Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1913. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1913
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Zur Theorie der Gammafunktion, besonders über ihre analytische Darstellung für grosse positive Werte des Arguments.

Von **H. Burkhardt.**

Vorgetragen in der Sitzung am 3. Mai 1913.

I.

Will man die Hauptsätze der Theorie der Gammafunktion möglichst elementar ableiten, so empfiehlt es sich von der Darstellungsformel

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{d x^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2} \tag{1}$$

auszugehen. Denn da die hier auftretende Reihe absolut und in jedem endlichen Gebiet, in dem alle Nenner von Null verschieden sind, gleichmäßig konvergiert, so kann man mit ihr alle erforderlichen Umformungen mit Leichtigkeit vornehmen, ohne diffizile Zulässigkeitsuntersuchungen ausführen zu müssen, wie solche z. B. erforderlich sind, wenn man in einem über einen unendlichen Bereich erstreckten Doppelintegral eine Vertauschung der Integrationsreihenfolge vornehmen will.

Nimmt man diesen Ausgangspunkt, so hat man zunächst zu fragen, wie die beim Rückgang von der zweiten Ableitung zu der Funktion selbst auftretenden Integrationskonstanten zu wählen sind, wenn die Funktion der fundamentalen Differenzengleichung der Gammafunktion genügen soll. Dabei wird man freilich zu Reihen geführt, die den ebengenannten Vorteil der

Reihe (1) nicht mehr haben, sondern deren Glieder aus Bestandteilen sich zusammensetzen, die nicht ohne genauere Untersuchung auseinandergerissen werden dürfen und die doch zur Ableitung der gewünschten Sätze auseinandergerissen werden müssen. Man kann das dadurch umgehen, daß man sogleich neben die Gleichung (1) die folgende stellt:

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x+1)}{d x^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2}, \tag{2}$$

die aus ihr durch Einführung eines neuen Summationsbuchstabens hervorgeht. Die Vergleichung von (1) mit (2) liefert dann zunächst die Differenzengleichung

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x+1)}{d x^2} - \frac{d^2 \log \Gamma(x)}{d x^2} = -\frac{1}{x^2}. \tag{3}$$

Ferner gibt Integration von (1) und (2) die beiden weiteren Gleichungen:

$$\frac{d \log \Gamma(x)}{d x} = c_1 - \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\nu} - \frac{1}{x+\nu}\right], \tag{4}$$

$$\frac{d \log \Gamma(x+1)}{d x} = c_2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\nu} - \frac{1}{x+\nu}\right]. \tag{5}$$

Setzt man zur Bestimmung der Integrationskonstanten in (4) $x = 1$ und in (5) $x = 0$, so erhält man:

$$\left(\frac{d \log \Gamma(x)}{d x}\right)_{x=1} = c_1,$$

$$\left(\frac{d \log \Gamma(x+1)}{d x}\right)_{x=0} = c_2;$$

es muß also $c_1 = c_2$ sein und die Differenzengleichung

$$\frac{d \log \Gamma(x+1)}{d x} - \frac{d \log \Gamma(x)}{d x} = \frac{1}{x} \tag{6}$$

ist auf jeden Fall erfüllt.

Bezeichnet man ferner den gemeinsamen Wert von c_1 und c_2 mit $-\gamma$, so führt eine zweite Integration von (4) zu

$$(7)\qquad \log\Gamma(x) = -\gamma x - \log x + c_3 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x}{\nu} - \log\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\right]$$

und von (5) zu

$$(8)\qquad \log\Gamma(x+1) = -\gamma x + c_4 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x}{\nu} - \log\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\right].$$

Wird in (7) $x=1$ und in (8) $x=0$ substituiert, so wird er-erhalten:

$$\log\Gamma(1) = -\gamma + c_3 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\nu} - \log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right] = c_4.$$

Soll andererseits die Differenzengleichung

$$(9)\qquad \log\Gamma(x+1) - \log\Gamma(x) = \log x$$

bestehen, so muß $c_3 = c_4$ werden, und es muß also, wenn diese Bedingung erfüllt sein soll, die Konstante γ durch

$$(10)\qquad \gamma = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\nu} - \log\frac{\nu+1}{\nu}\right]$$

festgelegt werden. Soll endlich noch

$$\log\Gamma(1) = 0$$

sein, so muß $c_3 = c_4 = 0$ genommen werden.

