

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

**K. B. Akademie der Wissenschaften**

zu München

---

Jahrgang 1915

---

München 1915

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



## Zur Theorie der Wirbelschichten.

Von Max Lagally.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 6. März 1915.

### Einleitung.

Die Theorie der Wirbelschichten hat Helmholtz in seiner berühmten Abhandlung<sup>1)</sup> „Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen“, in die mathematische Physik eingeführt; in einer zweiten Abhandlung „Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen“<sup>2)</sup> macht er auf die Bedeutung der Wirbelschichten für die Strahlbildung in Flüssigkeiten aufmerksam. Das dort gegebene erste Beispiel einer Strahlbildung läßt aber die Wirbelschicht analytisch nicht in Erscheinung treten, ebensowenig wie die später von Kirchhoff<sup>3)</sup> ausgebildete Methode der konformen Abbildung zur Bestimmung der Strahlgrenzen. Beide Autoren betrachten eine Stromlinie, längs der die Strömung konstante Geschwindigkeit und konstanten Druck hat, als mögliche freie Grenze einer stationären Strömung und schließen auf der anderen Seite dieser Stromlinie ruhende Flüssigkeit nicht-analytisch an.

Jede in einer Flüssigkeit vorhandene Wirbelschicht bringt in der übrigen Flüssigkeit ein Geschwindigkeitspotential und

<sup>1)</sup> Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 55, 1858, S. 25—55.

<sup>2)</sup> Monatsberichte der K. Akademie der Wissenschaften, Berlin 1868, S. 215—228.

<sup>3)</sup> Mechanik, 22. Vorlesung.

damit Bewegung hervor, kann also als Ursache der ganzen Strömung betrachtet werden. Diese Darstellung ist als Gegenstück zu der quellenmäßigen Darstellung einer Flüssigkeitsbewegung aufzufassen.<sup>1)</sup> Von der Bewegung ist die Wirbelschicht selbst nicht ausgeschlossen; während die Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Wirbelschicht keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, ist das für die Tangentialkomponente der Fall. Die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit der Wirbelschicht selbst ist dem arithmetischen Mittel der Tangentialkomponenten auf beiden Seiten gleich.<sup>2)</sup> Soll die Wirbelschicht stationär sein und als Grenze eines Flüssigkeitsstrahles dienen können, so muß ihre Geschwindigkeit an allen Stellen die gleiche und folglich auch ihre Wirbel-dichte konstant sein.

Der Grund, warum weder Helmholtz noch Kirchhoff die Wirbelschichten, die sie doch sachlich zur Erklärung der Strahlbildung verwenden, auch analytisch zu ihrer Darstellung heranziehen, liegt wohl in der Umständlichkeit der analytischen Ausdrücke. Im folgenden ist der Versuch nur für die allereinfachsten Formen einer Wirbelschicht, nämlich für geradlinige und kreisförmige<sup>3)</sup> ebene Wirbelschichten durchgeführt.

Trotz der geometrischen Einfachheit dieser Strömungen sind die Ergebnisse nicht uninteressant. Zunächst gelingt es für einige diskontinuierliche Strömungen, die man bisher in jedem Teilgebiet durch eine andere Funktion darstellen mußte, deren Geltungsbereich man willkürlich begrenzte, analytische Ausdrücke zu finden, die in sämtlichen Teilgebieten gelten. Erwähnt sei die Bildung eines unendlich langen Strahles in einer unbegrenzten ruhenden Flüssigkeit, der geradlinig begrenzt ist, und eines ruhenden Streifens in bewegter Flüssig-

<sup>1)</sup> Lamb, Hydrodynamik, S. 71 u. f., S. 252 u. f. Ein Beispiel, die Bewegung einer Kugel in einer Flüssigkeit, ist S. 254 wirbelmäßig dargestellt.

<sup>2)</sup> Helmholtz, Über Integrale usw., S. 44.

<sup>3)</sup> Geschlossene Strahlformen hat W. Wien dargestellt. Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 115 u. f.

keit, der als Idealform des toten Wassers aufzufassen ist. Ferner die Strömung im Inneren oder Äußeren eines festen Kreises, sowie in einem ringförmigen Kanal. Da bei diesen Strömungen das Vorhandensein einer Wirbelschicht die treibende Ursache ist, liegt es nahe, einen Zusammenhang mit der Prandtlschen Grenzschicht<sup>1)</sup> zu suchen. Dadurch wird die Frage gestreift, bis zu welchem Grad der Annäherung die Vorgänge in reibenden Flüssigkeiten durch die Hydrodynamik einer idealen Flüssigkeit dargestellt werden können. Die Annahme, daß in der Grenzschicht durch Reibung an der Wand Wirbel entstehen können, führt zu einer mathematischen Unstimmigkeit. Man muß umgekehrt annehmen, daß eine an der Wand vorhandene Wirbelschicht die Ursache der Reibung ist, welche nicht vernachlässigt werden darf, wenn man mit den physikalischen Tatsachen im Einklang bleiben will. Diese Reibung bewirkt einerseits eine Verringerung der Wirbelstärke und damit eine Verlangsamung der Potentialbewegung, anderseits verursacht sie in bekannter Weise die Ablösung der Prandtlschen Wirbelschicht vom Körper. Es entsteht nun die Frage, wie sich in einer idealen Flüssigkeit Wirbelschichten bilden können, was infolge des Lagrangeschen Satzes über die Konstanz der Wirbelstärke jedes Flüssigkeitsteilchens nicht möglich zu sein scheint. Eine Lücke im Beweis dieses Satzes läßt die Möglichkeit der gleichzeitigen Entstehung zweier Wirbelschichten, die von demselben Punkt ausgehen, erkennen.

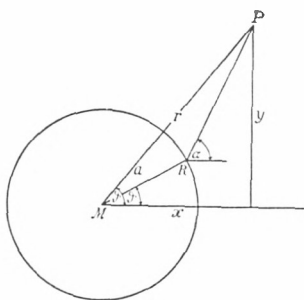
Weiter ist der Einfluß einer Störung, die eine periodische Funktion des Ortes ist, auf eine geradlinige Wirbelschicht untersucht. Es ergibt sich, daß die Folge eine zunehmende Verdichtung der wirbelnden Teilchen an einzelnen Punkten ist, die als Anfang der Bildung einzelner spiralig aufgerollter Wirbel aufzufassen ist. Man kommt so zu Wirbelreihen, welche mit den von v. Kármán<sup>2)</sup> untersuchten geometrisch, aber nicht

<sup>1)</sup> L. Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibung. Verh. des III. Internat. Math. Kongresses in Heidelberg 1904, S. 484 u. f.

<sup>2)</sup> Th. v. Kármán, Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt. Nachr. der Ges. der Sitzungsab. d. math.-phys. Kl. Jahrg. 1915.

der Entstehung nach übereinstimmen. Sie bilden sich gleichzeitig und ohne jeden Einfluß der Reibung, während die Kármán'schen Wirbel nacheinander, durch Aufrollen je eines Stückes der Prandtl'schen Wirbelschicht entstehen. Doch ist auch in diesem häufigeren Fall die Reibung nach der Ablösung der Wirbelschicht ohne weiteren Einfluß, und in gewissen Fällen, deren einer von F. Klein<sup>1)</sup> angegeben wurde, kann sich auch diese Ablösung ohne Reibung vollziehen. Dagegen scheint zu ihrer Ablösung eine periodische Schwingung des Hindernisses notwendig zu sein.

### Eine kreisförmige Wirbelschicht.



Es seien  $\infty$  viele Wirbel<sup>2)</sup> gleichmäßig auf dem Umfang eines Kreises vom Radius  $a$  verteilt. Die auf das Bogenelement  $a d\vartheta$  entfallende Wirbelstärke sei  $\lambda a d\vartheta$ , wo  $\lambda$  die Wirbelstärke bedeutet, die auf die Bogenlänge „Eins“ trifft und einen endlichen Wert haben soll.

