

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

---

1914. Heft II

Mai- bis Julisitzung.

---

München 1914

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



## Zur Theorie der Lichtbogenschwingungen bei Wechselstrombetrieb.

Von A. Sommerfeld.

Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1914.

Die Herren Rukop und Zenneck haben kürzlich<sup>1)</sup> interessante Versuche über die Schwingungen in einem Kondensatorkreis veröffentlicht, der durch einen Lichtbogen mit einem von Wechselstrom gespeisten Primärkreis gekoppelt ist. Wenngleich durch die systematische Anordnung der zahlreichen Aufnahmen (im ganzen 68 oscillographische oder mit der Braunschens Röhre gewonnene Photogramme) die theoretischen Verhältnisse von den Experimentatoren selbst schon hinreichend geklärt sind, so schien es doch nicht überflüssig, eine quantitative Theorie zu entwickeln, um so mehr als es sich um ein Problem handelt, das möglicherweise für die drahtlose Telegraphie bedeutungsvoll werden kann, das Problem: die Wechselzahl eines Generators auf den dreifachen (resp. fünffachen, siebenfachen etc.) Wert heraufzutransformieren.

Der wesentliche Schritt, um die mathematische Behandlung einfach und durchsichtig zu gestalten, war der, die Charakteristik des Lichtbogens aufs äußerste zu idealisieren. Nicht nur wurde angenommen, daß die Spannung des Lichtbogens durch den augenblicklichen Wert des im Lichtbogen fließenden Stromes gegeben sei (daß also von der Vorgeschichte des Stromes und den dadurch bedingten Temperatureinflüssen

---

<sup>1)</sup> Ann. d. Phys. 44, p. 97, 1914.

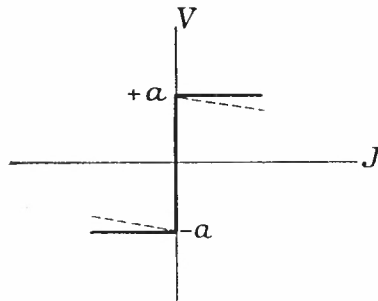


Fig. 1.

abgesehen werden kann), sondern es wurde diese Spannung auch als konstant und für die eine und die andere Stromrichtung als entgegengesetzt gleich angesetzt. Es wurde also die in Fig. 1 ausgezogene Charakteristik ( $V, J$ ) zu Grunde gelegt. Dieselbe ist für die Gleichstrom-Lichtbogenschwingungen<sup>1)</sup> nach der Duddelschen Bedingung bekanntlich unzureichend; für deren Entstehen ist vielmehr wesentlich, daß die Charakteristik mit zunehmendem Strome fällt, wie in einfachster Schematisierung durch die punktierten Linien der Fig. 1 angedeutet wird. Es ist aber bereits von Rukop und Zenneck betont, daß Wechselstrom-Lichtbogenschwingungen auch bei durchweg steigender (resp. nicht fallender) Charakteristik möglich sind und daß hier im allgemeinen zwei verschiedene Erregungsarten zu unterscheiden sind: die Erregung der Schwingungen infolge fallender Charakteristik wie bei Gleichstrom und die insbesondere bei Wechselstrom wirksame Erregung infolge einer plötzlichen Neigungsänderung der Charakteristik. Indem wir die Charakteristik wie in Fig. 1 schematisieren, verzichten wir auf die erste Erregungsart, bringen aber

<sup>1)</sup> Die sogenannten „Lichtbogenschwingungen erster Art.“ Für die Theorie der „Lichtbogenschwingungen zweiter Art“, bei denen der Lampenstrom während eines endlichen Bruchteils jeder Periode erlischt, ist dagegen unsere Charakteristik bereits von Herrn H. Barkhausen (Diss. Göttingen 1907) erfolgreich verwertet worden.

die zweite zum schärfsten Ausdruck. Wir kommen dabei zu theoretischen Resultaten, die das Neue der Wechselstromversuche treu wiedergeben und zwar auf mathematisch einfachem Wege mittels geschlossener, leicht diskutierbarer Ausdrücke. Die in Fig. 1 punktierte Charakteristik, welche das Hinzutreten der obengenannten ersten Erregungsart bewirkt, wird von anderer Seite behandelt werden.

Herrn Kollegen Zenneck verdanke ich die Anregung zu der nachfolgenden Studie und mehrfachen sachkundigen Rat bei ihrer Durchführung.

### § 1. Vernachlässigung der Dämpfung im Kondensatorkreis.

Schaltung und Bezeichnungen sind aus Fig. 2 ersichtlich.  $x$  sei der Speisestrom,  $y$  der Kondensatorstrom. Dann ist  $J = x - y$  der Lampenstrom. Die Zeitpunkte, in denen Strom und Spannung im Lichtbogen sich umkehren, sind gegeben durch  $J = 0$ , d. h.  $x = y$ . Wir legen diese Zeitpunkte auf

$$(1) \quad t = 0, \quad \pm T, \quad \pm 2T, \quad \dots$$

indem wir unter  $T$  die Halbperiode des Speisestromes verstehen. Die elektromotorische Kraft im Speisestromkreis setzen wir an zu

$$(2) \quad E = A \cos p(t - t_0), \quad p = \frac{\pi}{T}.$$

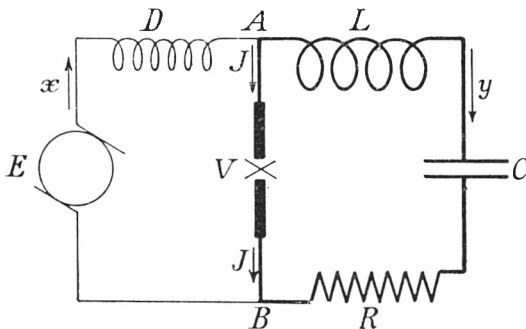


Fig. 2.

$p$  ist also die Kreisfrequenz des Speisestromes; die Phase  $t_0$  der elektromotorischen Kraft müssen wir zunächst unbestimmt lassen, da wir über den Zeitpunkt  $t = 0$  bereits verfügt haben als Phase der Umkehr des Lichtbogenstromes. Die Phase  $t_0$  der elektromotorischen Kraft wird sich erst am Ende der mathematischen Durchrechnung ergeben.

$D$  ist die Selbstinduktion einer Drosselspule im Speisekreise,  $C$ ,  $L$ ,  $R$  Kapazität, Selbstinduktion und Widerstand im Kondensatorkreise. Wir setzen in diesem § zunächst  $R = 0$ , wodurch die Rechnung von allem mathematischen Ballast befreit wird. Im nächsten § werden wir die nicht unwesentlichen Modifikationen nachtragen, die bei Berücksichtigung des Widerstandes  $R$  in mathematischer und physikalischer Hinsicht entstehen; unter  $R$  sind dabei nicht nur die Ohmschen Widerstände sondern auch die Verluste zu verstehen, die in der Kapazität  $C$  oder (bei der Verwendung in der drahtlosen Telegraphie) in der Ausstrahlung ihren Ursprung haben.

