Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1915. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1915
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Anwendung des Prinzips der gekoppelten Schwingungen auf einige physiologische Probleme.

Von **Otto Frank.**

Vorgetragen am 5. Juni und 3. Juli 1915.

Seit einer Reihe von Jahren bin ich mit der Feststellung der Leistungen der Registrierapparate beschäftigt, die zu physiologischen Zwecken gebraucht werden. Es läßt sich der Nachweis erbringen, daß die wesentlichen Eigenschaften der Registrierinstrumente die Empfindlichkeit des Instrumentes, die Schwingungszahl und Dämpfung des bewegten Systems sind. Meine Untersuchungen habe ich mit der Theorie der Manometer begonnen. Die Leistungen des einfachsten Manometers, das aus einer mit Flüssigkeit gefüllten Röhre besteht, deren eines Ende mit dem Teil des Kreislaufssystems in Verbindung steht, an dem der Druck bestimmt werden soll, während das andere Ende durch eine elastische „massenlose" Membran oder Platte verschlossen ist, habe ich hinreichend exakt darstellen können. Ich habe jedoch auch verwickeltere Systeme mit Methoden zu behandeln versucht, von denen ich ohne weiteres gesehen und erklärt habe, daß sie nicht als streng gelten können. Dazu gehören Systeme wie das Hebelmanometer, bei dem ein nicht mehr als massenlos zu behandelnder Hebel auf die Membran aufgesetzt ist, ferner Systeme, bei denen Luftsäulen wesentliche Bestandteile sind oder solche, bei denen die Massen der Membran und Platten nicht mehr zu vernachlässigen sind. Die Vereinfachungen, die ich zur Behandlung vorgenommen habe, waren wohl sämtlich so getroffen, daß die wesentlichen Eigenschaften der Systeme nicht berührt wurden. Aber ich hatte immer den Wunsch nach einer strengeren und weniger gekünstelten Behandlung. Dabei hatte ich den Eindruck, daß das Prinzip der gekoppelten Schwingungen, das für gewisse elektrische Erscheinungen mit so großem Vorteil angewandt wird, auch bei den erwähnten mechanischen Systemen die Lösung der Aufgaben ermöglichen könnte. Dieser Meinung habe ich vor längerer Zeit brieflich Ausdruck verliehen. Vor zwei Jahren konnte ich eine Differentialgleichung zur Behandlung der gekoppelten Schwingungen mechanischer Systeme aufstellen. Erst nachträglich habe ich gesehen, daß die gekoppelten mechanischen Systeme schon eine eingehende Behandlung erfahren haben. Ich habe solche Probleme in der „Technischen Mechanik" von A. Föppl aufgefunden, auch A. Sommerfeld hat ein reizvolles derartiges Problem behandelt.[1]) M. Wien hat in eingehender Weise die gekoppelten Schwingungen analysiert.[2]) Einen außerordentlichen Nutzen gewährte mir das Studium von Rayleighs „Theory of Sound." Es gelingt an der Hand der Theorie dieser Bewegungsformen eine überraschend große Reihe von Problemen, die für die Physiologie oder physiologische Technik von Bedeutung sind, entweder vollständig oder doch hinreichend genau lösen. Die Systeme besitzen dabei eine beschränkte Anzahl von Freiheitsgraden oder auch unendlich viele Freiheitsgrade, von denen aber fast durchweg nur einige wenige berücksichtigt zu werden brauchen. In vielen Fällen genügt die Berechnung der Grundschwingung des Systems, wie ich schon bei meinen früheren Untersuchungen erkannt habe. Ihre Ermittelung ist aber nur auf der Basis der allgemeinen Theorie sicher durchzuführen.

1. Das Hebelmembran-Manometer. Es läßt sich als ein System von 2 Freiheitsgraden auffassen ebenso wie das unter Nr. 2 behandelte Federmanometer. Ich gebe zunächst die allgemeinen Gleichungen eines derartigen Systems.

---

[1]) Festschrift A. Wüllner, Teubner 1905, S. 162.

[2]) Wiedemanns Ann., Bd. 61, S. 151.

