

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

**K. B. Akademie der Wissenschaften**

zu München

---

1915, Heft II

Mal- bis Julisitzung

---

München 1915

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



## Die Liesche Geraden-Kugeltransformation und ihre Verallgemeinerungen.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 1. Mai 1915.

Keine der zahlreichen Darstellungen der Lieschen Geraden-Kugeltransformation<sup>1)</sup> läßt, das darf wohl gesagt werden, die einfachen Gedankengänge der projektiven Geometrie scharf umrissen in den Vordergrund treten, auf deren Grundlage diese durch ihre wichtigen Eigenschaften und mannigfachen Anwendungen so bekannte Berührungstransformation abgeleitet werden kann. Das hat seine geschichtlich wohl begreiflichen, auch von ganz bestimmten Lehrmeinungen und Absichten herührenden Ursachen,<sup>2)</sup> auf die hier nicht eingegangen werden kann. Auf jeden Fall erscheint eine solche Ableitung berechtigt, um so mehr, wenn sie nicht nur beim Bekannten stehen bleibt, sondern sich auch mit Verallgemeinerungen befaßt, die in den bisher vorliegenden Untersuchungen zum Teil noch nicht einmal angedeutet zu sein scheinen.

Als Grundlage aus der Lehre von den Berührungstransformationen dient der Satz von Lie:<sup>3)</sup>

Soll eine Berührungstransformation die Punkte  $P$  des Raumes  $R(x, y, z)$  in  $\infty^3$  Gerade  $s'$  des Raumes  $R'$  überführen,

<sup>1)</sup> Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen I (Leipzig 1896), Kap. 10.

<sup>2)</sup> Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen III (Leipzig 1893), S. 137—138.

<sup>3)</sup> S. Lie, Liniengeometrie und Berührungstransformationen (Leipzig, Ber. 49, 1897, S. 687—740).

und ihre Umkehrung die Punkte  $P'$  des Raumes  $R'$  in  $\infty^3$  Gerade  $s$  des Raumes  $R$ , so bestehen, wenn dabei die Geraden  $s$  einem linearen Komplex (Nullsystem) angehören sollen, nur zwei Möglichkeiten, nämlich

1. die Geraden  $s'$  sind die Treffgeraden eines Kegelschnitts  $K'$ ,
2. die Geraden  $s'$  sind die Tangenten einer Fläche zweiten Grades.

Hierzu ist noch zu bemerken, daß der Satz zur Konstruktion der Abbildungen in keiner Weise benützt werden kann, er weist nur auf Möglichkeiten hin, und er spricht aus, daß es außer den — wie gesagt durch rein projektive Konstruktionen herstellbaren — Abbildungen, welche diese Möglichkeiten verwirklichen, keine weiteren geben kann.

### I. Die Geraden-Kugeltransformation.

Die erste Abbildung, aus der übrigens die Liesche Transformation wird, wenn der ausgezeichnete Kegelschnitt  $K'$  der imaginäre Kugelkreis ist, läßt sich in folgender Weise aufbauen.<sup>1)</sup>

Im Gegenstandsraum  $R$  und im Bildraum  $R'$  sind je zwei Punkte  $A, B$  und  $A', B'$  gegeben. Sodann werden die Geraden  $h_1$  durch  $A$  den Ebenen  $\sigma'_1$  durch  $A'$  linear („korrelativ“) zugeordnet, eine Zuordnung, bei der zugleich den Ebenen  $\sigma_1$  durch  $A$  die Geraden  $h'_1$  durch  $A'$  entsprechen; sie möge mit  $(h_1 \rightarrow \sigma'_1)$  oder  $(\sigma_1 \rightarrow h'_1)$  bezeichnet werden und ihre Umkehrung mit  $(\sigma'_1 \rightarrow h_1)$  oder auch  $(h'_1 \rightarrow \sigma_1)$ . Ebenso sollen auch die Geraden  $h_2$  durch  $B$  den Ebenen  $\sigma'_2$  durch  $B'$  und damit die Ebenen  $\sigma_2$  durch  $B$  den Geraden  $h'_2$  durch  $B'_1$  linear zugeordnet werden, was mit  $(h_2 \rightarrow \sigma'_2)$  bzw.  $(\sigma_2 \rightarrow h'_2)$  bezeichnet wird. Diese beiden Zuordnungen sollen aber nicht völlig unabhängig voneinander sein, es wird nämlich die Beschränkung auferlegt, daß dem gemeinsamen Strahl  $h_0$  der beiden Strahlenbündel  $(A)$  und  $(B)$  in  $(h_1 \rightarrow \sigma'_1)$  und in  $(h_2 \rightarrow \sigma'_2)$  beidesmal dieselbe Ebene  $\sigma'_0$  entspricht.

<sup>1)</sup> Vgl. hierzu Lie-Scheffers, a. a. O., S. 446 ff.

Aus  $(h_1 \rightarrow \sigma'_1)$  und  $(h_2 \rightarrow \sigma'_2)$  entsteht dann die zu untersuchende Punktgeraden-Verwandtschaft  $(P \rightarrow s')$  durch die folgende Vorschrift: Als Bild  $s'$  von  $P$  gilt die Schnittgerade der den Geraden  $h_1$  ( $AP$ ) und  $h_2$  ( $BP$ ) entsprechenden Ebenen  $\sigma'_1$  und  $\sigma'_2$ . Bei der Umkehrung  $(P' \rightarrow s)$  ist  $s$  der Schnitt der Ebenen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , welche den Geraden  $h'_1$  ( $A'P'$ ) und  $h'_2$  ( $B'P'$ ) in  $(h'_1 \rightarrow \sigma_1)$  und  $(h'_2 \rightarrow \sigma_2)$  entsprechen.

Wir stellen im Anschluß hieran zunächst fest, was das Bild einer beliebigen, nicht dem System  $s$  angehörigen Geraden  $g$  ist. Verbindet man ihre Punkte  $P$  mit  $A$  und  $B$ , so erhält man zwei perspektivisch aufeinander bezogene ebene Strahlenbüschel, denen zwei projektiv aufeinander bezogene Ebenenbüschel entsprechen, deren Achsen übrigens die den Ebenen  $\sigma_1 = (A, g)$  und  $\sigma_2 = (B, g)$  in  $(\sigma_1 \rightarrow h'_1)$  bzw.  $(\sigma_2 \rightarrow h'_2)$  zugeordneten Strahlen sind. Da die entsprechenden Ebenen der beiden Büschel einander in den Erzeugenden einer Fläche zweiten Grades  $F'_2$  schneiden, so verwandelt demnach  $(P \rightarrow s')$  eine Gerade  $g$  in eine Fläche  $F'_2$ .

Betrachten wir dagegen eine Systemgerade  $s$ , so gehen die Achsen der  $F'_2$  erzeugenden Ebenenbüschel jetzt beide durch  $P'$ , die Fläche artet also in einen Kegel aus, dessen Spitze  $P'$  ist.

Wir wollen nunmehr zeigen, daß alle Systemgeraden  $s'$  Treffgeraden eines bestimmten in  $\sigma'_0$  gelegenen Kegelschnittes  $K'$  sind. Jeder Ebene  $\sigma_{12}$ , d. h. jeder Ebene, die sowohl  $A$  wie  $B$  enthält, wird durch  $(\sigma_1 \rightarrow h'_1)$  eine in  $\sigma'_0$  gelegene Gerade  $t'_1$ , durch  $(\sigma_2 \rightarrow h'_2)$  eine ebenfalls in  $\sigma'_0$  gelegene Gerade  $t'_2$  zugeordnet, und der Ort der Schnittpunkte ist wegen der linearen Zuordnung ein Kegelschnitt  $K'$ . Jeder Punkt  $P$  bestimmt zusammen mit  $A$  und  $B$  eine Ebene  $\sigma_{12}$ , und den Strahlen  $h_1$  und  $h_2$ , welche  $A$  und  $B$  mit  $P$  verbinden, werden zwei Ebenen  $\sigma'_1$  und  $\sigma'_2$  zugeordnet, die  $t'_1$  und  $t'_2$  enthalten, die Schnittgerade  $s'$  der Ebenen ist also eine Treffgerade von  $K'$ , was zu zeigen war. Durch  $K'$  gehen dann auch die Flächen  $F'_2$ , welche den Geraden  $g$  in der Verwandtschaft  $(P \rightarrow s')$  entsprechen.

Betrachten wir jetzt die Umkehrung ( $P' \rightarrow s$ ). Es gilt wie oben der Satz, daß die Bilder der Punkte  $P'$  einer Systemgeraden  $s'$  die Schnitte entsprechender Ebenen zweier projektiven Ebenenbüschel sind, deren Achsen durch  $P$  gehen, nur artet die projektive Zuordnung jetzt in eine Perspektive aus, denn den beiden Strahlen  $t'_1$  und  $t'_2$ , die den Schnittpunkt  $S'$  von  $s'$  und  $\sigma'_0$  mit  $A'$  und  $B'$  verbinden, ist in  $(h'_1 \rightarrow \sigma_1)$  und  $(h'_2 \rightarrow \sigma_2)$  beidesmal dieselbe Ebene  $\sigma_{12}$  zugeordnet, d. h. diese Ebene, welche die Achsen der projektiv zugeordneten Ebenenbüschel enthält, entspricht sich selbst. Es ergibt sich also der Satz:

Durchläuft  $P'$  eine Systemgerade  $s'$ , so bilden die entsprechenden Strahlen  $s$  ein ebenes Strahlenbüschel durch  $P$  (dessen Ebene in der Folge mit  $\tau$  bezeichnet werden soll).

(Beiläufig bemerkt, kann man nun noch zeigen, daß die Ebenen  $\tau$  sich um eine Achse  $q$  drehen, wenn  $P$  eine Gerade  $g$  durchläuft, und dadurch tritt dann die Beziehung  $P \rightarrow \tau$  als Nullsystem deutlich hervor. Legt man nämlich durch zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  von  $g$  die zugehörigen Ebenen  $\tau_1$  und  $\tau_2$ , so schneiden sie einander in einer Geraden  $q$ , deren Punkte  $Q$  einerseits den Systemgeraden  $QP_1$ , andererseits den Systemgeraden  $QP_2$  perspektivisch zugeordnet sind. Bei der Abbildung ( $P \rightarrow s'$ ) gehen  $P_1$  und  $P_2$  in zwei Erzeugende  $s'_1, s'_2$  des Bildes  $F'_2$  von  $g$  über, die Bilder der Punkte  $Q$  aber sind ebenfalls Systemgerade  $s'$ , also Treffgerade von  $K'$ , die sich überdies auf  $s'_1$  und  $s'_2$  stützen, also der Fläche  $F'_2$  angehören. Jede Gerade des einen Systems von geradlinigen Erzeugenden der  $F'_2$  (d. h. die Bilder aller Punkte  $P$ ), schneidet aber alle Geraden des andern Systems, und hieraus folgt, daß die Verbindungsstrahlen eines beliebigen Punktes  $P$  von  $g$  mit den Punkten  $Q$  von  $q$  lauter Systemgeraden  $s$  sind, d. h. daß  $\tau$  sich um  $q$  dreht, wenn  $P$  auf  $g$  wandert.)

Ein einfaches Beispiel einer derartigen Berührungstransformation ist gegeben durch die beiden Gleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} xx_1 + yy_1 + 1 &= 0, \\ xy_1 + yz_1 + z &= 0, \end{aligned}$$

dessen Natur deutlicher hervortritt, wenn man statt der rechtwinkligen Koordinaten homogene  $(x:y:z:t)$  einführt. Die erste Gleichung gibt die Zuordnung  $(h_1 \rightarrow \sigma'_1)$ , wobei  $A$  und  $A'$  die Koordinaten haben

$$\begin{aligned} A : x = y = t = 0, \\ A' : x_1 = y_1 = t_1 = 0, \end{aligned}$$

und die zweite Gleichung gibt die Zuordnung  $(h_2 \rightarrow \sigma'_2)$ , wobei  $B$  und  $B'$  die Koordinaten haben

$$\begin{aligned} B : x = y = z = 0, \\ B' : y_1 = z_1 = t_1 = 0. \end{aligned}$$

Der Geraden  $(h_0)$ , nämlich:

$$x = y = 0$$

entspricht bei beiden Zuordnungen die Ebene  $(\sigma'_0)$ , nämlich

$$t_1 = 0.$$

Die Systemgeraden  $s$  gehören hier dem Nullsystem

$$ydz - zdy - dx = 0$$

an, und die Systemgeraden  $s'$  sind die Treffgeraden des Kegelschnittes  $(K')$

$$t_1 = 0, \quad x_1 z_1 - y_1^2 = 0.$$

Auf bekanntem Weg<sup>1)</sup> findet man aus den beiden Grundgleichungen (1) dann die Darstellung der Berührungstransformation:

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{py - 1}{1 + \lambda y}, \quad y_1 = \frac{qy - z}{\lambda y + x}, \quad z_1 = -\frac{qx + \lambda z}{\lambda y + x}, \\ p_1 = \frac{\lambda x}{y}, \quad q_1 = \lambda y - x, \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung

$$z - px - qy = \lambda$$

gesetzt ist.

<sup>1)</sup> Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen II (Leipzig 1890), S. 53.

Man braucht nun nur noch die Transformation

$$x_1 = X + iY, \quad z_1 = -X + iY, \quad y_1 = Z$$

hinzuzufügen, um eine Liesche Geraden-Kugeltransformation zu erhalten.

## 2. Die verallgemeinerte Geraden-Kugeltransformation.<sup>1)</sup>

Um jetzt eine Transformation zu erhalten, welche die Punkte  $P$  in die Tangenten  $u'$  einer Fundamentalfläche zweiten Grades  $\Sigma'$  überführt, braucht man noch eine Punktverwandtschaft ( $P' \leftrightarrow Q'$ ), die den Treffgeraden  $s'$  von  $K'$  die Tangenten  $u'$  von  $\Sigma'$  zuordnet ( $s' \leftrightarrow u'$ ).

Eine solche Verwandtschaft erhält man in folgender Weise: Zunächst muß  $\Sigma'$  den Kegelschnitt  $K'$  enthalten. Jede Treffgerade  $s'$  schneidet dann  $\Sigma'$  noch in einem weiteren Punkt. Durch diesen Punkt denke man sich die Tangentialebene an  $\Sigma'$  gelegt und zum Schnitt gebracht ( $u'$ ) mit der Ebene, die  $s'$  und den Pol  $C'$  der Ebene  $\sigma'_0$  von  $K'$  in Bezug auf  $\Sigma'$  enthält. Diese Gerade ist Tangente an die Fläche  $\Sigma'$  und soll der Treffgeraden  $\sigma'$  entsprechen, wodurch die gewünschte Abbildung hergestellt ist. Die Umkehrung dieser Abbildung ist zweideutig, denn die durch  $C'$  und die Tangente  $u'$  gelegte Ebene schneidet  $K'$  in zwei Punkten. Die Abbildung ( $s' \rightarrow u'$ ) ist tatsächlich eine Punkttransformation ( $P \rightarrow Q'$ ), denn wenn man durch einen Punkt  $P'$  alle Treffgeraden von  $K'$  legt, so entsteht ein Kegel, der  $\Sigma'$  in einem zweiten Kegelschnitt trifft, und die Ebenen, welche durch die Erzeugenden des Kegels und durch  $C'$  gehen, also durch  $P'$  und  $C'$ , enthalten alle den auf  $P'C'$  gelegenen Pol  $Q'$  der Ebene des zweiten Kegelschnitts, d. h. den Treffgeraden von  $K'$ , welche  $P'$  enthalten, werden die von  $Q'$  an  $\Sigma'$  gelegten Tangenten zugeordnet. Wir haben das Ergebnis:

<sup>1)</sup> Vgl. Lie, a. a. O. (Anm. 3), S. 736 und F. Engel, Verzeichnis der Schriften von Lie (Bibliotheca mathematica 3 (1), 1900, S. 166—204), Nr. 83 (S. 187).

Ordnet man jedem Punkt  $P'$  des Raumes  $R'$  den Pol  $Q'$  derjenigen Ebene zu, in der der Kegelschnitt liegt, nach dem die durch  $P'$  gehenden Treffgeraden  $s'$  von  $K'$  die Fundamentalfläche  $\Sigma'$  zum zweiten Male schneiden, so gehen bei dieser einzweideutigen Punktverwandtschaft die Geraden  $s'$  in die Tangenten  $u'$  der Fundamentalfläche über.

Weitere Einzelheiten zur Ausführung und Begründung sind aus der folgenden analytischen Darstellung zu entnehmen, bei der wir die Koordinaten von  $P$  mit  $x, y, z$ , die von  $Q$  mit  $x_1, y_1, z_1$  bezeichnen.

Wir wählen für  $K'$  wieder den imaginären Kugelkreis und für  $\Sigma'$  die imaginäre Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Um die Verwandtschaft herzustellen, hat man den Kegel

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = 0$$

mit  $\Sigma'$  zu schneiden. Die Gleichung der (zweiten) Schnittebene ist

$$2x\xi + 2y\eta + 2z\zeta + 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0,$$

und ihr Pol  $Q'$  ist gegeben durch

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 &= \lambda x, \quad y_1 = \lambda y, \quad z_1 = \lambda z, \\ \lambda &= \frac{2}{1 - x^2 - y^2 - z^2}. \end{aligned}$$

Die Umkehrung ( $Q' \rightarrow P'$ ) der Abbildung ist dann gegeben durch

$$x = \mu x_1, \quad y = \mu y_1, \quad z = \mu z_1;$$

dabei ist noch

$$1 - \mu^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 2\mu,$$

woraus die schon erwähnte Zweideutigkeit hervorgeht.

