Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1915

München 1915
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Eine geometrische Aufgabe.

Von **E. Czuber.**

Vorgelegt von W. v. Dyck in der Sitzung am 9. Januar 1915.

I. Der allgemeine Fall.

1. Drei nicht orientierte Gerade in einer Ebene bestimmen in dieser zwei Systeme ähnlicher Dreiecke, S und S'; jede zwei Dreiecke desselben Systems sind perspektiv ähnlich in Bezug auf einen äußeren Ähnlichkeitspunkt, und jedes Dreieck aus dem einen System ist mit jedem Dreieck aus dem andern perspektiv ähnlich in Bezug auf einen innern Ähnlichkeitspunkt.

Sind m, n, p, Fig. 1, die drei Geraden, so ziehe man zu einer von ihnen, z. B. zu m, eine Parallele und nehme auf dieser zwei Punkte N, P in der einen, oder N', P' in der entgegengesetzten Richtung an. Durch N und N' ziehe man je eine Parallele zu p, durch P und P' je eine Parallele zu n; dadurch entstehen zwei ähnliche Dreiecke MNP, $M'N'P'$ mit entgegengesetztem Umlaufssinn. Alle zu MNP ähnlichen und

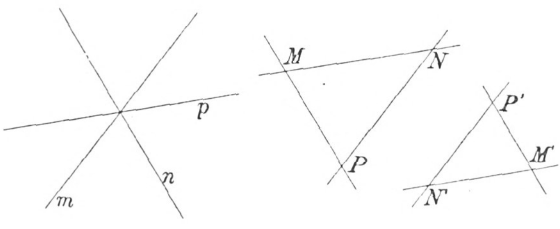

Fig. 1.

ähnlich liegenden Dreiecke bilden das eine System S, alle zu $M'N'P'$ ähnlichen und ähnlich liegenden Dreiecke das andere System S'. Die weiteren Aussagen bedürfen keiner Begründung.

2. Das Problem, um dessen Lösung es sich handelt, besteht in folgendem.

In der Ebene der drei Geraden m, n, p ist ein Dreiseit abc mit den Ecken A, B, C gegeben. Es sind jene Dreiecke der durch m, n, p bestimmten Systeme zu konstruieren, deren Ecken auf den Seiten von ABC liegen.

In anderer Formulierung:

In einer Ebene ist ein Dreiseit abc und ein Dreieck MNP gegeben. Man soll dem Dreiseit alle Dreiecke einschreiben, die dem gegebenen perspektiv ähnlich sind.

3. Da nach Art. 1 alle zu MNP perspektiv ähnlichen Dreiecke durch die drei Geraden m, n, p gegeben sind, so kann die Lösung wie folgt in Angriff genommen werden.

Man führe, Fig. 2, zwischen irgend zwei Seiten des Dreiseits, z. B. zwischen b und c, Transversalen parallel zu irgend einer der drei Geraden, z. B. zu m, und lege durch die Endpunkte N, N', ... Parallele zu p, durch die Endpunkte P, P', ... Parallele zu n. Dann liegen die Schnittpunkte M, M', ... homologer Paare auf einer Geraden, die durch A geht; und diese Gerade schneidet die Gegenseite a in einem Punkte $\mathfrak{M}$, der bereits ein Eckpunkt eines der gesuchten Dreiecke ist, von dem aus dieses selbst durch bloßes Ziehen von Parallelen erhalten wird.

Zur Begründung sei bemerkt, daß N, N', ... und P, P', ... ähnliche Punktreihen in perspektiver Lage sind; infolgedessen bilden auch die hindurchgeführten Parallelstrahlen ähnliche Büschel in perspektiver Lage, deren Erzeugnis eine Gerade ist, die notwendig durch den gemeinsamen, sich selbst entsprechenden Punkt A der Punktreihen läuft.

Dieser letzte Umstand bewirkt, daß zur Konstruktion von $\mathfrak{M}$ nur eine Transversale, NP, erforderlich ist.

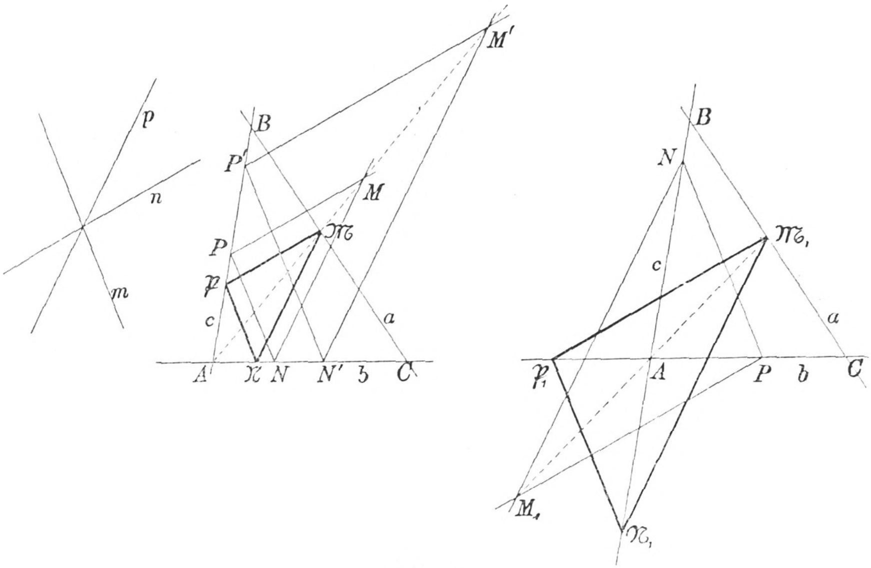
p
n
m
B
P'
M'
M
P
M
P
c
a
A
N
N
N'
b
C
B
N
M₁
c
a
P₁
A
P
b
C
M₁
N₁

Fig. 2.

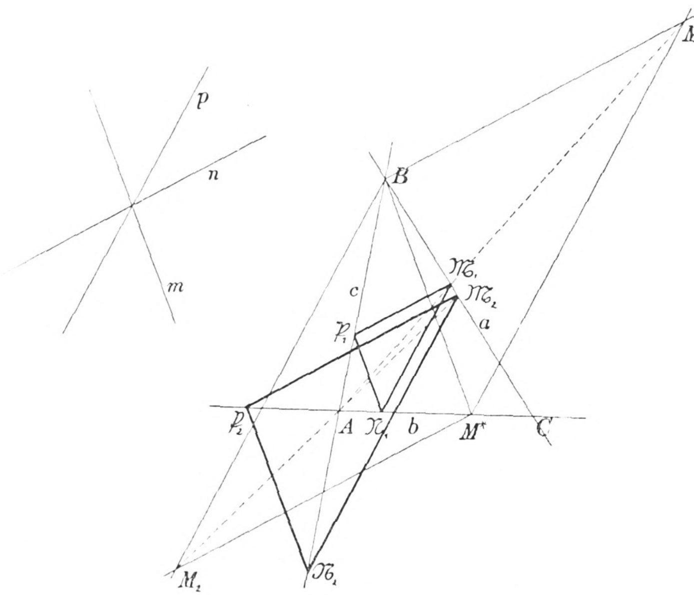
M₁
p
n
m
B
M₁
M₂
c
P₁
a
P₂
A
N₁
b
M*
C
M₂
N₁

Fig. 3.