Diese Wirbelschicht bringt in einem Punkt  $P(x, y)$  ein Geschwindigkeitspotential

$$1) \quad \varphi = \lambda a \int_0^{2\pi} \arctg \frac{y - a \sin \vartheta}{x - a \cos \vartheta} d\vartheta = \lambda a \cdot J$$

hervor, dessen Wert in den 3 Fällen, daß  $P$  auf dem Kreis-

---

Wissenschaften zu Göttingen 1911, S. 509 u. f. — Th. v. Kármán und H. Rubach, Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes. Physikalische Zeitschrift 1912, S. 49.

<sup>1)</sup> F. Klein, Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten. Zeitschr. für Mathematik und Physik 1910, Bd. 58, S. 259–262.

<sup>2)</sup> Die Bewegung einer endlichen Anzahl von Wirbeln in gleichmäßiger Verteilung auf einem Kreis hat J. J. Thomson, A Treat. on the motion of vortex rings, London 1883, untersucht.

umfang, außerhalb und innerhalb des Kreises liegt, untersucht werden soll. Führt man für  $P$  Polarkoordinaten  $r, \vartheta_0$  (in der Figur versehentlich  $\vartheta$  statt  $\vartheta_0$ ) ein, so handelt es sich um die Auswertung des Integrals

$$J = \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta_0 - a \sin \vartheta}{r \cos \vartheta_0 - a \cos \vartheta} d\vartheta.$$

1. Wenn  $r = a$  ist, wird

$$J = \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin \vartheta_0 - \sin \vartheta}{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \left( -\cotg \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2} \right) d\vartheta$$

$$J = - \int_0^{2\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2} \right) d\vartheta = \left[ -\frac{\pi + \vartheta_0}{2} \vartheta + \frac{\vartheta^2}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi \vartheta_0.$$

Das Geschwindigkeitspotential nimmt auf dem Kreis den Wert

$$2) \quad \varphi = \lambda a \pi \vartheta_0 = \lambda a \pi \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

an. Würde man im Mittelpunkt des Kreises einen einzelnen Wirbel von der Wirbelstärke  $\mu = \lambda a \pi$  anbringen, so brächte er ein Geschwindigkeitspotential hervor, das auf dem Kreis vom Radius  $a$  mit dem eben berechneten Wert übereinstimmt.

Die kreisförmige Wirbelschicht bewegt sich also in sich selbst mit konstanter Geschwindigkeit  $\lambda \pi$ , die nur von der Wirbeldichte  $\lambda$ , nicht aber vom Radius des Kreises abhängt.

2. Wenn  $r > a$  ist, wird

$$\operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta_0 - a \sin \vartheta}{r \cos \vartheta_0 - a \cos \vartheta} = \alpha$$

zum Ausgangswert zurückkehren, wenn  $R$  den Kreis durchläuft, also  $\vartheta$  um  $2\pi$  wächst. Nun soll als untere Grenze der Integration der Polarwinkel  $\vartheta_0 - \pi$  eingeführt werden; dann wird

$$J = \int_{\vartheta_0 - \pi}^{\vartheta_0 + \pi} \operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta_0 - a \sin \vartheta}{r \cos \vartheta_0 - a \cos \vartheta} d\vartheta.$$

Dieses Integral wird in zwei Teile zerlegt

$$J = \int_{\vartheta_0 - \pi}^{\vartheta_0 + \pi} = \int_{\vartheta_0 - \pi}^{\vartheta_0} + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0 + \pi}$$

und im 1. Teil  $\beta = \vartheta_0 - \vartheta$ , im 2. Teil  $\beta = \vartheta - \vartheta_0$  als Integrationsvariable eingeführt; dabei sollen immer Punkte, die zu  $MP$  symmetrisch liegen, gleichzeitig betrachtet werden.

Dann wird

$$(3) \quad J = - \int_{\beta=\pi}^{\beta=0} \operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta_0 - a \sin (\vartheta_0 - \beta)}{r \cos \vartheta_0 - a \cos (\vartheta_0 - \beta)} d\beta \\ + \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} \operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta_0 - a \sin (\vartheta_0 + \beta)}{r \cos \vartheta_0 - a \cos (\vartheta_0 + \beta)} d\beta.$$

Aus der Anschauung oder durch Rechnung erkennt man, daß

$$(4) \quad \operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta_0 - a \sin (\vartheta_0 - \beta)}{r \cos \vartheta_0 - a \cos (\vartheta_0 - \beta)} \\ + \operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta_0 - a \sin (\vartheta_0 + \beta)}{r \cos \vartheta_0 - a \cos (\vartheta_0 + \beta)} = 2 \vartheta_0$$

ist; also wird

$$J = \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} 2 \vartheta_0 d\beta = 2 \pi \vartheta_0$$

folglich das Potential

$$(5) \quad \varphi = 2 \lambda a \pi \vartheta_0 = 2 \lambda a \pi \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Außerhalb des Kreises ist also die Strömung dieselbe, wie sie ein einzelner Wirbel im Mittelpunkt des Kreises, in dem die ganze Wirbelstärke  $2 \lambda a \pi$  vom Umfang des Kreises vereinigt wäre, hervorbringen würde.

3. Wenn  $r < a$  ist, wächst

$$\operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta_0 - a \sin \vartheta}{r \cos \vartheta_0 - a \cos \vartheta}$$

um  $2 \pi$ , wenn  $\vartheta$  um  $2 \pi$  wächst.



Die Gleichung (3)

$$J = \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta_0 - a \sin (\vartheta_0 - \beta)}{r \cos \vartheta_0 - a \cos (\vartheta_0 - \beta)} \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \frac{r \sin \vartheta_0 - a \sin (\vartheta_0 + \beta)}{r \cos \vartheta_0 - a \cos (\vartheta_0 + \beta)} \right] d\beta$$

bleibt zwar erhalten; aber die Summe der beiden  $\operatorname{arctg}$  hat den Wert  $2\vartheta_0$  wie in (4), nur so lange  $0 < \beta < \vartheta_0$  ist; für größere Werte von  $\beta$ , für welche  $\vartheta_0 < \beta < \pi$  ist, hat sie den Wert  $2\vartheta_0 + 2\pi$ . Also wird

$$J = \int_{\beta=0}^{\beta=\vartheta_0} 2\vartheta_0 d\beta + \int_{\beta=\vartheta_0}^{\beta=\pi} (2\vartheta_0 + 2\pi) d\beta = 2\pi^2.$$

Das Potential nimmt den konstanten Wert

$$6) \quad \varphi = 2\lambda a \pi^2$$

an; daraus folgt, daß die Flüssigkeit im Innern des von der Wirbelschicht gebildeten Kreises in Ruhe bleibt.

Gleichung (1) kann also als Potential der Zirkulation um ein kreisförmiges Hindernis aufgefaßt werden; und zwar stellt sie als Ursache der Bewegung die Wirbelschicht hin, die am Rand des Hindernisses auftritt. Daß die Zirkulationsgeschwindigkeit, die unmittelbar außerhalb der Wirbelschicht den Wert  $2\lambda\pi$  hat, an der Wirbelschicht selbst sprungweise auf die Hälfte sinkt, steht in Übereinstimmung mit der Helmholtzschen Theorie.<sup>1)</sup> Die wirbelnden Flüssigkeitselemente verhalten sich wie kleine Räder, die auf dem festen Kreis rollen und auf denen die wirbelfreie Flüssigkeit mitgeführt wird.<sup>2)</sup>

In ähnlicher Weise läßt sich die Bewegung im Innern eines Kreises darstellen. Setzt man

<sup>1)</sup> Helmholtz, Über Integrale usw., S. 43, 44.