Den Treffgeraden ( $s'$ )

$$y = rx + \varrho, \quad z = sx + \sigma, \quad (1 + r^2 + s^2 = 0)$$

des imaginären Kugelkreises ( $K'$ ) werden die Tangenten ( $u'$ )



$$x_1 : y_1 : z_1 : 1 \\ = 2x : 2(rx + \rho) : 2(sx + \sigma) : (1 - \rho^2 - \sigma^2 - 2x(\rho\sigma + s\sigma))$$

von  $\Sigma'$  zugeordnet.

Wir wollen auch noch die für die Zusammensetzung der hier besprochenen Punkttransformation ( $P' \rightarrow Q'$ ) oder ( $s' \rightarrow u'$ ) mit der Berührungstransformation ( $P \rightarrow s'$ ) wichtige Frage beantworten, was aus einer beliebigen  $K'$  enthaltenden Fläche zweiten Grades  $F'_2$  bei ( $P' \rightarrow Q'$ ) hervorgeht.

Die  $F'_2$  hat eine Gleichung von der Form

$$F'_2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d \equiv x^2 + y^2 \\ + z^2 + E(x, y, z) = 0,$$

und sie schneidet  $\Sigma'$  außer in  $K'$  noch in einem zweiten Kreis, dessen Ebene die Gleichung hat

$$E(x, y, z) - 1 = 0.$$

Das Bild von  $F'_2$  ist gegeben durch die Gleichung

$$1 - 2\mu + \mu(ax_1 + by_1 + cz_1) + d = 0$$

in Verbindung mit

$$1 - 2\mu - \mu^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen zusammen folgt, wenn wir  $E(x_1, y_1, z_1)$  zur Abkürzung mit  $E_1$  bezeichnen

$$(E_1 - 1)^2 - (1 + d)^2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 1) = 0, \quad \text{d. h.}$$

Jede  $F'_2$ , welche  $K'$  enthält, verwandelt sich bei der Abbildung ( $P' \rightarrow Q'$ ) in eine  $F''_2$ , die  $\Sigma'$  längs des Kegelschnitts berührt, den  $F'_2$  und  $\Sigma'$  außer  $K'$  noch gemein haben.

Denkt man sich eine nichteuklidische (in unserem Fall elliptische) Maßbestimmung mit der Fundamentalfläche  $\Sigma'$  eingeführt, dann sind die  $F'_2$  als Kugeln zu deuten, also läßt sich das Ergebnis in aller Kürze so aussprechen:

Die durch Zusammensetzung von  $P \rightarrow s'$  mit  $s' \rightarrow u'$  entstehende einzweideutige Punktgeraden-Transformation führt die Geraden  $g$  in die Kugeln über bei geeigneter nichteuklidischer Maßbestimmung.

Diese durch Zusammensetzung entstehende „nichteuclidische Geraden-Kugeltransformation“ ist in Lie-Scheffers, Btr. f. trotz ihres einfachen Aufbaus nicht einmal erwähnt; es ist anzunehmen, daß sie in den nicht erschienenen zweiten Band Aufnahme finden sollte.

3. Entsprechende Transformationen in Räumen von höherer Dimension.

Lie hat die Frage nach Punktgeraden-Transformationen in Räumen höherer Dimension nur erwähnt,<sup>1)</sup> außerdem scheinen von anderer Seite<sup>2)</sup> nur völlig unzulängliche Versuche einer Verallgemeinerung der Geraden-Kugeltransformation vorzuliegen.

Wir wollen deshalb auf eine dieser Verallgemeinerungen eingehen, nämlich die durch die Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{aligned} xx_1 + yy_1 + 1 &= 0, \\ xy_1 + yz_1 + z &= 0, \\ xz_1 + yu_1 + u &= 0 \end{aligned}$$

gegebene Berührungstransformation des  $R_4$ . Denkt man sich wieder homogene Koordinaten  $(x : y : z : u : t)$  eingeführt, so erkennt man leicht die Bedeutung dieser Gleichungen. Gegeben sind in den Räumen  $R_4$  und  $R'_4$  je drei Gerade:

$$\begin{aligned} (A): x = y = t = 0, \quad (B): x = y = z = 0, \quad (C): x = y = u = 0 \\ \text{und} \quad (A'): x_1 = y_1 = t_1 = 0, \quad (B'): y_1 = z_1 = t_1 = 0, \\ (C'): z_1 = u_1 = t_1 = 0. \end{aligned}$$

Durch die Gleichungen (3) werden den drei Bündeln von je  $\infty^2$  Ebenen durch  $A, B, C$  die drei Bündel von je  $\infty^2$  linearen  $R_3$  durch  $A', B', C'$  zugeordnet, wobei die Ebene  $x = y = 0$ , in der die drei Geraden  $A, B, C$  liegen, in jeder der drei Zuordnungen dem linearen  $R_3$  ( $t_1 = 0$ ) zugeordnet wird, welcher  $A', B'$  und  $C'$  enthält. Das Bild von  $P$  ist die Gerade  $s'$ , in der die drei  $R_3$  einander schneiden, welche den Ebenen  $(PA), (PB)$  und  $(PC)$  zugeordnet sind. Entsprechend ist die Umkehrung ( $P' \rightarrow s$ ) der Abbildung zu deuten.

<sup>1)</sup> Lie, a. a. O. (Anm. 3), S. 740.

<sup>2)</sup> Vgl. den Bericht von F. Engel (Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik 30, Jahrgang 1899, S. 338–339).

Die Geraden  $s'$  sind hier die Treffgeraden der unendlich fernen Kurve dritter Ordnung (des kubischen Kegelschnittes)

$$(K'): t_1 = 0, \quad x_1 z_1 - y_1^2 = y_1 u_1 - z_1^2 = z_1 y_1 - x_1 u_1 = 0.$$

Die Geraden  $s$  bilden wieder ein Nullsystem, wie oben in (1), d. h. durch jeden Punkt  $P$  gehen  $\infty^1$  Gerade  $s$ , die wieder ein ebenes Strahlenbüschel bilden. Ihre Fortschreitungsrichtungen im Punkte  $x, y, z, u$  sind durch das nicht integrale System von Pfaffschen Gleichungen bestimmt

$$\begin{aligned} ydz - zdy - dx &= 0, \\ ydu - udy + xdz - zdx &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jede Ebene} \quad z &= a_1 x + b_1 y + c_1, \\ u &= a_2 x + b_2 y + c_2 \end{aligned}$$

bildet sich auf eine (dreifach ausgedehnte)  $F_2$  ab, die  $(K')$  enthält. Insbesondere kann man (vgl. den Schluß von Nr. 1) die Transformation auch so wählen, daß sich unter den  $\infty^6$  Bildern der Ebenen auch  $\infty^4$  (dreidimensionale) Kugeln befinden. Man erhält damit eine (unvollständige) Ebenen-Kugeltransformation des  $R_4$ . Eine vollständige Geraden-Kugel- oder Ebenen-Kugel-Transformation ist schon deshalb unmöglich, weil die Schar der Geraden und Ebenen je sechs, die der Kugeln aber nur fünf Parameter enthält.

Genau entsprechend zu der Untersuchung in Nr. 2 kann auch im  $R_4$  die Abbildung verallgemeinert werden zu einer Transformation, welche die Punkte  $P$  abbildet auf  $\infty^4$  von den  $\infty^5$  Tangenten einer dreidimensionalen  $F_2$  oder Fundamentalmannigfaltigkeit  $\Sigma'$ , die  $K'$  enthält.

Schon die Gestalt der Gleichungen (3) zeigt, wie man von hier aus zu bestimmten Verallgemeinerungen, zu entsprechenden Punkt-Geradentransformationen in Räumen höherer Dimension gelangen kann. Daneben besteht die Aufgabe, zunächst im  $R_4$  einen Überblick über alle Möglichkeiten zu gewinnen, wie ihn Lie für den  $R_3$  gegeben hat, und alle diese Möglichkeiten auch durch einfache Beispiele zu verwirklichen.

## Über die Ausgleichung des zukünftigen bayerischen Hauptdreiecksnetzes.

Von **Sebastian Finsterwalder.**

Vorgetragen in der Sitzung am 1. Mai 1915.

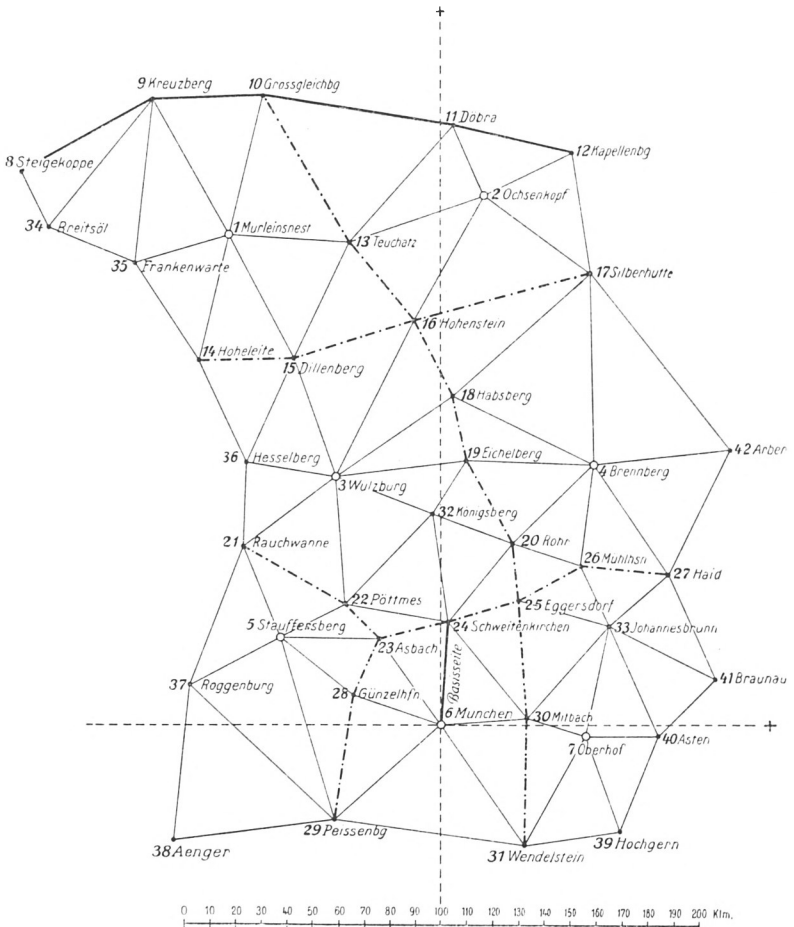
Das zukünftige bayerische Hauptdreiecknetz, welches nach den Erkundungen des K. Bayer. Katasterbureaus entworfen<sup>1)</sup> und in Fig. 1 dargestellt ist, umfaßt 42 Hauptdreieckspunkte, 62 Dreiecke, 103 Seiten und 22 innere Punkte, die zu Kranzsystemen Veranlassung geben. Im Norden hängt es mit 4 Punkten und 3 Seiten mit dem preußischen Hauptdreiecksnetz zusammen, dem noch ein Punkt (Kapellenberg) des sächsischen Dreiecksnetzes<sup>2)</sup> annähernd gleichwertig angeschlossen ist, so daß ein 223 Kilometer langer Anschlußzug (Steigekoppe, Kreuzberg, Großgleichberg, Döbra, Kapellenberg) zur Verfügung steht, der eine Basismessung im Norden des Netzes überflüssig erscheinen läßt. Im Süden ist eine Basismessung vorgesehen, welche die Länge der Dreiecksseite München-Schweitenkirchen liefern soll. Das Netz ist also, obwohl es im übrigen nur eine schlichte Folge von Dreiecken ohne Diagonalen darstellt, reichlich verwickelt und seine Ausgleichung stellt auf alle Fälle eine umfangreiche Arbeit dar, die wohl überlegt sein will. Wenn das Netz als Ganzes ausgeglichen

<sup>1)</sup> Es ist hier gegenüber dem ursprünglichen Entwurf um die Punkte 8 (Steigekoppe) und 34 (Breitsöl) erweitert um eine weitere preußische Anschlußseite einbeziehen zu können.

<sup>2)</sup> Vgl. diese Berichte, Jahrgang 1914, S. 241.

werden soll, so kommen vornehmlich zwei Methoden in Betracht, die zuerst besprochen werden sollen.

Die Methode der bedingten Beobachtungen. Die Beobachtungen an den 42 Stationen ergeben ebensoviele Richtungssätze mit  $2 \cdot 103 = 206$  Richtungen, die durch  $206 - 42 = 164$  Richtungswinkel ausgedrückt werden können. Wegen des im Norden zu übernehmenden Anschlußzuges fallen 3 von den in den mittleren Ecken sonst zu beobachtenden Winkel



weg, da diese dem Anschlußzug zu entnehmen sind. Es verbleiben also 161 beobachtete Richtungswinkel. Diese unterliegen zunächst den 62 Dreiecks-Schlußbedingungen und den 22 Kranzbedingungen. Außerdem kommen noch 4 Seitenbedingungen hinzu, welche aussagen, daß die Basis im Süden ein bestimmtes Verhältnis zu den 4 Anschlußseiten im Norden hat. Es sind also im Ganzen  $62 + 22 + 4 = 88$  Bedingungen zu berücksichtigen. Dementsprechend ergeben sich ebensoviele Gleichungen für die unbekanntes 88 Korrelaten, aus denen sich die Verbesserungen der 161 beobachteten Richtungswinkel aufbauen. Die verbesserten Winkel gewährleisten dann eine widerspruchsfreie Berechnung der Seiten des Netzes und der Koordinaten der Eckpunkte.

Die Methode der vermittelnden Beobachtungen. Von den 42 Netzpunkten sind 37 neu zu bestimmen. Diese haben 74 unbekanntes Koordinaten. Letztere werden so gewählt, daß die 161 gemessenen Winkel möglichst richtig und die Seite München-Schweitenkirchen genau nach der Messung wiedergegeben werden. Mittels der letzteren Bedingung kann man eine (z. B. die nordsüdliche) Koordinate von Schweitenkirchen eliminieren, so daß 73 unbekanntes Koordinaten übrig bleiben, durch deren Wahl den 161 Beobachtungen möglichst Rechnung getragen wird. Die Zahl der Unbekanntes ist hier also nur 73 und die Unbekanntes sind das gewünschte Schlußergebnis der Ausgleichung.

Beide Arten der Ausgleichung haben ihre Vor- und Nachteile; es unterliegt aber kaum einem Zweifel, daß, so lange man nur unter ihnen zu wählen hat, im vorliegenden Falle die zweite Art den Vorzug verdient. Die Hauptrechenarbeit beruht in der Auflösung der Gleichungen für die Unbekanntes und wächst mit dem Quadrat ihrer Anzahl; diese Rechenarbeit verhält sich also in den beiden Fällen wie  $88^2 : 73^2 = 7744 : 5329$ . Der Umstand, daß die Bedingungsgleichungen bei der ersten Methode erheblich leichter zu bilden sind als die Fehlergleichungen bei der zweiten, hebt den Unterschied zu Gunsten der zweiten Methode nicht auf. Aber auch in der Art des Schluß-

ergebnisses ist die zweite Art der ersten überlegen, da dieses gerade in den gesuchten Punktkoordinaten besteht, wobei deren mittlere Fehler, ja wenn man will sogar die Fehlerellipsen der gefundenen Lagen der Punkte in unmittelbarem Anschluß an die Auflösung der Normalgleichungen gefunden werden können. Die erste Art liefert unmittelbar und einfach nur den mittleren Fehler der gemessenen Winkelgrößen und dient in diesem Sinne gewissermaßen nur der Befriedigung der persönlichen Eitelkeit der Messenden, ohne zugleich eine ausreichende Kritik des Ergebnisses zu ermöglichen, da die Punktlagen nicht bloß von der Genauigkeit der gemessenen Winkel, sondern in nicht minderem Grade von der Anlage des Netzes abhängen. Eine Berechnung der Koordinatenfehler, die ja an sich möglich ist, erweist sich hier wegen der großen Zahl der Korrelaten praktisch als ganz undurchführbar. Welche von den beiden Arten der Ausgleichung man auch wählen mag, stets wird die riesige Rechenarbeit in einem gewissen Mißverhältnis zu dem erzielten Schlußergebnis stehen, wenn man nämlich praktische Erwägungen als ausschlaggebend erachtet und nicht das Bewußtsein, das Beste unter dem Möglichen erreicht zu haben, als genügenden Ausgleich für die aufgewendete Arbeit ansieht. Das erwähnte Mißverhältnis liegt in der Natur der Ausgleichung aus einem Guß begründet. Gerade, weil sie den vielen auf das Ergebnis einwirkenden Umständen einzeln und unparteiisch Rechnung trägt, wird die Abhängigkeit des Ergebnisses von diesen Umständen so verwickelt, daß sie weder genau ausgerechnet, noch auch im Einzelnen durchschaut werden kann. Rein praktische Erwägungen haben in vielen ähnlichen Fällen, z. B. auch bei der Ausgleichung des alten bayerischen Hauptdreiecksnetzes durch v. Orff zu einer Teilung des Netzes (bei v. Orff in 30 Polygone) geführt, wobei das Ergebnis der Ausgleichung des einen Teils immer als Zwangsbedingung für die Ausgleichung des anschließenden Teiles eingeführt wird. Dadurch wird die Rechenarbeit auf alle Fälle sehr erheblich vermindert. Allerdings ist das Schlußergebnis abhängig von der Art der Zerlegung des Netzes und der Reihenfolge der Teile

bei der Ausgleichung. Auch verzichtet man von vorneherein auf die möglichst günstige Ausgleichung. In wieweit bei einer solchen teilweisen Ausgleichung eine ausreichende Kritik der Messungsgenauigkeit und ein genügender Einblick in die Sicherheit des Messungsergebnisses erzielt wird, hängt ganz und gar von der Anordnung der Ausgleichung ab. Es soll im folgenden ein diesbezüglicher Vorschlag gemacht werden, welcher die genannten Gesichtspunkte in befriedigender Weise berücksichtigt.

