Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1915

München 1915
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Über die analytische Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Funktion.

Von **G. Mittag-Leffler.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 6. März 1915.

Es sei $$c_0, c_1, c_2 \ldots c_\nu \ldots$$
eine unendliche Folge von Konstanten, die der Cauchyschen [1]) Bedingung
$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\frac{|c_\nu|}{\nu!}} = \frac{1}{r}$$
genügen, wobei r eine endliche positive Größe vorstelle.

Die Theorie der analytischen Funktionen nach Weierstraß gründet sich auf die Betrachtung der Potenzreihe:

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x-a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!}(x-a)^\nu,$$

---

[1]) Augustin-Louis Cauchy, Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique, 1ière partie. Analyse algébrique. Paris 1821. Théorème I, S. 132.

Vgl. Ed. Phragmén, Om konvergensområdet hos potensserier af två variabler. Öfversigt af Kungl. Vet. Ak. Förh. Stockholm 1883. No. 10, S. 24.

J. Hadamard, Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, Thèse, 1892, S. 7, 8.

A. Pringsheim, Enzyklopädie der Math. Wiss., Bd. 1, T. 1, S. 81, Note 168.

Weierstraß, der zu Beginn seiner Arbeiten den Cauchyschen Satz nicht gekannt hatte, begann seine Vorlesung über die Theorie der analytischen Funktionen immer mit dem Beweise des folgenden Satzes: „Der Konvergenzradius der Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ ist die obere Grenze der Werte von $|x-a|$, für welche die obere Grenze von $\left|\frac{c_\nu}{\nu!}(x-a)^\nu\right|$ $(\nu = 0, 1, 2\ldots)$ endlich ist." Man sieht, daß dieser Satz mit dem Cauchys identisch ist.

wo x die Veränderliche und a eine beliebig gewählte Konstante bedeute. Diese Reihe definiert in einem Kreise C mit dem Mittelpunkt a und dem Radius r eine analytische Funktion. Sie hat die charakteristische Eigenschaft, in jedem innerhalb C gelegenen Bereich gleichmäßig konvergent und andrerseits in jedem Punkte außerhalb C divergent zu sein.

Man nennt den Bereich C den Konvergenzkreis oder Konvergenzbereich der Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$. Diese letztere Ausdrucksweise, Konvergenzbereich, soll bei jedem arithmetischen Ausdruck Anwendung finden, der im Innern eines Bereiches konvergent, aber in jedem Punkte außerhalb divergent ist.

In (1) werde die Substitution ausgeführt:

$$(x-a)=(x'-a)(1+u). \tag{2}$$

Dabei soll x' im Innern von C angenommen werden. Nach dem Weierstraßschen Satz über iterierte Reihen[1]) können wir die Reihe (1) in eine neue Reihe nach steigenden Potenzen von u umordnen:

$$\mathfrak{P}((x'-a)(1+u))=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{\nu!}\frac{c_\mu}{\mu!}(x'-a)^\mu\right)u^\nu,$$

wofür man schreiben kann:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}((x'-a)(1+u))&=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!}(x'-a)^{\mu+\nu}\right)u^\nu\\ &=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!}(x'-a)^{\mu+\nu}u^\nu.\end{aligned}\tag{3}$$

Die innere Summation geht hierbei der äußeren voraus.

Nach dem gleichen Satz von Weierstraß weiß man, daß die Reihe (3) sicher konvergiert, wenn $|u|$ so klein gewählt

---

[1]) Karl Weierstraß, „Zur Funktionenlehre (Aus dem Monatsbericht d. Kgl. Akad. d. Wiss. vom 12. August 1880"). Werke, Bd. 2, S. 205—208.

Über die Terminologie „mehrfache Reihe" und „iterierte Reihe" sehe man „Encyclop. des sciences mathématiques, T. I, vol. I, Fasc. 2, S. 255, Note 128.

ist, daß x in das Innere von C fällt; dies drückt sich durch die Ungleichung aus:

$$|x' - a| \cdot |u| < r - |x' - a|.$$

Ersetzt man jetzt auf der rechten Seite von (3) u durch seinen Ausdruck in x und x'

$$u = \frac{x - a}{x' - a} - 1 = \frac{x - x'}{x' - a}, \tag{4}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(x - a) &= \mathfrak{P}\left((x' - a)\left(1 + \frac{x - x'}{x' - a}\right)\right) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!} (x' - a)^{\mu} (x - x')^{\nu} \right) = \mathfrak{P}(x' - a, x - x'). \end{aligned} \tag{5}$$

Die iterierte Reihe (5) konvergiert sicher für alle x im Innern eines Kreises $C_{x'}$, der um den innerhalb C gelegenen Punkt x' beschrieben ist und C von innen berührt.

Es kann indessen der Fall eintreten, daß diese Reihe (5) auch dann noch konvergent bleibt, wenn x einem konzentrischen Kreise $C_{x'}$ angehört, der größer ist als der C berührende Kreis. Diese Tatsache ist von grundlegender Bedeutung. Welchen Standpunkt man auch in der Funktionentheorie einnimmt, sei es der von Weierstraß, von Cauchy oder von Riemann, die Grundlage der Theorie bildet immer die Tatsache, daß die Reihe $\mathfrak{P}(x - a)$ durch eine Substitution

$$x - a = (x' - a) \cdot f(u) \tag{6}$$

in eine andere transformiert werden kann, die, wie die erste, aus den Elementen

$$c_0, \ c_1, \ c_2, \ \ldots \ c_\nu, \ \ldots$$

aufgebaut ist, aber einen weiteren Konvergenzbereich als $\mathfrak{P}(x - a)$ besitzt.

Die Wahl der Funktion $f(u) = 1 + u$, wie in der herkömmlichen Theorie, ist durchaus nicht wesentlich. Die Frage, was man durch Einführung anderer Funktionen $f(u)$ an Stelle des $1 + u$ gewinnen kann, bedeutet daher ein Problem, das der Theorie der analytischen Funktionen geradezu an die Spitze zu stellen ist.

Indessen möge zunächst die Konvergenz der iterierten Reihe $\mathfrak{P}(x'-a,\ x-x')$ betrachtet werden, in der x' dem Innern von C angehören soll und x dem Innern des Kreises $C_{x'}$, der einem gegebenen Punkt x' entspricht. Wir bezeichnen mit D die Gesamtheit der Punkte x, die so erhalten wird, wenn jeder Punkt nur ein einziges Mal gezählt wird. Die Konvergenz hört dann auf, wenn x außerhalb D oder x' außerhalb C gelegen ist. Dies folgt offenbar aus der oben erwähnten Tatsache, daß eine Potenzreihe für jeden innerhalb ihres Konvergenzkreises gelegenen Bereich gleichmäßig konvergiert, dagegen in jedem Punkte außerhalb dieses Kreises divergiert.

Nehmen wir nun an, daß x' einen innerhalb C gelegenen Bereich durchlaufe, ebenso x einen entsprechenden Bereich im Innern von D. Unter diesen Voraussetzungen ist die Reihe $\mathfrak{P}(x'-a,\ x-x')$ für diese beiden Bereiche gleichmäßig konvergent.

In der Tat, nehmen wir zwei positive Größen Θ und ϑ beide kleiner als eins an und bezeichnen mit $\varrho_{x'}$ den Radius des Kreises $C_{x'}$ mit dem Mittelpunkt x'. Wenn der Punkt x' das Gebiet $|x'-a| \leqq \Theta r$ durchläuft, möge x die entsprechenden Bereiche $|x-x'| \leqq \vartheta\varrho_{x'}$ durchlaufen; dieser Bereich, den x durchläuft, wenn wir jeden Punkt nur ein einziges Mal zählen, heiße $\overline{D}$.

Es sei nun mit g die obere Grenze von $|\mathfrak{P}(x'-a,\ x-x')|$ im Innern oder auf der Begrenzung des Bereiches $\overline{D}$ bezeichnet. Dann gibt der Satz von Cauchy-Weierstraß:[1])

$$\frac{1}{\nu!}\left|\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!}(x'-a)^{\mu}\right| \leqq g(\vartheta\varrho_{x'})^{-\nu}.$$

[1]) A. Cauchy, „Résumé d'un mémoire sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites (lu à l'Académie de Turin, dans la séance du 11 Octobre 1831)". Exercises d'Analyse et de Physique Mathématique, Bd. 2. Paris 1841, S. 53, Gleichung (9).

Karl Weierstraß, „Zur Theorie der Potenzreihen. Münster, im Herbst 1841." Werke, Bd. 1, S. 67—74.

Wählt man jetzt x in solcher Weise, daß

$$|x - x'| \leqq \vartheta^2 \varrho_{x'},$$

so erhält man:

$$\frac{1}{\nu!}\left|\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!}(x'-a)^{\mu}(x-x')^{\nu}\right| \leqq g\,\vartheta^{\nu}$$

und

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+n'} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!}(x'-a)^{\mu}(x-x')^{\nu}\right| \leqq g\,\frac{\vartheta^{n}}{1-\vartheta}$$

w. z. b. w.

Der Bereich D enthält den Bereich C in allen Fällen, in denen er nicht mit ihm identisch ist.[1]) Fixiert man im Innern von C einen Bereich für x', so gibt es immer einen innerhalb D gelegenen entsprechenden Bereich für x von der Beschaffenheit, daß die Reihe $\mathfrak{P}(x'-a,\ x-x')$ für diese beiden Bereiche gleichmäßig konvergent ist. D ist also für die Reihe $\mathfrak{P}(x'-a,\ x-x')$ Konvergenzbereich, ganz so, wie C für die Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$. Die Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ stellt im Innern von C den eindeutigen Zweig einer durch die Konstanten

$$c_0,\ c_1,\ c_2\ \ldots\ c_{\nu}\ \ldots$$

definierten Funktion dar, die wir mit $FC(x)$ bezeichnen wollen. Die Reihe $\mathfrak{P}(x'-a,\ x-x')$ repräsentiert im Innern eines weiteren Bereiches D einen eindeutigen Zweig $FD(x)$, der $FC(x)$ enthält und auf eindeutige Weise bestimmt ist, wenn die Konstanten $c_0,\ c_1,\ c_2\ \ldots\ c_{\nu}\ \ldots$ fixiert sind.

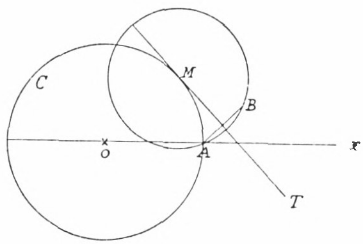
Als Beispiel möge der Konvergenzbereich D der iterierten Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\ \nu!}\, x'^{\mu}(x-x')^{\nu}, \tag{7}$$

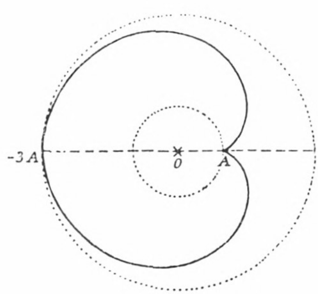
welche die Funktion $\dfrac{1}{1-x}$ darstellt, untersucht werden. Die Begrenzungslinie des Bereiches D ist in diesem Falle, wie er-

[1]) Bekanntlich existiert in diesem Falle die durch $\mathfrak{P}(x-a)$ definierte analytische Funktion außerhalb des Kreises C nicht mehr. Der Kreis C ist eine „natürliche Grenze" der Funktion.

sichtlich, die Umhüllende aller Kreise, die durch den Punkt A mit der Koordinate $x = 1$ gehen und ihren Mittelpunkt M auf dem Kreise C haben. Der Punkt B, der diese Kurve erzeugt, ist zu A symmetrisch in Bezug auf die durch M an den Kreis C gezogene Tangente MT.



Man erkennt nun in der Begrenzungslinie von D die Kardioide[1]) $\varrho = 2(1 - \cos\Theta)$, bezogen auf den Pol A und die polare Achse Ax. In unserer Figur ist ein Kreis mit dem Radius OA im Innern der Kardioide und ein anderer mit dem Radius $(O, 3A)$ gezeichnet.



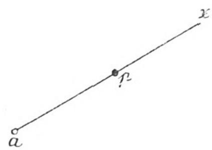
[1]) M. Carré, „Examen d'une courbe formée par le moyen du cercle." Hist. de l'Acad. Royale des Sciences. Année MDCCV. Mémoires, S. 56—61.

Johannes Castillioneus, „De Curva Cardioide, de Figura sua sic dicta." Philosophical Transactions 1741, Nr. 461, S. 778—781.

L. Lindelöf, „Lärobok i analytisk geometrie." Helsingfors 1864, S. 149.

Bevor wir weiter fahren, mögen einige Definitionen vorausgeschickt werden, von denen wir im folgenden fortwährend Gebrauch zu machen haben.

Durch den Punkt a ziehen wir einen beliebigen Halbstrahl ax und wählen auf ihm einen Punkt p so, daß die von der Richtung des Halbstrahls abhängige Länge (a, p) eine gewisse Größe l stets übertrifft. (Der Punkt p darf übrigens auch im Unendlichen liegen.) Lassen wir nun ax sich um den Mittelpunkt a um den Winkel 2π drehen, so überstreicht die Strecke (a, p) eine Fläche, die a umgibt und die wir einen Stern mit dem Mittelpunkt a nennen wollen. Der Punkt p soll Begrenzungspunkt des Sterns und die Gesamtheit der Begrenzungspunkte soll Begrenzung des Sterns heißen.[1])



Ein Stern E heißt Konvergenzstern für einen bestimmten arithmetischen Ausdruck, wenn er der Konvergenzbereich dieses Ausdruckes ist; d. h. wenn der Ausdruck für jeden innerhalb E gelegenen Bereich gleichmäßig konvergiert, dagegen in jedem Punkte außerhalb E divergiert. Der Zweig der Funktion $F(x)$, der durch einen solchen Ausdruck dargestellt wird, soll mit $FE(x)$ bezeichnet werden. Man sieht, daß der Kreis C Konvergenzstern für die Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ ist, die den Funktionszweig $FC(x)$ darstellt.

Es kann sein, daß der Begrenzungspunkt, der jedem Erzeugungsstrahl des Sterns entspricht, jeweils der erste singuläre Punkt von $F(x)$ ist, zu dem man beim Durchlaufen des Halbstrahls von a aus gelangt. In diesem Falle heiße der Stern Hauptstern von $F(x)$[2]) und sei mit dem Buchstaben A bezeichnet, während wir den entsprechenden Zweig der Funktion $F(x)$ mit $FA(x)$ bezeichnen wollen.