<sup>2)</sup> Dieser Vergleich findet sich auch bei Lanchester, Aerodynamik, Bd. I, S. 118 im Anschluß an W. Thomson, ist dort aber mehr durch Anschauung als durch die mathematische Untersuchung begründet.

$$7) \quad \varphi = 2\lambda a \pi \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \lambda a \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - a \sin \vartheta}{x - a \cos \vartheta} d\vartheta,$$

so hat man im Mittelpunkt des Kreises einen Wirbel von der Stärke  $2\lambda a \pi$ ; die gleiche Wirbelstärke ist, mit entgegengesetzter Drehrichtung, auf der Peripherie des Kreises vom Radius  $a$  verteilt. Im Innern des Kreises herrscht nur die Bewegung, die der Wirbel im Mittelpunkt hervorbringt; außerhalb ist die Flüssigkeit in Ruhe. Die Wirbelschicht selbst bewegt sich mit der halben Geschwindigkeit wie die Flüssigkeit an ihrem inneren Rand.

Verteilt man auf zwei konzentrischen Kreisen von den Radien  $a_1$  und  $a_2$  gleiche Wirbelstärken von entgegengesetzter Drehrichtung, so erhält man die Bewegung in einer Ringfläche. Es sei

$$2a_1 \pi \lambda_1 = -2a_2 \pi \lambda_2 = M,$$

$$\lambda_1 a_1 = -\lambda_2 a_2 = \frac{M}{2\pi},$$

so nimmt das Potential

$$7') \quad \varphi = \frac{M}{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - a_1 \sin \vartheta}{x - a_1 \cos \vartheta} d\vartheta - \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - a_2 \sin \vartheta}{x - a_2 \cos \vartheta} d\vartheta \right]$$

folgende Werte an:

$$\varphi = \begin{cases} -M \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + M \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0 & \text{im Außenraum} \\ -\frac{M}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + M \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = +\frac{M}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{auf dem äußeren Kreis} \\ -M\pi + M \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{im Ring} \\ -M\pi + \frac{M}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{auf dem inneren Kreis} \\ -M\pi + M\pi = 0 & \text{im Innenraum,} \end{cases}$$

wenn  $a_2 > a_1$  vorausgesetzt ist. Die Geschwindigkeit ist im

Ring dieselbe, die ein Wirbel  $M$  im Mittelpunkte hervorbringen würde; an den Grenzen sinkt sie sprunghaft auf die Hälfte; im Innen- und Außenraum ist sie Null.

Die Grenzen des so erhaltenen ringförmigen Strahles sind labil wie alle Wirbelschichten; man kann, um eine stabile Bewegung zu erhalten, sich eine Strömung in einem ringförmigen Kanal vorstellen. Veranlassung der Bewegung bilden nach der hier entwickelten Theorie die wirbelnden Flüssigkeitselemente, die auf den Wänden des Kanals rollen. Um die Kluft zu überbrücken, die zwischen den mathematischen Eigenschaften einer idealen Flüssigkeit und den physikalischen Eigenschaften einer reibenden zähen Flüssigkeit besteht, stellt man sich häufig vor, daß letztere nahezu reibungslos in ihrem Innern angenommen werden darf, während ihre Reibung an den Wänden nicht vernachlässigt werden darf; sie soll zur Bildung einer Wirbelschicht Veranlassung geben, während sich Wirbel in einer idealen Flüssigkeit nicht bilden können. Die jetzt naheliegende Vermutung, daß sich die Wirbelstärke der Randschicht mit der Zeit infolge der Reibung vermehrt, würde aber zu einem Widerspruch mit unserer Theorie führen, welche dann auch eine rascher werdende Zirkulation der Flüssigkeit in dem Kanal ergeben würde. Wir müssen uns also das allmähliche Erlöschen der Flüssigkeitsbewegung durch Reibung so vorstellen, daß die wirbelnden Teilchen der Randschicht durch Reibung aneinander oder durch rollende Reibung an der Wand lebendige Kraft verlieren, und daß mit ihrer Wirbelstärke auch die Geschwindigkeit der Strömung abnimmt. Also die Reibung an der Wand veranlaßt nicht die Bildung der wirbelnden Randschicht — diese ist auch bei nicht reibender Flüssigkeit vorhanden — sondern sie vernichtet die Wirbelbewegung an der Wand und damit die ganze Strömung.

Das häufig vorkommende Entstehen von Wirbeln im Innern einer reibungslosen Flüssigkeit wäre dann damit zu erklären, daß sich die randliche Wirbelschicht infolge der durch Reibung auftretenden Spannungszustände an einzelnen Stellen von der

Wand ablöst<sup>1)</sup> und dann durch spiralisches Aufrollen in einzelne Wirbel zerfällt.

Jetzt ergibt sich aber als neue Schwierigkeit die Frage, wie eine Wirbelschicht in einer reibungslosen Flüssigkeit entstehen kann. F. Klein<sup>2)</sup> hat darauf aufmerksam gemacht, daß die Beweise für die Unmöglichkeit des Entstehens oder Vergehens von Wirbeln in einer idealen Flüssigkeit gewisse Stetigkeitsbedingungen stillschweigend voraussetzen; für die tatsächliche Möglichkeit der Wirbelbildung gibt er folgendes Beispiel. Ein Ruder, das in eine ideale Flüssigkeit eingetaucht und in ihr bewegt wird, veranlaßt eine Potentialströmung, deren Geschwindigkeit längs des Ruderblattes auf beiden Seiten verschiedene Richtung hat. Man könnte also, um einen analytischen Ausdruck für diese übrigens einfache und wohlbekannte Strömung zu finden, an Stelle des Ruderblattes eine Wirbelschicht annehmen. Daß diese Wirbelschicht nicht nur analytisch, sondern tatsächlich existiert, zeigt sich beim Herausnehmen des Ruders: Die Wirbelschicht rollt sich zu zwei endlichen Wirbeln spiraling auf.

Wenn eine Strömung ein Hindernis umfließt, so gibt es eine Stromlinie, die auf das Hindernis aufstößt, sich dort teilt und das Hindernis beiderseits umschließt; zu einer Wiedervereinigung, die in einer idealen Flüssigkeit stattfinden würde, kommt es im allgemeinen tatsächlich nicht, weil sich infolge der Reibung zwei Prandtl'sche Wirbelschichten von dem Hindernis ablösen. Daß die Wirbelschichten auch in idealen Flüssigkeiten existieren, zeigt die Möglichkeit, die Strömung als Folge des Geschwindigkeitspotentials einer auf dem Rand des Hindernisses befindlichen Wirbelschicht darzustellen. Man kommt so zu der Vorstellung, die analytisch noch näher zu begründen wäre, daß jedes Flüssigkeitselement der erwähnten Stromlinie, das auf das Hindernis aufstößt, dort in zwei wirbelnde Teile

---

<sup>1)</sup> L. Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandlungen des III. Internat. Mathem. Kongresses in Heidelberg 1904, S. 484 u. f.

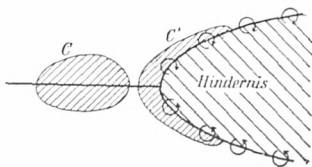
<sup>2)</sup> F. Klein, vgl. Anmerkung (1), S. 82.

von gleicher, der Richtung nach entgegengesetzter Wirbelstärke zerfällt.