Der Vorschlag setzt voraus, daß Näherungskordinaten von den Hauptdreieckspunkten bereits bekannt sind, was für das bayerische Netz durch die Vorarbeit des Verfassers<sup>1)</sup> zutrifft. In dieser sind in gemeinsamer konformer Doppelprojektion die genauen Koordinaten der Anschlußpunkte und die genäherten Koordinaten der übrigen Netzpunkte gegeben<sup>2)</sup> und es ist das System so gewählt, daß unter Beibehaltung der Gaußschen Projektionskugel die genäherten Koordinaten des nördlichen Frauenturms in München die Werte Null erhalten. Von dem preußischen System der konformen Doppelprojektion unterscheidet sich das genannte nur in der Wahl des Ausgangsmeridians, der durch München statt durch  $31^{\circ}$  öst. Ferro geht und die Zählung der Abszissen, die von München aus, statt von  $52^{\circ} 42' 2.5$  n. B. aus geschieht. Das Netz wird nun durch die in Fig. 1 angedeuteten strichpunktierten Linien in 7 Felder zerschnitten und in jedem Feld ein trigonometrischer Punkt als Ausgangspunkt gewählt. Jedes Feld stellt ein einfaches Teilnetz mit wenigen Bedingungen dar; es soll ohne jeden Zwang für sich ausgeglichen werden und zwar nach der Methode der bedingten Beobachtungen. Folgende Tabelle gibt eine Übersicht der in Betracht kommenden Verhältnisse.

---

<sup>1)</sup> Es fehlen die genäherten Koordinaten des Punktes 34 (Breitsöl); diese sind: Absc. + 198394,4, Ord. — 154145,7.

<sup>2)</sup> Der Zusammenschluß des preußischen und sächsischen Hauptdreiecksnetzes im Norden von Bayern. Diese Berichte 1914, S. 259.



Nummer des Feldes	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Zahl der Dreiecke . . . . .	9	6	14	9	7	7	10	62
Zahl der Zentralp. . . . .	1	1	2	1	1	1	2	9
Zahl der Bedingungsgl. . . . .	10	7	16	10	8	8	12	71
Rechenarbeit . . . . .	100	49	256	100	64	64	144	777

Es werden nun mit den ausgeglichenen Winkelwerten und einem passenden Näherungswert für die Längen ausgehend von den Näherungskordinaten des gewählten Ausgangspunktes des Feldes Koordinaten aller derjenigen Punkte des zugehörigen Teilnetzes gerechnet, welche mit den preußischen Festpunkten oder mit den Grenzpunkten eines Nachbarfeldes zusammen treffen sollen. Naturgemäß entstehen dabei gegenüber den preußischen Festpunkten und an den Grenzpunkten benachbarter Felder Koordinatenunterschiede, die einer zusammenfassenden Hauptausgleichung unterzogen werden sollen. Wir denken uns dabei die einzelnen Felder unter Beibehaltung ihrer Form ähnlich verändert, verschoben und gedreht, so daß ein möglichstes Zusammenpassen der Felder untereinander und gleichzeitig ein möglichst günstiger Anschluß an die preußischen Festpunkte erfolgt. In dem 6. Feld, das die Basisseite München-Schweitenkirchen (6—24) enthält und das in seinen Abmessungen hiedurch schon bestimmt ist, soll sich die Veränderung bloß auf Verschiebung und Drehung beschränken. Da die Verschiebung des Ausgangspunktes je zwei, die Verdrehung und Maßstabänderung je eine unbekannte Größe für das Feld einführt, so sind hiernach  $6 \cdot 4 + 3 = 27$  Unbekannte zu bestimmen. Die dabei notwendige Rechenarbeit wird durch  $27^2 = 729$  ausgedrückt und es beziffert sich die Gesamt rechenarbeit einschließlich der in der Tabelle ausgewiesenen auf  $729 + 777 = 1506$  gegenüber 7744 bzw. 5329 bei der Ausgleichung aus einem Guß. Sie kann also auf ein Fünftel bis ein Drittel von jener geschätzt werden. Ehe wir auf die weiteren erheblicheren Vorteile dieser Ausgleichung in Teilen auf-

merksam machen, soll auf die genauere Durchführung derselben näher eingegangen werden.

Von den 24 Punkten, welche bei der angegebenen Feldereinteilung auftreten, haben 4, nämlich 8, 9, 11 und 12 feste preußische Koordinaten und einfache Felderkoordinaten, die bei 8 und 9 dem Felde 1, bei 11 und 12 dem Felde 2 angehören. Man wird die Quadrate der Koordinaten-Unterschiede der Feldkoordinaten gegenüber den festen Koordinaten, oder, was auf das Gleiche hinausläuft,<sup>1)</sup> die Quadrate der Entfernungen der Feldlagen von den festen Lagen in die Fehlerquadratsumme aufnehmen. Der Punkt 10 kommt in 2 Feldern vor und ist außerdem preußischer Anschlußpunkt. Man wird das Quadrat der Entfernung des Mittels beider Feldlagen von der festen Lage in die Fehlerquadratsumme einrechnen, um seiner Eigenschaft als Anschlußpunkt an die preußische Vermessung gerecht zu werden. Als gegenseitiger Anschlußpunkt zweier benachbarter Felder wird er wie die Punkte 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31 zu behandeln sein. Man nimmt das doppelte Quadrat der Entfernung jeder der beiden Feldlagen von ihrer Mittellage in die Fehlerquadratsumme auf. Der Punkt 23 kommt in 3 benachbarten Feldern vor. Er liefert 3 Fehlerquadratsummanden, die aus den Entfernungen jeder Feldlage vom Schwerpunkt der 3 Feldlagen gebildet werden. Die Punkte 16 und 25 endlich treten in 4 verschiedenen Feldlagen auf, aus denen je 4 Bestandteile der Fehlerquadratsumme dadurch gebildet werden, daß man die Entfernung jeder Feldlage vom Schwerpunkt der 4 Feldlagen quadriert. Es setzt sich also die Fehlerquadratsumme aus folgenden Summanden zusammen: 5 Summanden infolge des preussischen Anschlusses, 17 mal 2 Summanden infolge des Auf-

1) Das gilt nur so lange, als die Entfernungen sich wie in der Ebene aus den Koordinaten-Unterschieden berechnen lassen. Bei konformen Koordinaten wird hierbei die Maßstabsänderung vernachlässigt; die bis zu 0,4<sup>0/00</sup> betragee kann. So lange die Verschiebungen unter einigen Metern bleiben, ist das erlaubt. Eine Berücksichtigung der Maßstabsänderung begegnet keinerlei Schwierigkeiten.

tretens von ebensoviel doppelten gegenseitigen Anschlußpunkten zweier Felder, 1 mal 3 Summanden infolge des dreifachen und 2 mal 4 Summanden infolge der beiden vierfachen Anschlußpunkte. Es gibt insgesamt:  $5 + 34 + 3 + 8 = 50$  Entfernungswerte oder die doppelte Zahl, wenn man die Quadrate der Koordinaten-Unterschiede zählt. Letztere Zählung schmiegt sich mehr der üblichen Bildung der Fehlergleichungen an, indem man die verbleibenden Koordinaten-Unterschiede als Verbesserungen ansieht, die an den verschiedenen Feldkoordinaten anzubringen sind, damit letztere für denselben Punkt gleiche Werte ergeben. Diese Verbesserungen sind Funktionen der 27 einzuführenden Unbekannten und ihre Quadratsumme wird durch geeignete Wahl derselben zu einem Minimum gemacht. Als Unbekannte führt man am besten ein: die Koordinaten-Verschiebungen der 7 Felder-Ausgangspunkte, welche letztere mit 1 bis 7 bezeichnet sind, die kleinen Drehwinkel, die diese Felder erfahren und 6 kleine Größen, die zur Einheit addiert, das geänderte Maßstabverhältnis der Felder 1, 2, 3, 4, 5 und 7 kennzeichnen. Feld 6 behält, wie schon erwähnt, den Basismaßstab bei. Bezeichnen wir mit  $x_n^m, y_n^m$  die Koordinaten des  $n^{\text{ten}}$  Punktes im  $m^{\text{ten}}$  Feld nach der ersten Teilausgleichung, mit  $\overline{x}_n^m, \overline{y}_n^m$  dieselben Koordinaten nach der Schlußausgleichung und nennen wir die kleinen Koordinaten-Verschiebungen des Feldausgangs-Punktes  $dx_m, dy_m$ , den Drehwinkel  $da_m$  und die Streckung der Einheit  $dk_m$ , so bestehen folgende Beziehungen:<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned}\overline{x}_n^m &= x_n^m + dx_m - (y_n^m - y_m) da_m + (x_n^m - x_m) dk_m \\ \overline{y}_n^m &= y_n^m + dy_m + (x_n^m - x_m) da_m + (y_n^m - y_m) dk_m,\end{aligned}$$

$x_m$  und  $y_m$  sind dabei die Koordinaten des Feldausgangs-Punktes vor der Hauptausgleichung  $x_m + dx_m, y_m + dy_m$  nach derselben.

Die früher erwähnten  $2 \times 50 = 100$  Fehlergleichungen lassen sich nun mittels obiger Differentialformeln leicht bilden.

<sup>1)</sup> Diese Formeln gelten streng nur für ebene Koordinaten. Bei konformen Koordinaten wäre wieder der Maßstabunterschied zwischen dem Ausgangspunkt und dem betrachteten Punkt zu berücksichtigen.

Einige charakteristische Gleichungen dieser Art mögen angeführt werden. Die Koordinaten der preußischen Anschlußpunkte werden mit griechischen Buchstaben bezeichnet.

Für den preußischen Anschlußpunkt 9 im Feld 1:

$$\overline{x_9^1} - \xi_9 = v_9$$

Ähnlich in  $y$  und  $\eta$ ; insgesamt 8 Gleichungen.

Für den preußischen Anschlußpunkt 10 in den Feldern 1 und 2:

$$\frac{1}{2}(\overline{x_{10}^1} + \overline{x_{10}^2}) - \xi_{10} = v_{10}$$

Ähnlich in  $y$  und  $\eta$ ; insgesamt 2 Gleichungen.

Für den gleichen Punkt 10 als gegenseitiger Anschlußpunkt der Felder 1 und 2:

$$\overline{x_{10}^1} - \frac{1}{2}(\overline{x_{10}^1} + \overline{x_{10}^2}) = v'_{10}$$

$$\overline{x_{10}^2} - \frac{1}{2}(\overline{x_{10}^1} + \overline{x_{10}^2}) = v''_{10}$$

Ähnlich in  $y$ ; insgesamt 68 Gleichungen.

Für den Punkt 23 als gegenseitiger Anschlußpunkt der Felder 3, 5 und 6:

$$\overline{x_{23}^3} - \frac{1}{3}(\overline{x_{23}^3} + \overline{x_{23}^5} + \overline{x_{23}^6}) = v_{23}$$

$$\overline{x_{23}^5} - \frac{1}{3}(\overline{x_{23}^3} + \overline{x_{23}^5} + \overline{x_{23}^6}) = v'_{23}$$

$$\overline{x_{23}^6} - \frac{1}{3}(\overline{x_{23}^3} + \overline{x_{23}^5} + \overline{x_{23}^6}) = v''_{23}$$

Ähnlich in  $y$ ; insgesamt 6 Gleichungen.

Für den Punkt 16 als gegenseitiger Anschlußpunkt der Felder 1, 2, 3 und 4:

$$\overline{x_{16}^1} - \frac{1}{4}(\overline{x_{16}^1} + \overline{x_{16}^2} + \overline{x_{16}^3} + \overline{x_{16}^4}) = v_{16}$$

$$\overline{x_{16}^2} - \frac{1}{4}(\overline{x_{16}^1} + \overline{x_{16}^2} + \overline{x_{16}^3} + \overline{x_{16}^4}) = v'_{16}$$

$$\overline{x_{16}^3} - \frac{1}{4}(\overline{x_{16}^1} + \overline{x_{16}^2} + \overline{x_{16}^3} + \overline{x_{16}^4}) = v''_{16}$$

$$\overline{x_{16}^4} - \frac{1}{4}(\overline{x_{16}^1} + \overline{x_{16}^2} + \overline{x_{16}^3} + \overline{x_{16}^4}) = v'''_{16}$$

Ähnlich in  $y$ ; insgesamt 16 Gleichungen.

Diese 100 Gleichungen werden nach den 27 Unbekannten  $dx_m$ ,  $dy_m$ ,  $da_m$ ,  $dk_m$  geordnet und aus ihren Koeffizienten in der üblichen Weise jene der Normalgleichungen gebildet, deren

Auflösung dann die Werte der Unbekannten liefert. Die Berechnung der Gewichtskoeffizienten und der mittleren Fehler der Unbekannten, die bei ihrer mäßigen Auswahl vollständig durchgeführt werden kann, liefert dann die wertvollsten Aufschlüsse über die erzielte Genauigkeit der Lagebestimmung durch die Triangulation, indem sie die mittleren Punktfehler oder, wenn man will, auch die Fehlerellipsen von 7 über das Netz gut verteilten Punkten ergibt und außerdem noch die Sicherheit der Orientierung und der Maßstabbestimmung in den 7 um diese Punkte herumliegenden Feldern, wobei der preussische Anschluß im Norden die Ausgangsbasis für die genannte Genauigkeitsbestimmung in dem Sinne abgibt, daß die mittleren Punktfehler und Orientierungsfehler gegenüber jener als richtig angenommenen Basis zu gelten haben.

Mit den aus der Hauptausgleichung ermittelten Unbekannten werden nun die Koordinaten der den einzelnen Feldern zugehörigen Punkte korrigiert und für die Grenzpunkte zweier oder mehrerer Felder die Koordinaten gemittelt. Diese betrachtet man jedenfalls als endgiltige Werte und man hat dann außer den 5 preußischen Anschlußpunkten noch 19 weitere feste Punkte, die über das ganze Netz verteilt sind. Sind die Anschlußdifferenzen genügend klein, so kann man die 7 ausgeglichenen Ausgangspunkte eines jeden Feldes unbedenklich zu den 24 schon bestimmten Punkten hinzunehmen und die noch fehlenden Punkte mit jenen Koordinaten ansetzen, die sie nach der Hauptausgleichung in ihrem Felde haben. Sollten sich jedoch, was kaum zu erwarten ist, Anschlußdifferenzen herausstellen, die zu Bedenken Anlaß geben, so bliebe immer noch der Ausweg, an den 19 + 5 Punkten festzuhalten und die übrigen Punkte jedes Feldes durch kombiniertes Vor- und Rückwärtseinschneiden einzuschalten. Man hätte auf diese Weise im ersten Feld 3, im zweiten Feld 1, im dritten Feld 3, im vierten Feld 2, im fünften Feld 3, im sechsten Feld 1, im siebenten Feld 5 Punkte gemeinsam einzuschalten. Die betreffende Rechenarbeit wäre mit  $6^2 + 2^2 + 6^2 + 4^2 + 6^2 + 2^2 + 10^2 = 232$  zu beziffern. Es würde sich damit die Ziffer

für die Gesamtrechenarbeit auf 1738 erhöhen, bliebe aber noch weit hinter der Mindestziffer 5329 einer Gesamtausgleichung aus einem Guß zurück.<sup>1)</sup>

Fassen wir endlich zusammen, was sich zu Gunsten der vorgeschlagenen Ausgleichung nach 7 Feldern sagen läßt.

1. Die Rechenarbeit ist gegenüber einer Gesamtausgleichung auf ein Drittel bis ein Viertel vermindert; sie kann in jedem Felde für sich begonnen und weiter geführt werden; man braucht also nicht das Ende der Messungen abzuwarten.

2. Die zwanglose Ausgleichung der einzelnen Felder liefert einwandfreies Material zur Ermittlung der reinen Winkelmessungsfehler.

3. Aus der Zusammenfügung der Felder ergeben sich für sieben gut verteilte Punkte des Netzes die Lagen-, Orientierungs- und Maßstabfehler und damit wird eine zutreffende Kritik des eigentlichen Messungsergebnisses erzielt.

4. Das Ausgleichungsverfahren trägt insofern systematischen Charakter, als das Ergebnis desselben zwar von der Art der Feldereinteilung, nicht aber von der Reihenfolge, in der die Felder aneinandergefügt werden, abhängt. Im vorliegenden Falle ist übrigens die Art der Feldereinteilung durch die Zahl der Felder und die Rücksichten auf den preußischen Anschluß sowie die südbayerische Basismessung so gut wie festgelegt.

---

<sup>1)</sup> Bei der Hauptausgleichung werden auch die Koordinaten des Punktes 6 (München, nördl. Frauenturm) kleine Änderungen erfahren und nicht mehr genau gleich Null sein. Legt man wegen der alten Katasterblatt-Einteilung Wert darauf, die Koordinaten Null für diesen Punkt beizubehalten, so ist eine Transformation sämtlicher Koordinaten erforderlich, die sich jedoch bei der voraussichtlichen Kleinheit der Änderungen sehr einfach erledigen läßt.

---



## Die Lösung der Spannungsaufgabe für das Ausnahmefachwerk.

Von **A. Föppl.**

Vorgelegt in der Sitzung am 1. Mai 1915.

Die Theorie des Fachwerks beschäftigt sich hauptsächlich mit der Ermittlung der Stabspannungen, die entweder in einem statisch bestimmten oder auch in einem unbestimmten Fachwerke durch gegebene Lasten hervorgebracht werden, die an den Knotenpunkten angreifen. Schon längst hat man verschiedene Verfahren gefunden, nach denen diese Spannungsaufgabe für das ebene wie für das räumliche Fachwerk in fast allen überhaupt möglichen Fällen ohne Schwierigkeit und in befriedigender Weise gelöst werden kann.