---

[1]) G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène.“ Acta Mathem., Bd. 23, S. 47.

[2]) G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (Seconde note). Acta Mathematica, Bd. 24, S. 200.

Jeder analytischen Funktion, die in der Umgebung des Punktes a durch die der Cauchyschen Bedingung genügenden Konstanten $c_0, c_1, c_2 \ldots c_\nu, \ldots$ definiert ist, entspricht folglich ein Hauptstern A.

Andrerseits: Ist ein beliebiger Stern A gegeben, so kann man immer und auf unendlich viele Arten einen arithmetischen Ausdruck bilden, der einen Funktionszweig $FA(x)$ darstellt, für welchen A der Hauptstern ist. Der gleiche Satz besteht in dem allgemeinen Falle, wo A ein beliebiges einfaches Kontinuum bedeutet, d. h. ein aus einem einzigen Stücke bestehendes, sich in keinem Punkte mehrfach überdeckendes Kontinuum.[1]) Es ist nicht einmal schwer zu erkennen, daß das Theorem in solcher Weise ausgesprochen werden kann, daß jedes beliebige Kontinuum zulässig ist.

Nach diesen Vorbetrachtungen kehren wir zu der iterierten Reihe $\mathfrak{P}(x' - a, x - x')$ zurück, die durch die nur der Cauchyschen Bedingung unterworfenen Konstanten c_ν definiert ist.

Diese Reihe enthält außer der Veränderlichen x, die den Variabilitätsbereich D besitzt, die Veränderliche x', die auf das Innere des Kreises C beschränkt bleibt. Der Radius r dieses Kreises C ist nun zwar durch den Satz von Cauchy (s. S. 109) durch die Folge der Konstanten $c_0, c_1, \ldots c_\nu, \ldots$ definiert; indessen ist die Berechnung von r mit Hilfe dieser Konstanten eine äußerst schwierige Aufgabe. Wenn die iterierte Reihe

---

[1]) G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante". Acta Mathematica, Bd. 4, S. 1—79.

Der Satz ist hier von verschiedenen Gesichtspunkten aus bewiesen, unter alleiniger Anwendung der elementaren Weierstraßschen Theorie analytischer Funktionen.

Herr Runge hat ohne meine Arbeit zu kennen, das gleiche Theorem in ähnlicher Allgemeinheit mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes bewiesen („Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen," § 2. Acta Mathematica, Bd. 6, S. 239—244; vgl, S. 229).

Vgl. noch Hurwitz, „Über die Entwicklung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit." Verhandlungen des I. Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich, 1897. S. 94.

$\mathfrak{P}(x'-a, x-x')$ gegenüber der Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ den Vorzug eines größeren Konvergenzbereiches voraus hat, so hat sie dafür eine wesentliche Eigenschaft der letzteren verloren, nämlich die, lediglich aus den Konstanten c_ν mit Hilfe von numerischen Koeffizienten aufgebaut zu sein, die von diesen Konstanten unabhängig sind.

Es ist erst in den letzten Jahren geglückt, diesen Mangel zu beheben. Um so bemerkenswerter erscheint die Tatsache, daß man dabei den elementaren Rahmen der Theorie der analytischen Funktionen nicht zu verlassen braucht.[1]) Es gibt, wie wir sehen werden, tatsächlich mehrere einfache und direkte Methoden.

Wir sind zu der iterierten Reihe $\mathfrak{P}(x'-a, x-x')$ mit Hilfe der Substitution

(6) $$x-a=(x'-a)f(u)$$

gelangt, wobei wir

(8) $$f(u)=1+u \qquad \text{(vgl. (2))}$$

gesetzt hatten.

Es liegt auf der Hand, an Stelle der Substitution (8) die allgemeine lineare Substitution einzuführen:

(9) $$f(u)=\frac{l+mu}{p+qu},$$

---

[1]) G. Mittag-Leffler, „Om en generalisering af potensserien," 9 mars 1898. „Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion." 1:sta meddelande, 11 maj 1898. 2:dra meddelande, 11 maj 1898, 3:dje meddelande, 14 sept. 1898. Öfversigt af Kgl. Vet. Ak. Förhandl. Stockholm 1898.

„Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène," Note 1—5. Acta Mathematica, Bd. 23—29, 15. März 1899 bis 9. Sept. 1904.

„Sulla rappresentazione analitica di un ramo uniforme die una funzione monogena." Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. 34, 23 Aprile 1899.

„Sur la représentation d'une branche uniforme de fonction analytique." Comptes Rendus, T. 128, 15 mai 1899.

worin l, m, p, q Konstanten bedeuten, die ebenso wie $c_0, c_1, c_2, \ldots c_\nu \ldots$ von $x-a$ und $x'-a$ unabhängig sind. Indem man nun auf gleiche Art wie im klassischen Falle verfährt, d. h. indem man in $\mathfrak{P}(x-a)$ an Stelle der Substitution (6) (8) die allgemeine (6) (9) einführt, die Reihe $\mathfrak{P}((x'-a)f(u))$ nach Potenzen von u ordnet und schließlich in der so erhaltenen Entwicklung an Stelle des u seinen Ausdruck in $\frac{x-a}{x'-a}$, nämlich

$$u = \frac{l(x'-a)-p(x-a)}{q(x-a)-m(x'-a)} \tag{10}$$

einsetzt, erhält man einen Ausdruck, der die Reihe $\mathfrak{P}(x'-a, x-x')$ als Spezialfall enthält. Man sieht leicht, daß man auf diese Weise nichts gewinnt. Der neue Ausdruck hängt innerlich ebenso wie $\mathfrak{P}(x'-a,\ x-x')$ von dem Radius r ab.

Gleichwohl gibt es eine sehr einfache Methode, dieser Schwierigkeit Herr zu werden, die sich sozusagen ganz von selbst darbietet. Anstatt nämlich für u in der Entwicklung

$$\mathfrak{P}\left((x'-a)\frac{l+mu}{p+qu}\right) = \overline{\mathfrak{P}}(u) \tag{11}$$

den Ausdruck (10) einzuführen, wollen wir u gleich einer Konstanten setzen. Setzen wir $u=1$ und unterwerfen die Konstanten l, m, p, q der Bedingung:

$$f(1) = 1, \tag{12}$$

d. h.

$$l+m = p+q. \tag{13}$$

Dann hat man in der Reihe $\overline{\mathfrak{P}}(1)$:

$$x' = x \qquad \text{(vgl. (6), (12))}$$

zu setzen.

Auf diese Weise gelangt man zu einem Ausdruck für $F(x)$, nämlich $\overline{\mathfrak{P}}(1)$, der auch noch außerhalb des Konvergenzkreises Gültigkeit besitzt, aber nicht mehr mit der Unvollkommenheit behaftet ist, die wir bei $\mathfrak{P}(x'-a,\ x-x')$ angetroffen hatten.

Es mögen zwei Fälle von verschiedenem Typus einer näheren Betrachtung unterzogen werden:

$$(14)\qquad \begin{cases} f(u) = \dfrac{1+ku}{1+k}; \qquad k > 0 \\ x - a = (x' - a)\dfrac{1+ku}{1+k} \end{cases}$$

$$(15)\qquad \begin{cases} f(u) = \dfrac{\alpha u}{1-\beta u}; \quad \beta = 1-\alpha; \quad 1 \geqq \alpha > 0 \\ x - a = (x' - a)\dfrac{\alpha u}{1-\beta u} \end{cases}$$

Wir wollen zuerst (14) untersuchen. Man hat (vgl. (3), (8)):

$$(16)\qquad \mathfrak{P}(1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!}\left(\frac{x-a}{1+k}\right)^{\mu+\nu} k^{\nu} = \mathfrak{P}_k(x-a).$$

Für $k = 0$ findet man wieder die Reihe

$$(1)\qquad \mathfrak{P}(x-a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!}(x-a)^\nu,$$

wie dies vorauszusehen war.

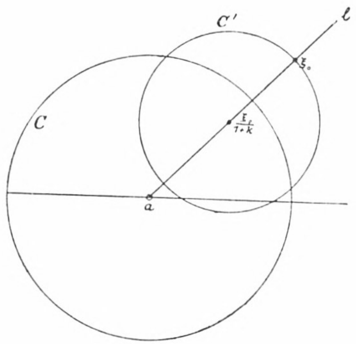
Die Reihe (16) ist mit der Reihe identisch, die man erhält, wenn man in der Gleichung

$$(5)\qquad \mathfrak{P}(x'-a,\, x-x') = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!}(x'-a)^{\mu}(x-x')^{\nu}$$

einsetzt:

$$(17)\qquad \begin{cases} x' - a = \dfrac{x-a}{1+k} \\ x - x' = \dfrac{k(x-a)}{1+k}. \end{cases}$$

Den Konvergenzstern der Reihe $\mathfrak{P}_k(x-a)$ erhält man infolgedessen auf folgende Weise. Es sei l ein von a ausgehender Halbstrahl, auf dem ein Punkt ξ und sein in Bezug auf a homothetischer Punkt $\dfrac{\xi}{1+k}$ liege. Um den Punkt $\dfrac{\xi}{1+k}$ beschreiben wir einen Kreis C', der durch ξ hindurchgeht, und lassen nun ξ den Halbstrahl l von a aus durchlaufen, bis entweder der mitgleitende Kreis C' durch einen singulären Punkt von $F(x)$ geht oder der Punkt $\frac{\xi}{1+k}$ den Umfang des Konvergenzkreises C erreicht. Sobald einer dieser beiden Fälle eintritt, markieren wir den entsprechenden Punkt ξ_0 und behalten von l nur die Strecke (a, ξ_0) bei.



Wiederholen wir die gleiche Konstruktion auf allen von a ausgehenden Halbstrahlen, so bildet die Gesamtheit aller erhaltenen Strecken (a, ξ_0) einen Stern E_k, der, wie unmittelbar ersichtlich, der Konvergenzstern der Reihe $\mathfrak{P}_k(x-a)$ ist. Dieser Stern enthält den Kreis C und ist seinerseits in dem Sterne D enthalten. Bemerkt sei, daß die auf C gelegenen singulären Punkte von $F(x)$ gemeinsame Begrenzungspunkte der Sterne E_k und D sind. Sie sind offenbar die einzigen auf C gelegenen Begrenzungspunkte von D oder E_k.

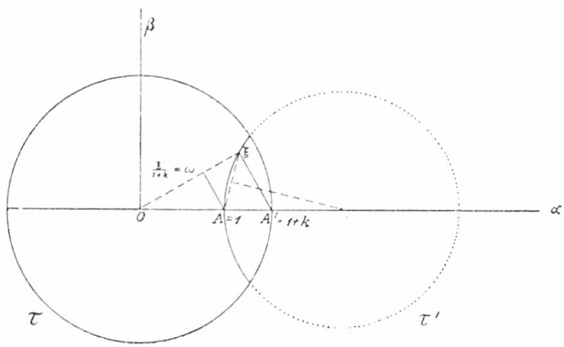
Um eine Vorstellung von der Gestalt des Sternes E_k zu erhalten, untersuchen wir zunächst den Stern der Reihe

$$(18) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\ \nu!} \left(\frac{x}{1+k}\right)^{\mu+\nu} k^{\nu},$$

welche mindestens im Innern des Kreises $C(|x| = 1)$ die Funktion $\frac{1}{1-x}$ darstellt.

Als erstes sei bemerkt, daß E_k im Innern des Kreises τ mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $1 + k$ gelegen ist.

Wenn wir ferner den Ort τ' der Punkte ξ konstruieren, für welche die entsprechenden Kreise durch den Punkt A mit der Koordinate 1 gehen, so wird E_k mit dem Anfangspunkt



auf der gleichen Seite dieser Kurve τ' liegen und von dieser Kurve begrenzt sein. Einem solchen Punkt ξ entspricht nun der Punkt ω mit der Koordinate $\dfrac{\xi}{1+k}$ als Mittelpunkt von C'; der Radius von C' ist dann gleich $\overline{\omega A}$, während wir andrerseits wissen, daß sein Wert gleich

$$|\xi| \frac{k}{1+k}$$

ist. Also hat der Ort von ω die folgende Eigenschaft:

$$\frac{\overline{\omega O}}{\overline{\omega A}} = \frac{\dfrac{|\xi|}{1+k}}{|\xi| \dfrac{k}{1+k}} = \frac{1}{k}.$$

Hat der Punkt A' die Koordinate $1 + k$, so genügt der Ort τ' der Relation

$$\frac{\overline{\xi O}}{\overline{\xi A'}} = \frac{\overline{\omega O}}{\overline{\omega A}} = \frac{1}{k}.$$

Die Kurve τ' ist also ein Kreis, dessen Gleichung, bezogen auf die Achsen $O\alpha$ und $O\beta$ lauten würde:

$$\beta^2 + \left(\alpha + \frac{1}{k-1}\right)^2 = \left(\frac{k}{k-1}\right)^2.$$

Der Stern E_k ist derjenige Teil der Ebene, der innerhalb τ und bezüglich τ' auf der gleichen Seite wie der Anfangspunkt gelegen ist.

Es ist die Gestalt des Sternes in den folgenden typischen Fällen konstruiert worden (siehe Blatt A):

$0 < k < 1$; $k = \frac{1}{2}$; Fig. 1

$k = 1$; Fig. 2

$1 < k < 2$; $k = 1 + \frac{2}{3}$; Fig. 3

$k = 2$; Fig. 4

$k > 2$; $k = 3$; Fig. 5.

Ist $k > 2$, so ist E_k der Kreis τ' mit dem Mittelpunkt $-\frac{1}{k-1}$, der C in dem Punkte $A\,(x = 1)$ berührt. Dieser Kreis nähert sich C, wenn k unbegrenzt wächst.

Die Reihe

$$(16) \qquad \mathfrak{P}_k(x-a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!\;\nu!} \left(\frac{x-a}{1+k}\right)^{\mu+\nu} k^\nu$$

stellt ein erstes, sehr elementares Beispiel eines arithmetischen Ausdrucks vor, der allein aus den Konstanten c_ν und der Variabeln $x - a$ besteht und in einem Bereich, der den Kreis C enthält, in eindeutiger Weise einen Zweig der Funktion $F(x)$ darstellt.

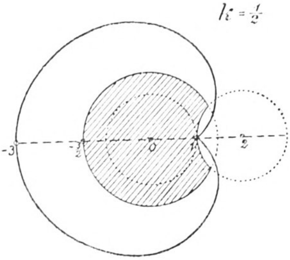
Indessen ist diese Reihe eine iterierte Reihe, während die Reihe

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x-a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu!} (x-a)^\nu$$

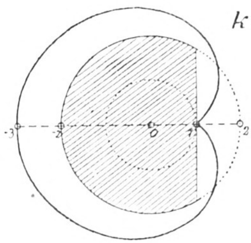
eine einfache Reihe war.