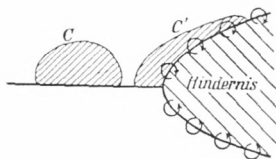
Von den Beweisen des Lagrangeschen Satzes, wonach die Wirbelstärke eines Elementes einer idealen Flüssigkeit mit der Zeit unveränderlich ist, ist der Kelvinsche<sup>1)</sup> wohl der schärfste. Er geht von der Tatsache aus, daß die Zirkulation

$$\int [u dx + v dy + w dz]$$

längs jeder geschlossenen Kurve  $C$ , die sich mit der Flüssigkeit bewegt und dabei in eine Kurve  $C'$  übergeht, mit der Zeit unveränderlich ist. Da diese Zirkulation anderseits das Maß für die algebraische Summe aller in der Kurve eingeschlossenen Wirbel ist, folgt daraus der Lagrangesche Satz. Doch scheint die Möglichkeit übersehen worden zu sein, daß zwei gleich starke, der Richtung nach entgegengesetzte Wirbel in dem gleichen Punkte entstehen, so daß es nicht möglich ist, vor ihrer Bildung eine geschlossene Kurve zu ziehen, welche nachher nur den einen der beiden Wirbel umfaßt. Die Entstehung unserer Wirbelschichten ist also durchaus möglich, obwohl sie einen Durchbruch des Lagrangeschen Satzes darstellt.



Schwierigkeiten entstehen, wenn man nach der Bildung der Wirbelschichten eine geschlossene Kurve  $C'$  zieht, welche nur Teile der einen Wirbelschicht enthalten soll, und die Formänderung derselben rückwärts verfolgt. Man erhält dann eine Kurve  $C$ , welche in ihrer Begrenzung einen Teil der ursprünglichen Stromlinie enthält. Soll auch jetzt die



<sup>1)</sup> W. Thomson, On Vortex Motion, Edinb. Trans. 25, 1869. Vgl. Lamb, Hydrodynamik, S. 43 und 240.

Zirkulation mit der Zeit unveränderlich sein, so muß man die Stromlinie als doppelte Wirbelschicht auffassen, schon bevor sie in 2 Wirbelschichten zerfällt, und die Wirbel der einen Drehrichtung in  $C$  einschließen. Die Vereinigung zweier Wirbelschichten in einer idealen Flüssigkeit zu einer Stromlinie wird nur ausnahmsweise möglich sein, insbesondere dann, wenn sie durch Trennung aus einer Stromlinie entstanden sind.

Zusammenfassend kommen wir also zu folgenden Vorstellungen: Wenn eine Stromlinie an einem Hindernis endet, entstehen zwei Helmholtzsche Wirbelschichten. Beim Umfließen des Hindernisses ist die Reibung der Wirbelteilchen nicht zu vernachlässigen; sie bringt Spannungen hervor, welche die Loslösung der Wirbelschicht als Prandtlsche Wirbelschicht zur Folge hat. Durch Aufrollen der in die Flüssigkeit ausgetretenen Wirbelschicht entstehen spiralförmige Wirbel; diese können sich unter Umständen auch ganz ohne Mitwirkung der Reibung bilden, wenn man das Hindernis entfernt.

### Eine geradlinige Wirbelschicht.

Die von einer geradlinigen Wirbelschicht hervorgerufene Bewegung könnte man vielleicht aus dem vorigen durch Grenzübergang erhalten; hier soll jedoch die Untersuchung direkt geführt werden.

Die  $x$  Achse sei die Wirbelschicht; das Potential, das sie hervorruft, ist

$$8) \quad \varphi = \lambda \int_{a=-\infty}^{a=+\infty} \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} da.$$

Durch Anwendung partieller Integration findet man

$$\varphi = -\lambda y \left[ \frac{x-a}{y} \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} + \frac{1}{2} \lg \frac{(x-a)^2 + y^2}{y^2} \right]_{a=-\infty}^{a=+\infty}$$

Wir berechnen  $\varphi$  zunächst zwischen endlichen Grenzen  $-c$  und  $c$  und lassen  $c$  hierauf ins Unendliche wachsen:

$$\begin{aligned}\varphi &= -\lambda y \lim_{c=\infty} \left[ \frac{x-c}{y} \operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \lg \frac{(x-c)^2 + y^2}{y^2} - \frac{x+c}{y} \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c} - \frac{1}{2} \lg \frac{(x+c)^2 + y^2}{y^2} \right] \\ &= -\lambda y \lim_{c=\infty} \left[ \frac{x}{y} \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c} \right) - \frac{c}{y} \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c} \right) + \frac{1}{2} \lg \frac{(x-c)^2 + y^2}{(x+c)^2 + y^2} \right].\end{aligned}$$

Von den 3 hier auftretenden Grenzwerten ist der letzte Null

$$\lim_{c=\infty} \lg \frac{(x-c)^2 + y^2}{(x+c)^2 + y^2} = 0,$$

also

$$\begin{aligned}\varphi &= -\lambda x \lim_{c=\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c} \right) \\ &\quad + \lambda \lim_{c=\infty} c \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c} \right).\end{aligned}$$

Der zweite Grenzwert

$$\lim_{c=\infty} c \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c} \right)$$

nimmt die Form  $\infty \cdot 0$  an; er ändert sich um eine Konstante  $c\pi$ , die an der Grenze  $\infty$  wird, aber auf die Geschwindigkeit ohne Einfluß bleibt, wenn man statt des Hauptwertes des  $\operatorname{arctg}$  einen anderen Wert nimmt.  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x \pm c}$  ist an der Stelle

$\frac{y}{x \pm c} = 0$ ;  $c = \infty$  in eine Reihe entwickelbar:

$$\begin{aligned}&\lim_{c=\infty} c \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c} \right) \\ &= \lim_{c=\infty} c \left( \frac{y}{x-c} + \frac{y}{x+c} + \text{Glieder höherer Ordnung} \right) = 0.\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\varphi = -\lambda x \lim_{c=\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c} \right).$$

Wenn  $y$  positiv ist und der variable Punkt  $A$  die  $x$  Achse von  $+\infty$  bis  $-\infty$  durchläuft, nimmt  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x-a}$  um  $\pi$  von 0 bis  $-\pi$  ab. Ist  $y$  negativ, so nimmt  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x-a}$  um  $\pi$  von 0 bis  $+\pi$  zu. Liegt  $P$  auf der  $x$  Achse selbst, so ist  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x-a}$  stets Null.

Man hat also 3 Fälle zu unterscheiden

- |            |                            |
|------------|----------------------------|
| 1. $y > 0$ | $\varphi = -\lambda \pi x$ |
| 2. $y = 0$ | $\varphi = 0$              |
| 3. $y < 0$ | $\varphi = \lambda \pi x.$ |

Die Flüssigkeit strömt beiderseits mit konstanter Geschwindigkeit der  $x$  Achse parallel, aber in entgegengesetzten Richtungen; auf der  $x$  Achse ist die Geschwindigkeit Null. Die Geschwindigkeit  $u$  ist in den 3 betrachteten Fällen

- |            |                    |
|------------|--------------------|
| 1. $y > 0$ | $u = -\lambda \pi$ |
| 2. $y = 0$ | $u = 0$            |
| 3. $y < 0$ | $u = \lambda \pi.$ |

Die Geschwindigkeitsänderung beim Übergang über die Wirbelschicht beträgt  $2\lambda\pi$  und hängt von der Wirbeldichte  $\lambda$  ab; sie hat denselben Wert wie bei einer kreisförmigen Wirbelschicht von beliebigem Radius, bei der, wie bemerkt, die Krümmung ohne Einfluß ist.