Vertauscht man die Bezeichnung der Endpunkte und führt die Konstruktion wie früher weiter, so kommt man zu dem Eckpunkt $\mathfrak{M}_1$ eines zweiten Dreiecks $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{N}_1 \mathfrak{P}_1$ von der verlangten Beschaffenheit.

4. Dieses Konstruktionsverfahren läßt sich zweckmäßig in folgender Art weiter ausbilden. Man verlege, Fig. 3, die zu m parallele Transversale nach dem Eckpunkt B, gebe ihr also die Lage BM^*; verzeichnet man nun über BM^* als Diagonale ein Parallelogramm $B\mathrm{M}_1 M^* \mathrm{M}_2$, dessen Seiten die Richtungen n und p haben, und projiziert die Gegenecken M_1, M_2 aus A auf a, so erhält man die Eckpunkte $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ der beiden Dreiecke, die vorhin getrennt behandelt worden sind.

Diese Dreiecke haben das gemeinsame Merkmal, daß die Seite von der Richtung m der Ecke A des Dreiseits in dem Sinne zugeordnet ist, daß ihre Endpunkte auf den durch A laufenden Seiten liegen.

5. Man kann unter Beibehaltung des Seitenpaares b, c mit den Geraden n, p ebenso vorgehen, wie man soeben mit der Geraden m verfahren ist, und erhält auf diese Weise sechs eingeschriebene Dreiecke. Die andern Seitenpaare, ebenso behandelt, führen zu keinen neuen Dreiecken mehr; vielmehr ist jedes so konstruierte Dreieck, wie eine einfache Überlegung zeigt, unter den bereits gezeichneten.

Es ergibt sich also zur Lösung der Aufgabe das folgende Verfahren.

Man ziehe durch B die Transversalen BM^*, BN^*, BP^* parallel zu m, n, p bis zur Gegenseite b; verzeichne über diesen Transversalen als Diagonalen die Parallelogramme $B\mathrm{M}_1 M^* \mathrm{M}_2$, $B\mathrm{N}_3 N^* \mathrm{N}_4$, $B\Pi_5 P^* \Pi_6$, deren Seiten beziehungsweise die Richtungen n, p; p, m; m, n haben; projiziere die Eckpunkte M_1, M_2, N_3, N_4, Π_5, Π_6 aus A auf die Gegenseite a, so hat man in den Projektionen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{N}_4$, $\mathfrak{P}_5$, $\mathfrak{P}_6$ je einen Eckpunkt für jedes der sechs Dreiecke, von denen aus diese selbst durch bloßes Ziehen von Parallelen verzeichnet werden können.

Dieses Verzeichnen kann noch durch folgende Bemerkung erleichtert werden. Die Transversalen BM^*, BN^*, BP^* können ebensogut auf das Seitenpaar a, b bezogen werden wie auf b, c. Folglich liefern die Projektionen derselben sechs Punkte M_1, M_2, N_3, N_4, Π_5, Π_6 aus C auf c andere sechs Eckpunkte, die sich auf die Dreiecke verteilen. Diese Verteilung ergibt sich daraus, daß jeder der neuen sechs Punkte mit einem der früheren auf einer Geraden liegen muß, die zu einer der drei Geraden m, n, p parallel ist. Dadurch ist dann auch die Bezeichnung der neuen sechs Punkte und somit auch die der Eckpunkte auf der dritten Seite b bestimmt. Die Bezeichnung ist hier so gewählt, daß ein Eckpunkt jenen großen Buchstaben trägt, welcher dem kleinen Buchstaben entspricht, der die Richtung der gegenüber liegenden Seite anzeigt.

Es braucht nicht betont zu werden, daß statt der Ecke B auch jede der beiden andern hätte verwendet werden können.

Damit ist alles gesagt, was zur Durchführung und zum Verständnis der Fig. 4 erforderlich ist.

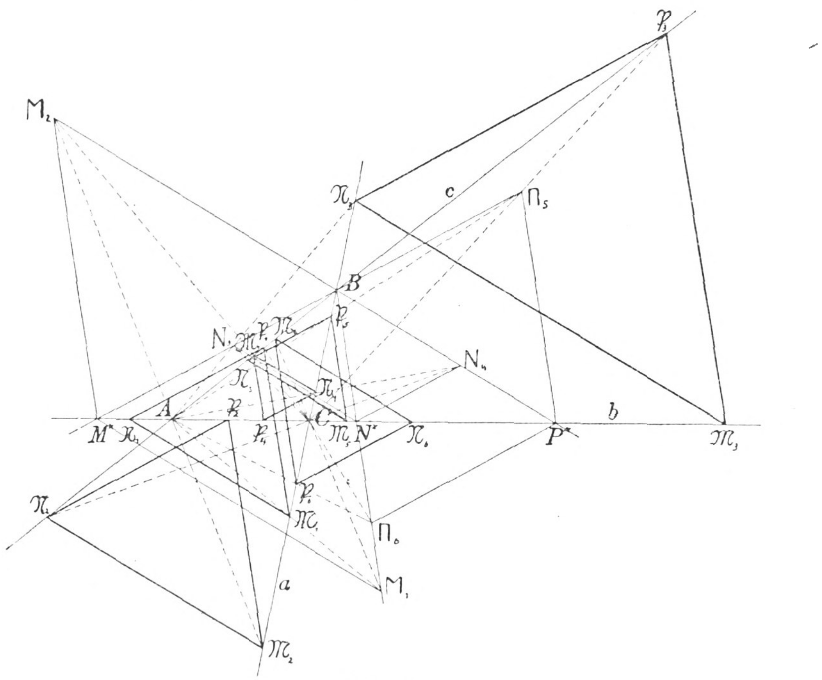

Fig. 4.

