Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1915. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1915

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Beiträge zum Äquivalenzproblem der Raumkurven.

Von **F. Böhm.**

Vorgelegt von A. Voss in der Sitzung am 1. Mai 1915.

Herr Study hat in dem 10. Bande der American Transactions 1909 in einer grundlegenden Arbeit „Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven" allgemein für reguläre Kurven und für wichtige Klassen spezieller Kurven wie „Krumme Linien in Minimalebenen, auf Minimalkegeln, Minimalkurven etc." Systeme von charakteristischen Bewegungsinvarianten aufgestellt. Im Hinblick auf die nicht immer ganz auf der Hand liegenden Methoden der algebraischen Invariantentheorie, insbesondere der orthogonalen Transformation, legte ich mir die Frage vor, ob es nicht möglich sei, auch mit gewöhnlichen elementaren Betrachtungen, nämlich mit Hilfe der Projektion auf die x_3 Ebene diese überaus wichtigen, absoluten Invarianten herzuleiten, sie weiter zu illustrieren und so deren Kenntnis auch den mit den Studyschen Methoden weniger Vertrauten zu vermitteln. Wir gewinnen auf diese Weise insbesondere bei Heranziehung der Gruppentheorie manche neuen Resultate, die nicht ohne Interesse sein dürften.

Die vorliegende Abhandlung ist lediglich ein Auszug aus umfangreicheren Untersuchungen. Diese würden infolge eingehender Diskussion aller Einzelfälle, welche durch das Verschwinden der einzelnen Differentialinvarianten auftreten können, den verfügbaren Raum bedeutend übersteigen und sind einer eventuellen Veröffentlichung vorbehalten.

Im Anschluß an Study werden folgende Bezeichnungen gebraucht:

Für die ebenen Kurven:

$$(a|b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad \text{speziell} \quad (a|a) = a_1^2 + a_2^2$$
$$(ab) = a_1 b_2 - a_2 b_1;$$

für die Raumkurven:

$$\overline{(a|b)} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \text{speziell} \quad \overline{(a|a)} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$(abc) = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ist die Kurve gegeben durch die Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t) \\ x_2 &= x_2(t) \\ x_3 &= x_3(t), \end{aligned}$$

so sollen die Differentialquotienten durch Ziffern bezeichnet werden, z. B.

$$(0|0) = x_1^2 + x_2^2; \quad (12) = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1'' & x_2'' \end{vmatrix}; \quad \overline{(1|1)} = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2;$$

$$(123) = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} \quad \text{usw.}$$

Da wir im Wesentlichen nur mit ebenen Kurven zu tun haben, so sind unsere Hauptbausteine die beiden Formen $(a|b)$ und (ab), zwischen denen nun folgende fundamentale Identitäten bestehen:

I. $$(ab)^2 \equiv \begin{vmatrix} a|a & a|b \\ a|b & b|b \end{vmatrix}; \quad (ac)(bd) \equiv \begin{vmatrix} a|b & a|c \\ b|d & c|d \end{vmatrix};$$

ferner

$$(ab)(cd) + (bc)(ad) + (ca)(bd) \equiv 0,$$

weil
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & d_1 & d_2 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

II.
$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 & a_1 a_2 \\ b_1 b_2 & -b_2 b_1 \\ c_1 c_2 & c_1 c_2 \\ d_1 d_2 & -d_2 d_1 \end{vmatrix} \equiv - \begin{vmatrix} a_1 a_2 & a_1 + a_2 & a_1 - a_2 \\ b_1 b_2 & 0 & 0 \\ c_1 c_2 & c_1 + c_2 & c_1 - c_2 \\ d_1 d_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv -2(ac)(bd)$$
$$\equiv \{(ab)(c|d) + (bc)(d|a) + (cd)(a|b) + (da)(b|c)\} - 2(ac)(bd),$$

also
$$(ab)(c|d) + (bc)(d|a) + (cd)(a|b) + (da)(b|c) \equiv 0,$$

b mit d vertauscht gibt dieselbe Identität von rückwärts, b mit c vertauscht gibt
$$(ac)(b|d) + (cb)(a|d) + (bd)(a|c) + (da)(c|b) \equiv 0.$$

Den beiden Identitäten kann man auch die Form geben:
$$(ab)(c|d) + (a|b)(cd) = -(bc)(a|d) + (ad)(b|c)$$
$$(ac)(b|d) + (a|c)(bd) = (bc)(a|d) + (ad)(b|c).$$

Wird speziell $c = d$, so haben wir
$$(ab)(c|c) = (ac)(b|c) - (a|c)(bc) \quad \text{und} \quad (ac)(b|b) = (ab)(b|c) + (a|b)(bc).$$

Diese Identitäten werden im folgenden fortwährend verwendet und, wo angängig, auch die Klammern bei (ab) und $(a|b)$ weggelassen.

I. Kapitel.

Die Kurven auf dem Minimalkegel.

§ 1. Die Beziehungen der Differentialinvarianten der Raumkurve zu den Differentialinvarianten ihrer Projektion in der Ebene $x_3 = 0$.

1. In allgemeiner Parameterdarstellung:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(t) \\ x_2 &= x_2(t) \\ x_3 &= x_3(t) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{mit der Bedingung } \overline{0|0} = 0, \\ &\text{also } x_3 = \underset{(-)}{+}\sqrt{-\overline{0|0}}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Identitäten der Einleitung und der höheren Differentialquotienten von $x_3(t)$ nach t können wir alle Differentialinvarianten der Raumkurve durch die ihrer Projektion ausdrücken und erhalten für die absoluten charakteristischen Differentialinvarianten Φ und Ψ die folgende Darstellung:

$$\Phi = \frac{1}{R^2} = \frac{\overline{1|1}\;\overline{2|2} - \overline{1|2}^2}{\overline{1|1}^3} = \frac{\overline{12|12}}{\overline{1|1}^3} = \frac{2 \cdot \overline{0|0} \cdot \overline{12} - \overline{01} \cdot \overline{1|1}}{\overline{01}^3}$$

$$\Psi = \frac{1}{R^2\,T} = \frac{\overline{123}}{\overline{1|1}^3} = \frac{-\sqrt{-\overline{0|0}}}{\overline{01}^5} \{3 \cdot \overline{12}\,[\overline{0|1} \cdot \overline{01} - \overline{0|0} \cdot \overline{02}]$$
$$+ 13 \cdot \overline{0|0} \cdot \overline{01}\}.$$

$\Phi = \dfrac{1}{R^2}$ ist das Krümmungsquadrat und $\dfrac{\Psi}{\Phi} = \dfrac{1}{T}$ die Torsion der Raumkurven.