Mit  $\eta$  bezeichnen wir die Ladung des Kondensators, so daß

$$(3) \quad y = \frac{d\eta}{dt},$$

mit  $q$  die Kreisfrequenz des Kondensatorkreises, so daß

$$(4) \quad q^2 = \frac{1}{LC};$$

das Verhältnis dieser Frequenz zur primären Wechselstromfrequenz  $p$  ist, wie von vornherein klar, für die Stärke der Kondensatorschwingungen bestimmend. Die Differentialgleichungen unseres Problems lauten dann:

$$(5) \quad E = D \frac{dx}{dt} + V, \quad (6) \quad V = L \left( \frac{d^2 \eta}{dt^2} + q^2 \eta \right),$$

wo  $V$  die Spannung zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  der Lichtbogenbrücke bedeutet.

Diese Spannung  $V$  ist nun bei der in Fig. 1 angenommenen (ausgezogenen) Charakteristik und nach unserer Annahme über die Phasen der Umkehr des Lichtbogenstromes als explizite

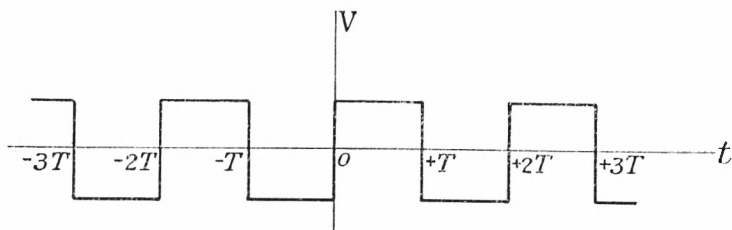


Fig. 3.

Funktion der Zeit durch Fig. 3 gegeben:  $V$  springt zwischen den konstanten Werten  $\pm a$  hin und her und zwar in den Zeitpunkten (1). Wir entwickeln  $V$  in eine Fouriersche Reihe, welche wegen des (vom Zeitpunkte  $t = 0$  beurteilten) ungeraden Charakters der  $V$ -Linie nur die Sinus-Glieder enthalten und nach Vielfachen des Argumentes  $\frac{2\pi t}{2T} = p t$  fortschreiten wird:

$$(7) \quad V = \sum a_n \sin n p t.$$

Die Ausrechnung gibt

$$a_n = \begin{cases} 0 & \dots n \text{ gerade} \\ \frac{4a}{\pi n} & \dots n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Also

$$(8) \quad V = \frac{4a}{\pi} \sum_{1, 3, 5, \dots} \frac{1}{n} \sin n p t.$$

Um die Gleichung (6) für die Kondensatorladung  $\eta$  zu integrieren, setzen wir an

$$(9) \quad \eta = \sum b_n \sin n p t.$$

Der Vergleich mit (7) resp. (8) liefert

$$(10) \quad b_n = \frac{a_n}{L} \frac{1}{q^2 - n^2 p^2} = \frac{4a}{L \pi n} \frac{1}{q^2 - n^2 p^2}.$$

Allerdings ist der Ansatz (9) nur eine partikuläre Lösung von (6); um die allgemeine Lösung hinzuschreiben, hätte man zu (9) noch hinzuzufügen:

$$(11) \quad a \cos qt + \beta \sin qt$$

als freie Schwingung des Kondensatorkreises. Wenn wir nun auch  $R = 0$  gesetzt haben, so können wir doch annehmen, daß im Verlaufe der Zeit bei Dauerbetrieb die freie Schwingung (11) durch Dämpfung verschwunden sei. Wir werden also mit der partikulären Lösung (9) allein operieren und zeigen, daß wir mit ihr allen Bedingungen des Problems genügen können. Aus (9) folgt noch durch Differentiation nach  $t$

$$(12) \quad y = \sum n p b_n \cos n p t = \frac{4ap}{L\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\cos n p t}{q^2 - n^2 p^2}.$$

Wir haben sodann die Gleichung (5) für den Speisestrom  $x$  zu integrieren. Es wäre auch hier möglich aber unnütz unständlich, die Lösung in Form von Fourierschen Reihen anzusetzen. Bei der Einfachheit der Gleichung (5) kommen wir nämlich durch direkte Quadratur zu einer geschlossenen Formel für  $x$ , die man auf dem Umweg über Fouriersche Reihen erst durch Summation derselben erhalten würde. Allerdings müssen wir dann, wegen des Sprunges in  $V$ , zwei verschiedene Intervalle und zwei verschiedene Darstellungen für  $x$  unterscheiden:

$$1) \quad 0 < t < T, \quad x = x_1 = \frac{1}{D} \int (E - a) dt,$$

$$2) \quad -T < t < a, \quad x = x_2 = \frac{1}{D} \int (E + a) dt.$$

Dies liefert wegen (2)

$$(13) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{A}{pD} \sin p(t - t_0) - \frac{a}{D} t + c_1, \\ x_2 = \frac{A}{pD} \sin p(t - t_0) + \frac{a}{D} t + c_2. \end{cases}$$

Die beiden Integrationskonstanten  $c_1, c_2$  bestimmen sich leicht wie folgt: Zunächst muß  $x$  stetig verlaufen an den Übergangsstellen  $t = 0, t = \pm T$ , und zwar an letzterer in dem

Sinne, daß  $x_1$  für  $t = +T$  gleich  $x_2$  für  $t = -T$  wird. Wegen der Stetigkeit bei  $t = 0$  erhält man sofort

$$(14) \quad c_1 = c_2 = c,$$

wodurch gleichzeitig der stetige Anschluß bei  $t = \pm T$  gesichert ist, vgl. Fig. 4; hier stellt die gebrochene Linie  $NO P$  die Terme  $\frac{\pm at}{D}$  in  $x_1$  bzw.  $x_2$  dar, welche, sich periodisch fortgesetzt, in  $N$  und  $P$ , stetig aneinander anschließen (wenn auch natürlich mit unstetigen Neigungen). Um nun die Größe von  $c$  zu bestimmen, haben wir nur zu beachten, daß im Speisekreis ein wirklicher Wechselstrom fließen soll, d. h. ein Strom vom Mittelwert Null. Da nun in (13) der erste Term rechts für sich den Mittelwert 0 ergibt, der zweite Term aber, nach seiner Darstellung in Fig. 4, den durch die strichpunktierte Gerade dargestellten Mittelwert  $\frac{-aT}{2D}$  besitzt, so muß die Integrationskonstante  $c$  so gewählt werden, daß sie diesen Mittelwert gerade aufhebt:

$$(15) \quad c = \frac{aT}{2D}.$$

Denselben Wert findet man natürlich auch analytisch aus der Bedingung

$$\int_0^T x_1 dt + \int_{-T}^0 x_2 dt = 0.$$

Mit (14) und (15) lautet die Darstellung (13) für den Speisestrom

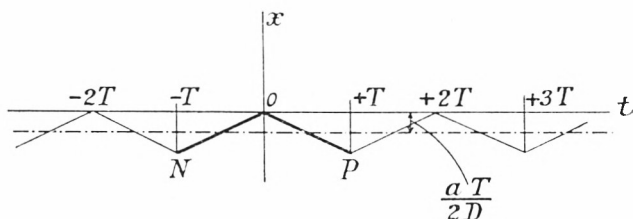


Fig. 4.