Die Bewegungsgleichungen lauten:[1])

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} + Ax + Cy &= 0 \\ m_2 \ddot{y} + By + Cx &= 0. \end{aligned} \qquad 1)$$

Für die Schwingungszahl n (in 2π Sekunden, in der Enc. d. math. Wiss. durchgehends als „Frequenz" bezeichnet), ergibt sich:

$$n^2 = \frac{1}{2 m_1 m_2} \{ m_1 B + m_2 A \pm \sqrt{(m_1 B + m_2 A)^2 - 4 m_1 m_2 A B (1 - C^2/AB)} \}. \qquad 2)$$

Den Ausdruck $\frac{C^2}{AB}$ bezeichne ich als Koppelungsfaktor K.[2]) Er ist eine reine Zahl, immer positiv und in den wirklichen Fällen niemals größer als 1. Zur Umwandlung des obigen Ausdruckes führe ich die Schwingungszahlen der einzelnen Teile des Systems ein, die sich ergeben, wenn jeweilig die Massen m_2 und m_1 Null werden. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} n_A^2 &= \frac{A}{m_1}(1 - K) \\ n_B^2 &= \frac{B}{m_2}(1 - K). \end{aligned} \qquad 3)$$

Die Schwingungszahlen des gekoppelten Systems werden dann zu:

$$n^2 = \frac{1}{2(1-K)} \{ n_A^2 + n_B^2 \pm \sqrt{(n_A^2 + n_B^2) - 4 n_A^2 n_B^2 (1 - K)} \}. \qquad 4)$$

Ist K klein bzw. die Koppelung lose, dann erhält man:

$$n^2 = n_A^2 \text{ bzw. } = n_B^2. \qquad 5)$$

---

[1]) In diesen Gleichungen tritt bei „Beschleunigungs-Koppelung" an Stelle von Cy und Cx oder neben diesen je ein Glied $m_3 \ddot{y}$ bzw. $m_3 \ddot{x}$ auf. Vgl. Rayleigh, S. 160.

[2]) Von M. Wien sind andere Größen als Koppelungskoeffizienten bezeichnet worden. Für die von mir hier diskutierten Probleme eignet sich die Größe K sehr gut, um die dynamische Verbindung der beiden Massen zu charakterisieren.

Ist K nahe 1, d. h. die Koppelung enge, so erhält man unter den entsprechenden Vernachlässigungen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{für die langsamere Schwingung } n_1^2 = \frac{n_A^2 n_B^2}{n_A^2 + n_B^2} \\ &\text{„ \quad „ \quad raschere \qquad „ } \quad n_2^2 = \frac{n_A^2 + n_B^2}{1 - K} \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

Wird noch $n_A = n_B$, wie dies bei dem rationell gebauten Hebel- oder Federmanometer der Fall ist, so ergibt sich:

$$n_1 = n_A \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad n_2 = n_A \sqrt{\frac{2}{1-K}} \qquad 7)$$

oder

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{2}{\sqrt{1-K}}.$$

Das für die Untersuchung des Kreislaufes gebrauchte Hebelmanometer besteht aus einer mit Flüssigkeit gefüllten Röhre, deren eines Ende mit dem Kreislaufsystem in offener Verbindung steht, während das andere durch eine Membran (gewöhnlich aus Gummi) abgeschlossen ist. Auf der Membran ist eine starre Platte zentrisch befestigt. Die Exkursion der Platte wird durch einen materiellen Schreibhebel vergrößert aufgeschrieben. Die Massen, die hier in Betracht kommen, sind erstens die auf den Verbindungspunkt des Hebels mit der Platte „reduzierte“ Masse des Hebels.[1]) Ferner die „wirksame“ Masse M' der Flüssigkeit. Zur Berechnung der Trägheitskräfte der Flüssigkeit habe ich den Ausdruck $M' = \varrho \frac{L}{Q}$ eingeführt. Er hat sich vollkommen bewährt. Ich komme auf seine Bedeutung unten zurück. Die Verrückungen des Systems bestehen in der linearen Verrückung f der Platte, mit welcher der Hebel gelenkig verbunden ist bzw. des Verbindungspunktes von

[1]) Der Begriff der reduzierten Masse wurde von mir in meiner ersten Abhandlung über die Theorie der Registrierinstrumente eingeführt. Ihre Einführung wurde bemängelt; sie ist aber in der technischen Mechanik z. B. bei der einfachen Kreisbewegung einer Scheibe und in der allgemeinen Mechanik bei Gelenksystemen durchaus bewährt.