Durch Überlagerung einer gleichmäßigen Geschwindigkeit in Richtung der  $x$  Achse kann man die Bewegung in der einen Halbebene aufheben.

$$9) \quad \varphi = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} da - \lambda \pi x$$



gibt eine Strömung in der positiven Halbebene, die man als Strömung längs einer Wand auffassen kann, und zwar

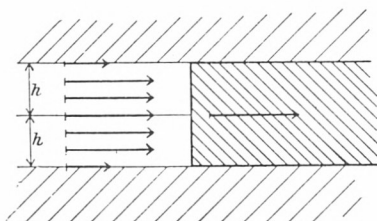
1.  $y > 0$        $\varphi = -2\lambda\pi x$        $u = -2\lambda\pi$
2.  $y = 0$        $\varphi = -\lambda\pi x$        $u = -\lambda\pi$
3.  $y < 0$        $\varphi = 0$        $u = 0$ .

Nimmt man 2 Wirbelschichten von gleicher Wirbeldichte, aber entgegengesetzter Drehrichtung, parallel zur  $x$  Achse in gleichem Abstand  $\pm h$ , so erhält man ein Geschwindigkeitspotential

$$9') \quad \varphi = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \arctg \frac{y-h}{x-a} da - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \arctg \frac{y+h}{x-a} da,$$

das in den verschiedenen Teilen der Ebene die in folgender Übersicht, die auch die Geschwindigkeiten enthält, angegebenen Werte besitzt:

1.  $y > h$        $\varphi = -\lambda\pi x + \lambda\pi x = 0$        $u = 0$
2.  $y = h$        $\varphi = 0 + \lambda\pi x = \lambda\pi x$        $u = \lambda\pi$
3.  $-h < y < h$        $\varphi = \lambda\pi x + \lambda\pi x = 2\lambda\pi x$        $u = 2\lambda\pi$
4.  $y = -h$        $\varphi = \lambda\pi x + 0 = \lambda\pi x$        $u = \lambda\pi$
5.  $y < -h$        $\varphi = \lambda\pi x - \lambda\pi x = 0$        $u = 0$ .



Geschwindigkeitsverteilung.

Die Bewegung stellt einen geradlinigen Strahl in einer unbegrenzten Flüssigkeit dar, und zwar stellt der analytische Ausdruck wieder die am Rand des Strahles auftretenden Wirbel als Ursache der Bewegung hin. Einen solchen Strahl kann man sich dadurch ent-

standen denken, daß man einen sehr langen, von parallelen Wänden begrenzten Körper in der Flüssigkeit bewegt. Er stellt eine Idealform des Kielwassers dar, von dem er sich vor allem durch seine unendlich große lebendige Kraft unterscheidet, die er infolge der Bewegung eines  $\infty$ langen Körpers vor ihm her besitzt, dessen Fortsetzung er bildet; auf den Zerfall der begrenzenden Wirbelschichten, die in wirklichen Flüssigkeiten sehr schnell eintritt, soll nachher noch eingegangen werden. Auch die Strömung in einem von parallelen Wänden begrenzten Kanal von gleichmäßiger Tiefe kann durch obigen Ausdruck dargestellt sein.

Nimmt man noch eine Parallelströmung in der ganzen Ebene hinzu, die die Geschwindigkeit des Strahles gerade aufhebt, so erhält man einen unbewegten Flüssigkeitsstreifen in gleichmäßig parallel bewegter Flüssigkeit

$$9'') \quad \varphi = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{y-h}{x-a} da - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{y+h}{x-a} da - 2\lambda\pi x.$$

Die so dargestellte Strömung gibt eine Idealform des toten Wassers, wie es sich hinter einem  $\infty$ langen von parallelen Wänden begrenzten Hindernis ausbilden würde.

Anstelle des Geschwindigkeitspotentials könnte man auch die Geschwindigkeitskomponenten berechnen, welche die Wirbelschicht in einem Punkt hervorruft. Man findet für

$$10) \quad \begin{aligned} u &= -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} da \\ v &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} da \end{aligned}$$

ohne nennenswerte Schwierigkeit die schon bekannten Werte wieder.

**Einfluss einer periodischen Störung auf eine Wirbelschicht.**

Eine geradlinige Wirbelschicht, die in der  $x$  Achse angenommen wird, soll durch störende Einflüsse so deformiert werden, daß an der Stelle  $x = a$  ein Ausschlag  $\delta b = \varepsilon f(a)$  entsteht, wo  $\varepsilon$  eine kleine Konstante bedeutet. Dabei wird, wenn die Bewegung aus der Anfangslage nicht senkrecht zur Wirbelschicht erfolgt, auch die ursprünglich konstante Wirbeldichte verändert:

$$\lambda(a) = \mu + \varepsilon g(a).$$

Dabei bedeutet  $\mu$  eine Konstante,  $g(a)$  eine Funktion von  $a$ . Das Potential in einem beliebigen Aufpunkt ist dann

$$11) \quad \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \varepsilon g(a)) \operatorname{arctg} \frac{y - \varepsilon f(a)}{x - a} da.$$

Die Geschwindigkeitskomponenten sind

$$11') \quad \begin{aligned} u &= - \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \varepsilon g(a)) \frac{y - \varepsilon f(a)}{(x - a)^2 + (y - \varepsilon f(a))^2} da \\ v &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \varepsilon g(a)) \frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - \varepsilon f(a))^2} da. \end{aligned}$$

In einem Punkte der Wirbelschicht selbst ist  $y = \varepsilon f(x)$ ; also ergeben sich als Komponenten der Geschwindigkeit, mit der sich die Wirbelschicht verändert, die Ausdrücke:

$$12) \quad \begin{aligned} u_0 &= - \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \varepsilon g(a)) \frac{\varepsilon (f(x) - f(a))}{(x - a)^2 + \varepsilon^2 (f(x) - f(a))^2} da \\ v_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \varepsilon g(a)) \frac{x - a}{(x - a)^2 + \varepsilon^2 (f(x) - f(a))^2} da. \end{aligned}$$

Die Funktion  $f(x)$  ist im Endlichen überall endlich und stetig vorausgesetzt; also werden die Zähler unter den Integralen überall endlich sein. Dagegen nehmen die Ausdrücke unter den Integralen an der Stelle  $x = a$  die Form  $\frac{0}{0}$  an und haben dort Pole 1. Ordnung. Denn setzt man

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(x + \vartheta(x - a)),$$

wo  $0 \leq \vartheta \leq 1$  ist, so wird

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2 + \varepsilon^2(f(x) - f(a))^2} &= \frac{1}{x - a} \cdot \frac{f'(x + \vartheta(x - a))}{1 + \varepsilon^2 f'^2(x + \vartheta(x - a))} \\ \frac{x - a}{(x - a)^2 + \varepsilon^2(f(x) - f(a))^2} &= \frac{1}{x - a} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon^2 f'^2(x + \vartheta(x - a))}. \end{aligned}$$

Diese Stellen sind von der Integration auszuschließen; physikalisch findet das darin seine Berechtigung, daß ein Wirbelteilchen für seine eigene Translationsbewegung keine Komponente beiträgt.