$$(16) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{A}{pD} \sin p(t - t_0) - \frac{a}{D} \left( t - \frac{T}{2} \right), \quad 0 < t < T, \\ x_2 &= \frac{A}{pD} \sin p(t - t_0) + \frac{a}{D} \left( t + \frac{T}{2} \right), \quad -T < t < 0. \end{aligned}$$

Für Werte von  $t$  außerhalb des Intervalles  $-T < t < +T$  ergibt sich der Wert des Stromes  $x$  natürlich durch periodische Wiederholung des für das Intervall  $-T < t < +T$  erhaltenen Verlaufes, wie bereits in Fig. 4 teilweise (d. h. mit Ausschluß des ohnehin periodischen ersten Termes in (16)) angedeutet. Dies bedeutet, daß wir z. B. für das Intervall  $(2n - 1)T < t < (2n + 1)T$  nicht die Formeln (16) direkt anzuwenden, sondern daß wir darin  $t$  durch  $t - 2nT$  zu ersetzen haben.

Nachdem wir in (12) und (16)  $y$  und  $x$  einzeln dargestellt haben, bleibt uns übrig, sie miteinander in Beziehung zu setzen. Dies geschieht durch die am Anfange dieses § geforderten Bedingungen des momentanen Lampenstromerlöschens

$$(17) \quad x = y \quad \text{für} \quad t = 0, \pm T, \pm 2T, \dots$$

Bezeichnet man mit  $x_0$  den Wert von  $x = x_1 = x_2$  für  $t = 0$ , ebenso mit  $y_0$  den Wert von  $y$  für  $t = 0$ , entsprechend mit  $x_{\pm T}$  die Werte von  $x$  für  $t = +T$  oder  $t = -T$ , so schließt man sofort aus (12) und (16)

$$\begin{aligned} x_{+T} &= x_{+3T} = \dots = -x_0 \\ x_{+2T} &= x_{+4T} = \dots = +x_0 \\ y_{+T} &= y_{+3T} = \dots = -y_0 \\ y_{+2T} &= y_{+4T} = \dots = +y_0. \end{aligned}$$

Infolgedessen sind die sämtlichen Übergangsbedingungen (17) erfüllt, sobald wir nur die eine Bedingung für  $t = 0$  erfüllt haben

$$(17a) \quad x_0 = y_0.$$

Zu ihrer Befriedigung haben wir gerade noch einen unbestimmten Parameter zur Verfügung, die Phase  $t_0$  im Ausdrücke der elektromotorischen Kraft. Indem wir diese

gemäß der Bedingung (17a) wählen, ist unser Problem mathematisch abgeschlossen.

Aus der ersten oder zweiten Gleichung (16) ergibt sich als Wert von  $x$  für  $t = 0$  mit Rücksicht auf  $T = \frac{\pi}{p}$ :

$$(18) \quad x_0 = -\frac{A}{pD} \sin pt_0 + \frac{\pi}{2} \frac{a}{pD}.$$

Andererseits folgt aus (12) für  $t = 0$ :

$$(19) \quad y_0 = \frac{4ap}{L\pi} Q, \quad Q = \sum_{1,3,5,\dots} \frac{1}{q^2 - n^2p^2}.$$

Die hier eingeführte Summe  $Q$  ist im wesentlichen die bekannte Partialbruchzerlegung der Tangens-Funktion. Man hat nämlich<sup>1)</sup>

$$(19a) \quad \operatorname{tg} z = \sum_{1,3,5,\dots} \frac{8z}{n^2\pi^2 - 4z^2},$$

also

$$\operatorname{tg} \frac{\pi q}{2p} = \frac{4qp}{\pi} \sum_{1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2p^2 - q^2},$$

mithin

$$(20) \quad -Q = \sum_{1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2p^2 - q^2} = \frac{\pi}{4qp} \operatorname{tg} \frac{\pi q}{2p}.$$

Somit ergibt sich

$$(21) \quad y_0 = -\frac{a}{Lq} \operatorname{tg} \frac{\pi q}{2p}.$$

Wegen (18) und (21) geht die Gleichung (17a) über in

$$\frac{A}{pD} \sin pt_0 = \frac{\pi}{2} \frac{a}{pD} + \frac{a}{Lq} \operatorname{tg} \frac{\pi q}{2p}.$$

Indem wir die Abkürzung einführen

$$(22) \quad \xi = \frac{\pi q}{2p},$$

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. H. Burkhardt, Algebraische Analysis, § 84, Gleichung (12), p. 191.

schreiben wir die vorhergehende Bedingung übersichtlicher so:

$$(23) \quad A \sin pt_0 = \frac{\pi}{2} a \left( 1 + \frac{D \operatorname{tg} \xi}{L \xi} \right).$$

Somit ist die ursprünglich unbestimmt gelassene Phase  $t_0$  eindeutig bestimmt.

Wir sehen aber, daß diese Bestimmung nicht immer möglich ist. Vielmehr muß, damit der Sinus absolut genommen kleiner als 1 ausfällt, die Bedingung erfüllt sein

$$(24) \quad A > \frac{\pi}{2} a \left| 1 + \frac{D \operatorname{tg} \xi}{L \xi} \right|.$$

Wenn sie verletzt ist, bestehen unsere bisherigen Betrachtungen nicht zurecht, und es treten neue Schwingungsformen ein, die sogenannten Lichtbogenschwingungen zweiter Art, bei denen der Lampenstrom während einer endlichen Zeit innerhalb jeder Halbperiode erlischt. Im Rahmen unserer bisherigen Rechnung (Vernachlässigung des Widerstandes) sind die Bedingungen für diese Schwingungen jedenfalls dann gegeben, wenn  $\operatorname{tg} \xi$  sehr groß wird; dies tritt nach (22) immer dann ein, wenn die Eigenfrequenz  $q$  des Kondensatorstromes ein ungerades Vielfaches der Frequenz  $p$  des Speisestromes ist. In diesem Falle wird auch die Stromamplitude im Kondensatorstrom sehr groß, wie aus (21) oder auch unmittelbar aus (12) hervorgeht. Wir haben einen typischen Fall von Resonanz und ein unendliches Anwachsen einer der Partialamplituden, aus denen sich  $y$  in (12) zusammensetzt.