2. Bezogen auf den natürlichen Parameter:

Die Definitionsgleichungen des natürlichen Parameters sind:

$$\overline{1|1}_p = -1 \quad \text{und} \quad \overline{01}_p^2 = -\overline{0|0}_p,$$

wobei wir durch den Index p andeuten, daß die Differentialquotienten alle nach p genommen sind

$$\Phi_p = \overline{2|2}_p = \frac{(03)_p}{(01)_p} = -\frac{0|0_p - 2\cdot 0|2_p \cdot 0|0_p + 0|1_p^2}{0|0_p^2},$$

$$\Psi_p = \overline{2|3}_p = \frac{(13)_p}{(01)_p}$$

$$= \frac{0|1_p\{0|0_p - 2\cdot 0|2_p\cdot 0|0_p + 0|1_p^2\} + 0|0_p^2\cdot 0|3_p}{0|0_p^3} = \frac{1}{2}\frac{d\Phi_p}{dp},$$

was durch Differentiation der Definitionsgleichungen und durch Anwendung der Identitäten leicht verifiziert wird.

NB. [Es ist zu beachten, daß die Differentialinvarianten: $0|0$, $0|1$, $0|2$ und $0|3$ vollständig dazu ausreichen.]

§ 2. Die Charakterisierung der Kurven nach ihrem natürlichen Parameter.

$\frac{dp}{dt} = 0$ gibt die Erzeugenden: Krümmung und Torsion sind unbestimmt.

$\frac{dp}{dt} = c$ gibt die singulären Kreise: Krümmung ist 0, Torsion unbestimmt.

Man könnte nun so fortfahren; wir umfassen aber alle diese Fälle, wenn wir von der folgenden Parameterdarstellung ausgehen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1-\tau^2}{2} f(\tau) \\ x_2 &= i\,\frac{1-\tau^2}{2} f(\tau) \\ x_3 &= \underset{(-)}{+}\,\tau f(\tau) \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l} f(\tau)^2 \text{ ist das Bogenelementquadrat} \\ \text{der Raumkurve.} \end{array}$$

$$\Phi_\tau = \frac{3f_1^2 - 2ff_2}{f^4};$$

$$\Psi_\tau = i\,\frac{6\cdot f\cdot f_1 f_2 - f^2 f_3 - 6\cdot f_1^2}{f^6} \left[f_1 = \frac{df}{d\tau},\ f_2 = \frac{d^2 f}{d\tau^2} \text{ usw.}\right]$$

Der natürliche Parameter ist definiert durch die Gleichung:

$$\frac{dp}{d\tau} = -if.$$

Den Geraden der Ebene $(12) \equiv 0$ gehört die Lösung der Differentialgleichung:

$$ff_1 + \tau(2f_1^2 - ff_2) \equiv 0, \quad \text{nämlich } f = \frac{1}{\varkappa\tau^2 + \lambda} \text{ zu.}$$

Allgemein entsprechen den Geraden der Ebene reguläre Kreise; im Speziellen den Minimalgeraden singuläre Kreise, den Geraden durch den Anfangspunkt die Erzeugenden, speziell den Minimalgeraden durch den Anfangspunkt sie selbst.

Zu einer umfangreichen Klasse von Kurven kommen wir, wenn wir $f = \tau^n$ wählen. Wir erhalten lauter Schraubenlinien auf dem absoluten Kegel; die Projektionen sind logarithmische Spiralen, welche die invariante Differentialgleichung $(01) \equiv \varkappa(0|1)$ erfüllen.

$$\frac{R^2}{T^2} = -\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

Ausgezeichnete Fälle sind: $n = 0$ und $n = -2$ (singuläre —) $n = -1$ (reguläre Kreise).

Im allgemeinen gehören immer zu zwei Indices n_1 und n_2, für welche $n_1 + n_2 = -2$, spiegelbildlich gleiche Kurven auf dem Kegel. Der natürliche Parameter stellt sich als die Torsion der Kurven heraus.

§ 3. Die Minimalprojektion.

Die Minimalprojektion ordnet jedem (reellen) Punkte x_1, x_2, x_3 in der Ebene $x_3 = 0$ einen orientierten (imaginären) Kreis zu mit dem Mittelpunkt x_1, x_2 und dem Radius ix_3:

$$(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + x_3^2 = 0.$$

Den Punkten des absoluten Kegels entsprechen lauter Kreise durch den Anfangspunkt, so daß wir auch statt der Kurven auf demselben die entsprechenden Kreisscharen und deren Enveloppen studieren können: einerseits ergeben spezielle Kurven interessante Kreisscharen, andererseits spezielle Kreisscharen interessante Kurven. Die Enveloppe hat die Parameterdarstellung:

$$\left\{\begin{matrix} \xi_1 = 0 & \xi_2 = 0 & \text{und} \\ \xi_1 = 2 \cdot \dfrac{01}{1|1} x_2' & \xi_2 = -2 \cdot \dfrac{01}{1|1} x_1' & \end{matrix}\right\},$$

also ihr Bogenelement:

$$\sigma'^2 = \frac{4 \cdot 0|0 \cdot 12^2}{1|1^2}.$$

Wenn wir den Radiusvektor r und den Krümmungsradius ϱ einführen, stellt das Verhältnis

$$\frac{\sigma'^2}{s'^2} = \frac{4r^2}{\varrho^2}$$

eine absolute Differentialinvariante dar, d. h. einen von der Wahl des Parameters unabhängigen Differentialausdruck.

