \right) \tag{19}$$

bestehen; die nämlichen Bedingungen sind damit auch für $\mathfrak{y} = -\frac{1}{2}$ erfüllt. Der Koeffizient B_3' kann leicht eliminiert werden, indem wir die letzten beiden Gleichungen (19) durch ihre Kombination

$$\mathfrak{y}\,\psi_i' - 3\,\psi_i = 0$$

ersetzen. Die einzelnen Glieder der so erhaltenen drei Gleichungen lauten:

$$(20)\quad \psi_{0r} = \Big(1 + \frac{3\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 10} R^2 \mathfrak{y}^{10} - \frac{3\cdot 2\cdot 7\cdot 12}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 18\cdot 19\cdot 20} R^4 \mathfrak{y}^{20}\ldots\Big)$$

$$\psi_{1r} = \mathfrak{y}\Big(\frac{2}{4\cdot 5\cdot 6} R\mathfrak{y}^5 - \frac{2\cdot 3\cdot 8}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 14\cdot 15\cdot 16} R^3 \mathfrak{y}^{15}\ldots\Big)$$

$$\psi_{2r} = \mathfrak{y}^2\Big(1 + \frac{1\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 12} R^2 \mathfrak{y}^{10} - \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 20\cdot 21\cdot 22} R^4 \mathfrak{y}^{20}\ldots\Big)$$

$$\mathfrak{y}\psi'_{0r} = \Big(\frac{3\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} R^2 \mathfrak{y}^{10} - \frac{3\cdot 2\cdot 7\cdot 12}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 18\cdot 19} R^4 \mathfrak{y}^{20}\ldots\Big)$$

$$\mathfrak{y}\psi'_{1r} = \mathfrak{y}\Big(\frac{2}{4\cdot 5} R\mathfrak{y}^5 - \frac{2\cdot 3\cdot 8}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 14\cdot 15} R^3 \mathfrak{y}^{15}\ldots\Big)$$

$$\mathfrak{y}\psi'_{2r} = \mathfrak{y}^2\Big(2 + \frac{1\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 11} R^2 \mathfrak{y}^{10} - \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 20\cdot 21} R^4 \mathfrak{y}^{20}\ldots\Big)$$

$$\mathfrak{y}\psi'_{0i} - 3\psi_{0i} = \Big(-\frac{3\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5} R^3 \mathfrak{y}^{15} + \frac{3\cdot 2\cdot 7\cdot 12}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 13\cdot 14\cdot 15} R^3 \mathfrak{y}^{15}\ldots\Big)$$

$$\mathfrak{y}\psi'_{1i} - 3\psi_{1i} = \mathfrak{y}\Big(-2 + \frac{2\cdot 3\cdot 8}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 9\cdot 10\cdot 11} R^2 \mathfrak{y}^{10} - \frac{2\cdot 3\cdot 8\cdot 13\cdot 18}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 19\cdot 20\cdot 21} R^4 \mathfrak{y}^{20}\ldots\Big)$$

$$\mathfrak{y}\psi'_{2i} - 3\psi_{2i} = \mathfrak{y}^2\Big(-\frac{1\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7} R\mathfrak{y}^5 + \frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 15\cdot 16\cdot 17} R^3 \mathfrak{y}^{15}\ldots\Big),$$

aus denen sich die drei Bedingungsgleichungen wie folgt zusammensetzen:

$$(19') \quad \left.\begin{aligned} B_0 \psi_{0r} + B_1' \psi_{1r} + B_2 \psi_{2r} = 0 \\ B_0 \mathfrak{y} \psi'_{0r} + B_1' \mathfrak{y} \psi'_{1r} + B_2 \mathfrak{y} \psi'_{2r} = 0 \\ i B_0 (\mathfrak{y} \psi'_{0i} - 3 \psi_{0i}) + i B_1' (\mathfrak{y} \psi'_{1i} - 3 \psi_{1i}) \\ + i B_2 (\mathfrak{y} \psi'_{2i} - 3 \psi_{2i}) = 0 \end{aligned}\right\} \text{ für } \mathfrak{y} = \tfrac{1}{2}.$$