Wir beschließen die Behandlung des dämpfungsfreien Falles mit der Berechnung des effektiven Kondensatorstromes, wie er direkt an einem Hitzdrahtinstrument gemessen wird. Der effektive Strom wird mit  $\bar{y}$  bezeichnet; er ist zu definieren durch

$$y^2 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y^2 dt.$$

Indem wir aus (12) einsetzen und beachten, daß

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \cos^2 npt \, dt = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \cos npt \cos mpt \, dt = 0$$

ist, ergibt sich

$$(25) \quad \bar{y}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{4ap}{L\pi} \right)^2 Q_1, \quad Q_1 = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{(q^2 - n^2 p^2)^2}.$$

Die Summe  $Q_1$  läßt sich aus der früheren Summe  $Q$  in Gleichung (19) durch Differentiation ableiten. Es ist nämlich

$$\frac{dQ}{dq} = -2qQ_1,$$

also wegen (20) und (22)

$$Q_1 = \frac{\pi}{8pq} \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{q} \operatorname{tg} \frac{\pi q}{2p} \right) = \frac{\pi^3}{32p^3 q} \frac{d}{d\xi} \frac{\operatorname{tg} \xi}{\xi} = \frac{\pi^4}{64p^4} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \frac{\operatorname{tg} \xi}{\xi}.$$

In (25) eingesetzt, ergibt sich

$$(26) \quad \bar{y}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{a\pi}{2Lp} \right)^2 \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \frac{\operatorname{tg} \xi}{\xi} = \frac{1}{2} \left( \frac{a\pi}{2Lp} \right)^2 \frac{\xi - \sin \xi \cos \xi}{\xi^3 \cos^2 \xi}.$$

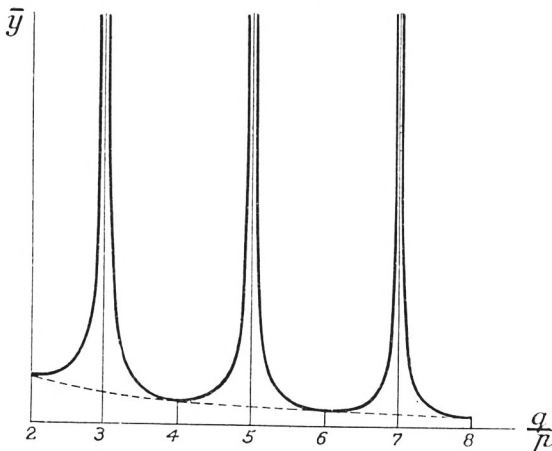


Fig. 5.

Fig. 5 stellt den effektiven Strom  $y$  in seiner Abhängigkeit von  $\xi$ , d. h. im wesentlichen dem Frequenzverhältnis  $q:p$  dar. Die Maxima von  $\bar{y}$  liegen an den Stellen

$$\cos \xi = 0, \text{ d. h. } q = \text{unger. Vielf. von } p$$

und sind unendlich groß. Wegen des Auftretens von Schwingungen zweiter Art und wegen Vernachlässigung der Dämpfung haben sie keine physikalische Bedeutung. Die Minima ergeben sich in hinreichender Näherung für

$$\sin \xi = 0, \text{ d. h. } q = \text{ger. Vielf. von } p.$$

Ihre Größe ist proportional zu  $\frac{1}{\xi}$ ; sie liegen also auf einer gleichseitigen Hyperbel.

Wenn auch ein zahlenmäßiger Vergleich mit den Beobachtungen wegen Vernachlässigung des Widerstandes untunlich ist, so erkennt man doch in dem Verlauf dieser Figur bereits die wesentlichen Züge der von den Herren Rukop und Zenneck gefundenen Resultate sowie die Möglichkeit, die Frequenz  $p$  einer Wechselstrommaschine auf ein ungerades Vielfaches derselben mit erheblicher Größe der Amplitude zu transformieren.

## § 2. Berücksichtigung der Dämpfung.

Wir behalten die Schaltung in Fig. 1 und alle früheren Bezeichnungen bei. Indem wir den Widerstand  $R$  berücksichtigen, führen wir die Abkürzung ein:

$$(27) \quad \varrho = \frac{R}{L}.$$

Die Differentialgleichungen des Problems lauten dann:

$$(28) \quad E = D \frac{dx}{dt} + V,$$

$$(29) \quad V = L \left( \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \varrho \frac{d\eta}{dt} + q^2 \eta \right).$$

(28) ist mit der früheren Differentialgleichung (5) identisch; auch der Verlauf von  $V$  und seine Fouriersche Darstellung in Gleichung (8) bleibt — bei gleicher Verfügung über die Zeitpunkte der Stromumkehr im Lichtbogen — ungeändert erhalten. Deshalb überträgt sich auch die Darstellung (16) für den Speisestrom und der Wert (18) desselben für den Zeitpunkt  $t = 0$  ohne Änderung auf den jetzigen Fall. Abzuändern ist nur die Integration der Differentialgleichung (29) wegen des hinzugetretenen Dämpfungsgliedes. Wir setzen jetzt — im Gegensatz zu (9) — an

$$(30) \quad \eta = \sum b_n \sin(npt - \gamma_n)$$

sowie — in Übereinstimmung mit (7) und (8) —

$$V = \sum a_n \sin npt = \frac{4a}{\pi} \sum_{1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \sin npt.$$

Aus der Differentialgleichung (29) bestimmen sich dann die beiden Reihen von Unbekannten  $b_n$ ,  $\gamma_n$  in bekannter Weise zu

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} b_n &= \frac{a_n}{L \sqrt{(q^2 - n^2 p^2)^2 + (onp)^2}} = \frac{4a}{L\pi n} \frac{1}{\sqrt{(q^2 - n^2 p^2)^2 + (onp)^2}} \\ \operatorname{tg} \gamma_n &= \frac{onp}{q^2 - n^2 p^2}, \quad \cos \gamma_n = - \frac{n^2 p^2 - q^2}{\sqrt{(q^2 - n^2 p^2)^2 + (onp)^2}}. \end{aligned} \right.$$

Von der Hinzufügung einer freien Schwingung im Kondensatorkreis kann man aus den schon im dämpfungsfreien Falle bei Gleichung (11) dargelegten Gründen absehen. Von der Ladung  $\eta$  gehen wir sogleich zum Strome  $y = \frac{d\eta}{dt}$  über und erhalten

$$(32) \quad y = \sum b_n np \cos(npt - \gamma_n) = \frac{4ap}{L\pi} \sum_{1,3,5,\dots} \frac{\cos(npt - \gamma_n)}{\sqrt{(q^2 - n^2 p^2)^2 + (onp)^2}}.$$