Zu einer beliebigen reellen Geraden gehört ein elliptisches Kreisbüschel (die Enveloppe besteht aus einem Punktpaar), zu einer Geraden durch den Anfangspunkt ein parabolisches Kreisbüschel (die Enveloppe besteht aus einem Linienelement im Anfangspunkt). Betrachten wir eine imaginäre Gerade, so erhalten wir ein Kreisbüschel, welches halb elliptisch, halb hyperbolisch ist, da es durch den reellen Anfangspunkt und einen imaginären Punkt geht; es enthält auch einen reellen Kreis, welcher den reellen Punkt der imaginären Geraden zum Mittelpunkt und dessen Entfernung vom Anfangspunkt zum Radius hat. Gesondert davon sind die Minimalgeraden zu betrachten. Die Enveloppe bildet einer der absoluten Kreispunkte, in welchem alle Kreise des Büschels sich berühren. Man könnte es deshalb halbkonzentrisch nennen. Auch dieses Büschel enthält einen reellen Kreis. Geht schließlich die Minimalgerade durch den Anfangspunkt, so zerfällt das Büschel in lauter Linienpaare, deren eine Linie immer die betrachtete Minimalgerade durch den Anfangspunkt ist. Enveloppe ist das entsprechende absolute Linienelement des Anfangspunktes. Der reelle Kreis wird ein reeller Nullkreis. Die diesen Kreisscharen und ihren Enveloppen entsprechenden Kurven haben wir schon in § 2 betrachtet.

Die allgemeine Parameterdarstellung der Enveloppe ist

$$\xi_1 = f^2\left(\frac{\tau}{f_1} + \frac{1}{2f+\tau f_1}\right)$$
$$\xi_2 = -if^2\left(\frac{\tau}{f_1} - \frac{1}{2f+\tau f_1}\right).$$

Nehmen wir $f = \tau^n$, also eine logarithmische Spirale, so wird die Enveloppe ebenfalls die Differentialgleichung der log. Spiralen erfüllen; sie ist, abgesehen von ihrer Lage dieselbe Spirale, d. h. durch dasselbe $\varkappa$ charakterisiert. $n = 0$, $n = -2$; $n = -1$ sind nicht eigentliche Spiralen. Die Enveloppe ergibt die beiden absoluten Kreispunkte, bzw. den konzentrischen Kreis mit dem doppelten Radius. Im allgemeinen entsprechen wieder Werten $n_1 + n_2 = -2$ spiegelgleiche Enveloppen.

Im engsten Zusammenhang stehen diese Betrachtungen natürlich mit den Beziehungen von Evolvente und Evolute der logarithmischen Spiralen, welche ja auch einander kongruent sind. Auf die Schraubenlinien kommt man auch, wenn man fragt: welche Kurven auf dem absoluten Kegel haben ebene Evolventen? Die Verbindungslinien zugehöriger Punkte erzeugen die abwickelbare Tangentenfläche der Schraubenlinie. Verfahren wir ebenso mit den Punkten der Enveloppe, so erhalten wir lauter Minimalgerade, wie auch aus der Definition der Enveloppe hervorgeht. Diese Minimalgeraden sind also Tangenten einer Minimalkurve. Ihre Gleichungen sind im Falle der Schraubenlinie folgende:

$$y_1 = -(n+1)c\tau^n\left\{\frac{\tau^2}{n} - \frac{1}{n+2}\right\}$$
$$y_2 = i(n+1)c\tau^n\left\{\frac{\tau^2}{n} + \frac{1}{n+2}\right\}$$
$$y_3 = 2c\tau^{n+1}.$$

Die Minimalkurve liegt auf dem Kreiskegel:

$$n(n+2)\{y_1^2+y_2^2\}+(n+1)^2 y_3^2=0.$$

Der Fall

$$n=1 \quad p=3\tau \text{ und } c=+\frac{9i}{4}$$

ergibt die bekannte „kubische Parabel“:

$$y_1=-i\left\{\frac{p^3}{6}-\frac{p}{2}\right\}$$

$$y_2=-\left\{\frac{p^3}{6}+\frac{p}{2}\right\}$$

$$y_3=i\,\frac{p^2}{2},$$

welche auf dem Kegel $3(y_1^2+y_2^2)+4y_3^2=0$ und auf dem Zylinder $(y_1-iy_2)^2-2iy_3=0$ von Minimalgeraden liegt.

Betrachten wir allgemein die Projektionen der Minimalkurven, so müssen sie Evoluten der Enveloppen sein. Schließlich sehen wir noch, was noch nicht bekannt zu sein scheint, daß unsere Ausgangs- oder Mittelpunktskurve Sehnenmittelpunktskurve zwischen Enveloppe und ihrer Evolute ist. Nicht in dieser Klasse von algebraischen Minimalkurven enthalten, aber verwandt zu ihnen ist die Lyonsche Schraubenlinie.

§ 4. Eine neue Zuordnung von ebenen Kurven und Kurven auf dem absoluten Kegel.

Gegeben sei eine ebene Kurve

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x_1(t)\\ x_2&=x_2(t)\end{aligned}\right\}.$$

Ihre Evolute ist

$$y_1=x_1-\frac{x_2'}{s'}\,r$$

$$y_2=x_2+\frac{x_1'}{s'}\,r.$$

Ziehen wir zu den sukzessiven Normalen die Parallelen durch den Anfangspunkt und tragen auf ihnen in entsprechendem Sinne die Länge des Krümmungsradius auf, so erhalten wir die Kurve:

$$\xi_1 = - r \frac{x_2'}{s'}$$

$$\xi_2 = + r \frac{x_1'}{s'}$$

als Projektion der Raumkurve

$$\xi_1 = - r \frac{x_2'}{s'}$$

$$\xi_2 = + r \frac{x_1'}{s'}$$

$$\xi_3 = + i r.$$

Wir sehen dann, daß das Bogenelement der Raumkurve bis auf das Vorzeichen gleich dem Bogenelement unserer Ausgangskurve ist. Durch die Einführung des natürlichen Parameters $p = is$ erhalten wir für diese Kurve:

$$\Phi_p = \frac{1}{r^2} + 2 \cdot \frac{d^2 lr}{dp^2} + \left(\frac{dlr}{dp}\right)^2$$

als Summe von absoluten Differentialinvarianten der zugeordneten ebenen Kurve.