Die 18 Ecken der sechs Dreiecke verteilen sich auf die Seiten von ABC in dem vorliegenden Falle wie folgt:

Auf a liegen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{N}_3, \mathfrak{N}_4, \mathfrak{P}_5, \mathfrak{P}_6$;
„ b „ $\mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_5, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_6, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_4$;
„ c „ $\mathfrak{M}_6, \mathfrak{M}_4, \mathfrak{N}_5, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_1$;

oder in anderer Anordnung: Es liegen die Ecken

$$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{P}_1;\ \mathfrak{M}_2, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{P}_2;\ \mathfrak{M}_3, \mathfrak{N}_3, \mathfrak{P}_3;\ \mathfrak{M}_4, \mathfrak{N}_4, \mathfrak{P}_4;$$
$$\mathfrak{M}_5, \mathfrak{N}_5, \mathfrak{P}_5;\ \mathfrak{M}_6, \mathfrak{N}_6, \mathfrak{P}_6$$

beziehungsweise auf

$$a, b, c;\ a, c, b;\ b, a, c;\ c, a, b;\ b, c, a;\ c, b, a.$$

Zu bemerken ist, daß die Punkte M_1, M_2 sowohl bei dem Projizieren aus A auf a wie auch bei dem Projizieren aus C auf c Punkte von der Art $\mathfrak{M}$ geben; das gleiche gilt bezüglich N_3, N_4 und Π_5, Π_6.

Ist die Aufgabe so gestellt: Dem Dreiseit abc ein Dreieck mit den Seitenrichtungen m, n, p einzuschreiben in der Weise daß zwischen Ecken und Seiten eine bestimmte Zuordnung eingehalten wird, daß z. B. die Seite von der Richtung m zwischen c und a, die Seite von der Richtung n zwischen b und c, endlich die Seite von der Richtung p zwischen a und b verläuft, so handelt es sich nach der obigen Zusammenstellung um das Dreieck $\mathfrak{M}_3\mathfrak{N}_3\mathfrak{P}_3$; zu seiner Konstruktion braucht man nur das Dreieck $BN^*\mathrm{N}_3$ zu verzeichnen; denn die Projektion von N_3 aus A auf a gibt die Ecke $\mathfrak{N}_3$, von der aus das ganze Dreieck hergestellt werden kann.

6. Zu einer andern Methode der Lösung führen die folgenden Erwägungen.

Dem Dreiseit abc sei ein Dreieck $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ eingeschrieben. Wir ordnen dessen Seiten $\mathfrak{N}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ den Ecken A, B, C zu nach der aus Fig. 5 ersichtlichen Gesetzmäßigkeit und ziehen durch A eine Parallele zu $\mathfrak{N}\mathfrak{P}$, durch B eine Parallele zu $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$, durch C eine Parallele zu $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$. Dadurch entsteht ein ABC umschriebenes Dreieck MNP mit zu $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ parallelen Seiten. Wir ordnen die Ecke M der Seite BC usw. zu, wie das der Figur unmittelbar zu entnehmen ist. Die Dreiecke $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ und MNP als perspektiv ähnlich besitzen einen Ähnlichkeitspunkt O, der durch Ziehen der Verbindungslinien homologer Ecken erhalten wird. Die homologe Ecke zu M liegt auf der M zugeordneten Seite von ABC usw.

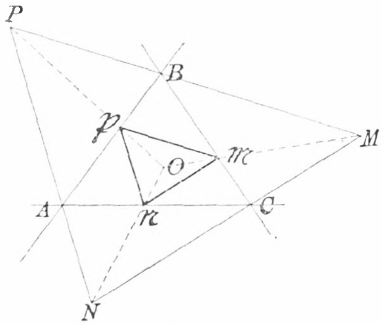

Fig. 5.

Ist umgekehrt neben dem Dreiseit abc ein ihm umschriebenes Dreieck MNP gegeben und soll das dem letzteren zugeordnete perspektiv ähnliche, abc eingeschriebene Dreieck bestimmt werden, so genügt es, den Ähnlichkeitspunkt O zu kennen; durch Projizieren der Ecken von MNP aus O auf die zugeordneten Seiten von ABC ergeben sich die Ecken von $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$.

Um O zu finden, überlege man wie folgt.

Die Seite $\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ befindet sich in der Schar der zu NP parallelen Transversalen zwischen b und c; diese Transversalen bestimmen auf b und c zwei ähnliche, perspektiv liegende Punktreihen, und projiziert man diese aus N, beziehungsweise P, durch Strahlenbüschel, so sind diese projektiv und perspektiv liegend und erzeugen somit einen in zwei Gerade zerfallenden Kegelschnitt mit dem Doppelpunkt A; die eine Gerade ist NP, die andere geht notwendig durch den gesuchten Punkt O. Wiederholt man dasselbe Verfahren noch an einer zweiten

Ecke von ABC, z. B. bei C, wie in Fig. 6, so ist O gefunden und das Dreieck $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ bestimmt.

Die Lösung kann noch dadurch vereinfacht werden, daß man die erforderlichen Transversalen durch die Ecken des Dreiseits bis an die gegenüber liegenden Seiten führt. Dabei fällt

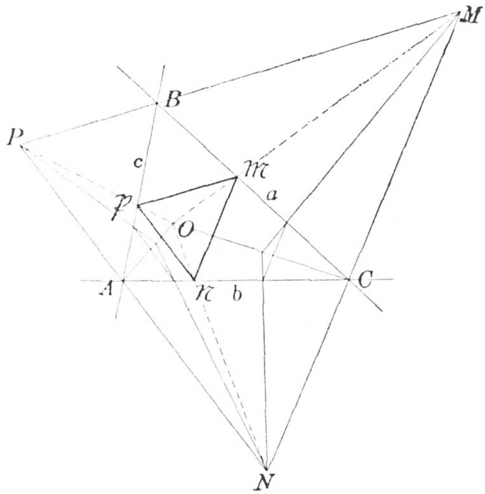

Fig. 6.

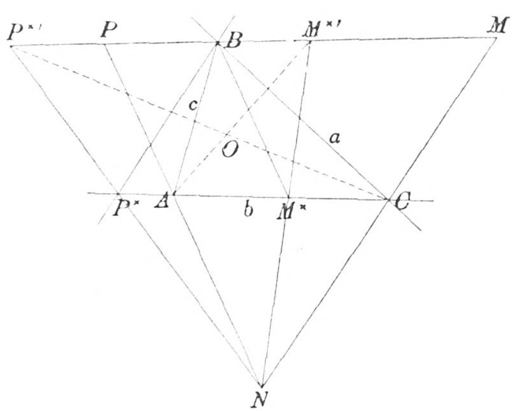

Fig. 7.

nämlich einer der beiden zugeordneten Strahlen mit einer Seite von MNP zusammen, wie das in Fig. 7 dargestellt ist. In dieser Figur sind die Transversalen BM^*, BP^* beziehungsweise NP, MN parallel; ihre Endpunkte M^*, P^* aus N auf PM projiziert geben die Punkte $M^{*\prime}$, $P^{*\prime}$, die mit A, beziehungsweise C zu verbinden sind, um den Punkt O zu erhalten.