Der Kondensatorstrom reproduziert sich ebenso wie im dämpfungsfreien Falle nach der Periode  $2T$  des Speisestromes und wechselt je nach der Halbperiode  $T$  das Vorzeichen. Wir haben daher, wenn wir wie früher mit  $y_0$  den Strom für  $t = 0$  bezeichnen:

$$y_{+T} = y_{+3T} = \cdots = -y_0,$$

$$y_{+2T} = y_{+4T} = \cdots = +y_0.$$

Die früher geforderten Bedingungen (17) für die Zeitpunkte des momentanen Erlöschens des Lampenstromes sind daher auch jetzt sämtlich erfüllt, sobald nur für die Befriedigung der einen Bedingung

$$(33) \quad x_0 = y_0$$

gesorgt ist, was wiederum durch geeignete Wahl der Phase  $t_0$  im Ausdrucke (2) der elektromotorischen Kraft zu geschehen hat.

Bevor wir hierauf eingehen, wollen wir zunächst einen bequemen Ausdruck für den Stromwert  $y_0$  ableiten. Dieser ist nach (32) und (31):

$$(34) \quad y_0 = -\frac{4ap}{L\pi} \sum_{1,3,5,\dots} \frac{n^2 p^2 - q^2}{(n^2 p^2 - q^2)^2 + (\varrho np)^2}.$$

Um den Anschluß an die früher in (22) definierte Größe  $\xi$  zu gewinnen, führen wir die Abkürzungen ein:

$$(35) \quad \xi = \frac{\pi \sqrt{q^2 - \frac{\varrho^2}{4}}}{2p}, \quad \eta = \frac{\pi \varrho}{4p},$$

deren erstere mit  $\varrho = 0$  in der Tat in das frühere  $\xi$  übergeht. Es wird dann nach (19a) zunächst

$$(36) \quad \frac{\operatorname{tg}(\xi + i\eta)}{\xi + i\eta} = \frac{8p^2}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2 p^2 - \left( \sqrt{q^2 - \frac{\varrho^2}{4}} + \frac{i\varrho}{2} \right)^2}.$$

Nach einiger Rechnung findet man, wenn  $\Re$  und  $\Im$  die Zeichen des reellen und imaginären Teiles der dahinter stehenden komplexen Ausdrücke bedeuten:

$$(37) \quad \Re \frac{\operatorname{tg}(\xi + i\eta)}{\xi + i\eta} = \frac{8p^2}{\pi^2} \varrho \sqrt{q^2 - \frac{\varrho^2}{4}} \sum_{1,3,5,\dots} \frac{1}{(n^2 p^2 - q^2)^2 + (\varrho np)^2}$$

$$(38) \quad \frac{1}{\xi} \Re \operatorname{tg}(\xi + i\eta) = \frac{8p^2}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\dots} \frac{n^2 p^2 - q^2}{(n^2 p^2 - q^2)^2 + (qnp)^2}.$$

Somit nach (34)

$$(39) \quad y_0 = -\frac{a\pi}{2Lp} \frac{1}{\xi} \Re \operatorname{tg}(\xi + i\eta).$$

Will man die komplexen Ausdrücke nachträglich durch reelle ersetzen, so beachte man, daß

$$(40) \quad \operatorname{tg}(\xi + i\eta) = \frac{\sin 2\xi + i \mathfrak{S}in 2\eta}{\cos 2\xi + \mathfrak{C}of 2\eta},$$

$$(41) \quad \frac{\operatorname{tg}(\xi + i\eta)}{\xi + i\eta} = \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left\{ \frac{\xi \sin 2\xi + \eta \mathfrak{S}in 2\eta}{\cos 2\xi + \mathfrak{C}of 2\eta} + i \frac{\xi \mathfrak{S}in 2\eta - \eta \sin 2\xi}{\cos 2\xi + \mathfrak{C}of 2\eta} \right\}.$$

Man beweist dies unschwer, indem man die Tangensfunktion durch die Exponentialfunktion darstellt;  $\mathfrak{S}in$  und  $\mathfrak{C}of$  bedeuten die hyperbolischen Funktionen. Nach (40) ergibt sich also aus (39):

$$(42) \quad y_0 = -\frac{\pi a}{2Lp\xi} \frac{\sin 2\xi}{\cos 2\xi + \mathfrak{C}of 2\eta}.$$

Nunmehr gehen wir auf die noch zu erfüllende Gleichung (33) zurück. Da  $x_0$  wie bemerkt den früheren Wert (18) ungeändert beibehält, können wir diese Bedingung folgendermaßen schreiben:

$$(43) \quad A \sin pt_0 = \frac{\pi a}{2} \left( 1 + \frac{D}{L} \frac{1}{\xi} \frac{\sin 2\xi}{\cos 2\xi + \mathfrak{C}of 2\eta} \right).$$

Mit  $R = 0$ ,  $q = 0$ ,  $\eta = 0$  geht sie, wie man sofort sieht, in die frühere Bedingung (23) über, indem

$$\frac{\sin 2\xi}{1 + \cos 2\xi} = \operatorname{tg} \xi$$

wird. Die Bedingung (43) bestimmt, wie früher, die Phase  $t_0$  im Ausdrucke der elektromotorischen Kraft, wenn sich daraus



für  $|\sin pt_0|$  ein Wert kleiner als 1 ergibt, und weist im entgegengesetzten Falle darauf hin, daß unsere bisherigen Betrachtungen ihre Gültigkeit verlieren und daß eine neue Schwingungsform einsetzt. Während dies aber im dämpfungs-freien Falle in der Nähe jedes der (unendlich hohen) Maxima der Stromkurve eintrat, wo die Frequenz des Kondensator-kreises ein ungerades Vielfaches der Frequenz des Speise-stromes war, wird unsere Bedingung (43) jetzt, wenn über-haupt, nur in der Nähe der höheren dieser (wegen der Dämpfung endlichen) Maxima verletzt.