II. Kapitel.

Das zugehörige Äquivalenzproblem.

§ 1. Die Bewegungen, welche den absoluten Kegel invariant lassen, und die entsprechenden Transformationen der Ebene.

Diese Bewegungen sind charakterisiert durch die orthogonale Substitution, welche wir in der Cayleyschen Form annehmen:

$$\left.\begin{array}{ll}
\varkappa\cdot a_{11}=1+r^2-s^2-t^2 & \varkappa\cdot a_{21}=-2(t+rs) \\
\quad\varkappa\cdot a_{31}=-2(s-rt) & \\
\varkappa\cdot a_{12}=2(t-rs) & \varkappa\cdot a_{22}=1-r^2+s^2-t^2 \\
\quad\varkappa\cdot a_{32}=-2(r+st) & \\
\varkappa\cdot a_{13}=2(s+rt) & \varkappa\cdot a_{23}=2(r-st) \\
\quad\varkappa\cdot a_{33}=1-r^2-s^2+t^2 &
\end{array}\right\}\varkappa=1+r^2+s^2+t^2.$$

Für ein bestimmtes Wertetripel besteht die Bewegung in einer Rotation um die Achse

$$x_1 : x_2 : x_3 = r : -s : t.$$

Die Punkte des absoluten Kegels beschreiben Kreise in den dazu senkrechten invarianten Parallelebenen des Abstandes c:

$$r\xi_1 - s\xi_2 + t\xi_3 = c\sqrt{r^2+s^2+t^2}.$$

Die Projektionen dieser Kreise sind die Bahnkurven der entsprechenden Transformationen in der Ebene $x_3 = 0$. Drehen wir das Koordinatensystem so, daß diese Ellipsen symmetrisch zur x_1 Achse werden, so lautet deren Gleichung:

$$\frac{(\xi_1-\lambda)^2}{\alpha^2}+\frac{\xi_2^2}{\beta^2}=1,$$

wobei

$$\lambda=\frac{c\cdot r}{\sqrt{r^2+t^2}},\quad \alpha=\frac{ict}{\sqrt{r^2+t^2}},\quad \beta=ic.$$

Die endlichen Gleichungen dieser Transformation sind:

$$\mathfrak{x}_1 = x_1(\cos^2\mu + \sin^2\mu\cos\vartheta) - x_2\sin\mu\sin\vartheta + i\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\sin\mu\cos\mu\,(1-\cos\vartheta)$$

$$\mathfrak{x}_2 = x_1\sin\mu\sin\vartheta + x_2\cos\vartheta - i\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cos\mu\sin\vartheta,$$

also

$$i\sqrt{\mathfrak{x}_1^2+\mathfrak{x}_2^2} = x_1\sin\mu\cos\mu\,(1-\cos\vartheta) + x_2\cos\mu\sin\vartheta + i\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,(\sin^2\mu+\cos^2\mu\cos\vartheta);$$

hiebei ist $\operatorname{tg}\mu = \frac{t}{r}$ und ϑ der wesentliche Parameter; die infinitesimale Transformation

$$Uf = \xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$\xi_1 = -x_2\sin\mu$$

$$\xi_2 = x_1\sin\mu - i\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cos\mu.$$

§ 2. Die Differentialinvarianten der Transformation.

1. Wir wählen aus die Differentialinvariante I. Ordnung $\frac{01^2}{0\;0}$, welche das Bogenelementquadrat der Raumkurve darstellt. Die Invarianz desselben läßt sich leicht direkt aus den endlichen Gleichungen der Gruppe bestätigen, oder man erweitert die infinitesimale Transformation Uf zu

$$U'f = \xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_1'\frac{\partial f}{\partial x_1'} + \xi_2'\frac{\partial f}{\partial x_2'}.$$

Da die Differentialinvariante aber keine absolute Invariante ist, so gibt sie nur in dem speziellen Fall $\xi_1 = 0$ zu invarianten Kurvenscharen Anlaß, welche durch die entsprechende Transformation wieder in invariante Kurvenscharen derselben Art übergeführt werden.

$$\mu = 0 \qquad \xi_1 = 0 \qquad\qquad \mathfrak{x}_1 = x_1$$

$$\xi_2 = -i\sqrt{x_1^2+x_2^2} \qquad \mathfrak{x}_2 = x_2\cos\vartheta - i\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sin\vartheta.$$

Die invariante Differentialgleichung $\frac{01^2}{0\,0} = -a^2$ hat für $a = i$ als Lösung die Parabelschar $\frac{2}{c} \cdot y = x^2 - \frac{1}{c^2}$. Die entsprechenden Kurven auf dem absoluten Kegel — im Falle der Parabeln sind es singuläre Kreise ($\Phi = 0$) — haben die Eigenschaft, bei einer Drehung um die x_1 Achse immer wieder zu Projektionen Kurven unserer Schar zu erhalten.