Die Bedingung des Verschwindens ihrer Determinante ergibt folgende transzentente Gleichung für R, in der $\mathfrak{y}\,(= \frac{1}{2})$ und R nur mehr in der Verbindung

$$(20') \qquad \eta = R\,\mathfrak{y}^5$$

vorkommen:

$$(21) \quad F(\eta) = \begin{vmatrix} \psi_{0r} & \dfrac{\psi_{1r}}{\mathfrak{y}} & \dfrac{\psi_{2r}}{\mathfrak{y}^2} \\ \mathfrak{y}\,\psi'_{0r} & \psi'_{1r} & \dfrac{\psi'_{2r}}{\mathfrak{y}} \\ \mathfrak{y}\,\psi'_{0i} - 3\,\psi_{0i} & \dfrac{\mathfrak{y}\,\psi'_{1i} - 3\,\psi_{1i}}{\mathfrak{y}} & \dfrac{\mathfrak{y}\,\psi'_{2i} - 3\,\psi_{2i}}{\mathfrak{y}^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Reelle Wurzeln dieser Gleichung führen auf ein reelles Wertesystem B und somit auf eine Lösung unserer Aufgabe. Der Nachweis der Existenz einer solchen Wurzel wird ermöglicht durch die starke (absolute) Konvergenz der Reihen (20), die es gestattet, die Reihen mit nicht zu hoher Gliederzahl abzubrechen und das Restglied abzuschätzen (zum Nachweis der ersten Wurzel genügt die Berücksichtigung von elf Gliedern jeder Reihe). Die Gleichung (21) scheint aber doch viel zu kompliziert zu sein, um Schlüsse allgemeiner Natur zuzulassen und man ist daher zur Entscheidung über die Realität ihrer Wurzeln auf die numerische Berechnung angewiesen. Für ihre Durchführung ist es zweckmäßig, die Koeffizienten der einzelnen Entwicklungen (20) auf etwa drei Dezimalen genau zu berechnen, wobei die Koeffizienten der zweiten Zeile von (21) je nur um einen ganzzahligen Faktor von den entsprechenden der ersten verschieden sind. Hierdurch wird die Berechnung der Unterdeterminanten der ersten beiden Zeilen sehr erleichtert. So ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
F(\eta) \equiv &+ 4 + 2{,}08 \cdot 10^{-3}\,\eta^2 + 8{,}64 \cdot 10^{-8}\,\eta^4 \\
&+ 3{,}70 \cdot 10^{-13}\,\eta^6 + 3{,}71 \cdot 10^{-18}\,\eta^8 - 8{,}5 \cdot 10^{-24}\,\eta^{10} \\
&+ 1{,}36 \cdot 10^{-29}\,\eta^{12} - 7{,}00 \cdot 10^{-36}\,\eta^{14} + 3{,}61 \cdot 10^{-42}\,\eta^{16} \\
&- 1{,}93 \cdot 10^{-48}\,\eta^{18} + 5{,}14 \cdot 10^{-55}\,\eta^{20} - 9{,}60 \cdot 10^{-62}\,\eta^{22} \\
&+ 5{,}0 \cdot 10^{-69}\,\eta^{24} - \cdots + \cdots = 0.
\end{aligned} \tag{21'}
$$

Wir haben diese Form $F(\eta)$ für reelle η, also positive η^2, zu untersuchen. Daß die fünf ersten Koeffizienten gleiches Vorzeichen haben, und die Gleichung (21') also jedenfalls keine kleinen Wurzeln hat, stimmt mit der sicher zu erwartenden Stabilität unserer Strömung für kleine R überein. Die abwechselnden Vorzeichen der höheren Glieder lassen aber das Vorhandensein reeller Wurzeln erwarten. Die numerische Berechnung von $F(\eta)$ für diskontinuierliche Werte von η beweist nun in der Tat die Existenz zunächst einer reellen Wurzel. Wir schreiben abkürzend:

$$
\xi = 10^{-5}\,\eta^2, \tag{22}
$$

so daß:

$$
\begin{aligned}
F(\xi) \equiv &\; 4 + 208\,\xi + 864\,\xi^2 + 360\,\xi^3 + 371\,\xi^4 - 85\,\xi^5 \\
&+ 13{,}6\,\xi^6 - 7 \cdot 10^{-1}\,\xi^7 + 3{,}61 \cdot 10^{-2}\,\xi^8 - 1{,}93 \cdot 10^{-3}\,\xi^9 \\
&+ 5{,}14 \cdot 10^{-5}\,\xi^{10} - 9{,}60 \cdot 10^{-7}\,\xi^{11} + 5{,}0 \cdot 10^{-9}\,\xi^{12} - \cdots + \cdots.
\end{aligned}
$$