Denkt man sich nämlich wie in Fig. 6 die Klammer der rechten Seite von (43)

$$(44) \quad Z = 1 + \frac{D}{L} \frac{1}{\xi} \frac{\sin 2\xi}{\cos 2\xi + \zeta \operatorname{Coj} 2\eta}$$

als Ordinate zu der mit  $\xi$  im wesentlichen proportionalen Abszisse  $\frac{q}{p}$  aufgetragen, so erhält man eine Kurve mit unend-lich vielen Maxima und Minima von abnehmender Größe. Im Sinne der Gleichung (43) haben wir diese Kurve mit den zur Abszissenachse parallelen Geraden

$$(45) \quad z = \pm \frac{2}{\pi} \frac{A}{a}$$

zu schneiden, welche einen diese Achse umgebenden Streifen aussondern. Wir können nun offenbar sagen: Jeder Punkt der Kurve (44), der im Innern des Streifens (45) liegt, entspricht einem Falle, für den Gleichung (43) erfüllt werden kann; jeder Punkt, der außerhalb des Streifens liegt, entspricht keinem möglichen Schwingungszustande von dem bisher unter-suchten Typus, da sich zu einem solchen nach (43) keine mög-liche Phase der elektromotorischen Kraft bestimmen läßt. Die Grenze für das Versagen des bisherigen und das Auftreten eines neuen Schwingungstypus (Schwingungen zweiter Art) wird durch die Schnittpunkte unserer Kurve mit den Rändern des Streifens markiert.

Aus der abnehmenden Höhe der aufeinanderfolgenden Kurvenzacken zeigt sich nun sofort, daß die Möglichkeit für Lichtbogenschwingungen zweiter Art nur bei den ersten dieser Zacken gegeben ist, daß also von einer gewissen Ordnungszahl an sicher keine Schwingungen zweiter Art mehr auftreten können. Wie hoch diese Ordnungszahl ist, hängt einerseits von dem Charakter der Kurve  $Z$  ab, nämlich der Schnelligkeit der Abnahme ihrer aufeinanderfolgenden Zacken, welche durch die Konstante  $\eta$ , d. i. die Dämpfung, bestimmt wird, sodann aber namentlich von dem Abstände der beiden Geraden  $z$ , d. h. dem Verhältnis  $\frac{A}{a}$ . Da wir uns die Wechselstrommaschine und die Amplitude  $A$  ihrer elektromotorischen Kraft gegeben denken, kommt es bei dem Verhältnis  $\frac{A}{a}$  auf die Beschaffenheit des Lichtbogens an. Ist die Lichtbogenspannung  $a$  verhältnismäßig stark, so liegen unsere beiden Geraden  $z$  verhältnismäßig nahe aneinander: dieser Umstand begünstigt das Auftreten von Schwingungen zweiter Art und bewirkt, daß sie sich noch bei höheren Ordnungszahlen der Zacken unserer Kurve  $Z$  ausbilden können. Ist die Lichtbogenspannung  $a$  klein, so rücken unsere beiden Geraden weiter auseinander: dann ist das Auftreten von Schwingungen zweiter Art erschwert und nur bei den niedrigeren Ordnungszahlen zu erwarten.

Fig. 6 ist konstruiert für die Zahlenwerte:

$$\frac{2}{\pi} \frac{A}{a} = 5, \quad \frac{D}{L} = 10, \quad \frac{R}{L} = 100 \text{ sec}^{-1}, \quad p = 100 \pi \text{ sec}^{-1}.$$

Dann wird nach (27) und (35):

$$\varrho = 100, \quad 2\eta = \frac{1}{2}, \quad \cos 2\eta = 1,13.$$

Unsere Kurve verläuft außerhalb des Streifens

$$z = \pm \frac{2}{\pi} \frac{A}{a}$$

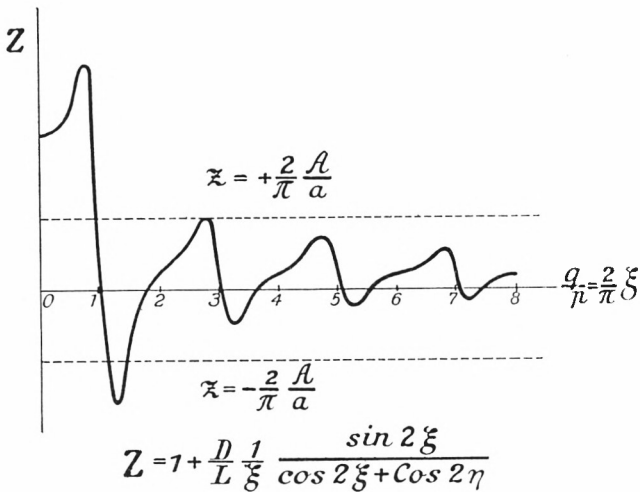


Fig. 6.

nur in der Nähe des ersten positiven und negativen Maximums und berührt seine Begrenzung mit ihrem zweiten positiven Maximum. Von da ab ist die Bedingung (43) ausnahmslos erfüllbar und Lichtbogenschwingungen zweiter Art treten nicht mehr auf.

Eigentümlich ist, daß die Maxima unserer Kurve nicht genau mit den Stellen  $\frac{q}{p} = 1, 3, \dots$  zusammenfallen, wo die Maxima des effektiven Stromes liegen, sondern daß sie je in ein positives und negatives Maximum zerfallen, die beiderseits gegen jene Stellen verschoben sind. Infolgedessen gibt es gerade in der Nähe der Stelle  $\frac{q}{p} = 1$  Punkte innerhalb unseres Streifens, die scheinbar nicht zu Lichtbogenschwingungen zweiter Art Anlaß geben. Vielleicht kommen hier Stabilitätsfragen ins Spiel.

Schließlich haben wir den effektiven Strom unter Berücksichtigung des Widerstandes zu berechnen als das für den Vergleich mit den Beobachtungen maßgebende Element. Er ist nach Gleichung (32) folgendermaßen bestimmt:

$$y^2 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y^2 dT = \frac{1}{2} \left( \frac{4ap}{L\pi} \right)^2 \sum_{1,3,5,\dots} \frac{1}{(n^2 p^2 - q^2)^2 + (Qnp)^2}$$

Entnimmt man den Wert der hier auftretenden Summe aus (37) und berücksichtigt (35) und (41), so ergibt sich

$$(46) \quad \bar{y}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi a}{2Lp} \right)^2 \frac{1}{\xi \eta (\xi^2 + \eta^2)} \frac{\xi \operatorname{Si} 2\eta - \eta \sin 2\xi}{\cos 2\xi + \operatorname{Co} 2\eta}$$

Der frühere Ausdruck (26) folgt hieraus natürlich durch Grenzübergang für  $\eta = 0$ . Die Maxima und Minima dieses Ausdruckes liegen (bei nicht zu großem  $\eta$ ) jedenfalls in der Nähe der Minima und Maxima des Nenners  $\cos 2\xi + \operatorname{Co} 2\eta$ , d. h. in der Nähe von

$$(47) \quad \cos 2\xi = -1, \quad \xi_{\max} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

bzw. von

$$(47a) \quad \cos 2\xi = +1, \quad \xi_{\min} = 2n \frac{\pi}{2}$$

Den ersteren entsprechen nach (40) Frequenzen  $q$ , die gegeben sind durch

$$\sqrt{q^2 - \frac{Q^2}{4}} = (2n + 1)p,$$

den letzteren solche, die sich berechnen aus

$$\sqrt{q^2 - \frac{Q^2}{4}} = 2np.$$

Die aus den Versuchen abgeleitete Regel, wonach die Maxima des effektiven Stromes im Kondensator bei den ungeraden, die Minima bei den geraden Vielfachen der Frequenz des Speisestromes liegen, ist also, wie leicht verständlich, mit Rücksicht auf die Dämpfung nicht ganz exakt, einmal wegen Hinzutretens des (kleinen) Termes  $\frac{Q^2}{4}$  zu  $q^2$ , sodann aber auch,

weil die Bestimmung von  $\xi_{\max}$  und  $\xi_{\min}$  mittels der Gleichung (47) und (47a) nur eine angenäherte ist.