Ist nun wieder die Aufgabe gestellt, einem gegebenen Dreiseit abc alle Dreiecke einzuschreiben, welche durch ein ebenfalls gegebenes Geradentripel m, n, p in der früher erklärten Weise bestimmt sind, so wird man damit beginnen, daß man ABC alle Dreiecke umschreibt, deren Seiten den Geraden m, n, p parallel sind. Man kann durch jede Ecke von ABC zu jeder der drei Geraden eine Parallele ziehen und jeweils die zwei andern Parallelen auf die übrigen zwei Ecken in zweifacher Art verteilen, das gäbe 18 Anordnungen; es finden jedoch dabei mehrfache Zählungen statt; scheidet man die wiederholten Fälle aus, so verbleiben sechs verschiedene umgeschriebene Dreiecke, die wir in folgender Weise ordnen und numerieren wollen:

Durch		A	B	C
geht die Parallele zu	1.	m	n	p
	2.	m	p	n
	3.	n	m	p
	4.	n	p	m
	5.	p	m	n
	6.	p	n	m.

Dementsprechend sind in Fig. 8 die sechs Dreiecke mit $M_1N_1P_1$ bis $M_6N_6P_6$ bezeichnet.

Nun hat man nach dem vorhin angegebenen Verfahren zu jedem von ihnen den Ähnlichkeitspunkt, O_1 bis O_6, zu konstruieren und mit dessen Hilfe das eingeschriebene Dreieck herzustellen.

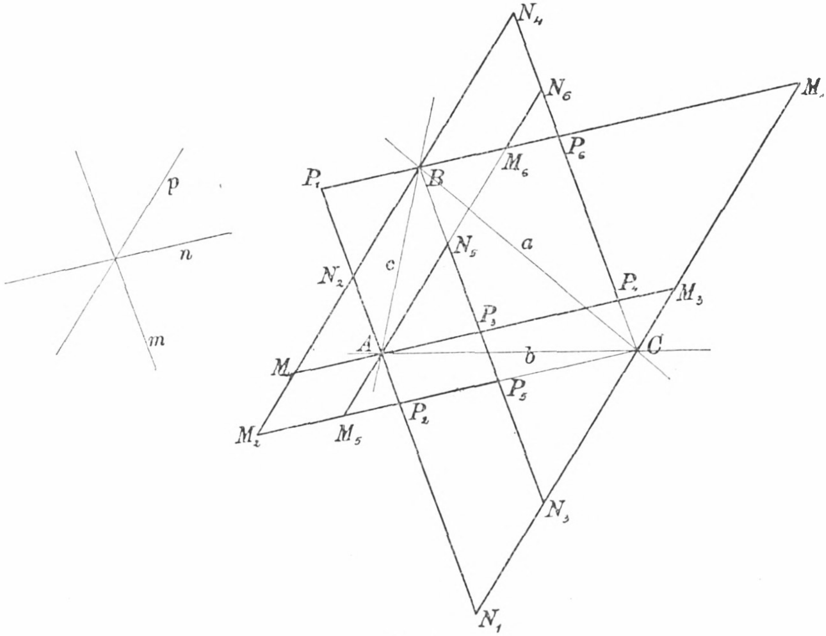

Fig. 8.

In Fig. 9 ist die Lösung für zwei von den sechs Fällen, und zwar für die Fälle 1 und 3 durchgeführt. Nach dem Vorausgeschickten erübrigt sich eine weitere Erklärung.

Das erste Verfahren ist diesem zweiten in zeichnerischer Beziehung überlegen.

II. Besondere Fälle.

7. Bei dem ersten Lösungsverfahren kann es geschehen, daß einer der Projektionsstrahlen $A(\mathrm{M}_1, \ldots \Pi_6)$ oder auch deren mehrere parallel ausfallen zur Seite a; dann rückt die bezügliche Projektion und damit auch das von ihr aus zu konstruierende eingeschriebene Dreieck ins Unendliche; es müssen daher auch ebenso viele der Projektionsstrahlen $C(\mathrm{M}_1, \ldots \Pi_6)$ parallel sein der Seite c. Infolgedessen vermindert sich in

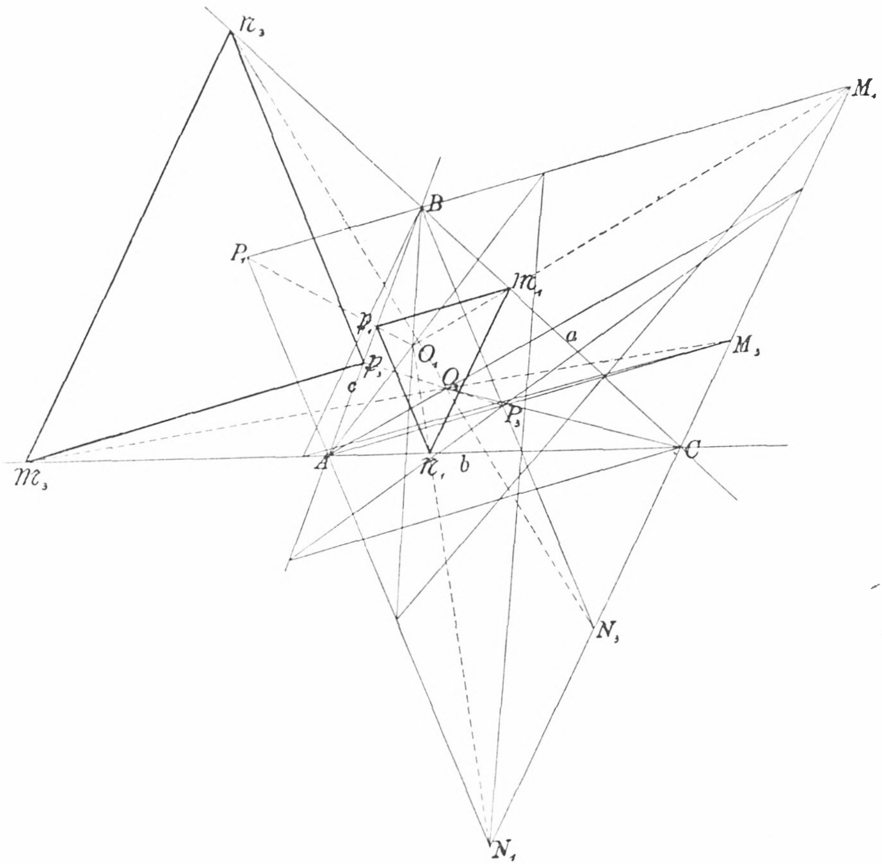

Fig. 9.

einem solchen Falle die Anzahl der eigentlichen eingeschriebenen Dreiecke.