Unter Voraussetzung eines hinreichend kleinen  $\varepsilon$  läßt sich

$$\frac{1}{(x - a)^2 + \varepsilon^2(f(x) - f(a))^2}$$

in eine Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(x - a)^2 + \varepsilon^2(f(x) - f(a))^2} \\ &= \frac{1}{(x - a)^2} \left[ 1 - \varepsilon^2 \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)^2 + \varepsilon^4 \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)^4 - \dots \right]. \end{aligned}$$

Das gleiche gilt dann für  $u_0$  und  $v_0$ . Vernachlässigt man Glieder, die in  $\varepsilon$  von höherer als 1. Ordnung sind, so erhält man

$$\begin{aligned} u_0 &= -\varepsilon \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} da \\ v_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu + \varepsilon g(a)) \frac{da}{x - a} = \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{x - a} + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(a) da}{x - a}. \end{aligned}$$

Dabei ist das Integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{x-a} &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u} = - \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left[ \int_{-R}^{-\delta} \frac{du}{u} + \int_{+\delta}^{+R} \frac{du}{u} \right] \\ &= - \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \lg \frac{-\delta \cdot R}{-R \cdot \delta} = 0. \end{aligned}$$

Also ergeben sich für die Geschwindigkeitskomponenten die endgültigen Ausdrücke

$$13) \quad u_0 = -\varepsilon \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} da; \quad v_0 = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(a)}{x-a} da.$$

Daraus ist insbesondere zu ersehen, daß  $u_0 = 0$  ist, wenn  $f(a) = f(x)$  ist an jeder Stelle  $a = x$ ; dagegen ist  $v_0 = 0$ , wenn  $g(a)$  an jeder Stelle Null ist. Eine transversale Verschiebung der Wirbelteilchen bringt also eine longitudinale Bewegung hervor, und umgekehrt veranlaßt eine Verschiebung der Wirbelteilchen in longitudinaler Richtung einen transversalen Ausschlag.

Es soll jetzt eine transversale Störung untersucht werden, die eine periodische Funktion des Ortes ist; also sei

$$f(x) = \sin kx$$

(durch Superposition solcher Störungen für alle Werte von  $k$  würde man die Fouriersche Entwicklung einer allgemeinen periodischen Störung erhalten). Die Geschwindigkeitskomponenten sind

$$14) \quad u_0 = -\varepsilon \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin kx - \sin ka}{(x-a)^2} da; \quad v_0 = 0.$$

Führt man

$$kx = \xi; \quad ka = \alpha$$

ein, so ergibt sich

$$u_0 = -\varepsilon \mu k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \xi - \sin \alpha}{(\xi - \alpha)^2} d\alpha.$$

Nun wird das Intervall von  $-\infty$  bis  $+\infty$  in lauter Abschnitte von der Länge  $2\pi$  zerlegt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \cdots \int_{\xi-4\pi}^{\xi-2\pi} + \int_{\xi-2\pi}^{\xi} + \int_{\xi}^{\xi+2\pi} + \int_{\xi+2\pi}^{\xi+4\pi} + \cdots,$$

also

$$u_0 = -\varepsilon \mu k \sum_{\xi+2\nu\pi}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\xi+2(v+1)\pi} \frac{\sin \xi - \sin \alpha}{(\xi - \alpha)^2} d\alpha.$$

Durch Einführung von neuen Integrationsvariablen

$$\beta = \alpha - \xi - 2\nu\pi,$$

hierauf durch Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration erhält man

$$\begin{aligned} u_0 &= -\varepsilon \mu k \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \xi - \sin(\xi + \beta)}{(\beta + 2\nu\pi)^2} d\beta \\ &= -\varepsilon \mu k \int_0^{2\pi} (\sin \xi - \sin(\xi + \beta)) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\beta + 2\nu\pi)^2} d\beta. \end{aligned}$$

Führt man jetzt für

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\beta + 2\nu\pi)^2}$$

seinen Wert

$$\frac{1}{4 \sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

ein,<sup>1)</sup> so wird

$$u_0 = -\frac{\varepsilon \mu k}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \xi - \sin(\xi + \beta)}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} d\beta = \frac{\varepsilon \mu k}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{\beta}{2} + \xi\right)}{\sin \frac{\beta}{2}} d\beta.$$

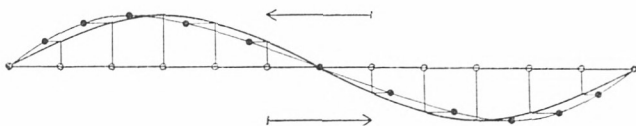
<sup>1)</sup> Z. B. Burkhardt, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, S. 145—148.

Für die Auswertung zerlegt man das Integral in 2 Teile

$$u_0 = \frac{\varepsilon \mu k}{2} \left[ \cos \xi \int_0^{2\pi} \cotg \frac{\beta}{2} d\beta - \sin \xi \int_0^{2\pi} d\beta \right].$$

Das erste der beiden Integrale wird Null; also ist

$$15) \quad u_0 = -\varepsilon \mu k \pi \sin kx.$$



Es tritt also eine longitudinale Geschwindigkeit auf, deren Größe dem transversalen Ausschlag proportional ist. Sie ist auf diejenigen Stellen der Wirbelschicht hingerrichtet und bewirkt dort eine Verdichtung der Wirbelteilchen, wo die strömende Flüssigkeit die ursprüngliche Lage der Wirbelschicht in der Richtung von der konvexen zur konkaven Seite überschreitet.

Man kann nun nach der Gestalt fragen, die die Wirbelschicht infolge der longitudinalen Bewegung der Teilchen annimmt. War

$$y = \varepsilon \sin kx_0$$

die ursprüngliche Gleichung der gestörten Wirbelschicht, so wird für jedes Wirbelteilchen  $y$  ungeändert bleiben, dagegen wird die Abszisse zur Zeit  $\delta t$  den Wert

$$x = x_0 + u_0 \delta t$$

annehmen. Führt man also

$$x_0 = x - u_0 \delta t = x + \varepsilon \mu k \pi \sin kx_0 \delta t = x + \mu k \pi y \delta t$$

ein, so wird

$$y = \varepsilon \sin k(x + \mu k \pi y \delta t)$$

die Gleichung der Wirbelschicht zur Zeit  $\delta t$  in impliziter Form. Entwickelt man nach Potenzen von  $\delta t$

$$y = \varepsilon [\sin kx + \mu k^2 \pi y \delta t \cos kx + \dots]$$

und beschränkt sich auf die erste Potenz von  $\delta t$ , so kann man die Gleichung nach  $y$  auflösen und erhält

$$y = \frac{\varepsilon \sin kx}{1 - \varepsilon \mu k^2 \pi \delta t \cos kx} = \varepsilon \sin kx [1 + \varepsilon \mu k^2 \pi \delta t \cos kx].$$

Also ist

$$16) \quad y = \varepsilon \sin kx + \varepsilon^2 \mu k^2 \pi \delta t \sin kx \cos kx$$

die Gleichung der Wirbelschicht zur Zeit  $\delta t$ .

Es ist jetzt die Änderung der Wirbeldichte zu untersuchen, die infolge der longitudinalen Geschwindigkeit eintritt. Die Wirbelstärke, die sich auf einem Längenelement der Wirbelschicht befindet, wird mit der Zeit unveränderlich sein, auch wenn das Element seine Länge ändert. Also

$$\lambda(x) \cdot dx = \text{const.}$$

oder durch logarithmisches Differenzieren nach der Zeit:

$$\frac{\delta \lambda(x)}{\lambda(x) \delta t} + \frac{\delta dx}{dx \cdot \delta t} = 0.$$

Dabei bezieht sich „ $d$ “ auf Änderung mit dem Ort, „ $\delta$ “ auf Änderung mit der Zeit. Eine Vertauschung der Reihenfolge der Operationen gibt

$$\frac{\delta \lambda(x)}{\lambda(x) \delta t} + \frac{d \delta x}{dx \cdot \delta t} = 0.$$

Nun ist aber

$$\frac{\delta x}{\delta t} = u_0$$

die Geschwindigkeit an der Stelle  $x$ , also

$$17) \quad \frac{1}{\lambda(x)} \frac{\delta \lambda(x)}{\delta t} + \frac{d u_0}{dx} = 0.$$

Für die Änderung der Wirbeldichte erhält man

$$17') \quad \delta \lambda(x) = -\lambda(x) \frac{d u_0}{dx} \delta t.$$



In unserem Fall ergibt sich nach (15)

$$\frac{du_0}{dx} = -\varepsilon \mu k^2 \pi \cos kx.$$

Ferner ist  $[\lambda(x)]_{t=0} = \mu$ , also

$$\delta \lambda(x) = \varepsilon \mu^2 k^2 \pi \cos kx \delta t.$$

Folglich ist die Wirbeldichte zur Zeit  $\delta t$

$$(18) \quad [\lambda(x)]_{t=\delta t} = \mu + \varepsilon \mu^2 k^2 \pi \cos kx \delta t$$

In Übereinstimmung mit der Anschauung, die sich aus der Geschwindigkeitsverteilung ergibt, tritt die größte Dichtigkeit an den Stellen  $kx = \dots 0, 2\pi, \dots 2k\pi \dots$  auf, die kleinste Dichtigkeit an den Stellen  $kx = \dots \pi, 3\pi, \dots (2k+1)\pi \dots$ . An allen diesen Stellen ändert die Geschwindigkeit das Zeichen; und zwar strömt auf die ersteren die wirbelnde Flüssigkeit von beiden Seiten zu, von letzteren nach beiden Seiten weg.