Begnügen wir uns mit dieser Annäherung (das Genauere kann aus den nachstehenden quantitativen Figuren entnommen werden), so können wir die Größe der Maxima und Minima des effektiven Stromes durch einfache Formeln berechnen. Für  $\cos 2\xi = \mp 1$  ist  $\sin 2\xi = 0$ ; ferner gilt

$$\frac{\sin 2\eta}{-1 + \cos 2\eta} = \frac{\cos \eta}{\sin \eta} = \operatorname{ctg} \eta, \quad \frac{\sin 2\eta}{1 + \cos 2\eta} = \frac{\sin \eta}{\cos \eta} = \operatorname{tg} \eta.$$

Aus (46) folgt also

$$(48) \quad \begin{cases} \bar{y}_{\max} = \frac{\pi a}{2Lp} \sqrt{\frac{\operatorname{ctg} \eta}{2\eta}} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \\ \bar{y}_{\min} = \frac{\pi a}{2Lp} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \eta}{2\eta}} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \end{cases}$$

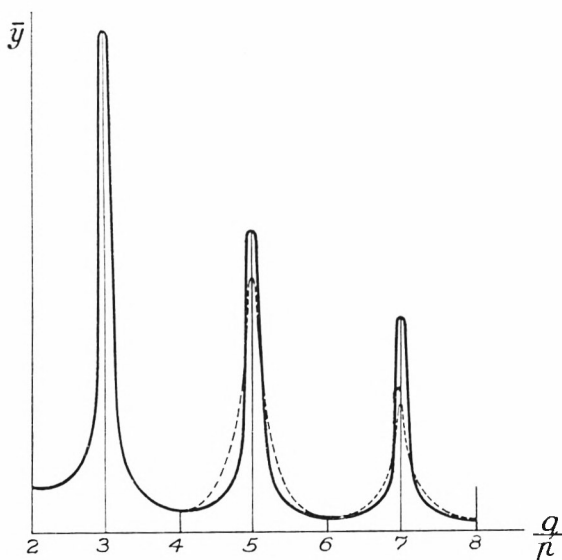


Fig. 7.

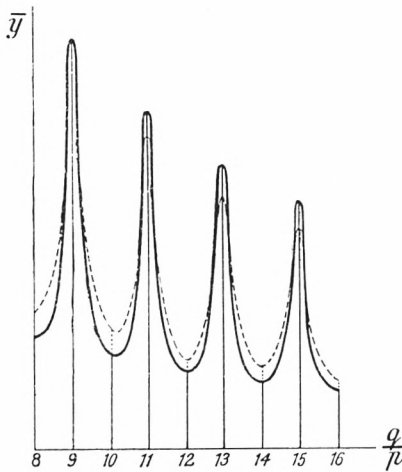


Fig. 8.

Die Maxima sind durch den Einfluß der Dämpfung natürlich endlich geworden. Die Maxima und Minima liegen, als Funktion der Variablen  $\xi$  resp. der damit annähernd proportionalen Frequenz  $q$  gedacht, je auf einer einfachen Kurve (der 4. Ordnung), welche von der für die Minima früher gefundenen gleichseitigen Hyperbel um so mehr abweicht, je größer  $\eta$ , d. h. je größer die Dämpfung ist.

In den Fig. 7 und 8 ist der Verlauf des effektiven Stromes als Funktion der Frequenz  $q$  im Kondensatorkreise quantitativ dargestellt in zwei Fällen, die den Fig. 2a und 2b von Rukop und Zenneck entsprechen. In Fig. 7 ist angenommen

$$R = 25 \text{ Ohm}, \quad L = 1 \text{ Henri}, \quad \frac{R}{L} = 25 \text{ sec}^{-1},$$

in Fig. 8

$$R = 10 \text{ Ohm}, \quad L = 0,1 \text{ Henri}, \quad \frac{R}{L} = 100 \text{ sec}^{-1}.$$

Rukop und Zenneck geben für die entsprechenden Figuren an:  $R = 20 \Omega$ ,  $L = 1,1 H$  resp.  $R = 6 \Omega$ ,  $L = 0,12 H$ ; die Widerstände sind bei uns etwas höher genommen, um den Verlusten im Kondensator Rechnung zu tragen, die in unser  $R$

einzubeziehen sind. Für  $p$  ist, wie oben und in den Versuchen, die Frequenz des technischen Wechselstromes genommen:  $p = 100 \pi$ . Es berechnet sich dann für Fig. 7  $\eta = \frac{1}{16}$ , für Fig. 8  $\eta = \frac{1}{4}$ . Als Abszisse ist das mit  $\xi$  im wesentlichen proportionale Verhältnis  $\frac{q}{p}$  aufgetragen; experimentell wurde dieses Verhältnis durch Änderung der Kapazität des Kondensators variiert. Die Ordinate  $\bar{y}$  ist in solchem Maßstabe aufgetragen, daß das erste in den Figuren gezeichnete Maximum der theoretischen Kurve mit dem beobachteten der

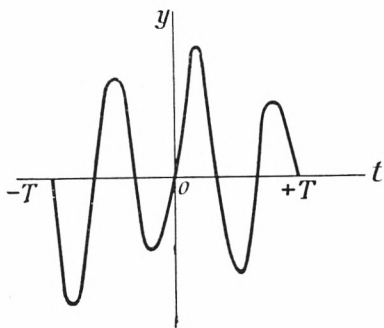


Fig. 9.

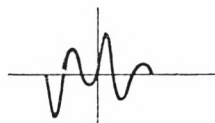


Fig. 9a.

Größe nach übereinstimmt. Die beobachteten Kurven sind punktiert eingetragen. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung vollauf befriedigend. Im Experiment fallen die Maxima mit zunehmender Ordnungszahl etwas schneller ab, wie nach der Theorie; die experimentellen Minima liegen in Fig. 8 etwas höher wie die theoretischen.