So weit es sich um statisch unbestimmte Fachwerke handelt, legt man bei der Lösung der Spannungsaufgabe die Annahme zu Grunde, daß die Längenänderungen der Stäbe proportional mit den Stabspannungen und zugleich so klein gegen die ursprünglichen Stablängen sind, daß sie mit hinreichender Genauigkeit als unendlich klein in die Rechnung eingeführt werden dürfen. Bei den praktischen Anwendungen, die man von der Theorie des Fachwerks im Bauwesen zu machen hat, trifft diese Voraussetzung stets mit großer Annäherung zu.

Größere Abweichungen bestehen freilich bei den praktischen Bauausführungen von der anderen Annahme, daß die Fachwerkstäbe in den Knotenpunkten frei drehbar miteinander verbunden sein sollen. Diese Annahme liegt indessen schon dem geometrischen Begriffe des Fachwerks zu Grunde. Wenn



sie nicht genau genug erfüllt ist, wird dadurch zwar die Anwendbarkeit der Theorie auf den betreffenden Fall der Bauausführung entsprechend beeinträchtigt; der Fachwerktheorie selbst kann aber kein Vorwurf daraus gemacht werden, daß sie auf Umstände keine Rücksicht nimmt, die überhaupt nicht in ihren Aufgabenkreis fallen.

Mit diesen Vorbehalten kann man sagen, daß die Spannungsaufgabe der Fachwerktheorie, abgesehen von dem besonderen Falle, der hier besprochen werden soll, bereits als vollständig befriedigend gelöst angesehen werden darf. Bisher noch nicht gelöst ist nämlich die Aufgabe nur bei den sogenannten Ausnahmefachwerken. Darunter versteht man Fachwerke, die trotz genügender Stabzahl und sonst geeigneter Gliederung wegen der besonderen Lage, in der sich die Knotenpunkte gegeneinander befinden, keine steifen und gegen beliebige Belastungen widerstandsfähigen Stabverbände bilden. Um ein einfaches Beispiel dafür vor Augen zu haben, betrachte man den Zusammenschluß von zwei Dreiecken in der Ebene durch drei Verbindungsstäbe. Wenn man jeder Ecke des einen Dreiecks eine Ecke des anderen Dreiecks als entsprechend zuweist und zwischen je zwei entsprechende Ecken einen Verbindungsstab anordnet, erhält man im allgemeinen ein stabiles ebenes Fachwerk. Dagegen tritt der Ausnahmefall ein, sobald die Dreiecke so zueinander liegen und die Stäbe zwischen ihnen so geführt werden, daß sich ihre Richtungslinien entweder in demselben Punkte schneiden oder daß sie parallel zu einander sind.

Ein anderes sehr bekanntes Beispiel liefert das Pascalsche Sechseck. Ein Stabverband aus 9 Stäben, von denen 6 den Umfangsseiten eines Sechsecks und die anderen den drei Hauptdiagonalen folgen, bildet nämlich unter gewöhnlichen Umständen ein widerstandsfähiges Fachwerk. Sobald aber die Ecken des Sechsecks auf einem Kegelschnitte liegen, bildet der Stabverband ein Ausnahmefachwerk.

Die Ausnahmefachwerke haben seit langem in der Fachwerktheorie eine wichtige Rolle gespielt. Gewöhnlich hat man

sich aber doch nur insoweit mit ihnen beschäftigt, als man die Bedingungen nachwies, unter denen der Ausnahmefall eintritt.<sup>1)</sup> Auf die Spannungsaufgabe ging man nicht näher ein, sondern begnügte sich mit der Bemerkung, daß im Grenzfalle, der dem Ausnahmefachwerke entspricht, die Spannungen bei beliebig gegebenen Lasten unendlich groß ausfielen. Natürlich ist aber diese Aussage nur dahin zu verstehen und auch nur dahin verstanden worden, daß selbst noch so große Stabspannungen kein Gleichgewicht mit den Lasten herzustellen vermögen, ohne daß eine Gestaltänderung der Fachwerkfigur erfolgte. Wie groß aber die Spannungen nach einer solchen Gestaltänderung tatsächlich ausfielen, ließ man dahingestellt.

Eine Gestaltänderung tritt bei jedem Fachwerke ein, wenn es belastet wird, da die Stäbe durch die Spannungen elastische Längenänderungen erfahren. Unter gewöhnlichen Umständen bleibt jedoch die Gestaltänderung von derselben Größenordnung wie die Längenänderung der einzelnen Fachwerkstäbe, so daß sie bei der Spannungsermittlung überhaupt nicht beachtet zu werden braucht. Beim Ausnahmefachwerk ist dies aber anders; es stellt auch in dieser Beziehung einen Ausnahmefall dar, indem eine merkliche Gestaltänderung bereits möglich ist, wenn sich auch die Stablängen nur um im Vergleiche dazu unmerklich kleine Größen ändern. Um dieser geometrischen Eigenschaft der Ausnahmefachwerke durch eine anschauliche Bezeichnung Ausdruck zu geben, habe ich ihnen in meinem Lehrbuche der graphischen Statik das Eigenschaftswort „wackelig“ beigelegt. Man könnte daher die Ausnahmefachwerke auch als „Wackelfachwerke“ bezeichnen.

Nachdem sich eine kleine Gestaltänderung vollzogen hat, ist der Ausnahmefall nicht mehr genau verwirklicht und der Stabverband wird um so widerstandsfähiger gegen weitere Form-

<sup>1)</sup> Eine sehr ausführliche und gründliche Untersuchung dieser Art, die sich auch auf das räumliche Fachwerk erstreckt, hat neuerdings Herr Prof. Ernst Kötter in Aachen unter dem Titel „Über den Grenzfalle u. s. f.“ im Anhang zu den Abhandlungen der Berliner Akademie für 1912 veröffentlicht. Sonderabdruck im Verlage d. Akad., Berlin 1913.

änderungen, je mehr die Gestaltänderung fortschreitet. Diese Überlegung lehrt, daß jeder Grund fehlt, die Stabspannungen als unendlich groß anzusehen; sie werden nur sehr groß ausfallen im Verhältnisse zu stabilen Fachwerken unter sonst ähnlichen Umständen, weil sich die Fachwerkfigur auch nach der Formänderung immerhin nicht viel von der dem Ausnahmefalle entsprechenden unterscheidet. Aber wenn die Belastung, die von dem Fachwerke aufgenommen werden muß, ziemlich klein ist, können die Stabspannungen, die dadurch hervorgerufen werden, leicht unterhalb der Grenzen bleiben, die man als zulässig anzusehen hat. Es liegt dann kein erhebliches Bedenken gegen eine praktische Ausführung dieser Art vor.

Freilich sind die Ausnahmefachwerke im Vergleiche mit ihnen sonst ähnlichen Anordnungen von stabilen Fachwerken stets nur in geringem Maße widerstandsfähig. Man wird sie daher, wenn nicht zwingende Gründe von anderer Art vorliegen, stets sorgfältig zu vermeiden suchen. Hierin ist jedenfalls der Grund dafür zu erblicken, daß man sich bisher so wenig um die Lösung der Spannungsaufgabe für die Ausnahmefachwerke bemüht hat. In der ersten Auflage meines vorher erwähnten Lehrbuchs, die im Jahre 1900 erschienen ist, habe ich zwar bereits für einen besonders einfachen Fall, der bei gewissen praktischen Anwendungen tatsächlich vorkommt, eine Lösung der Spannungsaufgabe gegeben. Daran habe ich damals die folgende Bemerkung geknüpft: „Ein ganz allgemein anwendbares direktes Verfahren für die Lösung dieser Aufgabe ist bisher, so viel mir bekannt ist, nicht ausgearbeitet worden und ich will mich jetzt auch nicht mit einem Versuche aufhalten, die Lücke auszufüllen.“ Hierin war offensichtlich eine Anregung ausgesprochen, diese Frage in Angriff zu nehmen. Aber obschon das Buch in den Kreisen, die sich mit Fragen dieser Art beschäftigen, eine große Verbreitung gefunden hat, scheint bisher noch Niemand der Aufforderung, wenigstens nicht mit einem merklichen Erfolge, entsprochen zu haben. Als ich vor einiger Zeit selbst Veranlassung fand, mich mit diesen Dingen von neuem zu beschäftigen, beschloß

ich daher, selbst den Versuch zu einer Lösung zu machen, die immerhin von vornherein keineswegs leicht erschien. Dabei stellte sich jedoch schließlich heraus, daß die Lösung durch Einführung von Vernachlässigungen, die den Rahmen der auch sonst üblichen nicht wesentlich überschreiten, weit einfacher gestaltet werden kann, als ich anfänglich vermutet hatte.

Hier werde ich mich damit begnügen, das Verfahren ganz allgemein zu beschreiben und zu begründen und die allgemein gültigen Schlußfolgerungen abzuleiten, die sich daraus ergeben. Zur besseren Erläuterung wäre freilich auch die Behandlung einiger Beispiele wünschenswert; aber diese möchte ich lieber auf eine andere Gelegenheit verschieben.

Um zu einer leicht verständlichen, möglichst einfachen Ausdrucksweise zu gelangen, lege ich bei der Auseinandersetzung des Verfahrens ein ebenes Fachwerk zu Grunde, wie ja auch von jeher das ebene Fachwerk den Hauptgegenstand fast aller Arbeiten über die Fachwerktheorie gebildet hat. Ich bemerke jedoch, daß dieselben Überlegungen mit geringen Änderungen ebenso auch bei räumlichen Ausnahmefachwerken zum Ziele führen.

Um  $n$  Knotenpunkt in der Ebene steif miteinander zu verbinden, braucht man  $2n - 3$  Stäbe. Diese müssen zwischen den Knotenpunkten so verteilt sein, daß niemals zwischen irgendwie ausgewählten  $n'$  von diesen Knotenpunkten ( $n > n' > 1$ ) mehr als  $2n' - 3$  Verbindungsstäbe verlaufen. Die Erfüllung dieser Bedingungen führt im allgemeinen zu einem geometrisch und statisch bestimmten Fachwerke; dem Begriffe des „Ausnahmefachwerks“ oder „Grenzfachwerks“ entspricht es, daß dieselben Bedingungen bei ihm ebenfalls erfüllt sein sollen.

Nimmt man aus dem hiernach aufgebauten Verbande der  $2n - 3$  Stäbe einen beliebig ausgewählten Stab heraus, so wird ein zwangsläufiger Mechanismus entstehen. Das gilt ebenfalls nicht nur für das statisch bestimmte Fachwerk, sondern im allgemeinen auch noch für das Ausnahmefachwerk. Man muß allerdings hinzufügen, daß Herr Ernst Kötter in seinem Beitrage zur Festschrift für Müller-Breslau und auch in der

vorher schon angeführten Akademieschrift darauf hingewiesen hat, daß dies nicht unbedingt so sein muß. Man kann nämlich, wie Herr Kötter gezeigt hat, auch solche Stabverbände angeben, die bei  $n$  Knotenpunkten und weniger als  $2n - 3$  Stäben trotzdem „in sich einspannbar“, d. h. fähig sind, ein Spannungsbild von Eigenspannungen ohne Mitwirkung äußerer Lasten aufzunehmen und die außerdem bei streng unveränderlichen Stablängen auch als unverschieblich zu betrachten wären. Es ist daher nicht ausgeschlossen, daß man nach Entfernung eines Stabes aus dem Verbande von  $2n - 3$  Stäben nicht auf einen Mechanismus, sondern auf einen solchen Kötterschen Stabverband kommt. Aber von diesem ganz besonderen Falle will ich hier absehen und mich damit begnügen, ein gewöhnliches Ausnahmefachwerk zu untersuchen, das durch Fortnahme eines Stabs in einen Mechanismus verwandelt werden kann.

Daß der Stabverband ein Ausnahmefachwerk bildet, ist alsdann darauf zurückzuführen, daß der Stab, den man entfernt hatte, um einen Mechanismus herzustellen, nach seinem Wiedereinsetzen wenigstens eine kleine Bewegung des Mechanismus nicht zu verhindern vermag. Das ist nur unter der Bedingung möglich, daß sich der Abstand der Knotenpunkte des Mechanismus, zwischen denen der herausgenommene Stab verlief, bei einer kleinen Bewegung des Mechanismus ohnehin nicht ändert und daß daher die bestehende Bewegungsmöglichkeit durch das Einsetzen des Stabs nicht wieder aufgehoben werden kann. Diese Überlegung führt zu dem von Mohr für die Ausnahmefachwerke angegebenen Kennzeichen, daß irgend ein Stab, etwa der, den wir uns herausgenommen dachten, eine Länge haben muß, die entweder ein Maximum oder ein Minimum bildet, das mit den als gegeben anzusehenden Längen aller übrigen Stäbe aus Gründen des geometrischen Zusammenhangs noch verträglich ist.

Der kürzeren Ausdrucksweise wegen soll hier der Stab, durch dessen Herausnahme man das Fachwerk in den vorher besprochenen Mechanismus verwandelt, als der Hauptstab bezeichnet werden. Bei der Bezifferung, durch die wir her-

nach die einzelnen Stäbe des Fachwerks voneinander unterscheiden wollen, soll er die Ziffer 0 erhalten. Welchen Stab des Fachwerks man als den Hauptstab ansehen will, ist im allgemeinen gleichgültig, wenn nur für ihn das vorher genannte Mohrsche Kennzeichen zutrifft. Gewöhnlich und so auch bei den vorher als Beispiele angeführten einfachen Fällen kann sogar jeder Stab des Fachwerks als Hauptstab ausgewählt werden. Gehen jedoch z. B. von einem Knotenpunkte nur zwei Stäbe aus, die nicht in einer geraden Linie liegen, so kann von diesen beiden Stäben jedenfalls keiner als Hauptstab angesehen werden, da das vorher angeführte Mohrsche Kennzeichen für ihn nicht zutrifft. Ferner ergibt sich aus den weiteren Betrachtungen, daß nur solche Stäbe nicht als Hauptstäbe gelten können, die bei dem in dem Ausnahmefachwerke möglichen Spannungsbilde von Eigenspannungen nicht beteiligt sind, sondern beim Fehlen äußerer Lasten notwendig spannungslos bleiben müssen. Die Entscheidung nicht nur über die zulässige, sondern zugleich auch über eine zweckmäßige Auswahl des Hauptstabs wird in der Regel bei den Ausnahmefachwerken, für die man die Spannungsaufgabe zu lösen wünscht, keinerlei Schwierigkeiten verursachen.

Die augenblickliche Stellung des Mechanismus, der durch Entfernen des Hauptstabs hervorgegangen ist, soll durch eine geeignet gewählte Veränderliche  $\varphi$  gekennzeichnet werden. Am zweckmäßigsten wird es gewöhnlich sein, als Hilfsveränderliche  $\varphi$  einen Winkel zu wählen, den zwei Stäbe miteinander bilden, die sich bei einer Bewegung des Mechanismus gegeneinander drehen. Für die Ausgangsstellung, die der Mechanismus im gegebenen Ausnahmefachwerke einnahm, sei der Winkel mit  $\varphi_0$  bezeichnet und für die Drehung  $\varphi - \varphi_0$  sei, unter der Voraussetzung, daß die Drehung ziemlich klein bleibt, kürzer  $\Delta\varphi$  geschrieben.

Man kann aber unter dem bei den folgenden Rechnungen vorkommenden Buchstaben  $\varphi$  auch den Abstand zwischen zwei passend ausgewählten Knotenpunkten des Mechanismus verstehen. In diesem Falle würde eine Stabvertauschung, bei der

man den beseitigten Hauptstab durch den Stab von der Länge  $\varphi_0$  ersetzt, das Ausnahmefachwerk in ein gewöhnliches stabiles Fachwerk verwandeln. Ich nehme hier zunächst an, daß  $\varphi$  ein die Stellung des Mechanismus beschreibender Winkel sein soll, mache jedoch darauf aufmerksam, daß die aufgestellten Formeln auch bei der anderen Deutung des Buchstabens ihre Gültigkeit behalten.

Der Abstand der Knotenpunkte, zwischen denen im Ausnahmefachwerke der Hauptstab verlief, sei für irgend eine Stellung des Mechanismus mit  $l$  bezeichnet und für die Anfangsstellung mit  $l_0$ . Der Abstand  $l$  ist als eine Funktion von  $\varphi$  aufzufassen und für die Änderung  $l - l_0$  oder  $\Delta l$ , die  $l$  bei einer kleinen Bewegung  $\Delta\varphi$  des Mechanismus erfährt, findet man nach dem Taylorschen Satze

$$\Delta l = \Delta\varphi \frac{\partial l}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \Delta\varphi^2 \frac{\partial^2 l}{\partial \varphi^2} + \dots$$

Nach der Voraussetzung, daß es sich um ein Ausnahmefachwerk handeln soll, ist aber der erste Differentialquotient von  $l$  nach  $\varphi$  gleich Null. Unter Vernachlässigung von höheren Potenzen der kleinen Größe  $\Delta\varphi$  behält man daher

$$\Delta l = \frac{1}{2} \Delta\varphi^2 \frac{\partial^2 l}{\partial \varphi^2}.$$

Der Wert des zweiten Differentialquotienten von  $l$  für die Anfangsstellung des Mechanismus kann und muß in jedem Beispiele, für das man die Spannungsaufgabe lösen soll, auf Grund einer geometrischen Betrachtung der Bewegung, die der Mechanismus ausführt, zahlenmäßig ermittelt werden. Sollten sich für eine genaue Berechnung irgend welche Schwierigkeiten einstellen, so wird es doch stets leicht möglich sein, auf graphischem Wege einen hinreichend genauen Näherungswert dafür abzuleiten, indem man mehrere aufeinander folgende Stellungen des Mechanismus im Maßstabe so genau als möglich aufzeichnet und die aus der Zeichnung abgemessenen Abstände  $l$  mit den zugehörigen Drehungen  $\Delta\varphi$  aus der Anfangs-

stellung vergleicht. Jedenfalls darf daher für die weitere Untersuchung vorausgesetzt werden, daß der Wert des zweiten Differentialquotienten von  $l$  nach  $\varphi$  für die Anfangsstellung des Mechanismus bereits ermittelt sei. Er ist dann als eine bekannte konstante Größe anzusehen, für die weiterhin die Bezeichnung  $c_0$  gebraucht werden soll. Die vorige Gleichung ist dann kürzer

$$\Delta l = \frac{1}{2} c_0 \Delta \varphi^2 \quad (1)$$

zu schreiben.