Bei dem zweiten Lösungsverfahren kann es sich ereignen, daß eines der umschriebenen Dreiecke sich auf einen Punkt reduziert, mit anderen Worten, daß die Parallelen zu den Geraden m, n, p bei einer bestimmten Verteilung auf die Ecken des Dreiseits in einem einzigen Punkte sich schneiden; auch dies kann wiederholt eintreten.

Um die geometrische Bedeutung eines solchen Sachverhalts zu erkennen, wenden wir auf ihn die erste Methode an. Fig. 10 soll der Verteilung der Richtungen m, n, p auf die Ecken B, A, C entsprechen, wobei statt eines Dreiecks nur ein Punkt, Δ, zustande kommt. Zieht man die Transversale CM^* parallel zu m und verzeichnet über ihr das Dreieck CM^*M so, daß die Seiten M^*M, CM beziehungsweise die Richtungen von n, p haben, so schneidet der Strahl BM die Gegenseite AC in einem Eckpunkt $\mathfrak{M}$ des gesuchten eingeschriebenen Dreiecks. Die folgende Überlegung zeigt aber, daß der genannte Strahl der Gegenseite parallel ist, daß also der Punkt $\mathfrak{M}$ und mit ihm das ganze Dreieck $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ ins Unendliche rückt. Nimmt

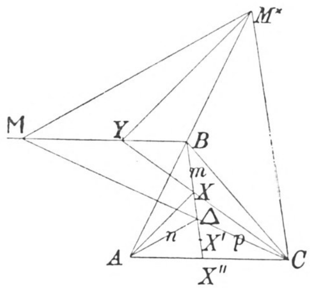

Fig. 10.

man nämlich auf dem festgehaltenen Strahl $B\Delta$ eine Punktreihe X, X', ... an und projiziert sie aus A und C, so entstehen zwei perspektiv liegende, projektive Strahlenbüschel; ebensolche Büschel bilden sich bei dem beschriebenen Vorgang um die Punkte M^* und C aus; ihr Erzeugnis ist ein Geradenpaar; die eine Gerade ist CM^*, hervorgehend aus dem unendlich fernen Punkte der Punktreihe X, X', ..., die andere geht durch B und ist parallel zu AC, wie man erkennt, wenn man X einmal nach B, ein zweites Mal nach X'' verlegt.

Das Ergebnis der Untersuchung lautet also dahin, daß, so oft die Parallelen zu m, n, p bei einer Verteilung auf die Ecken des Dreiseits abc durch einen Punkt gehen, eines der eingeschriebenen Dreiecke ein uneigentliches, weil unendlich fernes wird.

8. Sind die Geraden m, n, p so gerichtet, daß sie Dreiecke bestimmen, welche dem zugrunde liegenden Dreieck ABC symmetrisch ähnlich sind, so gibt es eine Anordnung, in der sich die Parallelen in einem Punkte schneiden.

In zwei symmetrisch ähnlichen Dreiecken sind zwei Winkel miteinander vertauscht. Es seien in Fig. 11 AC und MP die Seiten, an welchen die vertauschten Winkel liegen, so zwar, daß der Winkel bei C gleich ist dem Winkel bei M und der Winkel bei A gleich dem Winkel bei P.

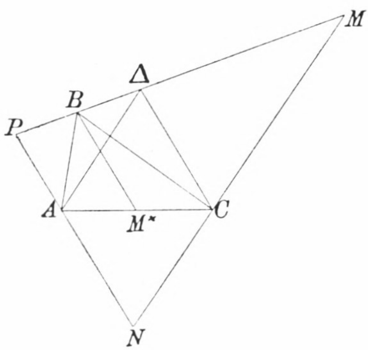

Fig. 11.

Man ziehe nun die Transversale $C\Delta$ parallel zu NP bis an PM und verbinde ihren Endpunkt Δ mit A; dann fällt $A\Delta$ parallel zu NM aus, folglich schneiden sich die Parallelen bei der Anordnung

$$\begin{matrix} A & B & C \\ p & n & m \end{matrix}$$

in einem Punkte, nämlich Δ.

Der Beweis für den behaupteten Parallelismus ergibt sich wie folgt. Man ziehe in ABC die Transversale BM^* parallel zu PN. Dann sind die Dreiecke AM^*B und PBA ähnlich; denn ihre Winkel bei A, beziehungsweise P, sind gleich nach der Voraussetzung und die Winkel bei B, beziehungsweise A, sind es als Wechselwinkel an Parallelen; folglich stimmen auch die Winkel bei M^* und B überein. Daraus ergibt sich weiter die Ähnlichkeit der Dreiecke M^*CB und $B\varDelta A$; denn dem eben Gesagten zufolge sind ihre Winkel bei M^* und B beziehungsweise gleich; ferner ergibt sich aus der Proportion

$$\frac{M^*C}{AM^*} = \frac{B\varDelta}{PB}$$

unter Beachtung der erstgedachten Ähnlichkeit

$$\frac{M^*C}{M^*B} = \frac{B\varDelta}{PB}\frac{AM^*}{M^*B} = \frac{B\varDelta}{PB}\frac{PB}{AB} = \frac{B\varDelta}{AB},$$

so daß die die gleichen Winkel einschließenden Seiten proportional sind. Daraus folgt die Gleichheit der Winkel M^*CB und $B\varDelta A$, und da der Winkel M^*CB voraussetzungsgemäß gleich ist dem Winkel bei M, so ist in der Tat $A\varDelta$ parallel zu NM.

Als Ergebnis kann also der Satz ausgesprochen werden:

Man kann einem zum Dreiseit erweiterten Dreieck fünf eigentliche Dreiecke einschreiben, die ihm symmetrisch ähnlich sind.

9. Der im vorigen Artikel behandelte Fall ergibt sich immer, wenn das zugrunde liegende Dreieck ABC gleichschenklig und das einzuschreibende ihm ähnlich ist; denn zwei derartige Dreiecke können auch als symmetrisch ähnlich, mit vertauschten Basiswinkeln, aufgefaßt werden.