Membran und Hebel (s. oben). Ferner in der Verrückung der Flüssigkeit. Ich bestimme sie nach dem Durchgang des Volumens V durch den Querschnitt der Röhre. (Fluß oder Strom.) Die Elastizitätskoeffizienten des Systems bestehen einmal in der durch die Einheit der Verrückung f geweckten elastischen Kraft η. Weiter in der durch die Einheit der Volumverrückung erzeugten elastischen Kraft E'. Auf diesen Grundzügen läßt sich zunächst die Statik des Systems aufbauen. E' ist bei einer gleichmäßig mit der Spannung S gespannten Membran von dem Radius r und dem Verhältnis δ des Plattenradius zum Radius der Membran $= \frac{8\,S}{r^4(1-\delta^4)\,\pi}$. η bemißt sich zu $\frac{2\,\pi\,S}{l\left(\frac{1}{\delta}\right)}$. Außerdem kommt für die Gleichgewichtsverhältnisse noch die Empfindlichkeit, d. h. die Verrückung f für die Druckeinheit in Betracht. Sie ist $= \gamma = \frac{r^2(1-\delta^2)}{4\,S}$ (vgl. Physiologische Methodik, herausgegeben von Tigerstedt, Abschnitt Haemodynamik, S. 14—16).

Läßt man die Kraft P und den Druck p auf das System einwirken, so ergeben sich folgende Verrückungen:

$$V = P\gamma + p/E'$$

$$f = \frac{P}{\eta} + p\gamma.$$

Daraus berechnen sich umgekehrt für die Verrückungen V und f der entwickelte Druck p bzw. die Kraft P

$$p = \frac{VE' - f\eta\gamma E'}{1-\eta\gamma^2 E'} \qquad (\text{Masse } m_1 = M')$$

$$P = \frac{f\eta - V\eta\gamma E'}{1-\eta\gamma^2 E'} \qquad (\text{Masse } m_2 = m)$$

$\frac{E'}{1-\eta\gamma^2 E'}$ entspricht also dem Koeffizienten A der obigen Gleichung, $\frac{\eta}{1-\eta\gamma^2 E'}$ dem Koeffizienten B und $\frac{\eta\gamma E'}{1-\eta\gamma^2 E'}$ dem

Koeffizienten C. Der Koppelungsfaktor K ist also $= \eta \gamma^2 E'$. Bei meinen früheren angenäherten Berechnungen der Schwingungszahlen des Hebelmanometers habe ich schon die Bedeutung dieser Größe erkannt, ich hatte sie mit $\frac{1}{\varphi}$ bezeichnet (vgl. Tab. der „Hämodynamik“, S. 18). Die 2 Schwingungszahlen des Systems berechnen sich nach den obigen Formeln 2 und 4. Wenn die Platte groß wird, dann ist K groß und die Koppelung enge. Ich habe früher darauf hingewiesen, daß es wünschenswert ist, die Platte möglichst groß zu wählen bzw. das Membranmanometer einem Kolbenmanometer möglichst ähnlich zu gestalten. Dann liegt der Fall, der in den obigen Gleichungen 6 beschrieben ist, vor. Und die langsamste Schwingung kann nach der Formel $T = \sqrt{T_A^2 + T_B^2}$ berechnet werden. Nach dieser Formel habe ich früher das Hebelmanometer in Anlehnung an die Verhältnisse des Kolbenmanometers berechnet. Die Differenz gegenüber der Formel 2 und 4 ist geringfügig bei den in der Physiologie gebrauchten, rationell gebauten Manometern. Da für diese, wie ich nachgewiesen habe, die beiden Schwingungszahlen der Einzelsysteme A und B gleich gemacht werden müssen, so kann man den äußersten Fehler, der überhaupt bei der Anwendung meiner früheren Formel begangen wird, berechnen, wenn δ bzw. $K = 0$ ist. Er beträgt dann $40\,^0/_0$.