Während die Form $F(\xi)$ für kleine Werte von ξ positiv ist, hat sie z. B. für $\xi = 25$ den negativen Wert:

$$
\begin{aligned}
F(25) = &\; 25^6 \cdot (1{,}7 \cdot 10^{-8} + 2{,}1 \cdot 10^{-5} + 2{,}2 \cdot 10^{-3} \\
&+ 2{,}4 \cdot 10^{-2} + 0{,}6 - 3{,}4 + 13{,}6 - 17{,}5 + 22{,}5 - 30{,}2 \\
&+ 20{,}1 - 9{,}4 + 1{,}2 - \cdots + \cdots) \\
= &\; - 2{,}5 \cdot 25^6.
\end{aligned} \tag{22'}
$$

Übrigens überzeugt die Ableitung der Gleichung (21') aus (21), daß die Konvergenz der Reihe (21') und ihr durch die abwechselnden Vorzeichen bedingtes oszillatorisches Verhalten systematisch im Bau der Determinante (21) begründet ist und nicht auf die angeschriebenen Glieder beschränkt bleibt. Daraus folgt, daß das nicht mehr angeschriebene Restglied in seinem absoluten Betrag kleiner als das letzte angeschriebene Glied ist und überdies negatives Vorzeichen hat. Also ist in der Tat $F(25)$ negativ und damit ist die Existenz einer reellen Wurzel von (21), für die $\xi < 25$ ist, bewiesen. Die genauere Berechnung ergibt für diese den Wert

$$\xi_0 = 20{,}9.$$

§ 5. Obere Grenze für die kritische Reynoldssche Zahl.

Aus der im § 4 gefundenen Wurzel ξ_0 ergibt sich zunächst nach (22):

$$\eta_0^2 = 2{,}09 \cdot 10^6,$$

also

$$\eta_0 = \pm 1445.$$

Nach (20') folgt dann

$$R\mathfrak{y}^5 = \pm 1445,$$

und da die Randbedingungen $\mathfrak{y} = \pm \frac{1}{2}$ fordern, so wird

$$R = 1445 \cdot 2^5.$$

Nach (15) ist endlich:

$$a\mathfrak{R} = \frac{R}{4} = 11560. \tag{23}$$

Wir hatten bisher die Untersuchung auf sehr lange Wellen ($a = 0$) beschränkt und würden somit aus (23) die Reynoldssche Zahl $\mathfrak{R} = \infty$ finden. Eine endliche Grenze für $\mathfrak{R}$ aber finden wir, wenn wir entscheiden, für welche Werte von a unsere Rechnung noch als Näherung gelten kann. Zu dem Zweck gebrauchen wir die aus den Gleichungen (14') folgenden Entwicklungen von ψ.

Die Elimination von φ aus diesen Gleichungen ergibt mit den Abkürzungen (15):

$$\frac{d^4 \psi}{d \mathfrak{y}^4} - 2\,\alpha^2 \frac{d^2 \psi}{d \mathfrak{y}^2} + \alpha^4 \psi = S\left[\mathfrak{y}^3 \frac{d^2 \psi}{d \mathfrak{y}^3} - (\alpha^2 \mathfrak{y}^3 + 6\,\mathfrak{y})\,\psi\right].$$

Vier partikuläre Integrale dieser Gleichung können wieder als Potenzreihen

$$\psi^{(\alpha)} = \sum A_m \mathfrak{y}^m$$

angegeben werden. Für ihre Koeffizienten gilt das Rekursionsgesetz:

$$\begin{aligned}(24)\qquad & (m+5)(m+4)(m+3)(m+2)\,A_{m+5} \\ & - 2\,\alpha^2 (m+3)(m+2)\,A_{m+3} + \alpha^4 A_{m+1} \\ & = S\left[(m-3)(m+2)\,A_m - \alpha^2 A_{m-2}\right].\end{aligned}$$

Nach dieser Rekursionsformel können wie für $\alpha = 0$ die Koeffizienten der vier Partikularlösungen so gewählt werden, daß deren reeller Teil je eine gerade, der imaginäre eine ungerade Funktion von $\mathfrak{y}$ ist. Denn da S rein imaginär ist, so steht nach (24) jeder Koeffizient zu einem vorangehenden in reellem Verhältnis, wenn die Differenz der Indizes gerade, und in rein imaginärem Verhältnis, wenn die Differenz der Indizes ungerade ist. Es reicht also aus, die vier Randbedingungen (19) für $\mathfrak{y} = +\frac{1}{2}$ zu fordern, womit sie zugleich für $\mathfrak{y} = -\frac{1}{2}$ erfüllt werden. Das Bestehen dieser vier Bedingungen erfordert wie früher das Verschwinden ihrer Determinante, was eine transzendente Gleichung für R ergibt. Deren Koeffizienten sind wie früher reell und weichen bei genügend kleinen Werten von α^2 nur wenig von denen der Gleichung (21′) (wenn man dort (20′) einsetzt) ab. Da wir für deren linke Seite einen Vorzeichenwechsel nachwiesen, so wird auch die neue Gleichung einen Vorzeichenwechsel, somit eine reelle Nullstelle, haben. Also kann unsere Untersuchung mit $\alpha^2 = 0$ wirklich als eine Annäherung auch für den Fall von kleinen, aber endlichen Werten von α^2 gelten.