Die veränderte Wirbeldichte wird nun veränderte Geschwindigkeiten der Wirbelteilchen zur Folge haben. Nach (15) ändert sich  $u_0$  nur um einen Betrag 2. Ordnung in  $\varepsilon$ ; dagegen nimmt  $v_0$ , das bisher Null war, nach (13) den Wert

$$v_0 = \varepsilon \mu^2 k^2 \pi \delta t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ka}{x-a} da$$

an. Das hier auftretende Integral läßt sich in ähnlicher Weise behandeln wie das in  $u_0$  vorgekommene. Mittels derselben Substitution

$$kx = \xi; \quad ka = \alpha$$

und durch Zerlegung des Intervalls in Teilintervalle von der Länge  $2\pi$  erhält man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ka}{x-a} da = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha}{\xi - \alpha} d\alpha = \sum_{r=-\infty}^{\xi+2(v+1)\pi} \int_{\xi+2r\pi}^{\xi+2(r+1)\pi} \frac{\cos \alpha}{\xi - \alpha} d\alpha.$$

Hierauf ergibt die Einführung neuer Integrationsvariablen  $\beta$

$$a - \xi = 2\nu\pi + \beta$$

und die Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ka}{x-a} da &= - \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\beta + \xi) d\beta}{\beta + 2\nu\pi} \\ &= - \int_0^{2\pi} \cos(\beta + \xi) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\beta + 2\nu\pi} d\beta. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\beta + 2\nu\pi} = \frac{1}{2} \cotg \frac{\beta}{2}$$

bei richtiger Anordnung der Glieder, welche die Konvergenz gewährleistet;<sup>1)</sup> also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ka}{x-a} da = - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(\beta + \xi) \cotg \frac{\beta}{2} d\beta$$

Durch eine einfache trigonometrische Umformung findet man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ka}{x-a} da = \int_0^{\pi} [\sin \xi - \cos \xi \cotg \gamma + \sin(2\gamma + \xi)] d\gamma,$$

wo 
$$\gamma = \frac{\beta}{2}$$

ist; und durch Integration

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ka}{x-a} da &= [\gamma \sin \xi - \cos \xi \lg \sin \gamma - \frac{1}{2} \cos(2\gamma + \xi)]_{\gamma=0}^{\gamma=\pi} \\ &= \pi \sin \xi = \pi \sin kx. \end{aligned}$$

Also ist

$$19) \quad v_0 = \varepsilon \mu^2 k^2 \pi^2 \sin kx \cdot \delta t.$$

<sup>1)</sup> Burkhardt, l. c., S. 145–148.

Die transversale Geschwindigkeit ist also dem ursprünglichen Ausschlag proportional und vergrößert ihn.

Zusammenfassend lassen sich die Vorgänge in der Wirbelschicht so schildern. Eine transversale Störung der Wirbelschicht, die eine periodische Funktion des Ortes ist, bewirkt das Auftreten longitudinaler Geschwindigkeiten der Wirbelteilchen. Die Folge davon ist eine Störung der Wirbeldichte, die ebenfalls eine periodische Funktion des Ortes ist. Diese gibt Veranlassung zu einer transversalen Geschwindigkeit in Richtung des ursprünglichen Ausschlags, die seiner Größe proportional ist und also die ursprüngliche Störung verstärkt.

So lange nur Glieder 1. Ordnung in  $\varepsilon$  in Betracht gezogen werden müssen, wachsen also die Ausschläge proportional an, während gleichzeitig an einzelnen Stellen, deren Abstand  $\frac{2\pi}{k}$  ist, die Wirbeldichte einen mit der Zeit immer stärker werdenden Maximalwert annimmt. Für wachsende Ausschläge, wenn Glieder höherer Ordnung in  $\varepsilon$  nicht mehr vernachlässigt werden dürfen, werden die Verhältnisse so kompliziert, daß sie rechnerisch nicht mehr zu verfolgen sind. Indessen werden die gefundenen Bewegungen 1. Ordnung doch auch weiterhin in der Hauptsache für die Veränderungen maßgebend sein, nur durch Korrektionsglieder verändert, die mit wachsender Zeit immer mehr an Einfluß gewinnen. Es werden also die aufgetretenen Maximalstellen der Wirbeldichte immer mehr verstärkt werden, während die zwischenliegenden Minima sich dem Wert Null der Wirbeldichte immer mehr nähern. Dabei wird an den Minimalstellen die Geschwindigkeit der Potentialbewegung zu beiden Seiten der Wirbelschicht immer weniger verschieden werden; das Auftreten neuer Unstetigkeiten ist nicht zu erwarten, im Gegenteil wird der Einfluß der Unstetigkeitsfläche vermindert bis auf Null. Die ganze Wirbelschicht löst sich schließlich in eine Reihe gleich starker

Wirbel in gleichen Abständen auf, wie sie v. Kármán<sup>1)</sup> zuerst untersucht hat.

v. Kármán und andere<sup>2)</sup> haben die Kármánschen Wirbel in Zusammenhang mit der Prandtlschen<sup>3)</sup> Grenzschichtentheorie gebracht und angenommen, daß sich die Flüssigkeitsschicht, die unmittelbar an der Wand eines in der Strömung befindlichen Hindernisses durch Reibung zurückgehalten und in Rotation versetzt wird,<sup>4)</sup> als Wirbelschicht löst und in die Flüssigkeit austritt, wenn ein gewisser Spannungszustand erreicht ist. Diese instabile Grenzschicht wird sich in gleich starke spiralig aufgewundene Wirbel in gleich großen Abständen auflösen. Die einzelne Wirbelreihe ist allerdings selbst wieder instabil<sup>5)</sup> und deshalb zu Versuchen wenig geeignet, dagegen können zwei parallele Wirbelreihen von entgegengesetzter Drehrichtung eine stabile Lage annehmen. Die von Kármán veröffentlichten Photographien von Versuchen im Laboratorium zeigen auch die beiden Wirbelreihen in sehr schöner Ausbildung und guter Übereinstimmung mit der durch die Theorie geforderten stabilen Anordnung, sowohl hinter einem in der Flüssigkeit bewegten Hindernis als auch bei Strahlbildung in der Flüssigkeit. Die Ablösung der Wirbel ist auf keinem dieser Bilder zu beobachten; der erste Wirbel tritt in einem kleinen Abstand hinter dem Hindernis auf, wo er durch Aufrollen eines Stückes der Prandtlschen Wirbelschicht entsteht. L. Föppl<sup>2)</sup> hat gefunden, daß es hinter einem Kreiszyylinder in

---

1) Th. v. Kármán, Über den Mechanismus des Widerstandes usw. vgl. S. 81, Anm. 2.