Dies ergibt den weiteren Satz:

Einem gleichschenkligen Dreieck können fünf ihm ähnliche, untereinander paarweise perspektive Dreiecke eingeschrieben werden.

10. Die drei gegebenen Geraden m, n, p seien den Höhen des Dreiecks ABC parallel. Es handelt sich dann um solche eingeschriebene Dreiecke, deren Seiten zu den Seiten des zugrunde liegenden Dreiecks normal stehen.

Da die Parallelen zu m, n, p bei einer Verteilung auf die Ecken von ABC, nämlich dann, wenn sie als Höhen des Dreiecks erscheinen, sich in einem Punkte schneiden, so gibt es nur fünf eigentliche Dreiecke der beschriebenen Art.

Fig. 12 bringt einen solchen Fall zur Darstellung. Die drei Transversalen BM^*, BN^*, BP^*, mit deren Hilfe die Konstruktion durchgeführt ist, stehen der Reihe nach senkrecht auf a, b, c. Von den Seiten der eingeschriebenen Dreiecke stehen

$\mathfrak{N}_1\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{N}_3\mathfrak{P}_3$ $\mathfrak{N}_4\mathfrak{P}_4$ $\mathfrak{N}_5\mathfrak{P}_5$ $\mathfrak{N}_6\mathfrak{P}_6$ senkrecht auf a und verlaufen zwischen c, b a, b a, c c, a b, a;

$\mathfrak{P}_1\mathfrak{M}_1$ $\mathfrak{P}_3\mathfrak{M}_3$ $\mathfrak{P}_4\mathfrak{M}_4$ $\mathfrak{P}_5\mathfrak{M}_5$ $\mathfrak{P}_6\mathfrak{M}_6$ senkrecht auf b und verlaufen zwischen b, a b, c c, b a, b a, c;

$\mathfrak{M}_1\mathfrak{N}_1$ $\mathfrak{M}_3\mathfrak{N}_3$ $\mathfrak{M}_4\mathfrak{N}_4$ $\mathfrak{M}_5\mathfrak{N}_5$ $\mathfrak{M}_6\mathfrak{N}_6$ senkrecht auf c und verlaufen zwischen a, c c, a b, a b, c c, b.

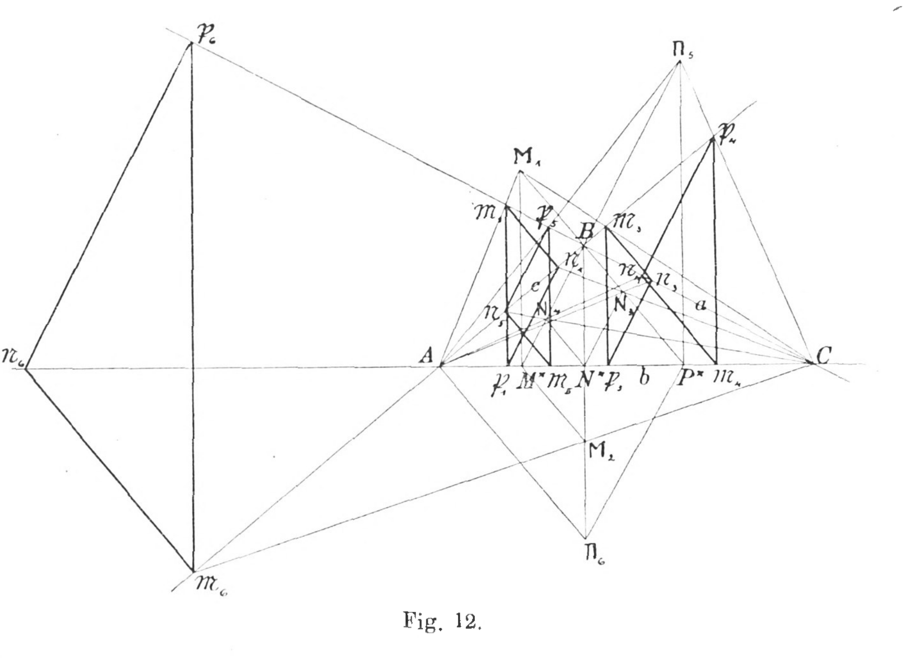

Fig. 12.

Die Lücke, welche das uneigentliche Dreieck $\mathfrak{M}_2\mathfrak{N}_2\mathfrak{P}_2$ läßt, macht sich durch das Fehlen der Seitenpaare b, c; c, a; a, b bemerkbar.

Ist bei derselben Sachlage das Dreieck ABC gleichschenklig, so gibt es noch eine zweite Verteilung der Parallelen, bei der sie durch einen Punkt gehen; wegen der Symmetrie tritt dies nämlich noch ein, wenn man die Parallelen durch die Basisendpunkte miteinander vertauscht. Die Folge davon ist, daß einem gleichschenkligen Dreieck nur vier Dreiecke eingeschrieben werden können, deren Seiten zu denen des ersten normal stehen. Fig. 13 zeigt einen solchen Fall; zu seiner Durchführung genügt es, bloß das Parallelogramm $BM_1M^*M_2$ über der Höhe BM^* als Diagonale zu verzeichnen, das durch Projizieren seiner Ecken M_1, M_2 aus A und C auf die Gegenseiten für jedes der vier Dreiecke je einen Eckpunkt liefert.

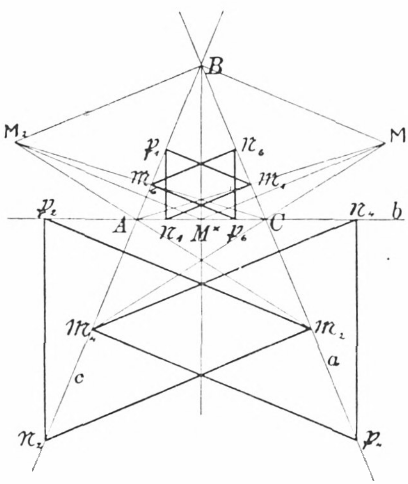

Fig. 13.

11. Sind die Geraden m, n, p den Halbierungslinien der Innenwinkel von ABC oder den Halbierungslinien zweier Außenwinkel und des Innenwinkels an der dritten Ecke parallel, so gibt es für die Parallelen zu m, n, p jedesmal eine

Verteilung auf die Ecken, bei der sie sich in einem Punkte schneiden. Auch in diesen Fällen wird also eines der eingeschriebenen Dreiecke uneigentlich.