Blatt A.

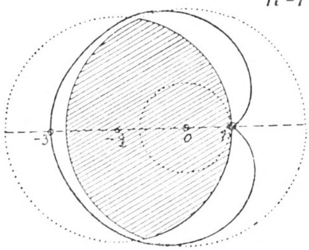
$k = \frac{1}{2}$



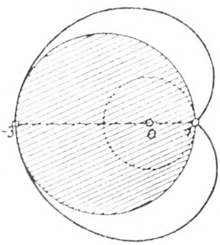
$k = 1$



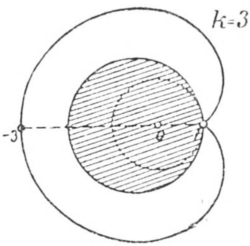
$k = 1 + \frac{2}{3}$



$k = 2$



$k = 3$



Die Substitution

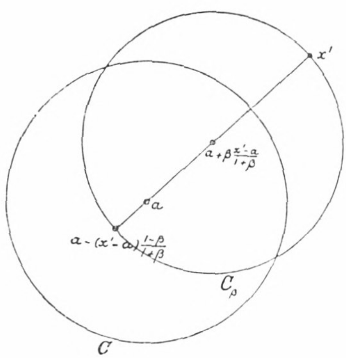
$$(15)\quad \begin{cases} f(u) = \dfrac{a u}{1 - \beta u}; \quad \beta = 1 - a; \quad 1 \geqq a > 0 \\[2ex] x - a = (x' - a)\dfrac{a u}{1 - \beta u}; \quad u = \dfrac{x - a}{a x' + \beta x - a} \end{cases}$$

setzt uns in den Stand, auch diesem Mangel abzuhelfen.

Lassen wir hier u den Kreis $|u| < 1$ beschreiben, so beschreibt die Veränderliche x gleichzeitig einen Kreis C_β. Der Durchmesser dieses Kreises ist die Verbindungslinie der beiden Punkte:

$$x = a - (x' - a)\frac{1-\beta}{1+\beta} \quad \text{und} \quad x = x',$$

welche beziehungsweise den Werten $u = -1$ und $u = 1$ entsprechen. Der Kreis C_β liegt im Innern von C, wenn x' im Innern von C gelegen ist.



Die Reihe

$$\mathfrak{P}\left((x' - a)\frac{a u}{1 - \beta u}\right)$$

konvergiert sonach für $|u| < 1$, wenn der Punkt x' in das Innere von C fällt. Jedes Glied dieser Reihe

$$\frac{c_\nu}{\nu!}(x' - a)^\nu \left(\frac{a u}{1 - \beta u}\right)^\nu$$

läßt sich in eine Reihe nach Potenzen von u entwickeln, die für $|u| < 1$ gleichmäßig konvergiert. Der Weierstraßsche Satz über iterierte Reihen[1]) erlaubt uns also, die Reihe

$$\mathfrak{P}\left((x' - a)\frac{\alpha u}{1 - \beta u}\right)$$

in eine nach Potenzen von u fortschreitende Reihe zu entwickeln:

$$(19)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}(x-a) = \mathfrak{P}\left((x'-a)\frac{\alpha u}{1-\beta u}\right) = \overline{\mathfrak{P}}(u) \\ = c_0 + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{c_1}{1!}\beta^{\nu-1}\alpha(x'-a) + \frac{c_2}{2!}\frac{\nu-1}{1!}\beta^{\nu-2}\alpha^2(x'-a)^2\right. \\ + \cdots + \frac{c_\mu}{\mu!}\frac{(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1)}{(\mu-1)!}\beta^{\nu-\mu}\alpha^\mu(x'-a)^\mu \\ \left. + \cdots + \frac{c_\nu}{\nu!}\alpha^\nu(x'-a)^\nu\right]\cdot u^\nu, \end{cases}$$

die sich für $u = 1$ verwandelt in:

$$(20)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_\alpha(x-a) \\ = c_0 + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{c_1}{1!}\beta^{\nu-1}\alpha(x-a) + \frac{c_2}{2!}\frac{\nu-1}{1!}\beta^{\nu-2}\alpha^2(x-a)^2\right. \\ + \cdots + \frac{c_\mu}{\mu!}\frac{(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1)}{(\mu-1)!}\beta^{\nu-\mu}\alpha^\mu(x-a)^\mu \\ \left. + \cdots + \frac{c_\nu}{\nu!}\alpha^\nu(x-a)^\nu\right]. \end{cases}$$

Die Reihe (20) kann, wie wir sehen werden, ebenso wie es bei der Reihe

$$(16)\qquad \mathfrak{P}_k(x-a) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{c_{\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!}\left(\frac{x-a}{1+k}\right)^{\mu+\nu}k^\nu$$

der Fall war, einen Konvergenzbereich besitzen, der über den Konvergenzkreis C der Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ hinausreicht.

Wie man sieht, besteht zwischen den beiden Reihen (16) und (20) der wesentliche Unterschied, daß die Reihe (20) ebenso

[1]) A. a. O.

wie die Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ eine einfache Reihe vorstellt, während (16) eine iterirte Reihe ist. Die Reihen $\mathfrak{P}_a(x-a)$ und $\mathfrak{P}(x-a)$ enthalten nur einen einzigen Grenzübergang, die Reihe (16) dagegen zwei nacheinander auszuführende Grenzübergänge.

Es soll nun zu der genauen Bestimmung des Konvergenzbereiches der Reihe (19) übergegangen werden. Zu diesem Zwecke machen wir die Subsitution (15) in $FA(x-a)$, d. h. in dem Funktionszweig, der mit Hilfe der Konstanten c_ν in dem Hauptstern A definiert ist. Nun lassen wir x' bis zu dem ersten Punkte x'_0 gleiten, für den der entsprechende Kreis C_β durch einen Begrenzungspunkt von A, d. h. durch einen singulären Punkt von $F(x)$ geht.

(Da $F(x)$ immer mindestens einen singulären Punkt auf C besitzt, so kann es nie vorkommen, daß C_β den Kreis C umschließt, d. h. daß der Punkt

$$a-(x'-a)\frac{1-\beta}{1+\beta}$$

außerhalb C liegt.)

Bezeichnen wir jetzt mit E_a den Stern, den die Strecke (a, x'_0) erzeugt, wenn der zugehörige Strahl um a eine volle Umdrehung macht.

Es soll sodann gezeigt werden, daß (19) konvergiert, wenn x' im Innern von E_a liegt und $|u|<1$ ist.

In der Tat, nach der Entstehungsart des Sternes E_a ist die Funktion $FA(x-a)$ im Innern des Kreises C_β und auf diesem Kreise regulär, wenn der C_β entsprechende Punkt x' im Innern von E_a liegt. Also ist die Funktion

$$FA\left((x'-a)\frac{\alpha u}{1-\beta u}\right)$$

für $|u|<1$ eine reguläre Funktion von u, sofern x' dem Stern E_a angehört. Nach dem Weierstraßschen Satz über iterierte Reihen[1]) kann sie daher in eine Reihe nach Potenzen

[1]) A. a. O.

von u entwickelt werden, die für $|u| < 1$ konvergiert und mit $P(u)$ bezeichnet werden möge.

Nun wurde schon bemerkt, daß die Werte des Funktionszweiges

$$FA\left((x' - a)\frac{a u}{1 - \beta u}\right)$$

für $|u| < 1$ durch die Reihe (19) gegeben sind, wenn x' in das Innere von C fällt. Die Reihe $P(u)$ ist also mit der Reihe (19) identisch, woraus hervorgeht, daß (19) konvergiert, solange x' innerhalb E_a liegt und $|u| < 1$ ist.

In der Reihe (19) setzen wir jetzt $u = 1$. Dann erhält man $x = x'$ und die Reihe geht über in

$$(20)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_a(x - a) \\ = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{c_1}{1!}\beta^{\nu-1}a(x - a) + \frac{c_2}{2!}\frac{\nu - 1}{1!}\beta^{\nu-2}a^2(x - a)^2\right. \\ \left. + \frac{c_3}{3!}\frac{\nu - 1\,\nu - 2}{2!}\beta^{\nu-3}a^3(x - a)^3 + \cdots + \frac{c_\nu}{\nu!}a^\nu(x - a)^\nu\right], \end{cases}$$

wobei die rechte Seite für jeden Wert x innerhalb E_a konvergiert. Sie konvergiert überdies gleichmäßig und absolut für jeden innerhalb E_a gelegenen Bereich. Ein solcher Bereich kann tatsächlich immer in das Innere eines Sternes E'_a eingeschlossen werden, der innerhalb E_a liegt und diesem genügend angenähert ist. Andrerseits kann man immer eine positive Größe r so fixieren, daß

$$1 < r < \frac{1}{\beta}$$

ist und außerdem der Punkt

$$x = a + (x' - a)\frac{a r}{1 - \beta r}$$

in das Innere von E_a fällt, wenn x' im Innern von E'_a liegt. Bezeichnen wir nun mit g die obere Grenze von $|\mathfrak{P}_a(x - a)|$ für alle x' im Bereiche E'_a und für $|u| < r$ und erinnern wir uns, daß die Reihe

$$(19)\qquad c_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{c_1}{1!}\beta^{\nu-1}a(x'-a)+\frac{c_2}{2!}\beta^{\nu-2}a^2\frac{\nu-1}{1!}(x'-a)^2+\cdots+\frac{c_\nu}{\nu!}a^\nu(x'-a)^\nu\right]u^\nu$$

für $|u|\leqq r$ konvergiert, so gibt der Cauchy-Weierstraßsche Satz:[1])

$$\left|\frac{c_1}{1!}\beta^{\nu-1}a(x'-a)+\frac{c_2}{2!}\beta^{\nu-2}a^2\frac{\nu-1}{1!}(x'-a)^2+\cdots+\frac{c_\nu}{\nu!}a^\nu(x'-a)^\nu\right|\leqq\frac{g}{r^\nu}.$$

Die Reihe (20) konvergiert also gleichmäßig und absolut für den Bereich E'_a und folglich, da E'_a dem Sterne E_a beliebig nahe kommen kann, in jedem Bereich innerhalb E_a.

Es sei noch bemerkt, daß die Reihe (20) in keinem Punkte x' außerhalb E_a konvergent sein kann. Denn unter dieser Voraussetzung müßte die Reihe (19) für $|u|\leqq\varrho<1$ gleichmäßig konvergieren, während x' außerhalb E_a liegt. Ersetzt man dann u durch seinen Ausdruck in $x-a$, so würde die erhaltene Reihe gleichmäßig konvergieren, wenn x auf einen Bereich innerhalb des über der Strecke

$$\left(a-(x'-a)\frac{1-\beta}{1+\beta},\ x'\right)$$

als Durchmesser beschriebenen Kreises C_β beschränkt wird. Sie müßte dementsprechend einen für alle Punkte dieses Bereiches regulären Funktionszweig darstellen.

Ordnet man jedoch diese Reihe nach steigenden Potenzen von $x-a$, was für genügend kleines $|x-a|$ immer möglich ist, so erhält man eine mit $\mathfrak{P}(x-a)$ identische Reihe. Also wäre der in Rede stehende Funktionszweig identisch mit dem aus $\mathfrak{P}(x-a)$ hervorgegangenen Zweig. Allein dies ist unmöglich; denn da x' außerhalb E_a liegt, hat dieser Zweig notwendig in dem betrachteten Kreise C_β einen singulären Punkt.

---

[1]) A. a. O.

Der Stern E_α ist folglich Konvergenzstern für die Reihe $\mathfrak{P}_\alpha(x-a)$, die im Innern von E_α den Zweig $FE_\alpha(x-a)$ der Funktion $F(x)$ darstellt. Für $\alpha=1$, $\beta=0$ geht der Stern E_α in den Konvergenzkreis C und die Reihe (20) in die Taylorsche Reihe über.

Für $\alpha' < \alpha$ enthält der Stern $E_{\alpha'}$ den Stern E_α, indem jeder reguläre Punkt von $F(x)$, der auf der Begrenzung von E_α liegt, in das Innere von $E_{\alpha'}$ fällt. Hieraus folgt, daß die Reihe $\mathfrak{P}_{\alpha'}(x-a)$ in jedem Begrenzungspunkte von E_α konvergiert, der regulärer Punkt von $F(x)$ ist.

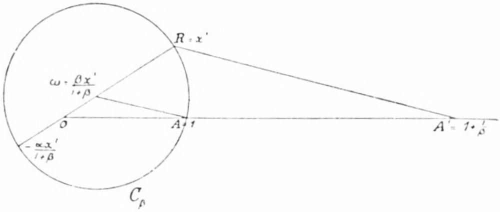
Um nun den Stern E_α einer Funktion $F(x)$ mit bekanntem Hauptstern zu konstruieren, wollen wir zunächst $F(x)=\frac{1}{1-x}$ setzen. In diesem Falle lautet die Reihe (20):

$$(21)\left\{\begin{aligned}&1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\Bigg[\beta^{\nu-1}\alpha x+\frac{\nu-1}{1!}\beta^{\nu-2}(\alpha x)^2+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2!}\beta^{\nu-3}(\alpha x)^3\\&\quad+\cdots+(\alpha x)^\nu\Bigg]=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha x(\beta+\alpha x)^{\nu-1}.\end{aligned}\right.$$

Sie stellt einen Zweig von $\frac{1}{1-x}$ in einem Sterne E_α dar, den man sehr einfach auf folgende Weise erhält:

Der Begrenzungspunkt von E_α auf jedem Halbstrahl durch O ist der Punkt R mit der Koordinate x', für den der entsprechende Kreis C_β durch den Punkt A mit der Koordinate $x=1$ geht. Der Mittelpunkt ω von C_β hat die Koordinate $\frac{\beta x'}{1+\beta}$, der Radius von C_β den Wert $\frac{|x'|}{1+\beta}$. Der Punkt ω genügt folglich der Beziehung: $\frac{\overline{\omega O}}{\overline{\omega A}}=\beta$. Konstruieren wir zu A den homothetischen Punkt A' nach dem Verhältnis $\frac{1+\beta}{\beta}$, so gilt für R:

$$\frac{\overline{RO}}{\overline{RA'}}=\frac{\overline{\omega O}}{\overline{\omega A}}=\beta.$$



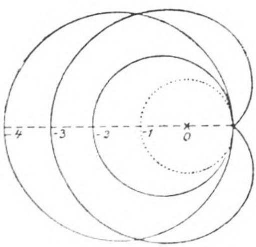
Der Ort für R ist also ein Kreis durch A $\left(\frac{AO}{AA'} = \beta\right)$, der seinen Mittelpunkt auf der Geraden OA hat und die Strecke OA' harmonisch teilt $\left(A' \text{ hat die Koordinate } 1 + \frac{1}{\beta}\right)$. Seine Gleichung lautet:

$$\eta^2 + \left(\xi + \frac{\beta}{1-\beta}\right)^2 = \frac{1}{(1-\beta)^2} \qquad (x = \xi + i\eta). \tag{22}$$

Der zweite Schnittpunkt dieses Kreises mit der reellen Achse hat die Abszisse $-\frac{1+\beta}{1-\beta}$; er rückt auf der negativen ξ-Achse ins Unendliche, wenn β sich der Eins nähert.