Bisher war angenommen, daß die Stablängen  $l_1, l_2 \dots l_k$  konstant bleiben sollten. Jetzt setze ich aber voraus, daß nicht nur der Winkel  $\varphi_0$  eine Änderung um  $\Delta \varphi$  erfahren soll, sondern daß zugleich auch alle Stäbe des Mechanismus ihre Längen um beliebige kleine Größen  $\Delta l_1, \Delta l_2 \dots \Delta l_k$  ändern sollen. Die augenblickliche Gestalt und Stellung des Mechanismus wird dann durch die voneinander unabhängigen Veränderlichen  $\varphi, l_1, l_2 \dots l_k$  beschrieben und der Abstand  $l$  der Endknotenpunkte des aus dem Ausnahmefachwerk herausgenommenen Hauptstabs ist als eine Funktion aller dieser Variablen aufzufassen. Nachher sollen unter den  $\Delta l_1$  u. s. f. elastische Längenänderungen der Stäbe verstanden werden, die nach dem, was vorher besprochen wurde, und mit demselben Rechte wie bei der Spannungsberechnung für die gewöhnlichen statisch unbestimmten Fachwerke mit genügender Annäherung als unendlich klein angesehen werden dürfen. Hiernach ist die Änderung von  $l$ , die zu einer solchen Änderung  $\Delta l_1$  von  $l_1$  gehört, wenn dabei die anderen unabhängigen Veränderlichen als konstant angesehen werden,

$$\Delta l = \Delta l_1 \frac{\partial l}{\partial l_1} \quad (2)$$

zu setzen. Der Differentialquotient von  $l$  nach  $l_1$  verschwindet nämlich, wie wir nachher noch sehen werden, im allgemeinen nicht; in der Regel wird vielmehr  $\Delta l$  mit  $\Delta l_1$  von ungefähr gleicher Größenordnung sein. Von der Beifügung eines weiteren Gliedes in der Taylorschen Entwicklung mit dem Faktor  $\Delta l_1^2$  darf daher abgesehen werden.



Auch die Differentialquotienten von  $l$  nach  $l_1$  u. s. f. können und müssen im einzelnen Falle sämtlich zahlenmäßig ermittelt werden. Das wäre, wie vorher bei  $c_0$ , durch eine Untersuchung der Bewegung möglich, die der Mechanismus ausführt. Kürzer und auch noch aus anderen Gründen zweckmäßiger ist aber ein anderes Verfahren.

Wie vorher schon bemerkt, gehört es nämlich zu den wichtigsten und längst bekannten Eigenschaften des Ausnahmefachwerks, daß in ihm Spannungen auftreten können, die an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellen, ohne daß dabei äußere Kräfte mitzuwirken brauchten. Um sich davon zu überzeugen, denke man sich den Hauptstab herausgenommen und an seinen beiden Endknotenpunkten Lasten  $S_0$  angebracht von gleicher Größe und entgegengesetzten Richtungen, so wie sie einer vom Hauptstabe übertragenen Zugspannung entsprechen würden. Bei einer kleinen virtuellen Bewegung, die man hierauf mit dem Mechanismus vornimmt, ist die Summe der Arbeitsleistungen der beiden Kräfte  $S_0$  gleich Null, weil sich nach der grundlegenden Eigenschaft des Ausnahmefachwerks der Abstand der beiden Angriffspunkte nicht, oder doch wenigstens nur um unendlich kleine Größen von der zweiten Ordnung ändert. Hierin besteht aber nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten das hinreichende Kennzeichen dafür, daß sich die beiden Lasten  $S_0$  an dem Mechanismus im Gleichgewichte halten. Es müssen sich hiernach in den anderen Stäben Spannungen  $S_1, S_2 \dots S_k$  ausbilden, die zusammen mit den Lasten  $S_0$  an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellen.

Das Spannungsbild  $S_0, S_1, S_2 \dots S_k$  der „Eigenspannungen läßt sich im einzelnen Falle auch durch einen Kräfteplan vor Augen führen, der für eine beliebige Annahme von  $S_0$  in bekannter Weise mit geringer Mühe aufgezeichnet werden kann. Zweckmäßig ist es, die Spannung  $S_0$  im Hauptstabe hierbei als eine Zugspannung von der Lasteinheit anzunehmen, wie es in ähnlicher Weise auch bei der Lösung der Spannungsaufgabe für die gewöhnlichen statisch unbestimmten Fachwerke zu geschehen pflegt. In der Folge bezeichne ich

diesen Kräfteplan der Eigenspannungen mit dem Buchstaben  $u$  und zwar derart, daß die daraus entnommene Spannung des Stabes 1 mit  $u_1$  bezeichnet wird u. s. f. Jedes  $u$  ist positiv zu rechnen, wenn es einer Zugspannung und negativ, wenn es einer Druckspannung entspricht. Für den Hauptstab hat man hiernach auf jeden Fall

$$u_0 = +1 \quad (3)$$

zu setzen.

Nachdem der Kräfteplan  $u$  gezeichnet ist, denke man sich außer dem Hauptstabe noch einen anderen Stab, etwa den Stab 1, der ja ein ganz beliebiger Stab sein kann, aus dem ganzen Verbande entfernt. Um das vorher betrachtete Gleichgewicht dann noch weiter aufrecht zu erhalten, bringe man an den Endknotenpunkten von Stab 1 zwei äußere Kräfte an von derselben Größe und Richtung wie die daran vorher angreifende Stabspannung von Stab 1. Die Größe stimmt daher mit  $u_1$  überein und die Richtung bestimmt sich nach dem Vorzeichen von  $u_1$ . Bei einer virtuellen Bewegung des jetzt mit zwei Freiheitsgraden ausgestatteten Stabverbandes möge  $\varphi$  konstant bleiben, während sich die Entfernung der Endknotenpunkte des herausgenommenen Stabes 1, die vorher gleich  $l_1$  war, um den kleinen Betrag  $\Delta l_1$  ändern soll. Dann steht die zugehörige Änderung der Entfernung der Endknotenpunkte des gleichfalls herausgenommenen Hauptstabes  $\Delta l$  mit  $\Delta l_1$  in dem durch Gl. (2) angegebenen Zusammenhange.

Bei dieser virtuellen Bewegung muß die Summe der Arbeitsleistungen der vier an dem Stabverbande angreifenden äußeren Kräfte gleich Null sein. Die beiden Kräfte  $u_1$  leisten hierbei zusammen genommen eine Arbeit

$$-u_1 \Delta l_1,$$

wobei das negative Vorzeichen davon herrührt, daß die Zugspannungen positiv gerechnet werden und daß  $\Delta l_1$  positiv ist, wenn es eine Verlängerung bedeutet, wobei aber die Zugspannungen, weil sich die Angriffspunkte entgegen den Kraftrichtungen voneinander entfernen, eine negative Arbeit leisten.

In derselben Weise läßt sich auch die Arbeit der an den Endknotenpunkten des herausgenommenen Hauptstabes angreifenden Zugspannungen von der Lasteinheit ausdrücken und die Arbeitsgleichung lautet daher

$$- \Delta l - u_1 \Delta l_1 = 0,$$

woraus in Verbindung mit Gl. (2)

$$\frac{\partial l}{\partial l_1} = - u_1 \quad (4)$$

gefunden wird. Hiernach können die Differentialquotienten von  $l$  nach den unabhängigen Veränderlichen  $l_1 \dots l_k$  ohne weiteres aus dem Kräfteplan  $u$  entnommen werden.

Hierauf kehren wir zur Betrachtung der Gestaltänderung zurück, die der durch Herausnahme des Hauptstabs erhaltene Mechanismus erfährt, wenn sich gleichzeitig  $\varphi$  um  $\Delta\varphi$  und die Stablängen  $l_1, l_2 \dots l_k$  um beliebige kleine Beträge  $\Delta l_1 \dots \Delta l_k$  ändern. Die zugehörige Änderung der Strecke  $l$  ergibt sich mit Rücksicht auf Gl. (4) zu

$$\Delta l = \frac{1}{2} c_0 \Delta\varphi^2 - u_1 \Delta l_1 - u_2 \Delta l_2 \dots - u_k \Delta l_k \quad (5)$$

Insbesondere gilt diese Gleichung auch für den Fall, daß man unter den  $\Delta l$  die elastischen Längenänderungen versteht, die die Stäbe durch die Spannungen erfahren, die in dem Ausnahmefachwerk durch die daran angebrachte Belastung hervorgerufen werden. Bezeichnet man die Spannung, die hierbei der Hauptstab aufzunehmen hat, mit  $X$ , die der übrigen Stäbe mit  $S_1, S_2 \dots S_k$  und die Stabkonstanten mit  $r_0, r_1, r_2 \dots r_k$ , so geht die vorige Gleichung hierfür über in

$$r_0 X = \frac{1}{2} c_0 \Delta\varphi^2 - u_1 r_1 S_1 - u_2 r_2 S_2 \dots - u_k r_k S_k \quad (6)$$

Die in dieser Gleichung vorkommenden Spannungen kann man sich zu einem Kräfteplan zusammengesetzt denken, in dem außer ihnen noch die gegebenen Lasten  $P$  auftreten. Aber die Stabspannungen sind, weil es sich um ein Ausnahmefachwerk handelt, jedenfalls bedeutend größer, als die Lasten  $P$ . Dies gilt um so mehr, je kleiner die Lasten sind und je kleiner

hiermit auch die durch sie hervorgebrachte Gestaltänderung der Fachwerkfigur bleibt. Wenn beide klein genug sind, kann sich daher der Kräfteplan, vom Maßstabe abgesehen, nur sehr wenig von dem vorher bereits besprochenen Kräfteplan  $u$  der Eigenspannungen unterscheiden. Wirklich gleich dürfte man beide Kräftepläne freilich nur unter der Voraussetzung unendlich kleiner Lasten und hiermit einer unendlich kleinen Gestaltänderung der Fachwerkfigur setzen.

Aber die Annahme, daß es als genügend zu erachten sei, die Formänderungen als unendlich klein anzusehen und den daraus hervorgehenden Fehler mit in den Kauf zu nehmen, liegt der Lösung der Spannungsaufgabe bereits in allen anderen Fällen zu Grunde, mit denen sich die Fachwerktheorie beschäftigt. Man braucht daher auch in unserem Falle nicht zu zögern, sie sich anzueignen. Freilich ist die Ungenauigkeit, die dadurch herbeigeführt wird, hier größer als sonst, weil die Änderung  $\Delta\varphi$ , von der die Gestaltänderung des Ausnahmefachwerks hauptsächlich abhängt, weit größer ausfällt, als die verhältnismäßigen Längenänderungen der Fachwerkstäbe. Man kann sich aber, wenn aus diesem Grunde ein Bedenken erhoben wird, immer darauf zurückziehen, daß die Betrachtung nur für den Grenzfall unendlich kleiner Lasten und zugleich auch einer unendlich kleinen Gestaltänderung Anspruch auf genaue Gültigkeit erhebt. Da bei den praktischen Anordnungen der Theorie die zulässigen Fehlergrenzen gewöhnlich sehr weitherzig bemessen werden, so daß selbst auf einige Procente mehr oder weniger im Schlußergebnisse nicht viel ankommt, wird man jedoch wohl in allen Fällen, die praktisch vorkommen können, unbedenklich die Formeln verwenden dürfen, die unter der Voraussetzung unendlich kleiner Lasten abgeleitet sind.

Auf Grund dieser Überlegungen genügt es, in Gl. (6)

$$S_1 = u_1 X \quad (7)$$

u. s. f. zu setzen. Hiermit geht Gl. (5) über in

$$X(r_0 + u_1^2 r_1 + \cdots + u_k^2 r_k) = \frac{1}{2} c_0 \Delta\varphi^2$$

Hierbei ist es nach Gl. (3) zulässig, beim ersten Gliede in der Klammer noch den Faktor  $u_0^2$  beizufügen, um es auf die gleiche Form wie die übrigen Glieder zu bringen. Die Gleichung lautet dann

$$X \sum u^2 r = \frac{1}{2} c_0 A \varphi^2 \quad (8)$$

Die Summe ist über alle Stäbe des Ausnahmefachwerks zu erstrecken und leicht zahlenmäßig auszurechnen. Jedenfalls liefert sie einen positiven Wert und hieraus folgt, daß  $X$  und  $c_0$  stets vom gleichen Vorzeichen sein müssen.

Um die gestellte Aufgabe zu lösen, müssen wir sowohl  $X$  als  $A\varphi$  berechnen und Gl. (8) liefert zunächst *eine* Gleichung zur Berechnung der beiden Unbekannten. Sie ging aus der Betrachtung des geometrischen Zusammenhangs der Fachwerkfigur hervor, indem für ein gegebenes  $A\varphi$  die geänderten Stablängen miteinander verträglich sein müssen, was eben durch Gl. (8) zum Ausdruck gebracht wird. Nun brauchen wir noch eine zweite Gleichung zwischen den beiden Unbekannten, die nur dadurch erhalten werden kann, daß man den statischen Zusammenhang zwischen dem von der Größe  $X$  abhängigen Spannungsbilde und den gegebenen Lasten  $P$  in geeigneter Weise zum Ausdruck bringt.

Zu diesem Zwecke wollen wir eine virtuelle Bewegung des durch Herausnahme des Hauptstabs erhaltenen Mechanismus betrachten, bei der sich von den unabhängigen Veränderlichen nur der Winkel  $\varphi$ , der durch die Formänderung die Größe  $\varphi_0 + A\varphi$  angenommen hatte, weiterhin um einen unendlich kleinen Betrag  $\delta\varphi$  ändert, während die Längen  $l_1$  bis  $l_k$  die Größen beibehalten, die sie durch die elastische Formänderung erhalten haben. Die Länge  $l$  des Hauptstabs muß sich dagegen infolge davon auch um ein Differential  $\delta Al$  bei der virtuellen Verschiebung ändern und zwar finden wir aus Gl. (5)

$$\delta Al = c_0 A \varphi \cdot \delta \varphi \quad (9)$$

Bei der virtuellen Verschiebung, die hiermit näher bezeichnet ist, legen die Angriffspunkte der gegebenen Lasten  $P$

gewisse Wege zurück, die für jeden gegebenen Fall ohne Schwierigkeit festgestellt werden können. Zunächst kann man den Weg  $\delta s_1$ , der vom Angriffspunkte der Last  $P_1$  in der Richtung dieser Last zurückgelegt wird, in der Form

$$\delta s_1 = \frac{\partial s_1}{\partial \varphi} \delta \varphi$$

anschreiben. Da wir aber annehmen dürfen, daß der Zusammenhang zwischen dem Wege  $s_1$  und dem Winkel  $\varphi$  oder  $\Delta\varphi$  in jedem Falle, für den man die Spannungsaufgabe zu lösen wünscht, ohne weiteres ersichtlich sein wird, dürfen wir den in dieser Gleichung vorkommenden Differentialquotienten als eine, wenn nicht genau, so doch mindestens mit hinreichender Annäherung zahlenmäßig angebbaren Wert ansehen, den wir weiterhin  $s'_1$  bezeichnen wollen. Die vorige Gleichung lautet dann

$$\delta s_1 = s'_1 \delta \varphi$$

und für die Arbeit aller äußeren Kräfte  $P$  bei der betrachteten virtuellen Verschiebung findet man

$$\delta \varphi \sum P s'.$$

Bei der Berechnung der Summe kommt es natürlich nur auf die relativen Verschiebungen der Knotenpunkte gegeneinander an, denn bei einer Verschiebung ohne Gestaltänderung wird die Summe der Arbeiten aller  $P$  gleich Null, da diese den Gleichgewichtsbedingungen am starren Körper auf jeden Fall genügen müssen.

Für die Arbeit der Kräfte  $X$ , die an den Endknotenpunkten des beseitigten Hauptstabs noch als weitere äußere Kräfte am Mechanismus angreifen, erhält man

$$- X \delta \Delta l$$

und mit Rücksicht auf Gl. (9) läßt sich daher nach Wegheben des gemeinschaftlichen Faktors  $\delta \varphi$  die Arbeitsgleichung

$$\sum P s' - X c_0 \Delta \varphi = 0 \quad (10)$$

schreiben. — Es bleibt jetzt nur noch übrig, die beiden Gleichungen (8) und (10) nach den Unbekannten  $X$  und  $\Delta\varphi$  aufzulösen. Man findet

$$X = \sqrt[3]{\frac{(\sum P s')^2}{2 c_0 \sum u^2 r}} \quad (11)$$

$$\Delta\varphi = \sqrt[3]{\frac{2 \sum u^2 r \cdot \sum P s'}{c_0^2}}, \quad (12)$$

womit die Aufgabe gelöst ist, da alle auf den rechten Seiten beider Gleichungen vorkommenden Größen nach den darüber früher gemachten Bemerkungen als bereits bekannt anzusehen sind, und die übrigen Spannungen aus Gl. (7) folgen, nachdem  $X$  berechnet ist.