Die numerische Rechnung zeigt, daß sie für $\alpha^2 = 1$ noch eine Annäherung darstellt. Da diese zwar ohne Schwierigkeit, aber mit großer rechnerischer Mühe verbunden ist, wollen wir hier ihren Gang nur durch eine überschlägliche Schätzung andeuten.

Der Vergleich der Rekursionsformel (24) mit (17) zeigt zunächst, daß hier an Stelle jedes Koeffizienten B_m der dort angeschriebenen Potenzreihen (18) eine nach Potenzen von $a^2\,\mathfrak{y}^2$ fortschreitende Entwicklung tritt. Deren Koeffizienten sind beständig abnehmend, und da ferner in dem in Betracht kommenden Gebiet $\mathfrak{y}^2 < \frac{1}{4}$ ist, so reicht es für den Zweck unserer Abschätzung auch für $a^2 = 1$ noch aus, wenn wir uns auf die Glieder mit der Potenz $a^2\,\mathfrak{y}^2$ beschränken. Wir setzen also:

$$A_m = B_m + b_m,$$

wobei die B_m Koeffizienten einer der Reihen (18) sein sollen.

Für die b_m erhalten wir so, mit Vertauschung der Indizes und Vernachlässigung aller höheren Potenzen von a^2:

$$\text{(25)} \qquad b_{m+2} = \frac{2\,a^2}{(m+1)\,(m+2)}\,B_m$$
$$+\,S\left[\frac{m-6}{m(m+1)(m+2)}\,b_{m-3} - \frac{a^2}{(m-1)\,m\,(m+1)\,(m+2)}\,B_{m-5}\right].$$

Gehen wir etwa von der Reihe ψ_0 (18) aus, so erhalten wir jetzt die folgende Reihe:

$$\psi_0^{(a)} = B_0 + b_2\,\mathfrak{y}^2 + (B_5 + b_7\,\mathfrak{y}^2)\,\mathfrak{y}^5 + (B_{10} + b_{12}\,\mathfrak{y}^2)\,\mathfrak{y}^{10} + \cdots.$$

Dabei ergibt sich für $m = 0$ aus (25):

$$b_2 = a^2\,B_0$$

und durch Fortsetzung des Rekursionsverfahrens, mit Rücksicht auf die Rekursionsformel (17):

$$\begin{array}{llll}
 & b_7 = \dfrac{a^2}{6{,}0}\,B_5; & b_{47} = \dfrac{a^2}{12{,}9}\,B_{45} & b_{122} = \dfrac{a^2}{26{,}1}\,B_{120} \\
 & b_{12} = \dfrac{a^2}{6{,}0}\,B_{10}; & \vdots & \vdots \\
\text{(26)} & b_{17} = \dfrac{a^2}{7{,}0}\,B_{15}; & b_{107} = \dfrac{a^2}{23{,}7}\,B_{105} & \\
 & \vdots & b_{112} = \dfrac{a^2}{24{,}5}\,B_{110} & \\
 & & \vdots & \\
 & b_{42} = \dfrac{a^2}{12{,}0}\,B_{40}; & b_{117} = \dfrac{a^2}{25{,}3}\,B_{115}. &
\end{array}$$

In entsprechender Weise berechnen sich die Koeffizienten b für die anderen Partikularlösungen $\psi_1^{(\alpha)}$; $\psi_2^{(\alpha)}$; $\psi_3^{(\alpha)}$ und es ergeben sich ähnliche Resultate. Für die Grenzen des Gebiets, $\mathfrak{y} = \pm \frac{1}{2}$, entstehen somit die Reihen $\psi^{(\alpha)}(S)$ aus den entsprechenden Reihen $\psi(S)$ (18), in dem an Stelle jedes Koeffizienten B_m der letzteren der (von S unabhängige) Ausdruck

$$C_m = B_m + \frac{b_{m+2}}{4}$$

tritt, deren Verhältnis zu B_m aus (26) sich ergibt. Wegen der Homogenität der Funktionen $\psi^{(\alpha)}$ in den C_m kommen für die aus den Randbedingungen (19') abzuleitende Gleichung für R nur die Verhältnisse der C_m in Betracht. Deren Unterschied gegen die entsprechenden Verhältnisse der B_m muß hinreichend klein sein, damit die früher gefundene reelle Wurzel der Gleichung (21') als Näherungswert der gesuchten gelten soll.