Der Konvergenzstern E_α der Entwicklung (21) gleicht also dem Konvergenzstern E_k der iterierten Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!} \left(\frac{x}{1+k}\right)^{\mu+\nu} k^\nu; \quad k \geqq 2 \tag{18}$$



insoferne er auch ein Kreis ist, der den Konvergenzkreis im Punkte $x = 1$ berührt und ihn umschließt. Aber während für (18) der Radius des Kreises E_k den Wert 2 nie überschreiten konnte, kann der Kreis E_α für die einfache Reihe (21) einen beliebig großen Radius besitzen, sofern nur β genügend nahe an 1 gewählt wird.

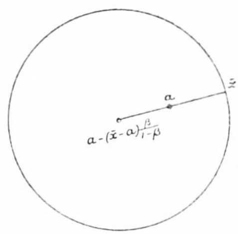
Während also der Kreis E_k immer im Innern von D liegt, kann im Gegensatze dazu der Kreis E_a bei genügender Verkleinerung des a beliebig weit über D hinausreichen.

Nunmehr möge zu dem Falle einer durch die Konstanten $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_\nu \ldots$ definierten Funktion $F(x-a)$ mit dem Hauptstern A übergegangen werden. Wir bezeichnen auf jedem Halbstrahl durch O den ersten singulären Punkt der Funktion $F(x-a)$, den man von O aus erreicht, mit $\bar{x}$ und beschreiben um den Punkt

$$a - (\bar{x} - a)\frac{\beta}{1-\beta}$$

als Mittelpunkt einen Kreis, der durch den Punkt $\bar{x}$ hindurchgeht.

Wir zeichnen nun ebenso zu allen anderen von a ausgehenden Halbstrahlen die entsprechenden Kreise. Der innerhalb aller dieser Kreise gelegene Teil — jeder Punkt ein einziges Mal gezählt — bildet den Konvergenzstern E_a. Strebt β gegen 1, so nähert sich E_a dem Stern, den Herr Borel „polygone de sommabilité“ [1]) nennt und der seinerseits E_a enthält.



Diese Tatsache erklärt sich sehr einfach. Das Polygon des Herrn Borel kann durch einen Kreis mit dem Durchmesser (a, x) [2]) erzeugt werden, während der Stern E_a durch den Kreis mit dem Durchmesser

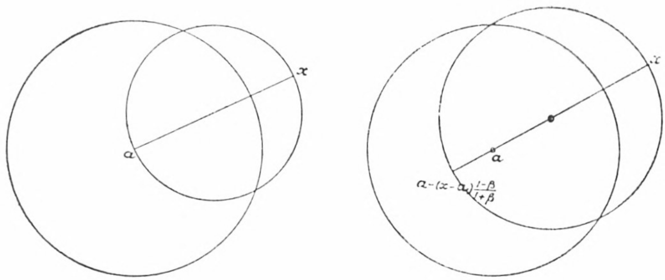
$$\left(a - (x-a)\frac{1-\beta}{1+\beta},\ x\right)$$

erzeugt wird, der sich dem erzeugenden Kreis des Herrn Borel nähert, wenn β gegen 1 strebt.

---

[1]) „Leçons sur les séries divergentes“, Kap. IV. Paris 1901.

[2]) G. Mittag-Leffler“, „Sur la représentation etc., Note 5“. 1904. Acta Math., Bd. 29, S. 116, 154.



Andrerseits besteht zwischen dem Borelschen Ausdruck:[1])

$$
(23)\left\{\begin{aligned}
&\lim_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(c_0+\frac{c_1}{1!}(x-a)+\frac{c_2}{2!}(x-a)^2\right.\\
&\left.+\cdots\frac{c_\nu}{\nu!}(x-a)^\nu\right)e^{-\omega}\frac{\omega^{\nu+1}}{(\nu+1)!}=\int_0^\infty e^{-\omega}\overline{F}(\omega x)\,d\omega;\\
&\overline{F}(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu}{(\nu!)^2}(x-a)^\nu
\end{aligned}\right.
$$

und dem Ausdrucke:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{P}_a(x-a)\\
(20)\quad &=c_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{c_1}{1!}\beta^{\nu-1}\alpha(x-a)+\frac{c_2}{2!}\frac{\nu-1}{1!}\beta^{\nu-2}\alpha^2(x-a)^2\right.\\
&\left.+\frac{c_3}{3!}\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2!}\beta^{\nu-3}\alpha^3(x-a)^3+\cdots+\frac{c_\nu}{\nu!}\alpha^\nu(x-a)^\nu\right]
\end{aligned}
$$

der wesentliche Unterschied, daß der erste eine iterierte Reihe vorstellt, d. h. zwei aufeinander folgende Grenzübergänge enthält, während der zweite eine einfache Reihe ist, zu der man durch ganz elementare Betrachtungen gelangt.

Bisher haben wir drei Ausdrücke, (5), (16), (20), kennen gelernt, die die Funktion $F(x-a)$ in Bereichen darstellen, die größer sind als der Konvergenzkreis C. In all diesen Fällen enthält der Hauptstern A die verschiedenen Sterne C,

---

[1]) A. a. O.

D, E_k, E_α, ohne daß es möglich gewesen wäre, die Parameter x', k oder α so zu wählen, daß die entsprechenden Sterne jeden im Innern von A gelegenen Bereich enthalten.

Dieses wichtige Problem wird, wie wir sehen werden, durch eine Modifikation der Transformation (15) gelöst, nämlich durch die Substitution:

$$x - a = (x' - a)\frac{\alpha u}{(1 - \beta u)^\gamma}, \tag{24}$$

worin γ einen reellen, passend gewählten Parameter bedeutet.

In Übereinstimmung mit unseren früheren Formeln lassen wir dem Werte $u = 1$ den Punkt $x = x'$ entsprechen und setzen daher:

$$\alpha = (1 - \beta)^\gamma; \quad \beta = 1 - \alpha^{\frac{1}{\gamma}}; \quad 0 < \alpha \leqq 1. \tag{25}$$

Betrachten wir zunächst die erzeugende Figur des Sternes. Es sei:

$$v = \xi + i\eta = \frac{\alpha u}{(1 - \beta u)^\gamma}$$
$$u = e^{i\vartheta}.$$

Wenn ϑ variiert, d. h. wenn u in seiner Ebene den Kreis um den Anfang mit dem Radius 1 beschreibt, so beschreibt v die erzeugende Figur. Diese ist symmetrisch zur reellen Achse; $u = 0$ entspricht $v = 0$, $u = 1$ entspricht $v = 1$. Die Kurve umschließt die Strecke (0, 1). Im übrigen ist hauptsächlich der Punkt

$$\xi = -\frac{\alpha}{\left(2 - \alpha^{\frac{1}{\gamma}}\right)^\gamma},$$

der $u = -1$ entspricht, sowie die Ordinate der Kurve von Interesse; es soll gezeigt werden, daß beide mit α gegen Null streben. Es ist:

$$1 - \beta u = 1 - \beta e^{i\vartheta} = \varrho e^{-i\Theta},$$

woraus

$$v = \frac{\alpha e^{i(\vartheta + \gamma\Theta)}}{\varrho^\gamma}$$

$$\eta = \frac{\alpha}{\varrho^\gamma}\sin(\vartheta + \gamma\Theta) = \frac{\alpha}{\varrho^\gamma}\sin\vartheta\cos\gamma\Theta + \frac{\alpha}{\varrho^\gamma}\sin\gamma\Theta\cos\vartheta$$

$$\varrho^2 = 1 + \beta^2 - 2\beta\cos\vartheta = (1-\beta)^2 + 4\beta\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \alpha^{\frac{2}{\gamma}} + 4\beta\sin^2\frac{\vartheta}{2}.$$

Also ist:

$$\varrho^2 > 4\beta\sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

$$\varrho^2 > \alpha^{\frac{2}{\gamma}}$$

$$\varrho > \alpha^{\frac{1}{\gamma}}$$

Nun ist

$$|\eta| < \left|\frac{\alpha}{\varrho^\gamma}\sin\vartheta\cos\gamma\Theta\right| + \left|\frac{\alpha}{\varrho^\gamma}\sin\gamma\Theta\cos\vartheta\right|$$

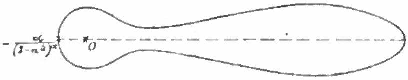
$$\left|\frac{\alpha}{\varrho^\gamma}\sin\vartheta\cos\gamma\Theta\right| < \frac{\alpha\,|\sin\vartheta|}{\left|2\sqrt{\beta}\sin\frac{\vartheta}{2}\right|^\gamma}|\cos\gamma\Theta| = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}\left|2\sqrt{\beta}\sin\frac{\vartheta}{2}\right|^{1-\gamma}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\gamma$$

$$\left|\frac{\alpha}{\varrho^\gamma}\sin\gamma\Theta\cos\vartheta\right| < |\sin\gamma\Theta\cos\vartheta|.$$

Wenn $\gamma < 1$ vorausgesetzt wird, so konvergiert der erste dieser beiden Ausdrücke mit α gegen Null. Der zweite strebt ebenfalls mit α gegen Null, wenn man von γ annimmt, daß es gleichzeitig gegen Null konvergiert. Wenn man also $\gamma = \alpha$ setzt, so konvergiert η gleichzeitig mit α gegen Null, und zwar gleichmäßig für alle $\vartheta\,(0 \leq \vartheta < 2\pi)$. Der Punkt

$$\xi = -\frac{\alpha}{\left(2 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha}$$

strebt ebenfalls gleichzeitig mit α gegen Null.



Man konstruiere nunmehr um die Strecke (a, x') als Achse eine Figur, die zu der vorhergehenden, durch die Gleichungen

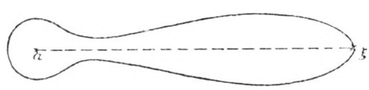
$$v = \frac{\alpha u}{(1-\beta u)^{\alpha}}; \quad \beta = 1 - \alpha^{\frac{1}{\alpha}}; \quad 0 < \alpha \leq 1; \quad |u| = 1$$

bestimmten Figur ähnlich ist. Dabei soll das Ähnlichkeitsverhältnis gleich $|x' - a|$ sein und es sollen die Punkte a und x' den Punkten 0 und 1 entsprechen. Dann erhält man die Kurve, die x vermöge der Substitution

$$(26) \qquad x - a = (x' - a)\frac{\alpha u}{(1-\beta u)^{\alpha}}$$

beschreibt, wenn u den Kreis um den Anfangspunkt mit dem Radius 1 durchläuft. Diese Kurve, die zur Geraden (a, x') symmetrisch ist, nähert sich der Strecke (a, x'), wenn α nach 0 konvergiert.

Es möge nun auf folgende Weise ein Stern H_α erzeugt werden: Auf jedem von a ausgehenden Halbstrahl lassen wir den Punkt x' bis zur ersten Lage ξ gleiten, bei welcher die dem Punkte x' entsprechende Figur (26) durch einen Begrenzungspunkt des Hauptsternes geht.



Macht der Halbstrahl eine volle Umdrehung um a, so erzeugt die jeder dieser Lagen entsprechende Strecke (a, ξ) den Stern H_α. Man sieht, wenn α nach Null konvergiert, daß der Punkt ξ dem auf dem Strahle $a\xi$ gelegenen Begrenzungspunkte von A beliebig nahe kommt, sofern der Begrenzungspunkt im Endlichen liegt. Liegt er im Unendlichen, so kann für genügend kleines α der Punkt ξ beliebig weit von a entfernt sein. Mit anderen Worten, ist Δ ein beliebiger innerhalb A gelegener endlicher Bereich, so kann man α stets so klein wählen, daß H_α den Bereich Δ in seinem Innern enthält.

Für $a=1$ fällt der Stern H_a mit dem Konvergenzkreis C zusammen.

Die gleichen Betrachtungen, die auf die Substitution

$$(15) \qquad x-a=(x'-a)\frac{au}{1-\beta u}$$

Anwendung gefunden hatten, zeigen hier ebenso, daß der Ausdruck

$$(27)\left\{\begin{aligned} & SH_a(x-a) \\ & = c_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\Bigg[\frac{c_\nu}{\nu!}a^\nu(x-a)^\nu+\frac{c_{\nu-1}}{(\nu-1)!}\frac{a(\nu-1)}{1!}\beta a^{\nu-1}(x-a)^{\nu-1} \\ & +\frac{c_{\nu-2}}{(\nu-2)!}\frac{a(\nu-2)(a(\nu-2)+1)}{2!}\beta^2 a^{\nu-2}(x-a)^{\nu-2} \\ & +\cdots+\frac{c_1}{1!}\frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-2)}{(\nu-1)!}\beta^{\nu-1}a(x-a)\Bigg]\end{aligned}\right.$$

außerhalb H_a in keinem Punkte konvergiert, aber für jeden ganz innerhalb H_a gelegenen Bereich absolut und gleichmäßig konvergiert. Der Stern H_a ist also Konvergenzstern für den Ausdruck (27), der im Innern von H_a den Funktionszweig $FH_a(x)$ darstellt. Dieser Ausdruck stellt also für genügend kleines a in jedem endlichen innerhalb A gelegenen Bereich die entsprechenden Werte von $FA(x)$ dar; für $a=1$, $\beta=0$ reduziert er sich auf $\mathfrak{P}(x-a)$. Auch die oben für die Substitution (15) gemachten Bemerkungen über zwei verschiedene Sterne E_a und $E_{a'}$ von der Art, daß $a>a'$, bleiben hier gültig.