2. Das Federmanometer. Bei dem von Fick vorgeschlagenen Federmanometer drückt gegen die Platte eine Feder. Die elastische Kraft der Feder kann durch Torsion oder durch Biegung erzeugt sein. Bei der Konstruktion dieses wichtigen Instrumentes verfolgt man, wie ich früher auseinandergesetzt habe, die Absicht, die wechselnde und unvollkommene Elastizität des Kautschuks der Membranmanometer durch die Elastizität von Metallen zu ersetzen. Die Membran soll eigentlich nur zur Abdichtung dienen. In der Grenze wird dann das Federmanometer mit dem aus technischen Gründen unverwendbaren Kolbenmanometer identisch. Um ziffermäßig den

Anteil der Gummielastizität an den Leistungen des Federmanometers festzustellen, habe ich das Verhältnis n[1]) eingeführt, das sich aus folgender Gleichung ergibt:

$$\eta = n \cdot E,$$

wobei E der Elastizitätskoeffizient der Feder ist. Die mit η, γ, E', φ bezeichneten Größen sind die gleichen Funktionen der Spannung und der Radien wie bei dem Membranmanometer. Die den obigen Gleichungen analogen lauten hier:

$$V = (P - Ef)\gamma + p/E'$$

$$f = \frac{P - Ef}{\eta} + p \cdot \gamma.$$

Daraus ergibt sich weiter:

$$p = \frac{VE' - f\eta\gamma E'}{1 - \eta\gamma^2 E'}$$

$$P = \frac{f(\eta + E - \eta\gamma^2 E' E) - V\eta\gamma E'}{1 - \eta\gamma^2 E'}.$$

Der Koeffizient A ist also $= \frac{E'\varphi}{\varphi - 1}$. Der Koeffizient B $= \frac{E(n\varphi + \varphi - 1)}{\varphi - 1}$ und $C = \frac{1}{\gamma(\varphi - 1)}$. Der Koppelungsfaktor wird zu $\frac{n}{n\varphi + \varphi - 1}$. In meinen früheren Abhandlungen habe ich ihn mit $1/\Phi$ bezeichnet. Bei dem von Petter und mir nach den Ergebnissen der Theorie konstruierten Manometer betragen die Konstanten:

$$n = 0.1, \qquad \delta = 0.8, \text{ also } \frac{1}{\varphi} = 0.9835, \ \frac{1}{\Phi} = K = 0.8424,$$

$$2r = 0.89, \quad m = 36.7, \quad M' = 100.$$

$$E = 5.7 \times 10^6, \quad \eta = 0.57 \times 10^6.$$

Der Koppelungsfaktor beläuft sich auf 0.8424. Die kürzere Schwingung ist bei der Russschreibung, für die das Instrument

[1]) Selbstverständlich nicht mit der Schwingungszahl zu verwechseln.

selbstverständlich bestimmt ist, nicht zu ermitteln. Sie wurde in einem besonderen Versuch, bei dem ein Gewicht statt der reduzierten Masse des Hebels mit der Platte verbunden wurde, durch optische Registrierung festgestellt. Es sind Schwingungen, die auf die Hauptschwingung aufgesetzt erscheinen. Die aus den obigen Daten nach der Formel 7 berechnete Schwingungszahl, wonach sie 5.04 fachgrößer als diejenige der Hauptschwingung sein sollte, stimmt sehr gut mit der beobachteten überein. Es ist also nicht mehr der geringste Zweifel, daß sowohl das Hebelmanometer als das Federmanometer in der angegebenen Weise als System von 2 Freiheitsgraden endgültig beschrieben ist. Der Fehler, den ich nach meiner früheren Formel, vgl. S. 294, für die Berechnung der Hauptschwingung begangen habe, beträgt nur 2%.