2. Wichtiger ist die absolute Differentialinvariante Φ, deren Invarianz ebenfalls entweder direkt gezeigt werden kann oder mit Hilfe einer nochmaligen Erweiterung der infinitesimalen Transformation. Zur Integration der invarianten Differentialgleichung $\Phi = \frac{1}{a^2}$ verwenden wir nach der Theorie der kontinuierlichen Gruppen die Kenntnis von 3 voneinander unabhängigen infinitesimaleu Transformationen (entsprechend den infinitesimalen Rotationen um die Koordinatenachsen), welche die Differentialgleichung invariant lassen. Die Differentialgleichung hat in x, y die Form:

$$\Omega = 2(x^2 + y^2)y'' - (xy' - y)(1 + y'^2) - \frac{1}{a^2}(xy' - y)^3 = 0.$$

Die infinitesimalen Transformationen sind:

$$\xi_1 = 0 \qquad \xi_2 = -y \qquad \xi_3 = i\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\eta_1 = -i\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \eta_2 = +x \qquad \eta_3 = 0$$

$$\eta_1' = -i\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \eta_2' = 1 + y'^2 \qquad \eta_3' = -iy'\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\eta_1'' = -i\frac{(x^2 + y^2)yy'' + (xy' - y)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \qquad \eta_2'' = 3y'y''$$

$$\eta_3'' = -i\frac{(2x + 3yy')(x^2 + y^2)y'' + y'(xy' - y)^2}{\sqrt{x^2 + y^2)}^3}$$

$$U_1''\Omega = \frac{-3iy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \Omega \quad U_2''\Omega = 3y' \cdot \Omega \quad U_3''\Omega = \frac{-3iyy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \Omega.$$

Die Zusammensetzung der infinitesimalen Transformationen ist die symmetrische:

$$(U_1 U_2) = U_3 \quad (U_2 U_3) = U_1 \quad (U_3 U_1) = U_2.$$

Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1' \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2' \\ \xi_3 & \eta_3 & \eta_3' \end{vmatrix} = (xy' - y)^2$$

ergibt, daß die einzige invariante Kurvenschar, welche die allgemeinste Transformation der Gruppe gestattet, die Schar der Geraden durch den Anfangspunkt ist; ihr entsprechen die Erzeugenden des Kegels. Da ferner unsere Transformationsgleichungen den Differentialausdruck $\frac{1}{y'}$ nicht ungeändert lassen, so gehört unsere Differentialgleichung zum 2. Typus. Wählen wir die folgenden unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{U}_1 = \sqrt{i}\, U_1 + \frac{1}{\sqrt{i}} U_3$$

$$\overline{U}_2 = -2i\, U_2$$

$$\overline{U}_3 = \frac{1}{\sqrt{i}} U_1 + \sqrt{i}\, U_3,$$

so wird durch die Transformation

$$\overline{x} = -\frac{\xi_3 \overline{\eta}_1 - \overline{\xi}_1 \eta_3}{\overline{\xi}_1 \eta_2 - \overline{\xi}_2 \overline{\eta}_1} = \sqrt{-i\frac{x+iy}{x-iy}} \qquad \overline{y} = \frac{1}{\sqrt{x-iy}}$$

$$l\,y = \int \frac{-\overline{\eta}_1\, dx + \overline{\xi}_1\, dy}{\overline{\xi}_1 \overline{\eta}_2 - \overline{\xi}_2 \overline{\eta}_1}$$

unsere Differentialgleichung 2. Ordnung $\Omega = 0$ in die sofort integrierbare Form gebracht:

$$y'' = \frac{\varkappa^2}{y^3} \quad \left(\varkappa^2 = \frac{1}{4ia^2}\right).$$

Die Integralkurven sind die ähnlichen Hyperbeln

$$\frac{y^2}{\frac{\varkappa^2}{C^2}} - \frac{(x-x_0)^2}{\frac{\varkappa^2}{C^4}} = 1.$$

x_0 und C^2 sind Integrationskonstante.

In den Koordinaten xy erhalten wir natürlich die Projektionen der Schnitte der Ebenen $\alpha x + \beta y + \gamma z = i a$ mit dem absoluten Kegel (d. h. der regulären Kreise mit dem Radius a).

Unter diesen ist eine Schar besonders hervorzuheben, welche dem Werte $C = 0$ der Integrationskonstanten entspricht. Wir erhalten dafür die Schar der Parabeln $y^2 = \pm 2 i k (x - x_0)$, denen die Kreise auf dem absoluten Kegel entsprechen, welche alle durch einen der absoluten Kreispunkte der Ebene $x_3 = 0$ gehen.

Für die Ebenen, in denen diese Kreise liegen, ist $\beta = \mp i\alpha$, $\gamma = 1$. Daraus können wir aber nicht schließen, daß ihre Normalen Parallelen zur x_3 Achse seien, sondern nur, daß der unendlich ferne Punkt derselben auf der Tangente des absoluten Kegelschnittes im entsprechenden Kreispunkte liegt. Der Winkel der Normalen zur Achse wird gewissermaßen durch die Entfernung dieses Punktes von dem unendlich fernen Punkt der Achse auf jener uneigentlichen Minimalgeraden gemessen; diese Entfernung kann unter anderen auch den Wert Null haben. Die Projektionen dieser Kreise sind Ellipsen, welche durch einen der absoluten Punkte gehen und dort die Minimalgeraden zu Tangenten haben. Ihre Gleichung ist:

$$(\alpha(x + iy) - ia)^2 + (x + iy)(x - iy) = 0.$$

Ihre Achsenrichtung ist die eine Minimalrichtung; bezüglich ihrer Brennpunktseigenschaften stehen diese Kegelschnitte zwischen Ellipse und Parabel. Andererseits sind sie mit dem Kreis verwandt. Berührt ein solcher Kegelschnitt die unendlich ferne Gerade, so entsteht statt einer imaginären Parabel die doppelt zählende Minimalgerade.

Gesondert ist der Fall verschwindender Krümmung ($\varkappa^2 = 0$) zu betrachten. Er ergibt die transformierte Differentialgleichung $\bar{y}'' = 0$. Die Integralkurven werden gebildet von der Gesamtheit aller Geraden $A\bar{x} + B\bar{y} + C = 0$, ausgenommen den Fall $B = 0$, in welchem die Krümmung unbestimmt wird (Fall der Erzeugenden des Kegels).