12. Nun setzen wir voraus, die Geraden m, n, p seien den Medianen des Dreiecks ABC parallel.

In Fig. 14 seien m, n, p durch die Medianen AM^*, BN^*, CP^* selbst vertreten. Bei den verschiedenen Verteilungen der Parallelen hierzu auf die Ecken von ABC ergeben sich folgende Gebilde:

	A	B	C	
1.	m	n	p	der Punkt $\varDelta_1$;
2.	m	p	n	„ „ $\varDelta_2$;
3.	n	m	p	„ „ $\varDelta_3$;
4.	n	p	m	das Dreieck $M_4N_4P_4$;
5.	p	m	n	„ „ $M_5N_5P_5$;
6.	p	n	m	der Punkt $\varDelta_6$.

Um die Richtigkeit der unter 2 aufgestellten Behauptung zu erkennen, beachte man, daß nach dem Gange der Konstruktion $B\varDelta_1 C\varDelta_2$ ein Parallelogramm ist, das BC zur einen Dia-

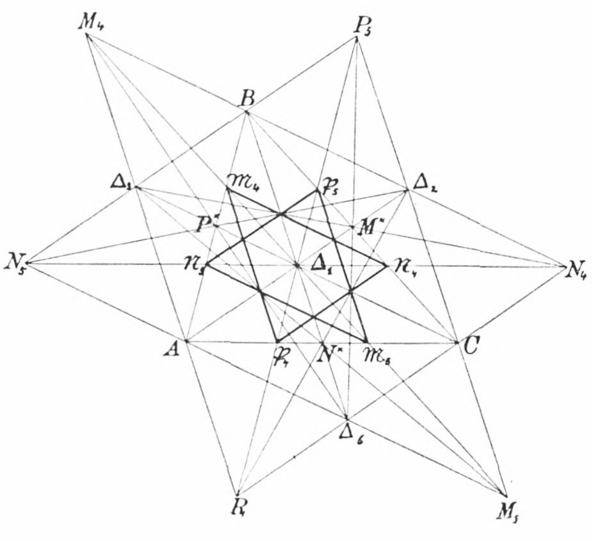

Fig. 14.

gonale hat, während die andere notwendig in die Gerade AM^* fällt; demnach schneiden sich die Geraden M_4N_4, P_5M_5 und AM^* tatsächlich in einem Punkte. Ebenso sind die Behauptungen 3 und 6 zu begründen.

Die Verfolgung der in Art. 6 entwickelten Konstruktionsverfahren an der Figur 14 läßt den Schwerpunkt Δ_1 von ABC als den gemeinsamen Ähnlichkeitspunkt der umschriebenen Dreiecke $M_4N_4P_4$, $M_5N_5P_5$ und der ihnen entsprechenden eingeschriebenen Dreiecke erkennen. Schließlich kann das Ergebnis wie folgt zusammengefaßt werden:

Einem Dreieck können nur zwei Dreiecke eingeschrieben werden, deren Seiten seinen Medianen parallel sind. Ihre sechs Ecken liegen auf den drei Geraden M_4M_5, N_4N_5, P_4P_5, welche die homologen Ecken der zwei umschriebenen Dreiecke verbinden.

13. Eine der Geraden m, n, p sei parallel einer Seite des Dreiecks ABC.

Es gibt dann sechs eingeschriebene Dreiecke in besonderer Gruppierung. In jeder der beiden Ecken, die der bevorzugten Seite angehören, stoßen zwei der sechs Dreiecke zusammen, und nur zwei davon liegen so, daß sie mit ABC keine Ecke gemein haben.

14. Zwei der Geraden m, n, p seien zwei Seiten des Dreiecks ABC parallel, z. B. sei m parallel AB, n parallel BC.

In diesem Falle gibt es eine Verteilung der Parallelen zu m, n, p auf die Ecken von ABC, bei der sie sich in einem Punkte schneiden; es ist dies die Verteilung

$$\begin{matrix} A & B & C \\ m & p & n \end{matrix}$$

und der gemeinsame Punkt ist B.

Die fünf Dreiecke, die sich jetzt ergeben, zeigen die besondere Anordnung, daß vier von ihnen in der Ecke B zusammenstoßen, während die beiden anderen Ecken von ABC nur je einem von ihnen angehören. Nur ein Dreieck liegt so, daß es mit ABC keine Ecke gemein hat.

Auf den eben besprochenen Fall führt die Aufgabe des Art. 10, wenn sie auf ein r e c h t w i n k l i g e s Dreieck angewendet wird. Dies bringt die Fig. 15 zur Darstellung. In der Ecke B stoßen die Dreiecke I, III, IV, VI zusammen, A gehört dem Dreieck VI, C dem Dreieck III als Ecke an, und nur das Dreieck II hat mit ABC keine Ecke gemein. Das Dreieck V ist im Unendlichen.

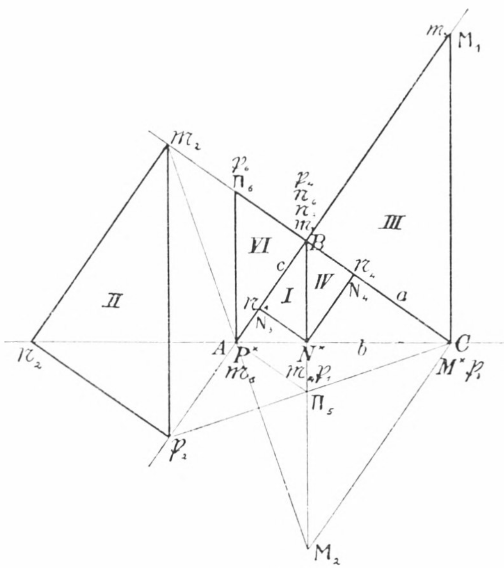

Fig. 15.

15. Die drei Geraden m, n, p seien den Seiten von ABC parallel, und zwar m parallel a, n parallel b und p parallel c.

Es gibt drei Verteilungen der Parallelen zu m, n, p auf die Ecken von ABC, bei denen statt eines umschriebenen Dreiecks ein Punkt entsteht, nämlich die folgenden:

	A	B	C	
2.	m	p	n	mit dem Schnittpunkt A
6.	p	n	m	„ „ „ B
3.	n	m	p	„ „ „ C;

hiernach rücken drei eingeschriebene Dreiecke ins Unendliche. Von den drei übrigen fallen, wie die konstruktive Durchführung des Falles nach der ersten Methode, Fig. 16, zeigt, zwei mit dem gegebenen Dreieck zusammen, und zwar sind es die Dreiecke $\mathfrak{M}_4\mathfrak{N}_4\mathfrak{P}_4$, $\mathfrak{M}_5\mathfrak{N}_5\mathfrak{P}_5$ mit folgender Verteilung ihrer Ecken auf die Seiten von ABC:

	$\mathfrak{M}_4$	$\mathfrak{N}_4$	$\mathfrak{P}_4$;	$\mathfrak{M}_5$	$\mathfrak{N}_5$	$\mathfrak{P}_5$
liegt auf	b	c	a	c	a	b

Zählt man auch diese Lösungen zu den uneigentlichen, so bleibt nur ein eigentliches eingeschriebenes Dreieck, $\mathfrak{M}_1\mathfrak{N}_1\mathfrak{P}_1$.