Eine dritte Integration führt dann von (7) zu

$$(11)\qquad \begin{aligned}\int_0^x \log\Gamma(x)\,dx &= -\gamma\frac{x^2}{2} - x\log x + x\\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x^2}{2\nu} - (x+\nu)\log\left(1+\frac{x}{\nu}\right) + x\right]\end{aligned}$$

und von (8) zu:

$$(12)\qquad \int_0^{x+1}\log\Gamma(x)\,dx = \int_{-1}^{x}\log\Gamma(x+1)\,dx = -\gamma\frac{x^2-1}{2}$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x^2-1}{2\nu} - (x+\nu)\log\left(1+\frac{x}{\nu}\right) + (-1+\nu)\log\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\right.$$
$$\left. + x + 1\right];$$

dabei ist in der letzten Summe für $\nu = 1$ das Glied

$$(-1+\nu)\log\left(1-\frac{1}{\nu}\right)$$

durch Null zu ersetzen. Subtraktion liefert

$$\int_x^{x+1} \log \Gamma(x)\,dx = \frac{\gamma}{2} + x\log x - x + s_1, \tag{13}$$

wenn nämlich mit s_1 die numerische Reihe

$$s_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[(\nu-1)\log\left(1-\frac{1}{\nu}\right)+1-\frac{1}{2\nu}\right] \tag{14}$$

bezeichnet wird. Diese Reihe ist mit der ähnlichen ebenfalls konvergenten Reihe

$$s_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[(-\nu-1)\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)+1+\frac{1}{2\nu}\right] \tag{15}$$

durch zwei einfache Relationen verbunden, die zusammen die Summe beider Reihen zu bestimmen erlauben. Einmal nämlich kann s_1 vermöge einer Änderung des Summationsbuchstabens auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\nu\log\frac{\nu}{\nu+1}+1-\frac{1}{2\nu+2}\right] \\ &= \frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[-\nu\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)+1-\frac{1}{2\nu+2}\right]; \end{aligned}$$

also ergibt sich durch Subtraktion:

$$s_1 - s_2 = \frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)-\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{2\nu+2}\right]$$

und wenn noch

$$\frac{1}{2} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\nu}-\frac{1}{2\nu+2}\right]$$

auf beiden Seiten subtrahiert und die Gleichung (10) berücksichtigt wird:

$$s_1 - s_2 = 1-\gamma. \tag{16}$$

Andererseits erhält man, wenn man von der Produktdarstellung des Sinus den Logarithmus nimmt und dann gliedweise integriert:

$$(17) \qquad \int_0^1 \log \sin \pi x \, dx = \log \pi - 1 - s_1 - s_2;$$

und von dem links stehenden Integrale kann bekanntlich[1]) elementar gezeigt werden, daß sein Wert $-\log 2$ ist. Also ist:

$$(18) \quad s_1 = -\frac{\gamma}{2} + \log \sqrt{2\pi}, \qquad s_2 = -1 + \frac{\gamma}{2} + \log \sqrt{2\pi}$$

und damit geht (13) in die Gleichung von Raabe:

$$(19) \qquad \int_x^{x+1} \log \Gamma(x) \, dx = x \log x - x + \log \sqrt{2\pi}$$

über.

II.

Soll ferner aus der Entwicklung (1) auf das Verhalten der Gammafunktion für unendlich große positive Werte des Arguments geschlossen werden, so kann dazu ein Satz dienen, den Th. Stieltjes in einem seiner letzten Briefe an Hermite[2]) ausgesprochen hat, nämlich: wenn $\varphi(x)$ eine rationale ganze Funktion vom Grade $m > 1$ ist, so wird die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi(x+\nu)}$$

im Unendlichen nicht von der m^{ten}, sondern nur von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich klein. Dabei darf man natürlich nicht so ins Unendliche gehen, daß man immer wieder einer Nullstelle eines der Nenner unendlich nahe kommt; Stieltjes sagt das wohl nur deshalb nicht ausdrücklich, weil er es für selbstverständlich hält. Den Beweis scheint er sich

---

1) Vgl. etwa J. Thomae, Bestimmte Integrale, p. 40.