§ 3. Eine Abbildung der Kurven auf dem absoluten Kegel.

Unsere Koordinaten x, y vermitteln eine Abbildung, bei welcher die Kurven konstanter Krümmung Null des absoluten Kegels (die singulären Kreise) übergehen in die Kurven konstanter Krümmung Null der Ebene (die Geraden).

Die Krümmung ist $\Phi x = 4 i y^3 \bar{y}''$.

Die Kurven auf dem Kegel sind folgendermaßen dargestellt:

$$x = \frac{i\bar{x}^2 + 1}{2y^2} \quad y = \frac{ix^2 - 1}{2iy^2} \quad z = \frac{2\sqrt{-i x}}{2y^2}.$$

Wir haben dann folgendes Entsprechen:

Ebene x, y	Absoluter Kegel	Ebene x, y (Projektion)
I. Beliebige Gerade	Beliebiger singulärer Kreis	Imaginäre Parabel
x Parallele	spezieller singulärer Kreis II	Minimalgerade II
Gerade durch den Anfangspunkt	spezieller singulärer Kreis I	Minimalgerade I
y Parallele	Erzeugende	Gerade durch den Anfangspunkt
x Achse	Absoluter Kegelschnitt	Unendlich ferne Gerade
y Achse	Minimalgerade I	Minimalgerade durch den Anfangspunkt
Unendlich ferne Gerade	Minimalgerade II	

Ebene x, y	Absoluter Kegel	Ebene x, y (Projektion)
II. Kegelschnitte symmetrisch zur x Achse	Kurven konstanter Krümmung = reguläre Kreise	Imaginäre Ellipsen
Symmetrische Parabeln	Kurven konstanter Krümmung = reguläre Kreise durch einen der absoluten Kreispunkte in der Ebene $x_3 = 0$	Imaginäre Ellipsen durch den entsprechenden Kreispunkt
Symmetrische Parabeln durch den Anfangspunkt	$x^2 + y^2 = a^2$ in $x_3 = \pm i a$	Kreis $x^2 + y^2 = a^2$
Symmetrische Linienpaare und Doppellinien.	siehe unter I	siehe unter I

Die einfache Form der Krümmung legt uns die Frage nahe, welche Gleichung zwischen x und y die oben betrachteten Schraubenlinien charakterisiert. Da

$$x = \sqrt{i\tau} \text{ und } y = \frac{1}{\sqrt{f}}, \text{ lautet sie } y^{2\nu} \cdot x^{\mu} = \text{const.} \left(n = \frac{\mu}{\nu}\right).$$

Wenn wir gewisse einfache Funktionen $\Phi(x, y)$ wählen, welche die Integration der Differentialgleichung ermöglichen, so können wir aus den Krümmungseigenschaften der Kurve deren Gleichungen explicite aufstellen. Z. B. kann die Gleichung $\Phi = Cx^{-2\lambda}$ durch die Substitution $y = cx^k$ integriert werden, ebenso, wenn Φ nur eine Funktion von y ist, z. B. $c\,y^{\nu}$ $(\nu = 3)$.

III. Kapitel.

Die Minimalkurven.

Ganz in derselben Weise können wir auch die Minimalkurven behandeln:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t) \\ x_2 &= x_2(t) \\ x_3 &= \underset{(-)}{+}\, i\cdot s(t) \end{aligned}$$

wobei s die Bogenlänge der Projektion ist. Wir führen zu diesem Zwecke nach Study das sphärische Bild der Kurve auf dem absoluten Kegel ein, dessen Koordinaten gleich den ersten Differentialquotienten der Koordinaten der Minimalkurven nach dem natürlichen Parameter sind. Dieser ist definiert durch die Gleichung

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = \frac{123}{\overline{2|2}}.$$

Es erhöhen sich dann in unsern Formeln des I. Kapitels § 2 alle Ziffern um eine Einheit. Die charakteristischen absoluten Differentialinvarianten der Minimalkurven sind also

$$F_p = \frac{14_p}{12_p} = \overline{3|3}_p \quad \text{und} \quad \mathsf{F}_p = \frac{24_p}{12_p} = \overline{3|4}_p.$$

Nimmt man z. B. den Kreis $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$, so wird $F = i$ und $\mathsf{F} = 0$. Die zugehörige Minimalkurve ist eine Minimalschraubenlinie. Bei diesem Beispiel kann man wie auch sonst mit Vorteil die Bogenlänge der Projektion als Parameter einführen. Es ist allgemein:

$$F_s = \frac{7\cdot 13_s^2 - 4\cdot 12_s\cdot\{14_s + 2\cdot 23_s\}}{4\,i\,(23)_s}.$$

Man kann auch den Zusammenhang mit den Weierstraßschen Formeln untersuchen; ebenso nach den Minimalkurven fragen, welche die im I. Kapitel untersuchten Kurven des absoluten Kegels zu sphärischen Bildern haben. Die zugehörige Weierstraßsche Funktion ist:

$$f(\tau) = \frac{-i\,\tau^{2n+3}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}.$$

Den Fällen $n = 0$ und $n = -2$ entsprechen algebraische Minimalkurven dritter Ordnung, deren sphärische Bilder die singulären Kreise I und II sind; $n = -1$; $n = -\frac{1}{2}$ und $n = -\frac{3}{2}$ sind besonders zu untersuchen. Sie ergeben transzendente Minimalschraubenlinien. Im übrigen gehören wieder Indices n_1 und n_2, für welche $n_1 + n_2 = -2$, z. B. $n_1 = +1$, $n_2 = -3$ zusammen.