Neben der Formel (27) können wir eine andere, von Herrn Fredholm[1]) gegebene Formel anführen, in der die numerischen Koeffizienten sehr einfach definiert sind:

---

[1]) Ivar Fredholm, „Sur la méthode de prolongement analytique de M. Mittag-Leffler". Översigt af Kungl. Vet. Ak. Förhandl. 13 mars 1901.

$$(28)\quad \begin{cases} c_0 + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \Big[c_1 C^{(\nu)}_{\nu-1} \dfrac{x-a}{H} + c_2 C^{(\nu)}_{\nu-2} \left(\dfrac{x-a}{H}\right)^2 + \cdots \\ \quad + c_{\nu-1} C^{(\nu)}_1 \left(\dfrac{x-a}{H}\right)^{\nu-1} + c_\nu \left(\dfrac{x-a}{H}\right)^{\nu} \Big] \dfrac{\beta^\nu}{\nu!} \\ H = -\log(1-\beta) \\ \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1) = \lambda^n + C^{(n)}_1 \lambda^{n-1} + \cdots + C^{(n)}_{n-1} \lambda . \end{cases}$$

Man erhält diese interessante Formel, wenn man in $\mathfrak{P}(x-a)$ die Substitution ausführt:

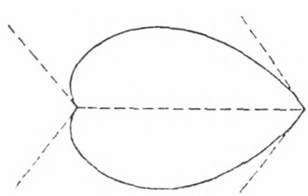
$$(29)\qquad x - a = (x' - a) \frac{\log(1-\beta u)}{\log(1-\beta)}; \quad 0 \leqq \beta < 1 .$$

Die Ausdrücke (27) und (28) haben beide den Nachteil, daß ihre erzeugenden Figuren (26) und (29) die Halbstrahlen $a\,\xi$ unter einem rechten Winkel schneiden. Die durch sie erzeugten Sterne schmiegen sich dem Stern A daher weniger an, als wenn die erzeugende Figur den Begrenzungspunkt des Sternes unter einem spitzen Winkel erreichen würde, den man durch genügend kleine Wahl des α beliebig verkleinern könnte.

Ein solches Resultat kann erzielt werden mit Hilfe der Substitution:[1])

$$(30)\quad x - a = (x' - a)\, u\, e^{\int\limits_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{1-\alpha} - 1\right]\frac{du}{u}}; \qquad 0 < \alpha \leqq 1,$$

die eine konforme Abbildung des Kreises $|u| \leqq 1$ auf eine Figur vermittelt, die von zwei bezüglich (a, x') symmetrischen Spiralenbögen begrenzt wird. Der innere Winkel, unter dem



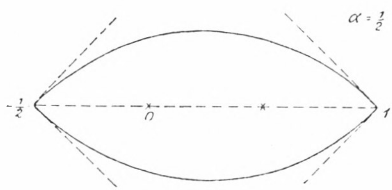
[1]) G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation analytique . . . . . Note 3". 1900. Acta Math., Bd. 24, S. 229.

diese herzförmige Kurve den Halbstrahl ax' im Punkte x' schneidet, hat den Wert $\frac{\alpha\pi}{2}$.

Eine andere Lösung des Problems liefert die Substitution[1])

$$(31) \qquad x - a = (x' - a)\,\alpha\,\frac{(1+u)^\alpha - (1-u)^\alpha}{\alpha(1+u)^\alpha + (1-u)^\alpha}; \qquad 0 < \alpha < 1,$$

die den Kreis $|u| < 1$ auf eine aus zwei Kreisbogen bestehende Figur abbildet, welche sich im Punkte $a - \alpha(x' - a)$ und im Begrenzungspunkte x' des zugehörigen Sternes unter dem Winkel $\alpha\pi$ schneiden.



Wenn die Substitutionen (30) und (31) geometrisch anschaulicher als die vorhergehenden sind, so führen sie dafür auf weniger einfache arithmetische Ausdrücke als (27) und (28). Die numerischen Koeffizienten, die man durch Anwendung dieser Substitutionen erhält, sind in der Tat äußerst kompliziert.

Um andrerseits strenge zu beweisen, daß die aus den erzeugenden Figuren der Substitutionen (30) und (31) gebildeten Sterne tatsächlich Konvergenzsterne sind, muß man den vollständig elementaren Rahmen verlassen, innerhalb dessen wir bisher bleiben konnten.

Da diese Substitutionen die singulären Punkte $u = -1$ und $u = 1$ besitzen, so können sie nicht in Potenzreihen nach u entwickelt werden, die für $|u| > 1$ noch konvergent sind. Der Weierstraßsche Satz über iterierte Reihen, dessen wir uns bedient haben, ist daher für $|u| = 1$ nicht mehr anwendbar,

---

1) A. a. O., Note 3, S. 228, 229.

sondern nur für $|u|<1$. Folglich haben wir nicht das Recht, in dem hervorgegangenen Ausdruck $u=1$ zu setzen.

Herr Phragmén hat mit Hilfe von Betrachtungen, die der Theorie der Fourierschen Reihen entliehen sind, gezeigt, wie man diese Schwierigkeiten überwinden kann und daß man wirklich $u=1$ setzen darf.[1]) Herr Marcel Riesz ist mit Hilfe des Cauchyschen Integrals zu dem gleichen Ergebnis und sogar noch zu einem allgemeineren Resultat gelangt.[2])

Den Mangel, welchen einerseits (27) und (28) aufwiesen, indem sie keine so eng an die Strecke (a, x') sich anschmiegende erzeugende Figuren lieferten wie die Substitutionen (30) und (31), die verwickelte Rechnung andrerseits, welche die Verwendung von (30) und (31) mit sich bringt, kann man sehr leicht vermeiden, wenn man als erzeugende Figur die Kurve wählt, die ich schon an anderer Stelle angewandt habe, um eine Darstellung mit Hilfe des Laplace-Abelschen Integrals zu erhalten.[3])

Betrachten wir nämlich die Substitution:

$$v=(1-u)^{\alpha}; \quad 0<\alpha \leqq 1. \tag{32}$$

Durchläuft u den Kreis mit dem Radius 1 um den Anfangspunkt, so beschreibt v eine zur reellen Achse symmetrische Kurve L, die im Anfangspunkte mit der positiven reellen Achse den Winkel $\frac{\alpha\pi}{2}$ einschließt und die reelle Achse im Punkte $v=2^{\alpha}$ unter einem rechten Winkel zum zweiten Male schneidet. Die Gleichung der Kurve lautet in Polarkoordinaten:

$$r=2^{\alpha}\left(\cos\frac{\vartheta}{\alpha}\right)^{\alpha}; \quad -\frac{\alpha\pi}{2} \leqq \vartheta \leqq \frac{\alpha\pi}{2}. \tag{33}$$

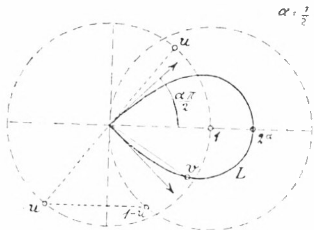
---

[1]) G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation ..., Note 3". 1900. Acta Math., Bd. 24, S. 229–236.

[2]) Marcel Riesz, „Sur un problème d'Abel. (Extrait de deux lettres à M. G. Mittag-Leffler)". Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 30, 1910, S. 339—345. Siehe die der vorliegenden Arbeit angefügte Note: „Ein Satz des Herrn Marcel Riesz."

[3]) G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation ..., Note 5". 1904. Acta Math., Bd. 29, S. 116, 154.

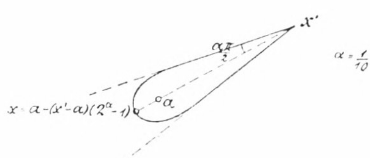
Man erhält sie unmittelbar, wenn man beachtet, daß der Punkt $v^{\frac{1}{\alpha}}$ mit den Polarkoordinaten $\frac{\vartheta}{\alpha}$ und $r^{\frac{1}{\alpha}}$, da identisch mit dem Punkte $1-u$, einen Kreis durch den Anfangspunkt mit dem Mittelpunkt $x=1$ beschreibt.



Führt man also in die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)$ die Substitution ein:

$$x-a=(x'-a)\left(1-(1-u)^{\alpha}\right), \tag{34}$$

so beschreibt die Veränderliche x um den Halbstrahl $a\,x'$ als Achse eine der Kurve (33) ähnliche Kurve, die im Punkte x' mit $a\,x'$ den Winkel $\frac{\alpha\pi}{2}$ bildet und $a\,x'$ in dem Punkte $a-(x'-a)(2^{\alpha}-1)$ unter einem rechten Winkel zum zweiten Male schneidet.



In vollständig analoger Weise, wie wir früher die Sterne für die Substitutionen (15), (26), (29), (30) und (31) konstruiert haben, erhält man jetzt einen Stern K_{α} sowie einen Ausdruck:

$$\begin{aligned} SK_{\alpha}(x-a) = c_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \Big[& \frac{c_1}{1!} k_{\lambda}^{(1)}(x-a) + \frac{c_2}{2!} k_{\lambda}^{(2)}(x-a)^2 \\ & + \cdots + \frac{c_{\lambda}}{\lambda!} k_{\lambda}^{(\lambda)}(x-a)^{\lambda} \Big], \end{aligned} \tag{35}$$

der K_a zum Konvergenzstern besitzt und im Innern von K_a den Funktionszweig $FK_a(x)$ darstellt. Um zu beweisen, daß K_a tatsächlich Konvergenzstern ist, muß man sich der Methode des Herrn Phragmén[1]) oder der des Herrn Marcel Riesz[2]) bedienen.

Die Koeffizienten $k_\lambda^{(\nu)}$ sind von sehr einfacher Beschaffenheit:

$$k_\lambda^{(\nu)} = \frac{\nu}{1!}\,\frac{a(1-a)\ldots(\lambda-1-a)}{\lambda!}$$
$$+\frac{\nu(1-\nu)}{2!}\,\frac{2a(1-2a)\cdots(\lambda-1-2a)}{\lambda!}+\cdots$$
$$+\frac{\nu(1-\nu)\ldots(\nu-1-\nu)}{\nu!}\,\frac{\nu a(1-\nu a)\ldots(\lambda-1-\nu a)}{\lambda!}.$$

Alle diese Zahlen $k_\lambda^{(\nu)}$ sind positiv, da die Koeffizienten von

$$(36)\quad 1-(1-u)^a = \frac{a}{1!}u+\frac{a(1-a)}{2!}u^2+\frac{a(1-a)(2-a)}{3!}u^3+\cdots$$

positiv sind und folglich auch die der Maclaurinschen Reihe von $[1-(1-u)^a]^\nu$.

Es ist mir bisher kein Ausdruck bekannt, der gleichzeitig von beiden Gesichtspunkten aus, dem geometrischen und arithmetischen, einfacher als der Ausdruck (35) wäre und ebenfalls allen Anforderungen Genüge leisten würde.

Die Entwicklung besitzt noch einen wichtigen Vorzug.

Sei x' ein Begrenzungspunkt des Sternes K_a. Es sei ferner $a' < a$; ist dann x' ein regulärer Punkt von $F(x-a)$, so wird x' in das Innere von $K_{a'}$ fallen und der Ausdruck $SK_{a'}(x-a)$ folglich im Punkte x' konvergieren. Ist dagegen x' ein singulärer Punkt von $F(x-a)$, so ist dieser Punkt ein Begrenzungspunkt von K_a und von $K_{a'}$. Doch kann es vorkommen, daß der Funktionszweig $FK_a(x-a)$, wenn x im Innern von K_a gegen x' strebt, sich einem und demselben Werte nähert, welchen Weg auch die Veränderliche x innerhalb K_a durch-

[1]) A. a. O. [2]) A. a. O.

läuft. Unter dieser Voraussetzung ist der Ausdruck $FK_{a'}(x-a)$ im Punkte $x=x'$ immer konvergent, und die Konvergenz ist gleichmäßig für jeden Bereich, der x' als Begrenzungspunkt enthält und im übrigen vollständig innerhalb K_a gelegen ist.

Dieser wichtige Satz, der eine unmittelbare Folgerung aus dem weiter oben erwähnten ist, wurde von Herrn Marcel Riesz[1]) für alle Sterne bewiesen, deren erzeugende Figur in dem zugehörigen Begrenzungspunkte x' des Sternes den Strahl ax' unter einem spitzen Winkel trifft.

Bevor wir die bisher behandelten Fälle verlassen, sei ein allgemeiner Satz angeführt, der für alle bisher erhaltenen Sterne gilt, zu denen wir auch den Konvergenzkreis zählen können.

Ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

eine der im Vorhergehenden gebildeten Reihen, und liegt der Punkt x' außerhalb des Konvergenzsternes dieser Reihe, so ist der Grenzwert

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \left| \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x') \right|$$

immer unendlich.

Wäre er nämlich endlich, so hätte man:

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x') \right| < G$$

und folglich

$$|f_\nu(x')| \leqq 2G.$$

Die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x')\, u^\nu$$

wäre für $|u| < 1$ konvergent. Ersetzen wir jetzt u durch seinen Wert in x und x', so wird der so erhaltene Ausdruck für alle Werte von x innerhalb der zu dem Punkte x' gehörenden er-

[1]) A. a. O.

zeugenden Figur konvergent sein. Er stellt also innerhalb dieses Bereiches einen Funktionszweig dar, der für genügend kleines $|x'|$ mit dem aus $\mathfrak{P}(x-a)$ hervorgegangenen übereinstimmt. Allein dies ist unmöglich. Denn da x' außerhalb des betrachteten Sternes gelegen ist, kann der aus $\mathfrak{P}(x-a)$ hervorgegangene Funktionszweig nicht für alle solchen Werte von x regulär sein, die noch innerhalb der zu x' gehörenden erzeugenden Figur, aber außerhalb des Hauptsternes liegen. Unsere Behauptung ist damit bewiesen.