Endlich ist in Fig. 9 der zeitliche Verlauf des Kondensatorstromes in dem technisch interessantesten Falle  $q = 3p$  aufgetragen. Hierbei mußte die Fouriersche Darstellung (32) zu Grunde gelegt werden, da sich für beliebige Zeitpunkte  $t$  die Summation derselben nicht in der Weise bewerkstelligen läßt, wie dies oben für die Zeitpunkte  $t = 0$  und  $t = T(y = \pm y_0)$  durchgeführt wurde. Die Berechnung dieser Figur ist daher etwas umständlich. Für die bei dieser und den übrigen Figuren

aufgewandten Mühe danke ich Herrn Glitscher verbindlichst. Die Verhältnisse in Fig. 9 sind denen der Fig. 16 bei Rukop und Zenneck nachgebildet:

$$R = 200 \Omega, \quad L = 1 H, \quad p = 100 \pi.$$

Die oszillographisch beobachtete Kurve ist in Fig. 9a danebengestellt in anderen Maßstabsverhältnissen. Auch hier ist die Übereinstimmung befriedigend.

Es unterliegt hiernach wohl keinem Zweifel, daß sich auch das sonstige reiche Beobachtungsmaterial der Herren Rukop und Zenneck durch unsere Formeln theoretisch wiedergeben läßt. Die vorhandenen Abweichungen lassen sich ungezwungen auf die schematisierte Form unserer Charakteristik in Fig. 1 zurückführen. Indem man dieselbe im Sinne der punktierten Linien der Fig. 1 modifiziert, wird sich vermutlich ein noch besserer Anschluß an die Beobachtungen erzielen lassen.

Wir schließen mit einer Berechnung des Wirkungsgrades. Die im Primärkreis aufgewandte elektrische Arbeit während einer Periode ist:

$$W_1 = \int_{-T}^{+T} Ex dt,$$

die auf den Sekundärkreis übertragene wird:

$$W_2 = \int_{-T}^{+T} Vy dt,$$

und es bestimmt  $\frac{W_2}{W_1}$  den Wirkungsgrad der Transformation. Aus Gleichung (2) und (16) ergibt sich sofort, daß nur das Glied  $\frac{\mp at}{D}$  im Ausdrucke von  $x$  bei der Bestimmung von  $W_1$  in Betracht kommt. Mithin wird

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} W_1 &= -\frac{aA}{D} \left\{ \int_0^T \cos p(t-t_0) t dt - \int_{-T}^0 \cos p(t-t_0) t dt \right\} \\ &= -\frac{2aA}{D} \cos pt_0 \int_0^T \cos ptt dt = \frac{4aA}{p^2 D} \cos pt_0. \end{aligned} \right.$$



Nach Gleichung (29) andererseits läßt sich die Bestimmung von  $W_2$  auf den bereits bekannten Wert von  $\bar{y}^2$  zurückführen durch die Bemerkung, daß Selbstinduktion und Kapazität wattlos wirken. Man erhält auf diese Weise für  $W_2$  ersichtlich die im Kondensatorkreis während einer Periode entwickelte Joulesche Wärme. Rechnerisch zeigt sich dies so: Indem man (29) mit  $y$  multipliziert und über eine Periode integriert, ergibt sich:

$$W_2 = \int_{-T}^{+T} V y dt = L_Q \int_{-T}^{+T} y^2 dt = 2 T L_Q \bar{y}^2.$$

Da nach (27)  $L_Q = R$  ist, bedeutet dies in der Tat nichts anderes als die Joulesche Wärme für eine Periode.

Schreibt man noch  $T = \frac{\pi}{p}$  und faßt speziell einen solchen Wert von  $q$  ins Auge, der einem Maximum des effektiven Stromes entspricht, so ergibt sich nach (48)

$$W_2 = \frac{\pi^2 a^2}{4 L p^2} \cdot \frac{\pi Q}{p \eta} \frac{\text{Stg } \eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Hier ist nach (35) der Faktor  $\frac{\pi Q}{p \eta}$  gleich 4; vernachlässigt man noch  $\eta^2$  gegen  $\xi^2$ , was zumal für die höheren Ordnungen stets zulässig ist, so findet man schließlich:

$$(50) \quad W_2 = \frac{\pi^2 a^2}{L p^2 \xi^2} \text{Stg } \eta.$$

Mithin ergibt sich für den Wirkungsgrad aus (49) und (50):

$$(51) \quad \frac{W_2}{W_1} = \left( \frac{\pi}{2 \xi} \right)^2 \frac{a}{A} \frac{D}{L} \frac{\text{Stg } \eta}{\cos p t_0}.$$

Bei der Transformation auf die dreifache Frequenz ist nach Gleichung (40) angenähert  $\frac{\pi}{2 \xi}$  gleich  $\frac{1}{3}$ , also

$$(52) \quad \frac{W_2}{W_1} = \frac{1}{9} \frac{a}{A} \frac{D}{L} \frac{\text{Stg } \eta}{\cos p t_0}.$$

Der Wirkungsgrad hängt also in erster Linie von dem Verhältnis  $\frac{a}{A}$ , d. h. von der Beschaffenheit des Lichtbogens ab. Mit wachsendem Widerstande  $R$  des Kondensatorkreises wird er schlechter, indem  $\eta$  mit  $R$  wächst, also  $\text{Ctg } \eta$  abnimmt. Von der Selbstinduktion  $L$  ist der Wirkungsgrad bei kleinem  $\eta$  unabhängig; in diesem Falle ist nämlich  $\text{Ctg } \eta$  angenähert gleich  $\frac{1}{\eta}$  und es hebt sich in dem Produkte  $\eta L$  nach der Bedeutung von  $\eta$  die Selbstinduktion  $L$  heraus. Für große  $\eta$  dagegen wird  $\text{Ctg } \eta = 1$ ; in diesem Falle ist die Abhängigkeit von  $L$  gegeben durch das Verhältnis  $\frac{D}{L}$ ; der Wirkungsgrad läßt sich also durch Verkleinerung von  $L$  verbessern. Daß der Wirkungsgrad schließlich mit  $\cos pt_0 = 0$  ins Unendliche wachsen muß, ist klar, da ja in diesem Falle die aufgewandte Energie  $W_1$  verschwindet. Es ist dies derselbe Fall, den wir bei der Diskussion der Gleichung (43) in der Form  $\sin pt_0 = 1$  hervorgehoben haben als Grenzfall, von welchem ab unsere Darstellung der Vorgänge versagen muß.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1914

Band/Volume: [1914](#)

Autor(en)/Author(s): Sommerfeld Arnold

Artikel/Article: [Zur Theorie der Lichtbogenschwingungen bei Wechselstrombetrieb 261-285](#)