Mit Ausnahme der Fälle $n = -1$; $n = -\frac{1}{2}$ und $n = -\frac{3}{2}$ liegen diese Minimalkurven auf dem Kegel: $(2n+1)(2n+3)(x_1^2 + x_2^2) + (2n+2)^2 x_3^2 = 0$. [Man könnte diese Minimalkurven auch zu den in Kapitel I betrachteten Minimalkurven in Beziehung bringen.] Für $n = -1$ liegt die Minimalkurve auf dem Kreiszylinder, für $n = -\frac{1}{2}$ und $n = -\frac{3}{2}$ auf den Zylindern von Minimalgeraden: $x_1 \pm i x_2 + 2 i x_3^2 = 0$, welche die Parabel: $x_1 + 2 i x_3^2 = 0$, $x_2 = 0$ von den beiden absoluten Punkten der Ebene $x_3 = 0$ aus projizieren.

IV. Kapitel.

Die sphärischen Kurven.

Die Gleichungen der sphärischen Kurven seien:

$$x_1 = x_1(t) \quad x_2 = x_2(t) \quad x_3 = \overset{+}{(-)} \sqrt{R^2 - 0|0}.$$

Der Krümmung dieser Kurven kann man die charakteristische Form

$$\Phi_{R^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{\{12_p \cdot R^2 + 01_p\}^2}{R^2 (0|0_p - R^2)}$$

geben, wenn der natürliche Parameter definiert ist durch

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = -\frac{R^2 \cdot 1|1 - 01^2}{R^2 - 0|0}; \quad \Psi_{R^2} = \frac{13_p}{\sqrt{R^2 - 0|0_p}};$$

auch hier würden wir mit Hilfe der Identitäten mit den Invarianten $0|0$, $0|1$, $0|2$ und $0|3$ vollständig ausreichen.

In der Minimalprojektion entsprechen den Punkten der Kugel orthogonale Kreise des Äquators (auch Diametralkreise) $R^2 - 0|0 = 0$. $R^2\, 1|1 - 01^2 = 0$ ergibt die erzeugenden Minimalgeraden, deren Projektionen die Gesamtheit aller Tangenten des Äquators von inneren Punkten desselben aus darstellt. Minimalgeraden als Projektionen entsprechen entweder selbst Minimalgerade oder singuläre Kreise; beliebige singuläre Kreise haben wieder die bekannten Parabeln zur Projektion, welche auch in Parallellinienpaare zerfallen können.

Die oben angegebene Form der Krümmung erinnert uns an den Satz über die relative und absolute Krümmung von Mannigfaltigkeiten in der nichteuklidischen Geometrie: das Quadrat der relativen Krümmung einer Kurve in der elliptischen Ebene (auf der Kugel) ist gleich dem Quadrat der Krümmung der Kurve — als Raumkurve im euklidischen Raum aufgefaßt — vermindert um das Riemannsche (hier auch Gaußsche) Krümmungsmaß der elliptischen Ebene (Kugel). [Für Flächen gilt ein gleicher Satz.]

Es ergibt sich, daß unser Ausdruck

$$\Phi_{R^2} - \frac{1}{R^2} = \frac{1}{\varrho^2}$$

das Quadrat der geodätischen Krümmung der sphärischen Kurven also auch eine absolute Differentialinvariante derselben darstellt.

In der allgemeinen Parameterdarstellung auf der Einheitskugel ist dieser Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left\{\frac{12 \cdot (1 - 0|0) - 01 \cdot (1|1 - 01^2)}{(1|1 - 01^2)^{3/2}}\right\}^2.$$

Um die relative (geodätische) Krümmung definieren zu können, müssen wir eine derartige Parameterdarstellung der

Kugel geben, daß die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden:

$$x_1 = \frac{u_1}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}} \quad x_2 = \frac{u_2}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}} \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}}$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{(du_1\, d^2u_2 - du_2\, d^2u_1)^2}{(E\,du_1^2 + 2F\,du_1\,du_2 + G\,du_2^2)^3}.$$

Das ist aber genau das Quadrat der geodätischen Krümmung.

Alle Betrachtungen und Formeln über die sphärischen Kurven auf der Kugel R^2 müssen für $R^2 = 0$ die Formeln des I. Kapitels ergeben. In gleicher Weise wird das Äquivalenzproblem und die Minimalprojektion behandelt. Die Enveloppen der Orthogonal-(Diametral)kreise sind anallagmatische Kurven 4. Ordnung, wenn die Mittelpunktsörter selbst Kreise des Orthogonalsystems bilden. Ist der Ort der Mittelpunkte eine Parabel, so kann man daran einfache geometrische Betrachtungen anschließen, besonders wenn die Parabeln Projektionen von singulären Kreisen darstellen.

V. Kapitel.

Die Kurven in Minimalebenen.

$x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = i\,x_2(t)$. Hier sind die charakteristischen Differentialinvarianten:

$$J_1 = i\,\frac{x_1'\cdot 13 - 3\cdot x_1''\cdot 12}{x_1'^2\cdot 12} = i\,\frac{y'''}{y''}$$

$$J_2 = -\frac{x_1'^2\cdot 14 - 6\cdot x_1'\cdot x_1''\cdot 13 + \{15\cdot x_1''^2 - 4\cdot x_1' x_1'''\}\cdot 12}{x_1'^4\cdot 12} = -\frac{y''''}{y''},$$

wenn $y = F(x)$ die Projektion ist.

Der natürliche Parameter ist

$$x_1 = i\,p$$
$$x_2 = q = f(p).$$

Hier wird das Äquivalenzproblem sehr einfach zu lösen sein, denn die Differentialgleichungen $J_1 = \text{const.}$ und $J_2 = \text{const.}$ lassen sich ohne weiteres integrieren. Die infinitesimalen Transformationen sind: $U_1 = p$, $U_2 = q$, $U_3 = xq$, $U_4 = yq$ mit der Zusammensetzung: $(U_1 U_2) = 0$, $(U_1 U_3) = U_2$, $(U_2 U_3) = 0$, $(U_1 U_4) = 0$, $(U_2 U_4) = U_2$, $(U_3 U_4) = U_3$.

Man wird die einzelnen infinitesimalen Transformationen zu je zwei oder drei zusammenfassen, die invarianten Gebilde dieser Untergruppen aufstellen und schließlich die Betrachtungen mit Hilfe der allgemeinen Theorie der viergliedrigen Gruppen vervollständigen.