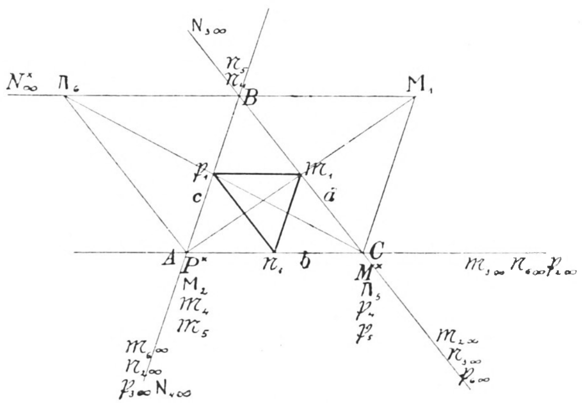

Fig. 16.

16. Das zugrunde liegende Dreieck ABC sei gleichseitig und auch die Geraden m, n, p seien so gerichtet, daß sie gleichseitige Dreiecke bestimmen.

Wir beginnen damit, zu zeigen, daß zwei gleichseitige Dreiecke, von denen das eine dem andern umschrieben ist, einen gemeinsamen Mittelpunkt haben.

Wenn in Fig. 17 s die Seite von ABC und α der Orientierungswinkel des zweiten Dreiecks gegen das erste ist, so hat man

$$BM = CN = AP = s\,\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{3}} = s\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$MC = NA = PB = s\,\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

somit ist die Seite von MNP

$$S = 2s\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right).$$

In dem Dreieck BMO, das durch die Höhen BD und MQ bestimmt wird, betragen die Winkel bei B, M, O der Reihe nach $\frac{\pi}{6} + \alpha$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3} - \alpha$, folglich ist

$$BO = BM\,\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{s}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{3}BD$$

$$MO = BM\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)} = s\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$= s\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{S\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}MQ.$$

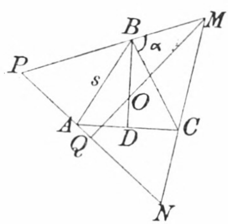

Fig. 17.

Da ein gleichseitiges Dreieck in dreifacher Weise als gleichschenklig aufgefaßt werden kann, so tritt auch der in Art. 9 angeführte Fall dreimal ein, d. h. es gibt drei Verteilungen der Parallelen zu m, n, p auf die Ecken von ABC, bei welchen sie sich in einem Punkte schneiden. Daraus folgt:

Einem gleichseitigen Dreieck können nur drei gleichseitige Dreiecke von allgemeiner Orientierung eingeschrieben werden.

Zum Zwecke ihrer Konstruktion beachte man, daß die drei umschriebenen Dreiecke $M_1 N_1 P_1$, $M_4 N_4 P_4$ und $M_5 N_5 P_5$, Fig. 18, mit ABC einen gemeinsamen Mittelpunkt O haben, daß mithin die homologen Eckpunkte M_1, M_4, M_5; N_1, N_4, N_5; P_1, P_4, P_5 je auf einer Geraden durch O liegen, welche drei Geraden auf den drei Geraden m, n, p beziehungsweise senkrecht stehen.

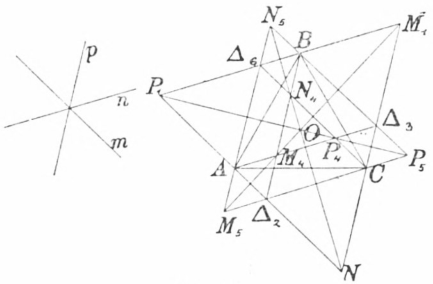

Fig. 18.

Hiernach ergibt sich das folgende Konstruktionsverfahren:

Man umschreibe dem gegebenen gleichseitigen Dreieck ABC, Fig. 19, eines der drei gleichseitigen Dreiecke, deren Seiten den Geraden m, n, p parallel sind, z. B. $M_1 N_1 P_1$, und projiziere seine Ecken aus dem Mittelpunkte O von ABC auf alle Seiten dieses Dreiecks; dann sind die so erhaltenen neun Punkte die Ecken der drei ABC eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecke von der vorgeschriebenen Orientierung.

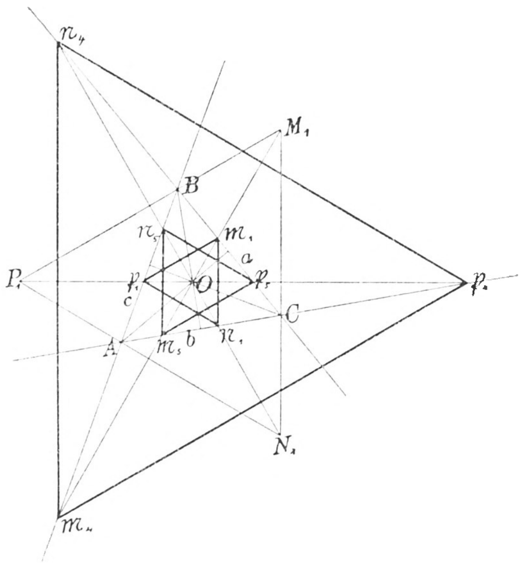

Fig. 19.

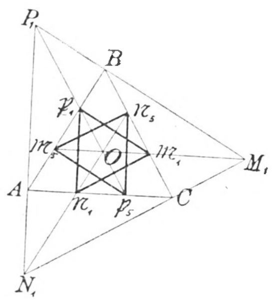

Fig. 20.

In dem besonderen Falle, wo die Seiten des einzuschreibenden Dreiecks auf jenen des gegebenen Dreiecks senkrecht stehen, ist jeder der drei Projektionsstrahlen einer Seite von ABC parallel. Mithin rückt eines der drei eingeschriebenen Dreiecke ins Unendliche, die Aufgabe hat nur zwei eigentliche Lösungen, wie dies in Fig. 20 dargestellt ist.