Aus (22') sieht man nun, daß für die fraglichen Werte von R die ersten vier Glieder der linken Seite von (21') ganz belanglos sind und nur die höheren in Betracht kommen. Für deren Berechnung aus (20) und (21) sind aber in den einzelnen Reihen (20) auch die ersten Glieder ohne wesentlichen Einfluß, und nur die höheren sind maßgebend. An Stelle des Verhältnisses $B_{115} : B_{15}$ z. B. tritt für $\alpha^2 = 1$ das Verhältnis

$$C_{115} : C_{15} = \left(B_{115} + \frac{b_{117}}{4}\right) : \left(B_{15} + \frac{b_{17}}{4}\right)$$

$$= \frac{B_{115}}{B_{15}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{4 \cdot 25{,}3}}{1 + \frac{1}{4 \cdot 7}} = \frac{B_{115}}{B_{15}} \cdot \left(1 - \frac{1}{39}\right)$$

und für die übrigen in Betracht kommenden Verhältnisse der C_m ergeben sich noch geringere Abweichungen von den entsprechenden Verhältnissen der B_m. Von höchstens der gleichen Größe wird die Änderung der Verhältnisse der maßgebenden Koeffizienten in der Gleichung (21') werden. Aus (22') ersieht man aber, daß eine Änderung der Koeffizientenverhältnisse in diesem Maß nicht ausreichen kann, um den negativen Wert $F(25)$ in einen positiven zu verwandeln.

Es existiert somit eine reelle Wurzel, die in der Nähe der im Falle $\alpha^2 = 0$ gefundenen Wurzel der Gleichung (21′) liegt. Da also unsere Rechnung noch als Annäherung für den Fall $\alpha^2 = 1$ angesehen werden kann, so finden wir aus (23)

$$\mathfrak{R} = 11560$$

als obere Grenze für die Zahl, die in unserer Aufgabe die Rolle der „kritischen Reynoldsschen Zahl" spielt. Da anzunehmen ist, daß für größere Werte von α^2 (kürzere Wellen) auch noch Labilität möglich ist, sich aber dann aus der der Gleichung (23) entsprechenden Gleichung ein kleineres $\mathfrak{R}$ ergäbe; da wir uns ferner nur mit endlichen Störungen der ganz speziellen Form (10) beschäftigten, so steht dieses Resultat nicht im Widerspruch mit der Beobachtung, die einen kleineren Wert ($\mathfrak{R}_k =$ ca. 2000) für die kritische Reynoldssche Zahl ergibt.

Es ist noch von Interesse, auf die Strömungsform beim Eintritt der Instabilität hinzuweisen. Je größer die Zahl R ist, desto mehr Glieder der Partikularlösungen φ_i kommen schon in dem Intervall $-\frac{1}{2} \leq \mathfrak{y} \leq +\frac{1}{2}$ in Betracht und desto mehr Oszillationen der reellen und imaginären Teile dieser Funktionen fallen, wegen der wechselnden Vorzeichen, in dieses Gebiet. Das gleiche gilt dann für die aus den Partikularlösungen zusammengesetzte Lösung φ und die daraus nach (6) und (13) abgeleiteten Geschwindigkeitskomponenten. Da für die oben gefundene Grenze R mindestens elf Glieder der reellen und imaginären Teile der Partikularlösungen φ_i berücksichtigt werden mußten, so folgt:

Beim Eintritt der Instabilität ist die Kanalbreite in eine größere Zahl von Partialwirbeln unterteilt.

Die vorangehende Untersuchung dürfte hinreichend beweisen, daß für die theoretische Behandlung des Turbulenzproblems ganz andere Verhältnisse vorliegen, wenn man die

Nachbarschaft der Poiseuilleschen Strömung verläßt und endlich von ihr abweichende Strömungszustände betrachtet. Die wirkliche Durchführung dieser Aufgabe müßte natürlich einen anderen Weg als den hier verfolgten einschlagen; es handelte sich um die Untersuchung der nichtlinearen hydrodynamischen Randwertaufgabe mit Einschluß ihrer (reellen oder imaginären) Verzweigungslösungen. Hilfsmittel hierzu liegen in der Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen[1]) und einigen schon früher bekannten Spezialfällen[2]) dieser Theorie vor.

[1]) E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen III. Math. Ann., Bd. 65 (1908), S. 370.

[2]) Z. B.: H. Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un *mouvement de rotation*. Acta mathematica 7 (1885), S. 295.