Die Minimalprojektion ordnet jedem Punkt der Minimalebene einen Kreis zu, welcher die x_1 Achse berührt; also den Kurven derselben $q = f(p)$ Scharen von solchen Kreisen, beziehungsweise deren Enveloppen:

$$\xi_1 = i\left(p + \frac{2ff'}{1 - f'^2}\right); \qquad \xi_2 = \frac{2f}{1 - f'^2}.$$

Wir erhalten dann die speziellen Fälle:

I. Die Geraden der Minimalebene:

1. Eine Ausnahmestellung hat der Fall $p = \text{const.}$; dies sind die Minimalgeraden, welche zur Projektion die Parallelen zur x_2 Achse und zur Enveloppe ein Linienelement der x_1 Achse haben.

2. $f = c$ ist eine imaginäre Parallele zu der reellen Geraden der Minimalebene: Projektion ist eine Parallele zur x_1 Achse, Enveloppe ebenfalls eine solche mit doppeltem Abstand.

3. $f = cp + d$ ist eine beliebige Gerade, wie auch Projektion und Enveloppe. Hat die Projektion die Richtung φ, so hat die Enveloppe die Richtung 2φ. Spezielle Fälle sind: $d = 0$, $c = \pm i$, $c = \pm 1$.

II. Die singulären Kreise der Minimalebene:

4. Bevor wir die quadratischen Funktionen betrachten, fragen wir nach der Bedeutung der Differentialgleichung:

$$p(1 - f'^2) + 2ff' = 0, \text{ also } \xi_1 \equiv 0.$$

Die Integration ergibt die Lösung:

$$f = \frac{c^2 p^2 - 1}{2c},$$

also $f''' = 0$, d. h. spezielle singuläre Kreise der Minimalebene, in der Projektion die bekannte Parabelschar

$$x_1^2 = -\frac{2}{c}\left(x_2 + \frac{1}{2c}\right),$$

welche die x_1 Achse zur gemeinsamen Direktrix haben. Die zugehörigen Enveloppen fallen alle in den entsprechenden Brennpunkt; eine additive Veränderung von p ergibt nur eine Verschiebung der Figuren.

5. Die quadratische Funktion $f = ap^2 + 2bp + c$ (wobei auch b gleich Null sein kann) ergibt allgemein singuläre Kreise und als zugehörige Enveloppe den Kreis

$$\xi_1^2 + \left(\xi_2 + \frac{1 - 4ac}{4a}\right)^2 = \left(\frac{1 + 4ac}{4a}\right)^2,$$

also wenn $c = -\frac{1}{4a}$ Fall 4.

Gehen wir umgekehrt von den Enveloppen aus und fragen nach den Kurven in der Minimalebene, für welche die Enveloppe ein besonders einfaches Verhalten zeigt, so müssen wir dazu folgende Ausdrücke bilden:

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{2f'}{i(1 + f'^2)}; \quad 1 + \left(\frac{d\xi_2}{d\xi_1}\right)^2 = \left(\frac{1 - f'^2}{1 + f'^2}\right)^2;$$

$$\frac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2} = \frac{-2f''}{1 + 2ff'' - f'^2} \cdot \left(\frac{1 - f'^2}{1 + f'^2}\right)^3,$$

also der Krümmungsradius

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{1 + 2ff'' - f'^2}{-2f''}\right)^2.$$

Wir können dabei unterscheiden zwischen Eigenschaften, welche nur in einer diskreten Anzahl von Punkten, und solchen, welche für alle Punkte gelten. Die letzteren charakterisieren auch das Verhalten in den ersteren Punkten und deren nächster Umgebung.

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{d\xi_2}{d\xi_1} = 0 & \text{gibt} & f = c \\ \dfrac{d\xi_2}{d\xi_1} = \infty & \text{„} & f = \pm ip + d \\ \dfrac{d\xi_2}{d\xi_1} = \pm i & \text{„} & f = \pm p + d \end{array}\right\} \text{ Siehe 1), 2) und 3).}$$

$\dfrac{d\xi_2}{d\xi_1} = \mathrm{tg}\, 2\varphi$, also $y' = -if' = \mathrm{tg}\,\varphi$; die Richtungswinkel verdoppeln sich.

$\dfrac{d^2\xi_2}{d\xi_1^2} = 0 \begin{cases} f'' = 0, \text{ also } f = cp + d \; [\text{oder } f' = 1], \text{ wenn} \\ \text{nicht zugleich } f' = \pm i \text{ gibt die Fälle 1)—3);} \end{cases}$

$\varrho^2 = \infty$, wenn $f'' = 0$ und nicht zugleich $f' = \pm 1$ ebenfalls 1)—3).

Die Integration der Differentialgleichung $\varrho =$ const. gibt als Integrale die Schar:

$$y + \varkappa = 4\,C(x - x_0)^2 + \frac{1}{C},$$

d. h. die unter 5) betrachteten Parabeln mit einer Translation des Mittelpunktes; für $\varkappa = 0$ und $x_0 = 0$ Fall 4).

Mit diesen Ausführungen wären wir am Ende unserer Betrachtungen angelangt. Aus dem vorliegenden ist klar ersichtlich, daß die von uns durch sämtliche Kapitel verfolgte Methode durchaus geeignet ist, einen tiefen Einblick in das Wesen des Äquivalenzproblems der Raumkurven, insonderheit der imaginären Gebilde unter ihnen zu gestatten. Bezüglich der Minimalprojektion sei schließlich noch auf die Abhandl. von W. Blaschke in den Monatsheften für Mathematik und Physik, XXI, 1910, „Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der euklidischen Ebene“ und bezüglich der Kurven in der Minimalebene auf H. Beck „Zur Geometrie in der Minimalebene“, Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft 1912, verwiesen. Beide Autoren behandeln verwandte Probleme, jedoch nicht mit der von uns benutzten Projektionsmethode.