Ein besonderer Fall tritt ein, wenn die Lasten  $P$  so gegeben sind, daß für sie

$$\sum P s' = 0 \quad (13)$$

wird. Dann erhält man nach den vorhergehenden Gleichungen sowohl  $X$  als  $\Delta\varphi$  gleich Null. Das ist indessen nicht wörtlich zu nehmen. Vielmehr muß man dieses Rechenergebnis dahin deuten, daß  $X$  keineswegs, wie bei der Ableitung der Formeln vorausgesetzt war, sehr viel größer wird, als die Lasten  $P$  sind. Die in Gl. (7) ausgesprochene Näherungsannahme verliert daher in diesem Falle ihre Gültigkeit und damit fallen auch alle Folgerungen, die daraus gezogen wurden. Nur wenn  $\sum P s'$  von Null so viel verschieden ist, daß das mit diesem Werte nach Gl. (11) berechnete  $X$  bedeutend größer ausfällt, als jede der Lasten  $P$ , sind die Gleichungen (11) und (12) überhaupt anwendbar.

Übrigens ist der durch Gl. (13) gekennzeichnete Belastungsfall schon früher näher untersucht und die Spannungsaufgabe für ihn bereits gelöst worden. Er ist von der Art, daß der durch Herausnahme des Hauptstabs erhaltene Mechanismus unter dem Einflusse der Kräfte im Gleichgewicht bleibt, ohne daß dabei eine Spannung  $X$  mitzuwirken braucht. Andererseits kann man aber für das Ausnahmefachwerk auch unend-

lich viele Spannungsbilder angeben, bei denen  $X$  einen beliebigen Wert annimmt, während keine Lasten an den Knotenpunkten angreifen. Beim Bestehen von Gl. (13) sind daher unendlich viele Gleichgewichtsmöglichkeiten vorhanden, die durch Übereinanderlegung des zuerst angeführten Spannungsbildes mit einem der zuletzt erwähnten herauskommen. Die Aufgabe, die Spannungen zu bestimmen, ist statisch unbestimmt in demselben Sinne wie bei den Fachwerken mit einem überzähligen Stabe und sie kann auch mit denselben Hilfsmitteln wie bei diesen gelöst werden. In meinem früher schon erwähnten Lehrbuche der graphischen Statik kann man diese Lösung finden.

Weiterhin sehe ich von diesem Falle ab, nehme also an, daß die Gleichungen (11) und (12) wirklich als zutreffend gelten dürfen.

Dann ist ferner der Grenzfall zu erwähnen, daß alle Stabkonstanten  $r$  gleich Null zu setzen sind. Das würde heißen, daß die Stäbe als starr betrachtet werden sollen. Die Formeln liefern dann  $\Delta\varphi = 0$ , d. h. man erfährt daraus, was an sich selbstverständlich ist, daß bei vollkommen unveränderlichen Stablängen keine Gestaltänderung der Fachwerkfigur eintreten kann, und ferner  $X = \infty$ . Das ist die Lösung, mit der man sich gewöhnlich bei der Behandlung der Statik des Ausnahmefachwerks begnügt und die in der allgemeinen gültigen Lösung auch mit enthalten ist. — Sollte  $c_0 = 0$  werden, so wäre  $\Delta\varphi = \infty$ , d. h. man hätte eine so große Gestaltänderung zu erwarten, daß die vorhergehenden Betrachtungen, die eine kleine Gestaltänderung voraussetzen, nicht mehr anwendbar blieben. Insbesondere würde dieser Fall eintreten, wenn der Stabverband einen sogenannten übergeschlossenen Mechanismus bildete; man hätte es aber dann nicht mehr mit einem Ausnahmefachwerke im gewöhnlichen Sinne dieses Wortes zu tun.

Wenn die Gleichungen (11) und (12) hiernach überhaupt zu Recht bestehen, läßt sich als wichtigste Folgerung daraus entnehmen, nach welchem Gesetze die Stabspannungen und



die Gestaltänderung der Fachwerkfigur zunehmen, wenn man die Lasten  $P$  wachsen läßt und zwar so, daß alle Lasten  $P$  proportional miteinander wachsen. Man sieht, daß die Gestaltänderung mit der  $\frac{1}{3}$ ten und die Spannungen mit der  $\frac{2}{3}$ ten Potenz der Lasten wachsen. Zur 8-fachen Belastung gehört demnach eine verdoppelte Gestaltänderung und in jedem Stabe eine vierfache Spannung.

Zu demselben Schlusse war ich schon früher bei dem einfachen Beispiele gekommen, das ich, wie bereits erwähnt, in der ersten Auflage meines Lehrbuchs der graphischen Statik (und dann auch in den folgenden) behandelt hatte. Es hat sich aber jetzt herausgestellt, daß diesem Ergebnisse eine viel allgemeinere Gültigkeit zukommt. Während bei dem gewöhnlichen statisch unbestimmten Fachwerke die Spannungen und die Formänderungen proportional mit den Lasten zunehmen und auch noch bei den Ausnahmefachwerken das Gleiche gilt, wenn für die Lasten die durch Gl. (13) ausgesprochene Bedingung erfüllt ist, zeigen die Ausnahmefachwerke anderenfalls und im Gegensatze hierzu das durch die Gl. (11) und (12) ausgesprochene Verhalten.

Schließlich möchte ich noch einige Bemerkungen über die Genauigkeit machen, mit der die Gleichungen (11) und (12) voraussichtlich für einen bestimmten, praktisch vorliegenden Fall zutreffen werden. Daß man bei der Anwendung dieser Gleichungen an gewisse Beschränkungen gebunden ist, war schon erwähnt und ich möchte nur nochmals betonen, daß sie nur für Belastungen gelten, die nicht so groß sind, um Stabspannungen hervorzurufen, durch die die Proportionalitätsgrenze überschritten wird. Außerdem muß aber auch in Erinnerung behalten werden, daß bei der Ableitung der Gleichungen, wie bei allen Berechnungen, die zur Fachwerktheorie im engeren Sinne gehören, keine Rücksicht auf den Einfluß der Steifigkeit der Knotenpunkte genommen wurde. Wie groß die Abweichungen sind, die hierdurch gegenüber dem wirklichen Verhalten eines genieteten Stabverbandes hervorgerufen werden, muß ich vorläufig unentschieden lassen. Man könnte

daran denken, eine Berechnung nach Art der Theorie der Sekundärspannungen vorzunehmen, um zu einem Urteile darüber zu gelangen. Besser wäre aber eine experimentelle Prüfung, die in einem Vergleiche von Gl. (12) mit den Ergebnissen eines Belastungsversuchs an einem geeigneten Modell bestehen könnte. Ich werde mir noch überlegen, ob ich einen Versuch dieser Art oder vielmehr eine Versuchsreihe, da ein einzelner Versuch nicht ausreichend erscheinen könnte, bei Gelegenheit selbst vornehmen oder sie wenigstens in die Wege leiten soll.

Bei dem Vergleiche der Formeln mit den Ergebnissen eines Belastungsversuchs wird man übrigens jedenfalls noch auf einen anderen Umstand zu achten haben, von dem bisher noch nicht die Rede war. Geringe unbeabsichtigte und leicht unbeachtet bleibende Abweichungen der Fachwerkgestalt von der dem Ausnahmefalle entsprechenden infolge von Ungenauigkeiten in der Ausführung, die bis zu einem gewissen Grade überhaupt unvermeidlich sind, können nämlich gerade beim Ausnahmefachwerke unter Umständen von erheblichem Einflusse auf das Verhalten des Versuchsmodells sein. Sie dürften sich darin äußern, daß die Formänderung nicht einfach proportional mit der dritten Wurzel aus der Belastung zunimmt, sondern so, als wenn den wirklich aufgebrachten Lasten schon eine Anfangsbelastung vorausgegangen wäre, durch die man sich die bereits bestehende Abweichung von der Figur des Ausnahmefalls hervorgebracht denken könnte. Um dem Rechnung zu tragen, ließe sich in Gl. (12) zu  $\Sigma P s'$  ein konstantes Glied beifügen. Einstweilen scheint es aber nicht nötig, hierauf näher einzugehen.

---



## Über die Transformation linearer Formen und die Lösung linearer Gleichungen.

Von A. Voss.

Vorgetragen in der Sitzung am 1. Mai 1915.

### § I.

Die Auflösung linearer Gleichungen ist durch den Begriff des Ranges  $r$  der Matrix des Gleichungssystems ihrem allgemeinen Verlaufe nach vollständig erledigt. Dabei müssen aber die Unbekannten, welche mit Hülfe der übrigen, willkürlich bleibenden, zu ermitteln sind, so gewählt werden, daß die Determinante  $r$ -Grades ihrer Koeffizienten von Null verschieden ist. Aber wenn, wie das bei Fragen der Geometrie und Mechanik häufig der Fall ist, einige dieser Unbekannten eine vorgeschriebene Bedeutung haben, während die anderen nur als zu bestimmende Parameter auftreten, läßt diese Rechnung häufig die erforderliche Symmetrie vermissen. Herr Frobenius hat allerdings eine vollständig symmetrische Behandlung von  $m$  linear voneinander unabhängigen Gleichungen mit  $n > m$  Unbekannten durch seine Methode der Fundamentallösungen gegeben;<sup>1)</sup> bei der Willkürlichkeit der in diese letzteren eingehenden Größen führt sie aber schon bald zu recht umständlichen Ausdrücken.

Schon bei den einfachsten Fragen der Geometrie und Mechanik, wo bei der Benutzung von Parallelkoordinaten gerade

<sup>1)</sup> Über das Pfaffsche Problem, Borchardts Journal 82, S. 236.

Linien als Orter zu bestimmender Punkte auftreten, begnügt man sich daher häufig mit der Ermittlung der Ebenen, deren Schnittlinien diese Punkte bilden, falls man nicht Betrachtungen der Liniengeometrie oder der Vektorenrechnung heranziehen will. — Man kann indes diesen formalen Mangel leicht beseitigen, wie zunächst an einigen typischen Beispielen gezeigt werden möge.

Die Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes mit den rechtwinkligen Koordinaten  $x, y, z$ , welche vermöge einer Rotation mit dem Komponenten  $p, q, r$  um eine (der Einfachheit halber) durch den Anfang der Koordinaten gehende Achse und durch die Translationskomponenten  $u, v, w$  entstehen, sind bekanntlich

$$v_x = qz - ry + u$$

$$v_y = rx - pz + v$$

$$v_z = py - qx + w$$

und die Lage der zugehörigen Schraubenachse ist bestimmt durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} & qz - ry + u = \lambda p \\ 1) \quad & rx - pz + v = \lambda q \\ & py - qx + w = \lambda r. \end{aligned}$$

Da  $up + vq + wr = \lambda(p^2 + q^2 + r^2)$ , so wird dieselbe zunächst gegeben durch die Gleichungen

$$\lambda = \frac{qz - ry + u}{p} = \frac{rx - py + v}{q} = \frac{py - qx + w}{r}$$

d. h. durch den gemeinsamen Schnitt von drei Ebenen.<sup>1)</sup> Die einfache Bemerkung, daß die Schraubenachse durch die Minimumeigenschaft der Geschwindigkeit charakterisiert ist, liefert indes eine explizite Bestimmung der  $x, y, z$ . Bildet man nämlich die Summe der Quadrate der linken Seiten von 1) in der Form

<sup>1)</sup> So z. B. auch bei Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces* I, S. 8; Appell, *Traité de mécanique* I, S. 65 usw.

$$\Omega(x^2 + y^2 + z^2) - t^2 + u^2 + v^2 + w^2 + 2u(qz - ry) \\ + 2v(rx - pz) + 2w(py - qx),$$

wobei:

$$t = px + qy + rz \\ \Omega = p^2 + q^2 + r^2$$

gesetzt ist, so ergibt sich durch Differentiation nach  $x, y, z$

$$\Omega x = pt + wq - vr \\ 2) \quad \Omega y = qt + ru - wp \\ \Omega z = rt + pv - uq,$$

wobei  $t$  völlig willkürlich bleibt. Man erkennt hieraus die vektorielle Lösung

$$\Omega(ix + jy + kz) = t(ip + jq + kr) + \begin{array}{l} ijk \\ pqr \\ uvw \end{array}.$$

so daß der Vektor  $V$  jedes Punktes der Schraubenachse mit den Komponenten  $x, y, z$  durch die Vektoren  $P$  mit den Komponenten  $p, q, r$  und  $Q$  mit den Komponenten  $u, v, w$  durch die Gleichung

$$\Omega \cdot V = tP + [PQ]$$

bestimmt ist, in der der Klammerausdruck das Vektorprodukt von  $P$  und  $Q$  bezeichnet.

In dieser Form hat man denn auch für die Koordinaten der Achse des zu dem Kräftesystem  $x_i y_i z_i$ , dessen Komponenten und Momentensummen bezüglich  $x, y, z$ ;  $M_x, M_y, M_z$  sind, gehörigen Winders die Gleichungen

$$x(X^2 + Y^2 + Z^2) = tX + YM_z - ZM_y \\ y(X^2 + Y^2 + Z^2) = tY + ZM_x - XM_z \\ z(X^2 + Y^2 + Z^2) = tZ + XM_y - YM_x.$$

Soll nun das etwas allgemeinere Gleichungssystem

$$qz - ry + u = \lambda p_1 \\ rx - pz + v = \lambda q_1 \\ py - qx + w = \lambda r_1$$

gelöst werden, so hat man zunächst

$$\lambda = \frac{up + vq + wr}{pp_1 + qq_1 + rr_1}$$

und, wenn man an Stelle von  $u, v, w$  in den Gleichungen 1) die Ausdrücke

$$u + \lambda(p - p_1)$$

$$v + \lambda(q - q_1)$$

$$w + \lambda(r - r_1)$$

treten läßt, die Lösung

$$\Omega x = pt + qw - rv - \lambda(qr_1 - rq_1)$$

$$3) \quad \Omega y = qt + ru - pw - \lambda(rp_1 - pr_1)$$

$$\Omega z = rt + pv - qu - \lambda(pq_1 - qp_1).$$

Diese Gleichungen, die wieder vektoriell gedeutet werden können, bestimmen diejenigen Punkte, deren Geschwindigkeit der vorgeschriebenen Richtung  $p_1, q_1, r_1$  parallel läuft. In einer gegebenen Ebene gibt es daher nur einen Punkt, dessen Geschwindigkeit eine vorgeschriebene Richtung hat usw.

Ein weiteres charakteristisches Beispiel kann man der Theorie des linearen Nullsystems entnehmen:

$$4) \quad a_1(x - x_1) + A_2(y - y_1) + a_3(z - z_1) + a_4(yz_1 - zy_1) \\ + a_5(zx_1 - xz_1) + a_6(xy_1 - yx_1) = 0,$$

welches dem Punkte  $x_1, y_1, z_1$  die Ebene 4) zuordnet. Für die Koordinaten des Punktes  $x_1, y_1, z_1$ , der in der gegebenen Ebene

$$5) \quad c_1x + c_2y + c_3z + c_4 = 0$$

liegt, hat man die Gleichungen

$$a_6y_1 - a_5z_1 + a_1 = \lambda c_1$$

$$6) \quad a_4z_1 - a_6x_1 + a_2 = \lambda c_2$$

$$a_5x_1 - a_4y_1 + a_3 = \lambda c_3$$

$$a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1 = -\lambda c_4,$$

deren letzte sich auch durch

$$c_1 x_1 + c_2 x_4 + c_3 z_1 + c_4 = 0$$

ersetzen läßt. Aus den 3 ersten Gleichungen 6) erhält man nach 3) für  $p = -a_4$ ,  $q = -a_5$ ,  $r = -a_6$ ;  $u = a_1$ ,  $v = a_2$ ,  $w = a_3$ ;  $p_1 = c_1$ ,  $q_1 = c_2$ ,  $r = c_3$ , falls

$$A = a_3^2 + a_5^2 + a_6^2$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} Ax_1 &= -a_4 t - (a_3 a_5 - a_6 a_2) + \lambda (a_5 c_3 - a_6 c_2) \\ 7) \quad Ay_1 &= -a_5 t - (a_6 a_1 - a_4 a_3) + \lambda (a_6 c_1 - a_4 c_3) \\ Az_1 &= -a_6 t - (a_4 a_2 - a_5 a_1) + \lambda (a_4 c_2 - a_5 c_1), \end{aligned}$$

wobei nach 6)

$$\lambda (c_1 a_4 + c_2 a_5 + c_3 a_6) = a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_6$$

zu setzen ist, und aus der letzten Gleichung 6) folgt endlich

$$0 = Ac_4 - (c_1 a_4 + c_2 a_5 + c_3 a_6)t - \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix},$$

womit auch  $t$  gefunden ist. Ist nun  $a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_6 = 0$ , also  $\lambda = 0$ , so werden  $x_1 y_1 z_1$  unabhängig von  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , d. h. die Nullpunkte liegen alle auf der Achse des speziellen Komplexes, dessen Gleichung eben durch 7) gegeben ist. Und nimmt man anstatt der Ebenenkoordinaten  $c_i$  die eines Büschels  $\alpha_i + \mu \beta_i$ , so geben die Gleichungen 7) die Punkte der zur Büschelachse konjugierten Geraden usw.

Um die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \lambda a_1 &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \lambda a_2 &= b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \lambda a_3 &= b_3, \end{aligned}$$

bei denen die Matrix der  $a_{ik}$  vom Range 2 ist, so daß

$$\sum \xi_i a_{ik} = 0 \text{ für } k = 1, 2, 3$$

auf eine ähnliche Weise zu behandeln, kann man die 3 Formen  $A_i = \sum a_{ik} x_k$ , wenn keine zwei derselben zueinander proportional sind, und sie demgemäß gleich Null gesetzt 3 Ebenen



$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  vorstellen, die eine durch den Anfang gehende Gerade gemein haben, durch eine Transformation auf den früheren Fall zurückführen.