Sowohl die verschiedenen Ausdrücke (27), (28) und (35) als auch die aus den Substitutionen (30) und (31) hervorgegangenen Entwicklungen sind alle von der Form:

$$
\begin{aligned}
S_a(x-a) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big[& k_1^{(\nu)}(a)\frac{c_1}{1!}(x-a) + k_2^{(\nu)}(a)\frac{c_2}{2!}(x-a)^2 \\
(37) \qquad & + \cdots + k_\nu^{(\nu)}(a)\frac{c_\nu}{\nu!}(x-a)^\nu \Big],
\end{aligned}
$$

worin die Koeffizienten $k_\mu^{(\nu)}(a)\,(\mu = 1, 2, 3, \ldots \nu)$ ganze rationale Funktionen eines Parameters a mit numerischen Koeffizienten bedeuten. Diese Koeffizienten sind unabhängig von der darzustellenden Funktion, d. h. von den Konstanten $c_0, c_1, c_2 \ldots c_\nu \ldots$ die in ihrer Gesamtheit die Funktion definieren. Für $a = 1$ kommt man auf die Taylorsche Reihe zurück. Wählt man andrerseits a hinreichend klein, so erhält man für $S_a(x-a)$ einen Konvergenzstern, der jeden gegebenen ganz innerhalb des Sternes A gelegenen Bereich einschließt. Diese Tatsache legt uns die Frage nahe, ob es nicht möglich ist, einen Ausdruck $S(x-a)$ von der gleichen Form wie $S_a(x-a)$ zu finden, der nicht mehr von dem Parameter a abhängt und für den der Stern A Konvergenzstern ist. Wie wir sehen werden, läßt sich dieses Problem in vollkommen elementarer Weise beantworten, wenn man die Forderung, daß A Konvergenzstern sein soll, fallen läßt, indem man nur die Bedingung beibehält, daß $S(x-a)$ gleichmäßig für jeden innerhalb A gelegenen Bereich konvergieren soll und auf die Divergenz von $S(x-a)$ in jedem Punkte außerhalb A Verzicht leistet.

Sei nämlich n eine gegebene positive ganze Zahl. Dann definieren wir einen Stern E_n auf folgende Weise. Es werde ein beliebiger von a ausgehender Halbstrahl l fixiert. Bezeichnet man mit ϱ_n eine genügend kleine positive Größe und trägt man auf dem Halbstrahl von a aus die Länge $(n-1)\varrho_n$ ab, so wird jeder Kreis mit dem Radius ϱ_n, der um einen beliebigen Punkt dieser Strecke beschrieben ist, dem Hauptstern A angehören. Bezeichnet man mit R_n die obere Grenze der ϱ_n, trägt auf l die Länge nR_n ab und läßt l um a eine ganze Umdrehung machen, so erhält man den Stern E_n. Man sieht, daß der Stern E_1 der Kreis C ist, ferner daß der Stern E_n den Stern E_{n-1} enthält, und daß alle Sterne E_1, E_2, E_3, ... dem Stern A angehören.

Man sieht leicht,[1] daß man immer n so groß wählen kann, daß E_n in seinem Innern jeden innerhalb A gelegenen Bereich X enthält.

Es sei $\mathfrak{E}_n$ ein neuer, zu E_n konzentrischer und ähnlicher Stern, der durch einen Halbstrahl von der Länge $n\varrho$, $\varrho = \Theta R_n$, $0 < \Theta < 1$, erzeugt werden soll. Es liegt auf der Hand, daß man immer Θ genügend nahe an 1 wählen kann um zu erreichen, daß jeder im Innern von E_n gelegene Bereich in das Innere von $\mathfrak{E}_n$ fällt.[2]

Es werde nun mit g die obere Grenze von $F\mathfrak{E}_n(x-a)$ bezeichnet, wenn x dem Stern $\mathfrak{E}_n$ angehört. Es sei ferner ξ eine Größe, deren absoluter Betrag $|\xi|$ gleich ϱ ist und es bedeute $\xi_\mu (\mu = 1, 2, \ldots n-1)$ eine Folge von Punkten auf dem gleichen Halbstrahl, von der Eigenschaft, daß die Entfernung zweier Punkte $\xi_{\mu+1}$ und ξ_μ den Wert ϱ nicht überschreitet und daß die Entfernung zwischen ξ_{n-1} und dem Begrenzungspunkt von $\mathfrak{E}_n$ auf diesem Halbstrahl nicht kleiner als ϱ sein soll. Unter diesen Voraussetzungen gilt, wenn x dem Stern $\mathfrak{E}_n$ angehört:

---

[1] Vgl. G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation . . .". 1899. Acta Mathematica, Bd. 23, S. 50/51.

[2] A. a. O.

$$F\mathfrak{E}_n(x-a) = F\mathfrak{E}_n(\xi_{n-1}+\xi) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\,\xi^{\lambda_1}$$

$$\left|\sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\,\xi^{\lambda_1}\right| \leqq g\,.$$

Daher ist nach dem Cauchy-Weierstraßschen Satz:

$$\left|\frac{1}{\lambda_1!} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\right| \leqq g\,\varrho^{-\lambda_1}.$$

Führt man jetzt eine neue Größe ξ' ein, deren absoluter Betrag $|\xi'|$ gleich $\vartheta\,\varrho$ ist $(0 < \vartheta < 1)$, so erhält man:

$$\left|\frac{1}{\lambda_1!} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\,\xi'^{\lambda_1}\right| \leqq g\,\vartheta^{\lambda_1}.$$

Setzt man andrerseits $\xi_{n-1} = \xi_{n-2} + \xi$, so ist

$$\frac{1}{\lambda_1!} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\,\xi'^{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi^{\lambda_2}\,\xi'^{\lambda_1}.$$

Folglich:

$$\left|\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1}\right| \leqq g\,\vartheta^{\lambda_1}\,\varrho^{-\lambda_2}$$

$$\left|\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2}\right| \leqq g\,\vartheta^{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2}\right| \leqq g\,\frac{\vartheta^{\lambda_1}}{1-\vartheta}$$

$$\text{(38)}\qquad \sum_{\lambda_1=m_1+1}^{\infty}\;\sum_{\lambda_2=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2}\right| \leqq g\,\frac{\vartheta^{m_1+1}}{(1-\vartheta)^2}$$

und ebenso

$$\sum_{\lambda_2=m_2+1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2}\right| \leqq g\,\frac{\vartheta^{\lambda_1+m_2+1}}{1-\vartheta}$$

$$\text{(39)}\qquad \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\;\sum_{\lambda_2=m_2+1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2}\right| \leqq g\,\frac{\vartheta^{m_2+1}}{1-\vartheta}\,\frac{1-\vartheta^{m_1+1}}{1-\vartheta}$$

$$\leqq g\,\frac{\vartheta^{m_2+1}}{(1-\vartheta)^2}.$$

Setzt man

$$(40)\quad \begin{cases} F\mathfrak{S}_n(\xi_{n-1}+\xi') = F\mathfrak{S}_n(\xi_{n-2}+\xi'+\xi') \\ = \sum\limits_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum\limits_{\lambda_2=0}^{m_2} \dfrac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \end{cases}$$

$$(41)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \sum\limits_{\lambda_1=m_1+1}^{\infty}\sum\limits_{\lambda_2=0}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2} \\ \varepsilon_2 = \sum\limits_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum\limits_{\lambda_2=m_2+1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2}, \end{cases}$$

so ist also

$$|\varepsilon_1| \leq g\,\frac{\vartheta^{m_1+1}}{(1-\vartheta)^2}$$

$$|\varepsilon_2| \leq g\,\frac{\vartheta^{m_2+1}}{(1-\vartheta)^2}$$

Verfährt man nun mit $F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})$ ebenso wie früher mit $F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})$, so erhält man durch Einführung von

$$F^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(\xi_{n-3})$$

die Gleichung:

$$(42)\quad \begin{cases} F\mathfrak{S}_n(\xi_{n-1}+\xi') = F\mathfrak{S}_n(\xi_{n-2}+\xi'+\xi') = F\mathfrak{S}_n(\xi_{n-3}+\xi'+\xi'+\xi') \\ = \sum\limits_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum\limits_{\lambda_2=0}^{m_2}\sum\limits_{\lambda_3=0}^{m_3} \dfrac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,\lambda_3!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(\xi_{n-3})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \end{cases}$$

wo

$$(43)\quad \varepsilon_3 = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2}\sum_{\lambda_3=m_3+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,\lambda_3!} F(\xi_{n-3})\,\xi'^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

und

$$|\varepsilon_3| \leq g\,\frac{\vartheta^{m_3+1}}{(1-\vartheta)^3}.$$

Fährt man in dieser Weise fort, so gelangt man schließlich zu der Formel:

$$(44)\quad F\mathfrak{S}_n(x-a) =$$

$$\sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{m_n} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)}(a)\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n}$$

$$+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n,$$

wo

$$
(45)\qquad \left\{\begin{aligned}
|\varepsilon_1| &\leq g\,\frac{\vartheta^{m_1+1}}{(1-\vartheta)^2}\\
|\varepsilon_2| &\leq g\,\frac{\vartheta^{m_2+1}}{(1-\vartheta)^2}\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
|\varepsilon_n| &\leq g\,\frac{\vartheta^{m_n+1}}{(1-\vartheta)^n}.
\end{aligned}\right.
$$

Bezeichnet man mit δ eine beliebig kleine positive Größe, so erhält man also durch genügende Vergrößerung der Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ für jeden im Innern des Sternes E_n gelegenen Bereich X die Beziehung:

$$
(46)\qquad \Bigg| FE_n(x-a) - \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{m_n}\frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!}F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)}(a)\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n}\Bigg| < \delta.
$$

Zwar wurde diese Ungleichung nur unter der Voraussetzung bewiesen, daß X einem zu $\mathfrak{E}_n$ konzentrischen und ähnlichen Stern $\mathfrak{E}_n^{(\vartheta)}$ angehört, der in seinem Innern gelegen ist und durch einen Halbstrahl von der Länge

$$
n\varrho',\quad \varrho' = \vartheta\,\varrho\,(0<\vartheta<1)
$$

erzeugt wird. Man sieht indessen, wenn man die beiden Größen ϑ und Θ dem Werte 1 sich genügend nähern läßt, daß die Ungleichung für jeden zu E_n konzentrischen und ähnlichen Stern und folglich für jeden innerhalb E_n gelegenen Bereich X richtig ist.

Setzt man

$$
(47)\qquad m_1 = m_2 = \ldots m_n = m
$$

so verwandelt sich die Ungleichung (46) in[1])

---

[1]) Vgl. G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, Note 2.“ 1900. Acta Mathematica, Bd. 24, S. 201.

(48) $$FE_n(x-a) =$$
$$\lim_{m=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{m} \sum_{\lambda_2=0}^{m} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{m} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)}(a)\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung konvergiert gleichmäßig für jeden Bereich X im Innern von E_n und stellt folglich $FE_n(x-a)$ in einem solchen Bereich dar.

Von der Formel (48) gelangt man leicht zu einem für jeden Bereich innerhalb des Sternes A gültigen Ausdruck.

Da nämlich $m_\mu = m$ gesetzt wurde $(\mu = 1, 2, \ldots m)$, so ist

$$|\varepsilon_1| < |\varepsilon_2| < \cdots |\varepsilon_n|$$

und folglich

(49) $$|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| + \cdots |\varepsilon_n| < n|\varepsilon_n| = ng\frac{\vartheta^{m+1}}{(1-\vartheta)^n} = ng\left(\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\right)^n \vartheta^p;$$
$$p = m + 1 - n.$$

Wir hatten vorausgesetzt, daß ϑ eine positive Größe sein soll, die dem Werte 1 beliebig nahe kommen darf. Also wächst

$$\beta = \frac{\vartheta}{1-\vartheta}$$

über alle Grenzen, wenn ϑ nach 1 strebt.

Setzen wir nun

$$\beta = \frac{\vartheta}{1-\vartheta} = \log\omega(n),$$

wo $\omega(n)$ eine reelle positive, mit n unbegrenzt wachsende Größe sein soll, so erhalten wir:

$$\frac{1}{\vartheta} = 1 + \frac{1}{\log\omega(n)}$$

$$n\beta^n\vartheta^p = e^{-\frac{p}{\beta}\left(\beta\log\frac{1}{\vartheta} - \frac{n\beta\log\beta}{p} - \frac{\beta\log n}{p}\right)}; \quad p = m + 1 - n.$$

Setzt man

(50) $$m = n\,\omega(n),$$

d. h.

$$p = n\,\omega(n)\left(1 + \frac{1}{n\,\omega(n)} - \frac{1}{\omega(n)}\right),$$

so sieht man, daß $\frac{\beta \log n}{p}$ sowie $\frac{n \beta \log \beta}{p}$ nach Null konvergieren, wenn n unbegrenzt wächst, während $\beta \log \frac{1}{\vartheta}$ den Grenzwert 1 annimmt und $\frac{p}{\beta}$ gleichzeitig mit n über alle Grenzen wächst.

Führt man nun in der Gleichung (48) für m die erste ganze Zahl größer als $n\,\omega(n)$ ein, so verwandelt sich diese Gleichung in die Relation:

(51) $$FA(x-a) =$$
$$\lim_{n=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{m} \sum_{\lambda_2=0}^{m} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{m} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n}$$
$$(m = \text{erste ganze Zahl größer als } n\,\omega(n)),$$

deren rechte Seite gleichmäßig und absolut in jedem innerhalb des Sterns A gelegenen Bereich konvergiert.[1]) Die Aus-

[1]) Vgl. G. Mittag-Leffler, „Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion". 11 maj 1898. Öfversigt af Kgl. Vet. Ak. Förhandl. Stockholm 1898.

A. a. O., G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène". 1899. Acta Math., Bd. 23, S. 60.

Der Ausdruck

$$\sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n},$$

den man in diesen Arbeiten findet und der unter anderem in den folgenden Werken wiedergegeben ist:

Emile Borel, „Leçons sur les séries divergentes". Paris 1901 (Gauthier-Villars). Kap. V, S. 156—172;

G. Vivanti, „Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen". Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers, deutsch herausgegeben v. A. Gutzmer, Leipzig 1906 (B. G. Teubner), S. 351—364;

ist viel weniger einfach als der Ausdruck (51). Dieser ergibt sich überdies fast unmittelbar aus den ersten Grundbegriffen der Theorie der drücke (48) und (51) haben beide die Form von Grenzwerten. Es ist evident, daß man sie in Reihen umformen kann, deren einzelne Glieder Polynome in $x-a$ sind. Bezeichnet man die rechte Seite jedes dieser Ausdrücke mit $S_m(x)$, so wird die entsprechende Reihe

$$F(a)+\sum_{m=0}^{\infty}(S_{m+1}(x)-S_m(x)). \tag{52}$$

Kehren wir andrerseits zurück zu unseren Ausdrücken

$$\begin{aligned} S_a(x-a) &= c_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(k_1^{(\nu)}(a)\frac{c_1}{1!}(x-a)+k_2^{(\nu)}(a)\frac{c_2}{2!}(x-a)^2\right.\\ &\left.+\cdots+k_\nu^{(\nu)}(a)\frac{c_\nu}{\nu!}(x-a)^\nu\right);\quad k_\mu^{(\nu)}(a)=0 \text{ für } \mu>\nu, \end{aligned} \tag{37}$$

so sieht man, daß diese in der Form geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} S_a(x-a) &= c_0+\lim_{m=\infty}\left(h_1^{(m)}(a)\frac{c_1}{1!}(x-a)+h_2^{(m)}(a)\frac{c_2}{2!}(x-a)^2\right.\\ &\left.+\cdots h_m^{(m)}(a)\frac{c_m}{m!}(x-a)^m\right) \end{aligned} \tag{53}$$

$$h_\mu^{(m)}(a)=k_\mu^{(\mu)}(a)+k_\mu^{(\mu+1)}(a)+\cdots+k_\mu^{(m)}(a)$$
$$h_\mu^{(m)}(a)=0 \text{ für } m<\mu.$$

---

analytischen Funktionen nach Weierstraß, während die Herleitung des anderen Ausdrucks, obgleich auf denselben Grundlagen beruhend, recht weitläufig war.