2) Corresp. 2, p. 401.

mit den Mitteln der Integralrechnung geführt zu haben. Der Satz gilt übrigens für jede Funktion $\varphi(x)$, die im Unendlichen von einer bestimmten (nicht notwendig ganzzahligen) Ordnung $m > 1$ unendlich wird; er kann mit denselben Mitteln bewiesen werden, durch die man die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-m}$ für $m > 1$ dartut. Um das für den vorliegenden Fall $\varphi(x) = x^2$ zu zeigen, sei zunächst

$$x = 2^p$$

genommen, wobei p eine nicht negative ganze Zahl bedeuten soll; dann lassen sich die Glieder der Reihe (1) folgendermaßen in Gruppen zusammenfassen:

$$\frac{1}{(2^p)^2} + \frac{1}{(2^p+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{p+1}-1)^2} < \frac{1}{2^p},$$

$$\frac{1}{(2^{p+1})^2} + \cdots \qquad\qquad + \frac{1}{(2^{p+2}-1)^2} < \frac{1}{2^{p+1}},$$

$$\frac{1}{(2^{p+2})^2} + \cdots \qquad\qquad + \frac{1}{(2^{p+3}-1)^2} < \frac{1}{2^{p+2}}$$

usw. Die Summe der Reihe ist also für einen solchen Wert von x

$$< \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+2}} + \cdots, \qquad \text{d. i.} < \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Analog kann gezeigt werden, daß sie $> \frac{1}{2^{p+1}}$ ist.

Um diese Resultate auch auf andere Werte von x zu übertragen, gehen wir davon aus, daß für positive x jedes Glied der Reihe (1) und also auch ihre Summe mit wachsendem x abnimmt; es ist also auch für $2^p < x < 2^{p+1}$:

$$\frac{1}{2^{p+2}} < \frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} < \frac{1}{2^{p-1}}$$

und um so mehr:

$$\frac{1}{4x} < \frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2} < \frac{4}{x}. \tag{20}$$

Die letzte Ungleichung, in der p nicht mehr vorkommt, gilt also für jedes $x > 1$.

Unsere Funktion wird also im positiv Unendlichen, wenn sie überhaupt von einer bestimmten Ordnung Null wird, gerade von der ersten Ordnung Null. Andererseits folgt aus der Gleichung (3): wenn es einen Koeffizienten a von der Art geben soll, daß $\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{d x^2} - \frac{a}{x}$ dort von höherer als der ersten Ordnung Null wird, so kann dieser Koeffizient nur gleich $+1$ sein. Das veranlaßt uns, die Funktion $\frac{1}{x}$ von $\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{d x^2}$ zu subtrahieren; um das bequem ausführen zu können, müssen wir nach einer zu (1) möglichst analog gebauten Entwicklung dieser Funktion suchen. Eine solche ist die bekannte:

$$\frac{1}{x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)(x+\nu+1)}. \tag{21}$$

Setzen wir:

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{d x^2} - \frac{1}{x} = r_1(x), \tag{22}$$

so erhalten wir, indem wir entsprechende Glieder der beiden Reihen voneinander subtrahieren:

$$r_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2 (x+\nu+1)}. \tag{23}$$

Erneute Benutzung des Stieltjesschen Satzes und der Gleichung (3) zeigt, daß dieser Rest wie $\frac{1}{2x^2}$ Null wird. Es würde also am nächsten liegen, nunmehr $\frac{1}{2x^2}$ zu subtrahieren; doch besitzt diese Funktion keine so einfache Entwicklung der gewünschten Form[1]). Dagegen kommt man auch bei diesem