## § II.

### Die Transformation eines Systems von $n$ -linearen Formen.

Die Betrachtungen des § 1 führen auf die allgemeine Frage, wann  $n$ -lineare Formen

$$1) \quad A_i = \sum_k a_{ik} x_k; \quad k, i = 1, 2 \dots n$$

sich in  $n$ -lineare Formen

$$B_i = \sum b_{ik} y_k$$

durch eine nicht singuläre Transformation

$$2) \quad x_k = \sum c_{kl} y_l,$$

deren Determinante  $C = |c_{ik}|$  nicht Null ist, überführen lassen, und wie man die sämtlichen Substitutionen 2) dieser Art finden kann.

Dabei werde angenommen, daß die Matrix der Koeffizienten der Formen 1) vom Range  $r$  ist, so daß also etwa die Determinante  $r$ -Grades

$$A = |a_{ik}|; \quad i, k = 1, 2 \dots r$$

von Null verschieden ist, während alle Determinanten höherer Ordnung gleich Null sind. Ich bezeichne nun die Indices 1 bis  $r$  durch lateinische Buchstaben  $s, t \dots$ , die Indices  $r + 1 \dots$  bis  $n$  dagegen durch griechische  $\sigma, \tau \dots$ ; die Indices  $i, k, l$  sollen dagegen von 1 bis  $n$  gehen.

Alsdann lassen sich immer nicht sämtlich verschwindende Multiplikatoren<sup>1)</sup>

$$\lambda_1^\sigma, \lambda_2^\sigma, \dots, \lambda_r^\sigma$$

angeben, welche die Gleichungen

<sup>1)</sup> Die  $\lambda_s^\sigma$  würden nur dann alle Null sein, wenn die  $a_{\sigma t}$  sämtlich Null wären; dann müßten aber nach 4) auch alle  $a_{\sigma k}$  verschwinden, so daß die Form  $A\sigma$  identisch Null ist, was natürlich auszuschließen ist.

$$\begin{aligned}
 & \lambda_1^\sigma a_{11} + \lambda_2^\sigma a_{11} + \cdots + \lambda_r^\sigma a_{r1} = a_{\sigma 1} \\
 & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
 3) & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
 & \lambda_1^\sigma a_{1r} + \lambda_2^\sigma a_{2r} + \cdots + \lambda_r^\sigma a_{rr} = a_{\sigma r}
 \end{aligned}$$

befriedigen. Aus diesen Gleichungen folgt aber, daß auch

$$\lambda_1^\sigma a_{1\tau} + \lambda_2^\sigma a_{2\tau} + \cdots + \lambda_r^\sigma a_{r\tau} = a_{\sigma\tau}$$

für alle  $\tau = r+1 \dots n$  sein muß, weil jede Determinante  $r+1$ -Grades aus den Elementen  $a_{ik}$  Null ist. Demnach besteht das System der Gleichungen

$$4) \quad \lambda_1^\sigma a_{1k} + \lambda_2^\sigma a_{2k} + \cdots + \lambda_r^\sigma a_{rk} = a_{\sigma k}$$

für alle  $k = 1, \dots, n$ .

Ist nun

$$5) \quad \sum_k a_{ik} x_k = \sum_k b_{ik} y_k; \quad i = 1, \dots, n$$

und multipliziert man die ersten  $r$ -Gleichungen 5) mit den  $\lambda_1^\sigma, \lambda_2^\sigma, \dots, \lambda_r^\sigma$ , so folgt

$$\sum_k (\lambda_1^\sigma b_{1k} + \lambda_2^\sigma b_{2k} + \cdots + \lambda_r^\sigma b_{rk} - b_{\sigma k}) y_k = 0;$$

dies erfordert aber wegen der Willkürlichkeit der  $y_1, \dots, y_n$  die zu 4) analogen Gleichungen

$$4') \quad \lambda_1^\sigma b_{1k} + \lambda_2^\sigma b_{2k} + \cdots + \lambda_r^\sigma b_{rk} = b_{\sigma k}.$$

Diese Bedingungen sind für die Transformierbarkeit notwendig. Setzt man 2) in 5) ein, so folgt

$$6) \quad \sum_l a_{il} c_{lk} = b_{ik}.$$

Aus den in 6) enthaltenen Gleichungen

$$7) \quad \sum_t a_{st} c_{tk} + \sum_r a_{s\tau} c_{\tau k} = b_{sk}$$

für  $s, t = 1, \dots, r; \tau = r+1, \dots, n$

kann man nun die sämtlichen  $c_{tk}$  durch die willkürlich bleibenden  $c_{rk}$  ausdrücken. Multipliziert man jetzt in Gleichungen 7) mit den  $\lambda_s^\sigma$  und summiert über den Index  $s$ , so entsteht

$$\sum_s \sum_t a_{st} \lambda_s^\sigma c_{tk} + \sum_s \sum_t a_{s\tau} \lambda_s^\sigma c_{\tau k} = \sum_s b_{sk} \lambda_s^\sigma.$$

Aber diese Gleichung geht nach 4) und 4') über in

$$\sum_t a_{\sigma t} c_{tk} + \sum_\tau a_{\sigma\tau} c_{\tau k} = b_{\sigma k}$$

oder einfacher in

$$\sum a_{\sigma l} c_{lk} = b_{\sigma k}$$

über. Vermöge der Gleichungen 7) sind alle Transformationsrelationen schon von selbst erfüllt.

Daraus ergibt sich:

Unter der Voraussetzung, daß die Matrix der Formen  $A$  vom Range  $r$  ist, und zugleich die Koeffizienten der Formen  $B$  den Gleichungen 4') genügen, lassen sich  $nr$  der Transformationskoeffizienten  $c_{sk}$  mit Hilfe der übrigen  $c_{\sigma k}$ , deren Zahl  $n(n-r)$  beträgt, so ausdrücken, daß die Formen  $A$  vermöge 2) in  $B$  übergehen.

Aber diese Transformationen sind damit noch nicht nicht-singuläre. Hierzu ist vielmehr erforderlich, daß die Determinante der  $c_{ik}$  nicht verschwindet. Um zu unterscheiden, wann dies der Fall ist, multipliziert man ihre Determinante

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{r1} & c_{r+11} & \dots & c_{n1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{1r} & \dots & c_{rr} & c_{r+1r} & \dots & c_{nr} \\ c_{1r+1} & \dots & c_{rr+1} & c_{r+1r+1} & \dots & c_{nr+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{1n} & \dots & c_{rn} & c_{r+1n} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

mit der nicht verschwindenden Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

Dann ergibt sich vermöge der Gleichungen 7)

$$CA = \begin{vmatrix} b_{11} - \sum a_{1\tau} c_{\tau 1}, & \dots & b_{r1} - \sum a_{r\tau} c_{\tau 1}, & c_{r+11} \dots c_{n1} \\ b_{12} - \sum a_{1\tau} c_{\tau 2}, & \dots & b_{r2} - \sum a_{r\tau} c_{\tau 2}, & c_{r+12} \dots c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} - \sum a_{1\tau} c_{\tau n}, & \dots & b_{rn} - \sum a_{r\tau} c_{\tau n}, & c_{r+1n} \dots c_{nn} \end{vmatrix}$$

die sich durch geeignete Subtraktion der letzten  $n - r$ -Vertikalreihen von den ersten in

$$CA = \begin{vmatrix} b_{11} b_{21} \dots b_{r1} & c_{r+11} \dots c_{n1} \\ b_{12} b_{22} \dots b_{r2} & c_{r+12} \dots c_{n2} \\ \dots & \dots \\ b_{1n} b_{2n} \dots b_{rn} & c_{r+1n} \dots c_{nn} \end{vmatrix}$$

verwandelt. Die bisher willkürlichen  $c\sigma k$  sind daher so zu wählen, daß diese Determinante nicht Null ist. Das wird aber stets möglich sein, wenn wenigstens eine der  $r$ -reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

welche mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

korrespondiert, von Null verschieden ist, womit zugleich ausgedrückt ist, daß die Matrix der Koeffizienten  $b_{ik}$  selbst vom Range  $r$  ist.

So ergibt sich der Satz, der übrigens auch auf  $m > n$  lineare Formen unter entsprechenden Voraussetzungen erweitert werden kann:

$n$  lineare Formen vom Range  $r$  lassen sich dann und nur dann durch eine Mannigfaltigkeit von  $(n-r)n$  Transformationen in  $n$  lineare Formen  $B$  transfor-

mieren, falls die Bedingungen 4') erfüllt sind. Soll aber die Transformation eine nicht singuläre sein, so muß die zu den eine nicht verschwindende Determinante vom Grade  $r$  bildenden Elementen der  $A$  korrespondierende Matrix der Formen  $B$  vom Range  $r$  sein.

Ein System von Formen  $A$  vom Range  $n$  kann man daher immer in jedes gegebene System an Formen  $B$  von gleichem Range durch eine einzige nichtsinguläre Transformation verwandeln, was übrigens selbstverständlich ist.

Die vorstehenden Betrachtungen sind namentlich dann anwendbar, wenn es sich darum handelt, ein Formensystem  $A$  in ein System  $B$  von vorgeschriebenem Charakter zu transformieren.

Einige einfache Fälle mögen hier behandelt werden.

1. Transformation von  $n$  Formen  $A$  vom Range  $n-1$  in  $n$  Formen  $B$ , deren Koeffizienten ein symmetrisches System bilden.

Die Gleichungen 4) und 4') sind, falls die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1\ n-1} \end{vmatrix}$$

nicht Null ist,

$$8) \quad \sum_i \lambda_i a_{ik} = a_{nk}$$

$$\sum_i \lambda_i b_{ik} = b_{nk}$$

für  $i = 1, \dots, n-1; k = 1 \dots n.$

Die Transformationsrelationen sind

$$9) \quad \sum_s a_{is} c_{sk} = b_{ik} - a_{in} c_{nk}$$

$$\sum_s a_{ns} c_{sk} = b_{nk} - a_{nn} c_{nk},$$

wo die Indizes  $s$  von 1 bis  $n-1$  gehen.

Aus den Gleichungen 8) oder:

$$8') \quad \begin{aligned} & \lambda_1 b_{11} \cdots + \lambda_{n-1} b_{n-11} = b_{n1} \\ & \lambda_1 b_{12} \cdots + \lambda_{n-1} b_{n-12} = b_{n2} \\ & \dots \\ & \lambda_1 b_{1n-1} \cdots + \lambda_{n-1} b_{n-1n-1} = b_{nn-1} \\ & \lambda_1 b_{1n} \cdots + \lambda_{n-1} b_{n-1n-1} = b_{nn-1} \end{aligned}$$

ergeben sich die Werte der  $b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nn}$ , wenn man die  $b_{ii}$ ;  $i, i_1 = 1 \dots n-1$  willkürlich annimmt. Aus den ersten  $n-1$  Gleichungen 9) ergeben sich für  $k = 1, \dots, n$  die  $c_{sk}$  ausgedrückt durch die  $c_{nk}$ ; die letzte der Gleichungen 9) ist dann jedesmal vermöge 8) von selbst erfüllt, so daß die  $n$  Größen  $c_{n1} \dots c_{nn}$  willkürlich bleiben. Die Determinante  $CA$  erhält vermöge 8) die Gestalt

$$\begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{n-11} \\ \dots \\ b_{n-11} \dots b_{n-1n-1} \end{vmatrix} (c_{nn} - \sum \lambda_i c_{ni}),$$

sie verschwindet bei willkürlich angenommenen Werten der  $b_{ii}$  nicht. Die Gesamtheit der  $c_{ik}$  ist daher von

$$2n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Parametern, nämlich von den  $n c_{n1} \dots c_{nn}$  und den  $b_{ii}$  abhängig.

2. Transformation von  $n$  Formen  $A$  vom Range  $n-1$  in ein System von Formen  $B$ , deren Koeffizienten  $b_{ik}$  ein alternierendes System  $b_{ik} = -b_{ki}$  bilden.

Hier muß  $n$  eine ungerade Zahl sein, da sonst die Formen  $B$  ein System von niedererem als  $n-1$ ten Range bilden. Von den Gleichungen 8') dienen jetzt die  $n-1$  ersten zur Bestimmung der  $b_{n1} \dots b_{nn-1}$ ; die letzte ist identisch erfüllt. Die Gesamtheit der  $c_{ik}$  ist von

$$n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

Parametern abhängig.

Für  $n = 3$  hat man in Übereinstimmung mit § 1, falls keine zwei der Formen  $A_1, A_2, A_3$  zueinander proportional sind, die von Null verschiedenen Multiplikatoren  $\xi, \eta, \zeta$ , für die

$$\xi A_1 + \eta A_2 + \zeta A_3 = 0,$$

und die Bedingungen für die  $b_{is}$  sind

$$-\eta b_{12} - \zeta b_{13} = 0$$

$$b_{12} \xi - b_{23} \zeta = 0$$

$$b_{13} \xi - b_{23} \eta = 0,$$

so daß nur  $b_{12} \neq 0$  willkürlich bleibt und die  $c_{31}, c_{32}, c_{33}$  so zu wählen sind, daß

$$\xi c_{31} + \eta c_{32} + \zeta c_{33} \neq 0.$$

Aber eine nichtsinguläre Transformation existiert auch dann, wenn zwei der Formen, etwa  $A_1$  und  $A_3$  zueinander proportional sind. Dann ist  $\eta = 0$  und  $b_{13} = 0$  und man kann die  $A$  durch eine nichtsinguläre Transformation

$$(\text{falls } \xi c_{31} + \zeta c_{33} \neq 0)$$

in die Formen

$$B_1 = b_{12} \eta_2$$

$$B_2 = -b_{12} y_1 + b_{12} y_3 \frac{\xi}{\zeta}$$

$$B_3 = -b_{12} y_2 \frac{\xi}{\zeta}$$

überführen.

3. Dieses Verfahren läßt sich auch bei beliebigem Range der Formen  $A$  befolgen. Es mag das noch für den Rang  $n - 2$  der Formen  $A$  bei geraden  $n$  unter Voraussetzung eines alternierenden Koeffizientensystems der Formen  $B$  ausgeführt werden.

Die Gleichungen 4), 4') sind hier, wenn die Indices  $i, j$  von 1 bis  $n - 2$ , die  $k, k_1$  von 1 bis  $n$  gehen,

$$a) \quad \sum_i \lambda_i' b_{ij} = b_{n-1j}$$

$$b) \quad \sum_i \lambda_i' b_{in-1} = b_{n-1n-1}$$

$$c) \quad \sum_i \lambda_i' b_{in} = b_{n-1n}$$

$$d) \quad \sum_i \lambda_i'' b_{ij} = b_{nj}$$

$$e) \quad \sum_i \lambda_i'' b_{in-1} = b_{nn-1}$$

$$f) \quad \sum_i \lambda_i'' b_{in} = b_{nn}.$$

Die Gleichungen a) geben die  $b_{n-1j} = -b_{jn-1}$ , und damit ist zugleich b) erfüllt. Gleichung c) liefert die  $b_{n-1n}$ , ausgedrückt durch die aus d) zu entnehmenden  $b_{nj}$ . Endlich wird c) vermöge d) zu

$$- \sum_j \lambda_j' \lambda_i'' b_{ij} = b_{n-1n}$$

und e) vermöge a) zu

$$- \sum_j \lambda_j'' \lambda_i' b_{ij} = b_{nn-1},$$

so daß auch  $b_{nn-1} = -b_{n-1n}$  wird, und bei willkürlichen Werten der  $b_{ij} = -b_{ji}$  die  $b_{kk_1}$  ein alternierendes System bilden. Die Determinante  $CA$  bringt man auf die Form

$$CA = \delta(P_1 Q_2 - P_2 Q_1),$$

wo

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & b_{21} & \dots & b_{n-21} \\ b_{12} & 0 & \dots & b_{n-22} \\ & & & \\ b_{1n-2} & \dots & & 0 \end{vmatrix}$$

und

$$P_1 = c_{n-1n-1} + \sum_i c_{n-1i} \lambda_i'$$

$$Q_1 = c_{nn-1} + \sum_i c_{ni} \lambda_i'$$

$$P_2 = c_{n-1n} + \sum_i c_{n-1i} \lambda_i''$$

$$Q_2 = c_{nn} + \sum_i c_{ni} \lambda_i''.$$



Es existieren also im ganzen von

$$2n + \frac{n-2n-3}{2} = \frac{n^2-n+6}{2}$$

Parametern abhängige Koeffizienten  $c_{ik}$ , welche die Formen  $A$  nicht singulär in die  $B$  überführen. Z. B. lassen sich die Formen  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , welche den Gleichungen

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = A_3$$

$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 = A_4$$

genügen, falls  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  in das System der Formen vom Range 2

$$B_1 = y_2 + \lambda_2 y_3 + \mu_2 y_4$$

$$B_2 = -y_1 - \lambda_1 y_3 - \mu_1 y_4$$

$$B_3 = -\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2 - p y_4$$

$$B_4 = -\mu_2 y_1 + \mu_1 y_2 + p y_4$$

durch eine nichtsinguläre Transformation verwandeln, wenn das System der willkürlichen  $c_{3k}, c_{4k}, k=1, \dots, 4$  so gewählt ist, daß

$$\begin{vmatrix} c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \\ 0 & 1 & \lambda_2 & \mu_2 \\ 1 & 0 & \lambda_1 & \mu_1 \end{vmatrix}$$

nicht Null ist. Für  $p$  ist  $\mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1$  zu setzen.

Ich schließe hieran noch den Beweis eines Satzes über bilineare Formen, der mit diesen Betrachtungen nahe verwandt ist:

Jede bilineare Form  $\sum a_{ik} x_i y_k$  vom Range  $r$  läßt sich durch nichtsinguläre Transformation der  $x$  und  $y$  in die Normalform

$$\sum_s x_s y_s \quad s = 1, \dots, r$$

überführen.