Es ist noch zu bemerken, daß man durchaus nicht leichter ans Ziel gelangt, wenn man zunächst für $\frac{1}{1-x}$ den Ausdruck herleitet und dann zu dem allgemeinen Falle mit Hilfe des Cauchyschen Integrals übergeht. Dies bedeutet im Gegenteil einen nutzlosen Umweg. Die Ableitung für den Ausdruck (51) ist vollkommen identisch mit derjenigen, die erforderlich wäre, um das entsprechende Resultat für $\frac{1}{1-x}$ zu erhalten.

(Vgl. das Buch von Herrn Jacques Hadamard, „La série de Taylor et son prolongement analytique". Scientia, Mai 1901, S. 55–60.

G. Mittag-Leffler, „Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe." Atti de IV Congresso internaz. dei matematici, Roma, 6–11 Aprile 1908. Roma 1909, S. 75.)

Ganz ebenso, wie wir verfuhren, um den Ausdruck

(51) $$FA(x-a) = \lim_{n=\infty} \sum_{\lambda_1=0}^{m} \sum_{\lambda_2=0}^{m} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{m} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n)}(a)\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n}$$

zu erhalten, kann man auch leicht eine Beziehung zwischen a und der ganzen positiven Zahl m aufstellen, derart, daß (53) für jeden innerhalb A gelegenen Bereich konvergiert. Wir legen der erzeugenden Funktion $f(u|a)$ die gleichen Bedingungen auf wie in den Fällen

(26) $$f(u|a) = \frac{au}{(1-\beta u)^a}$$

(29) $$f(u|a) = \frac{\log(1-\beta u)}{\log(1-\beta)}$$

nämlich: es soll $f(0|a)=0$, $f(1|a)=1$, $f(u|1)=u$ sein, es soll ferner $f(u|a)$ für alle Punkte des Kreises $|u|\leq 1$ regulär bleiben und das durch $f(u|a)$ vermittelte Bild dieses Kreises soll die Strecke $(0, 1)$ immer enger umschmiegen, wenn a nach Null strebt.

Unter diesen Bedingungen ist

(54) $$\begin{aligned} F((x'-a)f(u|a)) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}((x'-a)f(u|a))_{u=0}}{\nu!} u^\nu; \\ F^{(\nu)}((x'-a)f(u|a)) &= \frac{\partial^{(\nu)} F((x'-a)f(u|a))}{\partial u^\nu}. \end{aligned}$$

Da diese Reihe für $|u|=\varrho$ konvergiert, wenn ϱ größer als 1, aber genügend nahe an 1 ist, so ist nach dem Cauchy-Weierstraßschen Satz:

$$\left|\frac{F^{(\nu)}((x'-a)f(u|a))_{u=0}}{\nu!}\right| < g\vartheta^\nu; \qquad \vartheta = \frac{1}{\varrho} < 1$$

und folglich

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} \left|\frac{F^{(\nu)}((x'-a)f(u|a))_{u=0}}{\nu!}\right| < g\frac{\vartheta^{m+1}}{1-\vartheta} = g\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\vartheta^m.$$

Man setze nun:

$$\alpha = \frac{1}{n}; \qquad m = \omega(n),$$

wo $\omega(n)$ eine positive Größe ist, die gleichzeitig mit n über alle Grenzen wächst. Wählen wir $\omega(n)$ so, daß

$$\vartheta = e^{-\frac{1}{\omega(n)^{\frac{1}{2}}}},$$

so erhalten wir:

$$\frac{\vartheta}{1-\vartheta} < \omega(n)^{\frac{1}{2}}; \qquad \vartheta^m = e^{-\frac{m}{\omega(n)^{\frac{1}{2}}}} = e^{-\omega(n)^{\frac{1}{2}}}.$$

Folglich strebt der absolute Wert von

$$\varepsilon = \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}((x'-a)f(u\,\alpha))_{u=0}}{\nu!}$$

nach Null, wenn n ins Unendliche wächst, und man erhält die Gleichung:

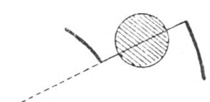
$$(55)\quad \begin{cases} FA(x-a) = c_0 + \lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{m} \left[k_1^{(\nu)}\left(\frac{1}{n}\right)\frac{c_1}{1!}(x-a) + k_2^{(\nu)}\left(\frac{1}{n}\right)\frac{c_2}{2!}(x-a)^2 \right. \\ \left. \quad + \cdots + k_\nu^{(\nu)}\left(\frac{1}{n}\right)\frac{c_\nu}{\nu!}(x-a)^\nu\right] = c_0 + \lim\limits_{n=\infty}\left(h_1^{(m)}\left(\frac{1}{n}\right)\frac{c_1}{1!}(x-a)\right. \\ \left. \quad + h_2^{(m)}\left(\frac{1}{n}\right)\frac{c_2}{2!}(x-a)^2 + \cdots + h_m^{(m)}\left(\frac{1}{n}\right)\frac{c_m}{m!}(x-a)^m\right) \\ \qquad (m = \text{erste ganze Zahl größer als } \omega(n)), \end{cases}$$

deren rechte Seite absolut und gleichmäßig für jeden im Innern des Hauptsterns A gelegenen Bereich konvergiert.

Wie schon hervorgehoben wurde, besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen den zuerst erhaltenen Ausdrücken (37) und (53) und den neuen Ausdrücken (48), (51) und (55). Die ersteren besitzen, wie wir gesehen haben, einen Konvergenzstern, der sich A beliebig nähert, wenn ein gewisser Parameter α nach Null strebt. In diesem Falle konvergiert der Ausdruck für jeden innerhalb des Konvergenzsterns gelegenen Bereich gleichmäßig, divergiert dagegen in jedem Punkt außerhalb des Sterns. Im zweiten Falle konvergieren zwar die Ausdrücke für jeden Bereich im Innern von A, aber die Bedingung, daß in jedem Punkte außerhalb Divergenz bestehen soll, wurde unterdrückt.

Man kennt seit der im Jahre 1880 veröffentlichten Arbeit von Weierstraß „Zur Funktionenlehre"[1]) den wesentlichen Unterschied, der zwischen einem arithmetischen Ausdruck[2]) und der analytischen Funktion besteht. Man kann es geradezu als die allgemeine Regel bezeichnen, daß ein arithmetischer Ausdruck verschiedene analytische Funktionen darstellt, und als bemerkenswerte Ausnahme, wenn der Ausdruck nur ein und denselben Funktionszweig darstellt, aber außerhalb eines gewissen Bereiches keinen Sinn mehr besitzt. Gerade dieser letztere Fall liegt bei der Taylorschen Reihe und ebenso bei (37) und (53) vor. Insoferne also diese Ausdrücke diese wesentliche Eigenschaft der Taylorschen Reihe aufweisen, stellen sie eine wirkliche Verallgemeinerung dieser Reihe dar.

Was nun andrerseits die Ausdrücke (48), (51) und (55) betrifft, so liegt gar nichts besonders Bemerkenswertes in der Tatsache, daß sie außerhalb A bei passender Wahl der Konstanten $c_0, c_1, c_2 \ldots c_\nu \ldots$ konvergieren können. Man kann tatsächlich Ausdrücke dieser Art bilden, die für Kontinuen außerhalb A konvergent sind und für diese Kontinuen analytische Funktionen darstellen, die mit der durch die Konstanten $c_0, c_1, c_2 \ldots c_\nu \ldots$ definierten Funktion nichts zu tun haben. Es ist sogar der Fall nicht ausgeschlossen, daß ein solcher Ausdruck gleichmäßig für einen zweidimensionalen Be-



Die starken Linien sind Teile der Begrenzung des Sterns.

[1]) Monatsber. d. Kgl. Akad. d. Wiss. vom 12. Aug. 1880. Weierstraß, Werke, Bd. 2, S. 201—233.

[2]) Die Bezeichnung „arithmetischer Ausdruck" im Gegensatz zu „analytische Funktion" findet sich bei Weierstraß nicht. Sie wurde in diesem Sinne anscheinend das erste Mal in der Abhandlung: „Sur la représentation des fonctions monogènes uniformes . . ." von G. Mittag-Leffler angewendet. Acta Math., Bd. 4, S. 1—79.

reich konvergiert, der zum Teil in das Innere, zum Teil in das Äußere des Sterns A fällt. (Die schraffierte Figur.) Er würde also für diesen Bereich eine Fortsetzung des Funktionszweiges $FA(x)$ darstellen. Man kann auch erreichen, daß ein solcher Ausdruck bei passender Wahl der Konstanten $c_0, c_1, c_2 \ldots c_\nu \ldots$ auf einem Abschnitt eines Halbstrahls gleichmäßig konvergiert, der vom Anfangspunkt ausgehend beliebig weit über den Begrenzungspunkt des Sterns hinausreicht, und auf diesem Abschnitt eine stetige Folge von Werten annimmt; dabei können die Werte, die dem außerhalb des Sterns gelegenen Teil entsprechen, in vollkommen willkürlicher Weise gewählt werden.

Nichtsdestoweniger scheint es beim ersten Blick nicht ausgeschlossen, daß Ausdrücke von der Form

$$\lim_{n=\infty} G(x; n)$$

($G(x; n) =$ ganze rationale Funktion von x, deren Glieder sich von c_0, $c_1 x$, $c_2 x^2$, ... nur um numerische Faktoren unterscheiden, die von dem Parameter n abhängen.) existieren, für welche der Stern A immer Konvergenzstern bleibt, gleichviel, wie man die Konstanten $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n \ldots$ auch wählt. Herr Borel hat durch eine tiefgehende Untersuchung gezeigt, daß dies nicht der Fall ist.[1]) Herr Phragmén ist noch weiter gegangen, indem er zeigte, daß es auch dann nicht der Fall sein kann, wenn man unter $G(x; n)$ ein ganze transzendente Funktion versteht.

Zu diesem bemerkenswerten Resultat kann man auf folgende Weise gelangen.

Wir setzen voraus, es sei

$$FA(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu, \omega) \frac{c_\nu}{\nu!} x^\nu, \tag{56}$$

wo ω reell und positiv ist und die (ν, ω) numerische Koeffizienten bedeuten, die von ν und ω abhängen, während die Reihe

[1]) „Leçons sur les séries divergentes." Paris 1901. (Gauthier-Villars.) S. 172—175.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu, \omega)\frac{c_\nu}{\nu!}x^\nu$$

für jeden positiven Wert von ω eine in Bezug auf x stets konvergente Reihe sein soll. Es wird ferner angenommen, daß die obere Grenze von

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu, \omega)\frac{c_\nu}{\nu!}x^\nu\right|$$

für jeden endlichen Bereich von ω, x endlich ist.

Wir setzen

(57) $\quad G(x; \omega) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(\nu, \omega)x^\nu \quad$ (stets konvergente Reihe), d. h.

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{\omega=\infty} G(x; \omega). \tag{58}$$

Der Hauptstern dieser Funktion ist die ganze Ebene außer der Geraden $(1, \infty)$.

Es werde andrerseits angenommen, daß der Hauptstern der durch die Konstanten $c_0, c_1, c_2, \ldots c_\nu \ldots$ definierten Funktion der Kreis $|x| < 1$ ist und daß diese Funktion auf folgende Weise definiert werde.

Wir wählen auf der Peripherie des Kreises die Punkte $a_q = e^{i\Theta_q}$ $(q = 1, 2, 3, \ldots)$ in der Art, daß sie eine auf dem Kreisumfang überall dichte Menge bilden, daß indessen die Punkte $x = 1$ und $x = -1$ nicht zu ihnen gehören.

Wir nehmen ferner positive Größen $A_q (q = 1, 2, 3, \ldots)$ derart an, daß

die Reihe $\sum\limits_{q=1}^{\infty} A_q$ konvergiert.

Aus diesen beiden Voraussetzungen schließt man mit Hilfe des Weierstraßschen Satzes über iterierte Reihen die Gleichung:

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{A_q}{1-\dfrac{x}{a_q}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{q=1}^{\infty}A_q a_q^{-\nu}\right)x^\nu, \tag{59}$$

deren rechte und linke Seite beide mindestens für $|x| < 1$ konvergieren.

Man kann indessen auch folgern, daß der Kreis $|x| < 1$ der Hauptstern dieser beiden Ausdrücke ist. Um dies einzusehen, fixieren wir einen der Punkte a_q, etwa $a_p = e^{i\Theta_p}$. Setzt man $x = re^{i\Theta_p}$, $r < 1$, so erhält man:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{A_q}{1 - \frac{x}{a_q}} = \frac{A_p}{1-r} + \Sigma^{(1)} \frac{A_q}{1 - re^{i(\Theta_p - \Theta_q)}},$$

wobei die Summe auf der rechten Seite sich über alle Glieder außer dem p^{ten} erstreckt. Der reelle Teil der rechten Seite ist:

$$\frac{A_p}{1-r} + \Sigma^{(1)} A_q \frac{1 - r\cos(\Theta_p - \Theta_q)}{\sin^2(\Theta_p - \Theta_q) + (r - \cos(\Theta_p - \Theta_q))^2}.$$

Jeder dieser Terme ist positiv. Dieser reelle Teil wächst daher unbegrenzt, wenn x auf einem Radius $re^{i\Theta_p}$ sich dem Punkte a_p nähert. Andrerseits sind diese Punkte auf dem Umfang des Kreises $|x| < 1$ überall dicht. Es ist daher unmöglich, (59) über den Kreis hinaus fortzusetzen, der folglich den Hauptstern von (59) vorstellt.