---

[1]) Setzt man neben die Gleichung (1) die mit ihr gleichbedeutende

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{d x^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu+1)^2}$$

zweiten Schritte zu einem einfachen Resultate, wenn man die zu (2) analoge, übrigens ebenfalls bekannte Entwicklung

$$\frac{1}{x(x+1)} = 2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)(x+\nu+1)(x+\nu+2)} \tag{24}$$

benutzt; setzt man:

$$r_1(x) - \frac{1}{2}\frac{1}{x(x+1)} = r_2(x), \tag{25}$$

so erhält man:

$$r_2(x) = 2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)^2(x+\nu+1)(x+\nu+2)}. \tag{26}$$

Bis hieher liefert das Verfahren nichts, was nicht schon bekannt wäre; aber nun läßt es sich unbegrenzt fortsetzen. Wird

$$r_2(x) - \frac{2}{3}\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = r_3(x) \tag{27}$$

gesetzt und die Entwicklung

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x(x+1)(x+2)}\\ &= 3\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)(x+\nu+1)(x+\nu+2)(x+\nu+3)}\end{aligned} \tag{28}$$

benutzt, so ergibt sich:

---

und verbindet beide mit (21), so erhält man die Gleichung:

$$\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu)^2(x+\nu+1)^2},$$

die von Ch. Hermite in einem Briefe an Stieltjes (Corresp. 2, p. 399) angegeben worden ist. Nach der Art, wie Hermite sich dort ausdrückt, könnte es scheinen, als ob dabei die Integraldarstellung der von ihm mit $J''(a)$ bezeichneten Funktion das Wesentliche wäre; tatsächlich ist das nicht der Fall, die Differenzengleichung für $J''(a)$, die allein gebraucht wird, folgt unmittelbar aus der Definition von $J(a)$ und der Differenzengleichung von $\log\Gamma(x)$.

$$(29)\quad r_3(x) = 3!\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2(x+\nu+1)(x+\nu+2)(x+\nu+3)}$$

usw.

Nun unterscheidet sich aber jedes Glied der Reihen (1), (23), (26), (29) . . . von dem entsprechenden Glied der folgenden nur durch einen Faktor, und alle Glieder aller dieser Reihen sind für positive x positiv; nimmt man von diesen Faktoren jedesmal den kleinsten, so erkennt man, daß für alle solchen x

$$r_1(x) < \frac{1}{x+1} \frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2},$$

$$r_2(x) < \frac{2}{x+2} r_1(x),$$

$$r_3(x) < \frac{3}{x+3} r_2(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

also

$$r_m(x) < \frac{1 \cdot 2 \ldots m}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)} \frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2}$$

ist. Nun ist aber für positive x

$$\lim_{m=\infty} \frac{1 \cdot 2 \ldots m}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)} = 0;$$

also folgt:

Die Funktion

$$\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2}$$

läßt sich für alle positiven reellen x durch die konvergente (nicht etwa bloß semikonvergente) Fakultätenreihe

$$(30)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x(x+1)} + \frac{2!}{3}\frac{1}{x(x+1)(x+2)} \\ &+ \frac{3!}{4}\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots \end{aligned}$$

darstellen.

Aus allgemeinen Sätzen[1]) folgt dann, daß diese Reihe auch für alle komplexen x mit positivem reellen Bestandteil konvergiert und die Funktion $\frac{d^2 \log \Gamma(x)}{dx^2}$ darstellt. Da die in (30) auftretenden rationalen gebrochenen Funktionen bekanntlich die Partialbruchzerlegungen ergeben:

$$(31)\quad \begin{aligned} &\frac{m!}{x(x+1)\ldots(x+m)} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{m}{x+1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{x+2} - + \cdots + \frac{(-1)^m}{x+m}, \end{aligned}$$

in denen die Zahlenkoeffizienten die Binomialkoeffizienten sind, so läßt sich die Integration von (30) einfach ausführen; sie liefert:

$$(32)\quad \begin{aligned} \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = &\log x + a + \tfrac{1}{2}(\log x - \log(x+1)) \\ &+ \tfrac{1}{3}(\log x - 2\log(x+1) + \log(x+2)) \\ &+ \cdots \\ + \frac{1}{m+1}\Bigg(&\log x - m\log(x+1) + \binom{m}{2}\log(x+2) - + \cdots \\ &+ (-1)^m \log(x+m)\Bigg) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