Setzt man, den früheren Bemerkungen gemäß, voraus, daß den Gleichungen 4) entsprechend

$$\lambda_1^\sigma a_{1k} + \dots + \lambda_r^\sigma a_{rk} = a_{\sigma k}$$

für alle  $\sigma = r + 1 \dots n$ ,  $k = 1 \dots n$  ist, so folgt

$$\begin{aligned} \sum a_{ik} x_i y_k &= \sum a_{sk} x_s y_k + \sum a_{\sigma k} x_\sigma y_k \\ &= \sum a_{sk} y_k (x_s + \sum \lambda_s^\sigma x_\sigma) \\ &= \sum (a_{st} y_t + a_{s\tau} y_\tau) (x_s + \sum \lambda_s^\sigma x_\sigma). \end{aligned}$$

Setzt man jetzt

$$\begin{aligned} y_t &= y'_t \\ \sum a_{st} y_t &= y'_s \\ x_\sigma &= x'_\sigma \\ x_s + \sum \lambda_s^\sigma x_\sigma &= x'_s. \end{aligned}$$

Dies sind zwei nichtsinguläre Transformationen der Variablen  $x, y$  in  $x', y'$  und man erhält so eine  $r^2$  fache Mannigfaltigkeit nichtsingulärer Transformationen, welche eine Bilinearform  $A$  vom Range  $r$  in eine Form gleichen Ranges  $B$  verwandeln.

Unter derselben Voraussetzung gilt übrigens noch eine zweite Transformation mittelst der Gleichungen

$$\sum \mu_r^\sigma a_{kr} = a_{k\sigma},$$

welche durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} y_\sigma &= y'_\sigma \\ y_r + \sum \mu_r^\sigma y_\sigma &= y'_r \\ x_r &= x'_r \\ \sum a_{tr} x_r &= x'_t \end{aligned}$$

ausgedrückt ist.

## § III.

## Die symmetrische Auflösung linearer Gleichungen.

Durch die im § II behandelten Transformationen wird allerdings der symmetrische Charakter der Lösungen, der sich in den einfachen Beispielen des § I erreichen ließ, wieder aufgehoben. Indessen läßt sich auch hier auf eine völlig symmetrische Weise verfahren.

Es sei zunächst das System der  $n$  Gleichungen

$$\begin{aligned}
 & \sum_i a_{1i} x_i = a_1 \\
 1) \quad & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 & \sum_i a_{ni} x_i = a_n
 \end{aligned}$$

gegeben und die homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned}
 & \sum_i a_{1i} x_i = 0 \\
 2) \quad & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 & \sum_i a_{ni} x_i = 0
 \end{aligned}$$

voneinander unabhängig. Die Indices  $i$  sollen dabei von 1 bis  $n + p$  gehen. Alsdann handelt es sich, da die sämtlichen Lösungen des Systems 2) in symmetrischer Weise durch die Methode der Fundamentallösungen als gegeben zu betrachten sind, nur um eine spezielle Lösung des Systems 1).

Fügt man den Gleichungen 1) die folgenden mit den willkürlichen Koeffizienten  $u_{hk}$ ,  $h = 1 \dots p$ ;  $k = 1 \dots n + p$  gebildeten

$$\begin{aligned}
 & \sum_i u_{1i} x_i = 0 \\
 3) \quad & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 & \sum_i u_{pi} x_i = 0
 \end{aligned}$$

hinzu und bezeichnet die Unterdeterminanten nach der  $n + 1$ ,  $\dots$   $n + p$  Reihe der Determinante

$$4) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ n+p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\ n+p} \\ u_{11} & \dots & u_{1\ n+p} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{p1} & \dots & u_{p\ n+p} \end{vmatrix}$$

mit  $U_{ki}, k = 1 \dots p$   
 $i = 1 \dots n + p,$

so ist

$$\sum_i a_{hi} U_{ki} = 0$$

$$5) \quad \sum_i u_{ki} U_{ki} = 0, \quad z \neq k$$

$$\sum_i u_{ki} U_{ki} = \Delta,$$

wobei die Indices  $h$  von 1 bis  $n$ ,  $z$  und  $k$  von 1 bis  $p$  gehen.

Setzt man noch

$$6) \quad \sum_i \gamma_i x_i = X,$$

so erhält man aus 1), 3), 6)

$$7) \quad \Delta X + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ n+p} & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\ n+p} & a_n \\ u_{11} & \dots & u_{1\ n+p} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{p1} & \dots & u_{p\ n+p} & 0 \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_{n+p} & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

mit den  $\gamma_i$  sind willkürliche Koeffizienten bezeichnet. Multipliziert man die Determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ n+p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\ n+p} \\ U_{11} & \dots & U_{1\ n+p} \\ \dots & \dots & \dots \\ U_{p1} & \dots & U_{p\ n+p} \end{vmatrix}$$

mit der Determinante  $\Delta$ , die als nicht verschwindend vorausgesetzt wird, so folgt aus 5)

$$\Delta \delta = \Delta^p \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = \Delta^p \Delta,$$

wobei die Elemente der symmetrischen Determinante  $A$  durch die Gleichungen

$$A_{hh_1} = \sum a_{hi} a_{h_1 i}, \quad h, h_1 = 1 \dots n$$

definiert sind. Es ist aber  $A$  das Quadrat der Matrix des Systems 2)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n+p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn+p} \end{pmatrix}.$$

mithin gleich der Summe der Quadrate der  $n$ -reihigen Determinanten derselben und verschwindet nicht, wenn man sich auf reelle Koeffizienten  $a_{ik}$  beschränkt. Unter dieser Voraussetzung ist daher  $\delta$  nicht Null.

Man kann die Determinante  $A$  in eine einfachere Gestalt bringen. Da die  $n$ -reihige Determinante der  $a_{ij}$ ;  $i, j = 1 \dots n$  stets als von Null verschieden angenommen werden kann, läßt sich

$$8) \quad a_{in+s} = \lambda_1^s a_{i1} + \dots + \lambda_n^s a_{in}$$

$$\text{für} \quad s = 1, \dots, p$$

setzen. Formt man nun die Determinante  $A$  in derselben Weise um, wie dies auf Seite 251 geschehen ist, mit Hülfe von 8) um, so entsteht, falls man die Determinante der  $a_{ij}$  mit  $D$  bezeichnet, die Gleichung (abgesehen vom Vorzeichen)

$$A = D^2 \begin{vmatrix} 1 + c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & 1 + c_{22} & \dots & c_{2n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & 1 + c_{nn} \end{vmatrix},$$

wo

$$c_{ij} = \sum_s \lambda_s^i \lambda_s^j = c_{ji}$$

eine symmetrische Determinante ist, die sich wieder als Summe von Quadraten darstellen läßt.

Multipliziert man die Gleichung 7) mit  $\delta$ , so folgt:

$$X A^p A + \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \\ \sum u_{1i} a_{1i} \dots & \sum u_{1i} a_{ni} & \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum u_{pi} a_{1i} \dots & \sum u_{pi} a_{ni} & 0 & 0 & 0 & \Delta & 0 & 0 \\ \sum \gamma_i a_{1i} \dots & \sum \gamma_i a_{ni} & \sum \gamma_i U_{1i} & \cdot & \sum \gamma_i U_{ni} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

In der so entstandenen  $n + p + 1$ -reihigen Determinante aber kommen in den letzten  $p + 1 \dots n + p^{\text{ten}}$  Vertikalreihen die  $\gamma_i$  nur mit den  $U_{ki}$ , d. h. mit den Fundamentallösungen des Systems 2) vor, auf deren Bestimmung es nicht weiter ankommt. Läßt man diese Glieder fort, so erhält man die von den willkürlichen Elementen  $u_{ik}$  vollständig befreite Lösung

$$X A + \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & a_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & a_n \\ \sum \gamma_i a_{1i} \dots & \sum \gamma_i a_{ni} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

von der man jetzt übrigens unmittelbar erkennt, daß die aus der durch Vergleichung der Koeffizienten der  $\gamma_i$  entnommenen Werte der  $x_i$  das System 1) befriedigen.

Ein ganz analoges Verfahren läßt sich einschlagen, wenn es sich um die Lösung des voneinander unabhängigen Systems von Gleichungen

$$8) \quad \sum_i a_{ik} x_k + \lambda a_i = b_i \\ i, k = 1 \dots n$$

handelt, wobei die Determinante der  $a_{ik}$  vom Range  $n - 1$  vorausgesetzt wird.

Nimmt man hier die Gleichung

$$\sum u_k x_k = 0$$

hinzu, und bezeichnet mit  $\Delta$  die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{ik} & a_i \\ u_k & 0 \end{vmatrix},$$

die bei willkürlichen  $u_i$  nicht Null ist, so ergibt sich, falls man mit den  $U_i$  die nach der letzten Reihe von  $\Delta$  genommenen Unterdeterminanten bezeichnet, nach Einführung von

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} a_1 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} a_n \\ U_1 & \dots & U_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$\delta \Delta = \begin{vmatrix} A_{11} + a_1^2 & \dots & A_{1n} + a_1 a_n & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ A_{n1} + a_1 a_n & \dots & A_{nn} + a_n^2 & 0 \\ \sum u_i a_{1i} & \dots & \sum u_i a_{ni} & \Delta \end{vmatrix}$$

oder

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} a_1 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} a_n \\ a_1 & \dots & a_n & 0 \end{vmatrix}}{\Delta},$$

da die aus den Elementen  $A_{ik}$  gebildete symmetrische Determinante verschwindet.

Die Determinante  $\delta$  kann aber, abgesehen von ihren Vorzeichen, in die Gestalt einer  $2n + 1$ -reihigen Determinante gebracht werden, indem man von den Elementen  $A_{ik}$  wieder zu den Elementen  $a_{ik}$  zurückkehrt, man erhält nämlich:

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ n-1} & a_{1\ n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ n-1} & a_{2\ n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\ n-1} & a_{nn} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{11} & \dots & a_{n-11} & a_{n1} & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{12} & \dots & a_{n-12} & a_{n2} & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{1\ n-1} & \dots & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ a_{1\ n} & \dots & a_{n\ n-1} & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Setzt man nun voraus, was immer angenommen werden kann, daß etwa die Determinante

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1\ n-1} \end{vmatrix}$$

nicht Null ist, so gibt es  $n - 1$  nicht sämtlich verschwindende Multiplikatoren  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  derart, daß

$$\sum_i a_{ik} \xi_i + a_{nk} = 0$$

für  $k = 1, \dots, n$  und ebenso  $n - 1$  denselben Bedingungen entsprechende Multiplikatoren  $\eta, \dots, \eta_{n-1}$  derart, daß

$$\sum_i a_{ki} \eta_i + a_{kn} = 0.$$

Man kann daher — abgesehen vom Zeichen —  $\delta$  zunächst in die Form bringen

$$(\sum a_i \xi_i + a_n)^2 \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{11} & \dots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-11} & \dots & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\ a_{11} & \dots & a_{n-11} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{1\ n-1} & \dots & a_{n-1\ n-1} & 0 & \dots & -1 & 0 \\ a_{1n} & \dots & a_{n-1n} & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$



Aber diese verwandelt sich, wenn man die  $n + 1 \dots 2n - 1^{\text{te}}$  Vertikalreihe mit den  $\eta_1 \dots \eta_{n-1}$  multipliziert und zur letzten addiert und ebenso in Bezug auf die Horizontalreihen verfährt, in

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{11} & \dots & a_{1n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{11} & \dots & a_{n-11} & -1 & \dots & 0 & \eta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 & \dots & -1 & \eta_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \eta_1 & \dots & \eta_{n-1} & -1 \end{vmatrix},$$

deren Wert, vom Zeichen abgesehen, gleich  $A_n^2$  ist. Die Determinante  $\delta$  kann daher nur dann verschwinden, wenn

$$\sum a_i \xi_i + a_n = 0,$$

d. h. wenn die Gleichungen 1) nicht voneinander unabhängig sind.

Multipliziert man jetzt die nach Analogie von 1) gebildete Gleichung

$$X\Delta + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1 & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n & b_n \\ u_1 & \dots & u_n & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_n & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

mit  $\delta$ , so folgt:

$$X\delta\Delta + \begin{vmatrix} A_{11} + a_1^2 & \dots & A_{1n} + a_1 a_n & 0 & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} + a_1 a_n & \dots & A_{nn} + a_n^2 & 0 & b_n \\ \sum u_i a_{1i} & \dots & \sum u_i a_{ni} & \Delta & 0 \\ \sum \gamma_i a_{1i} & \dots & \sum \gamma_i a_{ni} & \sum \gamma_i U_i & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder, wenn man  $\sum \gamma_i U_i$  fortläßt,

$$9) \quad X\delta - \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & b_1 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & b_n & a_n \\ \sum \gamma_i a_{1i} & \dots & \sum \gamma_i a_{ni} & 0 & 0 \\ a_1 & \dots & a_n & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$



angestellten Betrachtungen zu wiederholen, nachdem einmal der Charakter der Lösung erkannt ist.

Setzt man

$$11) \quad \sigma X + \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & a_{11} & \dots & a_{1s} & \beta_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & a_{n1} & \dots & a_{ns} & \beta_n \\ a_{11} & \dots & a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{1s} & \dots & a_{ns} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sum \gamma_i a_{1i} & \dots & \sum \gamma_i a_{ni} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wobei wieder  $X = \sum \gamma_i x_i$  genommen ist, so erhält man für  $\gamma_i = a_{\kappa i}$

$$\sigma a_{\kappa i} - \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & a_{11} & \dots & a_{1s} & \beta_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & a_{n1} & \dots & a_{ns} & \beta_n \\ a_{11} & \dots & a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{1s} & \dots & a_{ns} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{\kappa 1} & \dots & a_{\kappa s} & \beta_{\kappa} \end{vmatrix} = 0$$

oder, wenn man die Koeffizienten der Determinante, welche bei den Elementen der letzten Horizontalreihe auftreten, mit

$$-A_1, -A_2, \dots, -A_{\nu}, A$$

bezeichnet,

$$\sigma \sum x_i a_{\kappa i} + a_{\kappa 1} A_1 + \dots + a_{\kappa s} A_s = \beta_{\kappa} A.$$

Um die Lösung zu erhalten, ist der bisher willkürlich gebliebene Faktor  $\sigma$  gleich

$$\sigma = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & a_{n1} & \dots & a_{ns} \\ a_{11} & \dots & a_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1s} & \dots & a_{ns} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

zu setzen. Daß er nicht verschwindet, wenn das System der Gleichungen 10) voneinander unabhängig ist, läßt sich durch eine geeignete Transformation der Determinante  $\sigma$ , die der vorhin für den Fall  $s = 1$  durchgeführten ganz analog ist, zeigen.<sup>1)</sup> Die Bestimmung der Lösung 11) wird allerdings schon in einfachen Fällen ziemlich weitläufig. Ist z. B. das System der Gleichungen

$$\begin{aligned} ax_2 - bx_3 + cx_4 + \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 \beta_{12} &= \gamma_1 \\ -ax_1 + dx_3 + ex_4 + \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} &= \gamma_2 \\ bx_1 - dx_2 + fx_4 + \lambda_1 a_{31} + \lambda_2 a_{32} &= \gamma_3 \\ -cx_1 - ex_2 - fx_3 + \lambda_1 a_{41} + \lambda_2 a_{42} &= \gamma_4 \end{aligned}$$

gegeben, und setzt man voraus, daß

$$af + be + cd = 0,$$

also

$$f = b\gamma - c\beta, \quad e = ca - a\gamma, \quad d = a\beta - ba$$

ist, so ist das System der  $a_{ik}$  vom Range 2), aber die  $A_{ik}$  erhalten Werte, welche eine Reduktion der siebenreihigen Determinante nicht unmittelbar zu gestatten scheinen.

Wenn aber die Determinante der  $a_{ik}$  vom Range  $n - 1$  ist, kann man von vornherein aus ihren ersten Unterdeterminanten  $u_1, \dots, u_n$  nach irgend einer Horizontalreihe das System bilden

$$\begin{aligned} \sum a_{ik} x_k + \lambda a_i &= b_i \\ \sum u_k x_k &= 0. \end{aligned}$$

Man erhält dann

$$(-1)^n X \sum U_i^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1 & b_1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_n & b_n \\ U_1 & \dots & U_n & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_n & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

<sup>1)</sup> Hierbei ist die auf S. 248 und 251 angedeutete Reduktion derselben zur Anwendung zu bringen.

In dem einfachen Beispiel des § I

$$qz - ry + \lambda p = u$$

$$rx - pz + \lambda q = v$$

$$py - qx + \lambda r = w$$

wird, da die  $u_1, u_2, u_3$  bezüglich gleich

$$-p\Omega, -q\Omega, -r\Omega$$

werden:

$$X\Omega^3 + \Omega \begin{vmatrix} 0 & -r & q & p & u \\ r & 0 & -p & q & v \\ -q & p & 0 & r & w \\ p & q & r & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliziert man mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & -r & q & p \\ r & 0 & -p & q \\ -q & p & 0 & r \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix} = -\Omega^2,$$

so entsteht

$$X\Omega - (u(q\gamma_3 - r\gamma_2) + v(r\gamma_1 - p\gamma_3) + w(p\gamma_2 - q\gamma_1)) = 0$$

oder

$$x\Omega = rv - wq$$

$$y\Omega = pw - ru$$

$$z\Omega = qu - pv$$

wie vorhin im § I.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1915

Band/Volume: [1915](#)

Autor(en)/Author(s): Voss Aurel Edmund

Artikel/Article: [Über die Transformation linearer Formen und die Lösung linearer Gleichungen 231-256](#)