Nunmehr unterwerfen wir die A_q zwei neuen Bedingungen:

1. Die Reihe
$$\sum_{q=1}^{\infty} \left|\frac{A_q}{\sin\Theta_q}\right|$$
soll konvergent sein.

Man zieht aus dieser neuen Voraussetzung eine wichtige Folgerung. Ist nämlich x reell und positiv, so ist

$$\left|1 - \frac{x}{a_q}\right| = |1 - x\cos\Theta_q + i\,x\sin\Theta_q| = \sqrt{1 - 2x\cos\Theta_q + x^2}$$
$$= \sqrt{\sin^2\Theta_q + (x - \cos\Theta_q)^2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung nimmt ihr Minimum für $x = \cos\Theta_q$ an und wird in diesem Falle gleich $|\sin\Theta_q|$.

Die Reihe

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{A_q}{1 - \frac{x}{a_q}}$$

ist folglich gleichmäßig konvergent für jeden Bereich $0 \leq x \leq X$, wenn X eine beliebige positive Größe bedeutet.

2. Sei q eine feste Zahl. Dann hat, wie man leicht sieht, der absolute Wert

$$\left| \frac{1}{1 - \frac{x}{a_q}} - G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right) \right|$$

für $0 \leq x \leq X$ und $0 \leq \omega$ immer eine endliche obere Grenze M_q.

In der Tat, bezeichnet man mit δ eine beliebig kleine Zahl, so kann man immer eine Größe $\bar{\omega}$ so groß bestimmen, daß

$$\left| \frac{1}{1 - \frac{x}{a_q}} - G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right) \right| < \delta; \quad \omega \geq \bar{\omega}.$$

Andrerseits hat

$$\left| \frac{1}{1 - \frac{x}{a_q}} - G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right) \right|; \quad \omega \leq \bar{\omega}$$

in Anbetracht der über die a_q und über $G(x; \omega)$ gemachten Voraussetzungen eine endliche obere Grenze.

Unsere zweite Bedingung soll jetzt lauten:

Die Reihe

$$\sum_{q=1}^{\infty} A_q M_q$$

konvergiere.

Aus diesen verschiedenen Voraussetzungen folgt, daß die Reihe

$$\sum_{q=1}^{\infty} A_q \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{a_q}} - G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right) \right),$$

wo ω einen beliebigen positiven Wert haben soll, gleichmäßig für jeden Bereich $0 \leq x \leq X$ konvergiert und daß

$$\lim_{\omega = \infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_q \left| \frac{1}{1 - \frac{x}{a_q}} - G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right) \right| = 0.$$

Man erhält daher:

$$(60) \qquad \lim_{\omega=\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_q G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{A_q}{1-\frac{x}{a_q}}; \quad 0 \leqq x \leqq X.$$

Nun ist (vgl. (57)):

$$\sum_{q=1}^{\infty} A_q G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right) = \sum_{q=1}^{\infty} A_q \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu, \omega) \left(\frac{x}{a_q}\right)^{\nu}.$$

Für festes ω und beliebiges q besitzt der absolute Wert von $G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right)$ für $|x| \leqq R$ (R sei eine beliebige positive Größe) eine bestimmte endliche obere Grenze.

Da die Reihe $\sum_{q=1}^{\infty} A_q$ konvergiert, so ist die Reihe

$$\sum_{q=1}^{\infty} A_q G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right)$$

für $|x| \leqq R$ gleichmäßig konvergent.

Setzt man also

$$(61) \qquad \frac{c_\nu}{\nu\,!} = \sum_{q=1}^{\infty} A_q a_q^{-\nu} \qquad \text{(vgl. (59))},$$

so ist

$$\sum_{q=1}^{\infty} A_q G\left(\frac{x}{a_q}; \omega\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu, \omega) \frac{c_\nu}{\nu\,!} x^{\nu}; \quad |x| \leqq R \qquad \text{(vgl. (57))}$$

und man erhält

$$(62) \qquad \sum_{q=1}^{\infty} \frac{A_q}{1-\frac{x}{a_q}} = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu, \omega) \frac{c_\nu}{\nu\,!} x^{\nu}.$$

Dieser Ausdruck hat den Kreis $|x| < 1$ als Hauptstern. Er stellt im Innern desselben den Funktionszweig $FA(x)$ dar (vgl. (56)), der durch die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu\,!} x^{\nu} \qquad \text{(vgl. (59), (61))}$$

definiert ist, und konvergiert nicht allein im Innern des Hauptsternes A, sondern er ist sogar für jeden Bereich $0 \leq x \leq X$ gleichmäßig konvergent, wo X eine beliebig große positive Zahl bedeutet.

Die Ergänzung des Borelschen Satzes durch Herrn Phragmén ist von Bedeutung. Man kann tatsächlich sehr elegante Ausdrücke vom Typus (56) bilden, die $FA(x)$[1]) darstellen. Man mußte daher fragen, ob es nicht hier möglich wäre, was im Falle des Herrn Borel

$$\lim_{m=\infty} \sum_{\nu=0}^{m} (\nu, m) \frac{c_\nu}{\nu!} (x-a)^\nu$$

nicht anging, nämlich Ausdrücke von der Form (56) zu finden, die nirgends außerhalb A konvergent sind.

Das eben behandelte Problem hat nichts zu tun mit einem anderen, von welchem Herr Borel eine interessante Lösung gefunden hat.[2]) Er weist durch ein sehr sinnreiches Beispiel die Existenz analytischer Funktionen nach, die eine auf natürliche Weise definierte lineare Fortsetzung über ihren Existenzbereich hinaus besitzen. Um zu diesem Ergebnis zu gelangen, muß man den Begriff der Derivierten erweitern. Man geht nämlich nicht mehr durch alle Punkte in der Umgebung eines bestimmten Punktes zur Grenze über, sondern nur durch solche Punkte, die eine auf gewisse Weise definierte, überall dichte Menge bilden. Das Wesentliche ist, daß die Funktion in ihrem ganzen Existenzbereich durch die Gesamtheit ihrer Derivierten in einem bestimmten Punkt eindeutig gegeben ist. Kennt man

[1]) Beispielsweise:

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} \left(c_0 + \frac{c_1}{(\alpha \cdot 1)!\, 1!} x + \frac{c_2}{(\alpha \cdot 2)!\, 2!} x^2 + \cdots \right); \quad \alpha = \frac{1}{\omega}$$

siehe Mittag-Leffler, „Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe." Atti del IV Congresso internaz. dei Matematici. Roma, 6—11 Aprile 1908, S. 82.

[2]) Émile Borel, „Définition et domaine d'existence des fonctions monogènes uniformes." Proceedings of the fifth international congress of Mathematics, vol. I, S. 133—144.

diese Ableitungen, so ist die Funktion vollständig gegeben, ganz wie es bei den analytischen Funktionen der Fall ist.

Ungeachtet des Interesses, das dieser neue Gedanke des Herrn Borel erweckt, erscheint es mir nicht angebracht, hierin den Ausgangspunkt einer neuen Theorie der analytischen Funktionen zu erblicken, welche allgemeiner als die klassische Theorie wäre und diese als Spezialfall enthielte. Man müßte hiefür zeigen können, daß die Funktionen des Herrn Borel in natürlicher Weise in einem von der Wissenschaft selbst gestellten Problem auftreten und keine künstliche Konstruktion sind, wie es so viele in den entlegenen Gebieten der allgemeinen Theorie der (nicht analytischen) Funktionen gibt.

Herr Borel hat gezeigt, daß seine Funktion durch einen Ausdruck

$$\lim_{m=\infty} G(x;\, m)$$

($G(x; m)$ = ganze rationale Funktion mit dem Parameter m.) dargestellt wird, der nicht nur im Innern des Hauptsterns Gültigkeit besitzt, sondern auch für die linearen Fortsetzungen der Funktion, die in der von ihm angegebenen Weise gebildet werden.

Indessen hat er, wie es scheint, nicht gezeigt, daß sein Ausdruck keine andere Folge von Werten darstellen kann, die mit der ursprünglich gegebenen Funktion nichts zu tun haben.

Aber gerade diese Frage erhebt sich hier wieder, ob man einen nur im Existenzbereich der Funktion konvergenten Ausdruck bilden kann, in den von der Funktion nur die Konstanten $c_0, c_1, c_2 \ldots c_\nu \ldots$ eingehen, die der einzigen Bedingung genügen sollen, daß

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\frac{c_\nu}{\nu!}}$$

endlich ist. Würde ein solcher Ausdruck existieren, der gleichzeitig vom formalen Gesichtspunkte aus einfach genug wäre, so könnte man die Potenzreihe als Ausgangspunkt der Theorie der analytischen Funktionen verlassen und durch diesen neuen, vollkommeneren Begriff ersetzen.

Anhang.

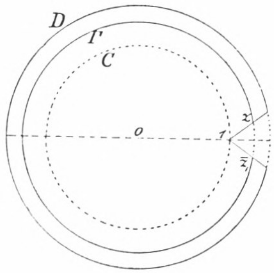
Ein Satz des Herrn Marcel Riesz.

„Es bedeute $F(z)$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen z, die in dem Sterne D

$$|z| \leqq R \qquad (R > 1)$$

$$\vartheta \leqq \arg(z-1) \leqq 2\pi - \vartheta \qquad \left((0 \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}\right)$$

einschließlich der Begrenzung stetig und in demselben Bereiche mit Ausnahme des Punkte $z = 1$ regulär ist.



Unter dieser Voraussetzung ist die Reihe

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots a_n z^n + \cdots,$$

die im Innern des Konvergenzkreises $C(|z| = 1)$ die Funktion $F(z)$ darstellt, in dem Bereiche $|z| \leqq 1$ gleichmäßig konvergent."

Die Begrenzung des Sterns D wird offenbar von einem Kreisbogen mit dem Radius R und zwei vom Punkte $z = 1$ ausgehenden Strecken gebildet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit des Satzes können wir $F(1) = 0$ annehmen. Es werde nun mit Γ eine Figur von gleicher Gestalt wie D bezeichnet, bei der der Kreisbogen mit dem Radius R durch einen Kreisbogen vom Radius r $(1 < r < R)$ ersetzt ist, den wir auf folgende Weise bestimmen:

Wir bezeichnen mit ε eine beliebig kleine Größe und wählen r so nahe an 1, daß auf dem geradlinigen Teile der Figur Γ

$$|F(z)| \leqq \varepsilon .$$

Die Schnittpunkte der geradlinigen Teile der Begrenzung von Γ mit dem Kreisbogen vom Radius r bezeichnen wir mit z_1 und $\bar{z}_1$.

Dann sagt ein bekannter Satz Cauchys:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_1^{z_1} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\, dz + \int\limits_{z_1}^{\bar{z}_1} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\, dz \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\bar{z}_1}^{1} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\, dz\right].$$

Nun ist

$$\left|\int\limits_1^{z_1} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\, dz\right| < \varepsilon \int\limits_1^{z_1} \frac{|dz|}{|z|^{n+1}} = \varepsilon \int\limits_1^{z_1} \frac{d|z|}{|z|^{n+1}} \left|\frac{dz}{d|z|}\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{\cos\vartheta}\int\limits_1^{z_1} \frac{d|z|}{|z|^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{n\cos\vartheta}\left(1 - \frac{1}{|z_1|^n}\right)$$

und ebenso

$$\left|\int\limits_1^{\bar{z}_1} \frac{F(z)\, dz}{z^{n+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{n\cos\vartheta}\left(1 - \frac{1}{|\bar{z}_1|^n}\right).$$

Bezeichnen wir die obere Grenze von $|F(z)|$ in dem Sterne D mit g, so ist noch

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{z_1}^{\bar{z}_1} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\, dz\right| < \frac{g}{r^n} = \frac{1}{n}\, g\, \frac{n}{r^n}.$$

Versteht man unter δ eine neue beliebig kleine positive Größe, so ist für genügend großes n:

$$g\, \frac{n}{r^n} < \delta$$

und folglich:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{z_1}^{z_1} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\, dz \right| < \frac{\delta}{n}.$$

Man erkennt also, daß

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{n}, \text{ soferne } n \geqq N,$$

wenn ε beliebig klein und N hinreichend groß gewählt ist.[1])

Es folgt nunmehr aus dem Tauberschen Satz,[2]) daß die Gleichung stattfindet

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = F(z)$$

[1]) Dieser von Herrn Hardy gegebene Beweis wurde mir von Herrn Marcel Riesz mitgeteilt.

[2]) Tauber, „Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen." Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 8, 1897, S. 274—275.

Es sei eine Potenzreihe

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n$$

gegeben, für die

$$\lim_{n=\infty} n k_n = 0.$$

Es werde ferner vorausgesetzt, daß $F(x)$ gegen einen bestimmten, mit $F(z)$ bezeichneten Grenzwert konvergiert, wenn x längs eines Radius gegen den auf dem Kreisumfang $|z| = 1$ gelegenen Punkt z strebt. Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n$$

gegen den Wert $F(z)$. Ist die zweite Bedingung für eine Punktmenge des Kreisumfanges $|z| = 1$ gleichmäßig erfüllt, so ist die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n$$

für alle Punkte dieser Menge eine gleichmäßige.

Der Beweis kann in das System folgender Formeln zusammengefaßt werden:

und zwar nicht nur im Punkte $z=1$, sondern auf dem ganzen Umfange $|z|=1$, und daß die Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für} \quad |z| \leqq 1$$

eine gleichmäßige ist.

$$\left| F(z) - \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu z^\nu - \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu z^\nu \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu - \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu z^\nu \right) \right| < \delta;\ n \geqq N.\ |z| \leqq 1.$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu z^\nu \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu z^\nu \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} k_\nu z^\nu \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu$$

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} k_\nu z^\nu \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu \right| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |k_\nu z^\nu| \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu < \frac{\varepsilon}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \varepsilon \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu z^\nu \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu - \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu z^\nu = -\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu z^\nu \left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu\right)$$

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu < \frac{\nu}{n}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} |k_\nu z^\nu| \left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu\right) \leqq \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\nu\,|k_\nu|}{n} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{m} \nu\,|k_\nu| + \frac{1}{n}\sum_{\nu=m+1}^{n} \nu\,|k_\nu|$$

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=m+1}^{n} \nu\,|k_\nu| \leqq \frac{(n-m)\varepsilon}{n}.$$

Folglich:

$$\left| F(z) - \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu z^\nu \right| \leqq \delta + \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{m} \nu\,|k_\nu| + \frac{(n-m)\varepsilon}{n} + \varepsilon\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