Daß die hier auftretende Integrationskonstante a gleich Null sein muß, kann aus der Gleichung (9) gefolgert werden; man kann es aber auch direkt mit Hilfe eines Satzes einsehen, der als eine Ergänzung des obenerwähnten Satzes von Stieltjes für den Fall $m = 1$ angesehen werden kann und folgendermaßen lautet:

Wenn die Funktion $\varphi(x)$ im Unendlichen von der ersten Ordnung Null wird, so lassen sich zwei Konstante α, β derart bestimmen, daß die Differenz

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(x+\nu)} - \alpha \log x - \beta$$

mit wachsendem x gegen Null konvergiert.

---

[1]) Vgl. z. B. N. Nielsen, Theorie der Gammafunktion, § 93.

Selbstverständlich hat man auch bei Anwendung dieses Satzes etwaigen Polen der Nenner auszuweichen.

Um ihn für den vorliegenden Fall zu beweisen und die für ihn geltenden Werte der Konstanten α, β zu bestimmen, verbinden wir mit der Gleichung (4) die folgende:

$$\text{(33)}\quad \log x = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{1}{1+\nu}\right)-\log\left(1+\frac{1}{x+\nu}\right)\right),$$

die aus (21) durch Integration zwischen den Grenzen 1 und x hervorgeht. Die Differenz kann geschrieben werden

$$\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}-\log x$$
$$=-\gamma-\frac{1}{x}+\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\nu}-\log\frac{\nu+1}{\nu}\right]$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{1}{x+\nu-1}\right)-\frac{1}{x+\nu}\right],$$

indem die hier auftretenden Reihen für sich konvergieren. In der letzten Reihe wird jedes Glied im Unendlichen von der zweiten Ordnung Null, die Reihe selbst also von der ersten; mit Rücksicht auf (10) ergibt sich also:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}-\log x\right]=0.$$

Da andererseits in der Entwicklung (32) für $x=+\infty$ alle Klammergrößen Null werden, die erste von der ersten, die folgenden von höherer Ordnung, so folgt, daß $\alpha = 0$ sein muß.

Eine zweite Integration liefert dann:

$$\begin{aligned}\log\Gamma(x) &= x\log x - x + \tfrac{1}{2}(x\log x-(x+1)\log(x+1)+1)\\ &+ b + \tfrac{1}{3}(x\log x - 2(x+1)\log(x+1)+(x+2)\log(x+2))\\ \text{(34)}\quad &+\cdots\\ &+\frac{1}{m+1}(x\log x - m(x+1)\log(x+1)+\cdots+(-1)^m(x+m)\log(x+m))\\ &+\cdots;\end{aligned}$$

dabei haben sich in den Klammern von der zweiten an die von Logarithmen freien Glieder weggehoben.

Die Integrationskonstante b könnte man so gut wie γ als eine eigentümliche Konstante ansehen; daß sie sich durch die bereits in die Analysis eingeführte Zahl π ausdrücken läßt, ist eigentlich für die Theorie selbst gleichgültig[1]). Es läßt sich am einfachsten zeigen, indem man noch eine andere Formel der Theorie der Gammafunktion heranzieht, etwa die Wallissche Eingrenzung der Zahl π oder das Legendresche Duplikationstheorem, die sich beide ebenfalls elementar ableiten lassen; auch die Raabesche Formel (19) läßt sich zu diesem Zweck benutzen. In den hier verfolgten Gedankengang fügt es sich am besten ein, wenn man zunächst aus (33) durch Integration zwischen den Grenzen 1 und x die folgende Gleichung ableitet:

$$\begin{aligned} &x \log x - x + 1 \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[x \log\left(1 + \frac{1}{\nu+1}\right) - (x+\nu)\log\left(1 + \frac{1}{x+\nu}\right) \right. \\ &\qquad \left. - \log\left(1 + \frac{x}{\nu+1}\right) + (\nu+1)\log\left(1 + \frac{1}{\nu+1}\right)\right] \end{aligned}$$

und diese mit (7) und der Definition (10) der Konstanten γ verbindet; man erhält so:

$$\begin{aligned} &\log \Gamma(x) - (x-1)\log x + x - 1 \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[(x+\nu)\log\left(1 + \frac{1}{x+\nu}\right) - (\nu+1)\log\left(1 + \frac{1}{\nu+1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Wird dazu:

$$-\frac{1}{2}\log x = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{x+\nu}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{\nu+1}\right)\right]$$

addiert, so kann das Resultat in der von Chr. Gudermann gegebenen Form geschrieben werden:

---

[1]) Das hat schon de Moivre Stirling gegenüber mit Recht geltend gemacht; vgl. den Bericht von J. Eggenberger, Diss., Bern 1893, p. 35, 42 = Bern Mitt. 1893, p. 142, 149.

$$\log \Gamma(x) - (x - \tfrac{1}{2}) \log x + x - 1$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\left(x + \nu + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x+\nu}\right) - 1 \right]$$
$$- \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{\nu+1}\right) - 1 \right],$$

indem jede der beiden Summen für sich konvergiert. Die erste von ihnen erfüllt die Voraussetzungen des Stieltjesschen Satzes[1]) bzw. seiner p. 388 gegebenen Verallgemeinerung; man hat also:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\log \Gamma(x) - (x - \tfrac{1}{2}) \log x + x - 1\right] = - s_3,$$

wenn mit s_3 die Summe

$$s_3 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) - 1 \right] \tag{35}$$

bezeichnet wird. Diese kann in

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[(\nu + 1) \log \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) - 1 - \frac{1}{2\nu} \right] + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\nu} - \log \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \right]$$

umgeformt werden, ist also nach (10), (15) und (18) gleich $1 - \log \sqrt{2\pi}$. Also ergibt sich schließlich

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\log \Gamma(x) - (x - \tfrac{1}{2}) \log x + x\right] = \log \sqrt{2\pi}$$

und folglich muß die Konstante b in (34) gleich $\log \sqrt{2\pi}$ sein.

Übergang von Logarithmus zum Numerus gibt schließlich noch die Darstellung der Gammafunktion selbst durch das unendliche Produkt

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\, x^x e^{-x} \sqrt{\frac{x^x e}{(x+1)^{x+1}}} \sqrt[3]{\frac{x^x (x+2)^{x+2}}{(x+1)^{2(x+1)}}} \times \tag{36}$$
$$\sqrt[4]{\frac{x^x (x+2)^{3(x+2)}}{(x+1)^{3(x+1)} (x+3)^{x+3}}} \sqrt[5]{\frac{x^x (x+2)^{6(x+2)} (x+4)^{x+4}}{(x+1)^{4(x+1)} (x+3)^{4(x+3)}}} \cdots$$

[1]) Durch diesen Satz erledigt sich auch das von Gudermann, Journ. f. Math., 29, p. 211 ausgesprochene Bedenken, wieso seine Formel und die Stirlingsche zugleich richtig sein könnten.

Sie teilt mit der Stirlingschen Formel den Vorzug, das Verhalten der Gammafunktion für unendlich große positive Argumentwerte erkennen zu lassen, ist aber wie die vorangehenden Entwicklungen für alle x mit positivem reellen Bestandteil wirklich konvergent, nicht bloß semikonvergent. Übrigens treten in ihr keine Bernoullischen oder Stirlingschen Zahlen, sondern nur Binomialkoeffizienten auf. Beim Vergleich mit der Stirlingschen Formel beachte man, daß asymptotisch

$$(x+p)^{x+q} \sim x^{x+q} e^p,$$

und daß folglich die in (35) auftretende Quadratwurzel asymptotisch gleich $\frac{1}{\sqrt{x}}$, jede der folgenden Wurzelgrößen aber asymptotisch gleich 1 ist.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1913

Band/Volume: 1913

Autor(en)/Author(s): Burkhardt Heinrich

Artikel/Article: Zur Theorie der Gammafunktion, besonders über ihre analytische Darstellung für grosse positive Werte des Arguments 383-396