2) F. Pfeiffer, Theorien des Flüssigkeitswiderstandes. Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen, 1912, Heft 16 bis 18. — L. Föppl, Wirbelbewegung hinter einem Kreiszyylinder. Sitzungsber. der mathem.-physikal. Klasse der K. B. Akademie der Wissensch. zu München, 1913, Bd. 43, S. 1 u. f.

3) L. Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Vgl. S. 81, Anm. 1.

4) Nach unserer Auffassung ist die Helmholtzsche Wirbelschicht zuerst vorhanden und die Ursache der Reibung.

5) Th. v. Kármán und H. Rubach l. c. vgl. Anm. 2, S. 81.

strömender Flüssigkeit unendlich viele, eine Kurve erfüllende Punktpaare gibt, auf denen ein Wirbelpaar in Ruhe sein kann; zu jedem Punktpaar gehört eine bestimmte Wirbelstärke. Wenn sich bald nach Beginn der Bewegung die Spitzen der sich ablösenden Wirbelschichten zu spiraligen Wirbeln aufrollen, so müssen sich diese, um im Gleichgewicht zu bleiben, um so weiter von dem Hindernis entfernen, je größer ihre Wirbelstärke wird; bis dann infolge einer zufälligen Störung des labilen Gleichgewichtes erst einer, dann der andere der beiden Wirbel sich rascher mit der Strömung fortbewegt. Nachdem so die Wirbelschicht abgerissen ist, bilden sich neue Wirbel, die als Kármánsche Wirbel den ersten folgen. Auf den beigelegten Photographien sieht man sehr deutlich das Vorhandensein ganz kleiner Wirbel zwischen dem Hindernis und dem in Ruhe befindlichen Wirbelpaar. Es scheint sich also die Prandtlsche Wirbelschicht zuerst in kleine Wirbel aufzulösen, die sich dann zu größeren Wirbeln vereinigen.

Beobachtet man in der Natur, so bemerkt man, daß die Wirbel, die hinter Pfosten, Pfeilern und dgl. in ruhig strömendem Wasser auftreten, die stabile Anordnung nur in äußerst seltenen Fällen annehmen,<sup>1)</sup> namentlich dann niemals, wenn die Breite des Hindernisses einige Zentimeter überschreitet. In der Regel zeigt sich beiderseits eine deutlich sichtbare Unstetigkeitsfläche, die oft allmählich verschwindet; gewöhnlich bilden sich jedoch in ihr einzelne Wirbel oder Wirbelreihen in annähernd gleichen Abständen, die sich dann bald infolge der Unstabilität solcher Reihen in Wirbelgruppen auflösen. Immer beginnt die Wirbelbildung erst in einiger Entfernung, manch-

---

<sup>1)</sup> Ein Nachteil der Kármánschen stabilen Anordnung ist, daß sie für räumliche Strömungen nicht verallgemeinert werden kann. Man müßte denn annehmen, daß sich etwa hinter einer kreisrunden Scheibe, die auf der Strömungsrichtung senkrecht steht, spiralige Wirbel der Art bilden, wie sie hinter einer Schiffsschraube aufzutreten scheinen. Ein Versuch, den Riecke, Beiträge zur Hydrodynamik, Göttinger Nachrichten, 1888, S. 347—357 beschreibt, spricht jedoch für das Auftreten von kreisförmigen Wirbelringen hinter der Scheibe.

mal ziemlich weit entfernt von dem Hindernis, kann also nicht wohl anders als durch eine Störung erklärt werden, die den Zerfall der ursprünglich kontinuierlichen Wirbelschicht veranlaßte. In sehr ruhigem Wasser genügt manchmal die Erregung eines Wellensystems durch einen in der Nähe eingeworfenen Stein, um die Auflösung der Wirbelschicht in einzelne Wirbel von großer Regelmäßigkeit zu veranlassen. Sehr regelmäßige Reihen ganz kleiner Wirbel, die längere Zeit erhalten bleiben, kann man auch häufig beobachten, wenn sich in ruhiger Strömung Unstetigkeitsflächen infolge von Unebenheiten des Grundes bilden; auch hier hat man es mit der Auflösung einer Wirbelschicht zu tun.

Die bisher geschilderten Wirbelsysteme sind sämtlich ihrer Entstehung nach von dem Kármánschen System verschieden, auch wenn sie der Gestalt nach mit ihm übereinstimmen, da sich die Wirbel einer Reihe gleichzeitig, nicht nacheinander bilden.

Hinter einem Ruder bildet sich meist beim Eintauchen ein Wirbelpaar (eigentlich beobachtet man die freien Enden eines Wirbelfadens), beim Herausnehmen ein zweites. Für die Entstehung des letzteren hat Klein die schon erwähnte einfache Erklärung gegeben.<sup>1)</sup>

Zieht man ein Ruder mit gleichmäßiger geringer Geschwindigkeit, so daß keine Turbulenzerscheinungen und keine zu starken Oberflächenwellen, die die Beobachtung ganz allgemein sehr stören, auftreten, so bilden sich keine weiteren Wirbel, sondern geradlinige Trennungsschichten aus. Dagegen bemerkt man stets, daß das Ruder in der Hand zu schwingen sucht. Gibt man diesen Schwingungen nach, die von der Ruderlänge sicher ziemlich unabhängig sind und als erzwungene Schwingungen zu gelten haben, so bildet sich an jedem Umkehrpunkt ein Wirbel aus, und es entsteht ein deutliches System Kármánscher Wirbel. Die Entstehung dieser Wirbel läßt sich leicht durch eine weitere Verfolgung des Kleinschen Gedankens er-

---

<sup>1)</sup> F. Klein, vgl. S. 82, Anm. 1.

klären: man kann sich vorstellen, daß das Ruder bei jeder halben Schwingung aus den geschlossenen Stromlinien der einen Seite herausgezogen wird und daß so ein Stück der Wirbelschicht freigelegt wird. Dabei wäre die Reibung, wenn nicht ganz einflußlos, doch jedenfalls von viel geringerer Bedeutung als man sich vorzustellen gewohnt ist. Es ist klar, daß ähnliche Erscheinungen auftreten müssen, wenn ein Hindernis in bewegtem Wasser schwingt, oder wenn das Wasser selbst eine schwingende Bewegung nach Art stehender Wellen ausführt; beides kann man gelegentlich beobachten. Als Ursache der Schwingung sind wenigstens im ersten Fall die auf das Hindernis wirkenden Flüssigkeitsdrucke anzusehen, die unsymmetrisch sind, sobald die Symmetrie der Strömung nur einmal durch eine zufällige Ursache gestört ist.

Man hat demnach zwei Ursachen zu unterscheiden, die zur Entstehung von Wirbelreihen führen können. Die erste ist eine Störung einer ausgebildeten Wirbelschicht, die eine periodische Funktion des Ortes ist. Sie läßt sämtliche Wirbel gleichzeitig entstehen und ist im vorigen mathematisch ein Stück weit verfolgt. Die zweite ist eine schwingende Bewegung zwischen der Ausgangsstelle der Wirbelschicht und der Flüssigkeit, also eine Störung, die eine periodische Funktion der Zeit ist. Sie läßt einen Wirbel nach dem anderen sich bilden, indem jedes Stück der Wirbelschicht, das in die Flüssigkeit ausgetreten ist, schnell aufgerollt wird. Wenn die örtlichen oder zeitlichen Störungen nicht periodisch sind, kommt es zur Bildung von einzelnen Wirbeln verschiedener Stärke, nicht von Wirbelreihen.

---

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1915

Band/Volume: [1915](#)

Autor(en)/Author(s): Lagally Max

Artikel/Article: [Zur Theorie der Wirbelschichten 79-107](#)