3. Luftsäule in einer zylindrischen Röhre, die an beiden Seiten mit einer Membran verschlossen ist. Die Membran wird zunächst als masselos behandelt. Die Lösung dieses Problems ist wertvoll für die Behandlung der unter den nächsten Nummern angeführten Aufgaben. Vor allem für die Theorie der Lufttransmission. Bei der Analyse dieser und ähnlicher Probleme habe ich mich mit großem Vorteil einer Beziehung bedient, die ich in der folgenden Formel kurz ausdrücke: $m_r \xi_r n^2 =$ Elastische Kraft. m_r ist die Masse eines Teils oder Elementes des Systems, ξ_r seine maximale Verrückung und die elastische Kraft ist die an dem Systemteil wirkende, sinngemäß gebildete Komponente der elastischen Kraft. Sie muß umgekehrte Richtung wie die Verrückung haben. Es ist eine Gleichung, die sich auf Grund des d'Alembertschen Prinzips ergibt für solche Bewegungen des Systems, bei denen vermöge der Anfangsbedingungen die sämtlichen Teile des Systems in der gleichen Periode n schwingen (vgl. Rayleigh I, S. 107). Sie ist vollständig analog der für die Behandlung von Luftwellen allgemein benutzten Gleichung. Sind die einzelnen Teile des Systems diskrete Massen, so resultiert für n eine algebrasche Gleichung von dem Grad, der durch die Anzahl der Massen bzw. der Freiheitsgrade bestimmt wird. Besteht das ganze

System oder ein Teil desselben aus einem kontinuierlichen Medium, dann werden die Massen zu den Massenelementen und die elastische Kraft für das Massenelement ergibt sich aus einer Differentialbeziehung. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung führt zu unendlich vielen Lösungen für n, d. h. zu unendlich vielen Freiheitsgraden. (Unsere Formel konnte selbstverständlich auch für die Lösung der Probleme 1 und 2 verwendet werden.) Wendet man das Prinzip auf die zylindrische Luftsäule von der Länge L und dem Querschnitt Q an, so erhält man folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = -\frac{\varrho n^2 \xi}{\varkappa}.$$

In ihr ist $\varkappa$ der Volumelastizitätskoeffizient der Luft, der je nach dem es sich um isotherme oder adiabatische Zustandsänderung handelt, verschieden ist. ϱ ist die Dichte der Luft. Die Lösung der Gleichung ist:

$$\xi = A \sin(kx + \varepsilon), \qquad k = n\sqrt{\frac{\varrho}{\varkappa}}$$

worin k die Größe $\frac{2\pi}{\lambda}$ („Wellenzahl") bedeutet, wie sie in vielen Formeln der Luftschwingungen und Wellen vorkommt. Die Elastizität der Membranen drücke ich wieder durch dieselben Koeffizienten (E') aus, wie sie in den vorhergehenden Problemen benutzt worden sind. Ich bezeichne sie mit e_1 und e_2. Darnach lauten die Grenzbedingungen:

$$e_1 \xi_0 Q = \varkappa \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_0 \text{ und } e_2 \xi_L Q = -\varkappa \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_L$$

oder:

$$e_1 Q \sin\varepsilon = \varkappa \cos\varepsilon \;\text{ und }\; e_2 Q \sin(kL + \varepsilon) = -\varkappa \cos(kL + \varepsilon)$$

$$\text{bzw. } \tan\varepsilon = \frac{k\varkappa}{Qe_1} \text{ und } \tan(kL + \varepsilon) = -\frac{k\varkappa}{Qe_2}.$$

Mit diesen zwei Gleichungen zur Bestimmung von k und ε ist die Lösung des Problems gegeben. Interessant ist die Behandlung der Grenzfälle.

a) Wenn die eine Membran durch eine starre Wand ersetzt wird, d. h. $e_2 = \infty$ wird, erhalten wir:

$$\tan \varepsilon = \frac{k\varkappa}{Q e_1} \quad \text{und} \quad kL + \varepsilon = \pi \text{ bzw. } m\pi.$$

b) Wenn noch e_1 unendlich wird, resultiert

$$\varepsilon = 0 \text{ und } kL = m\pi \text{ oder } \lambda = 2L/m.$$

Die bekannte Lösung für die Schwingungen einer Luftsäule in einer an beiden Enden geschlossenen zylindrischen Röhre.

c) Wenn statt dessen $e_1 =$ Null wird, d. h. die Röhre am Anfang offen ist, ergibt sich:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} \text{ und } kL = \pi(2m - 1)/2 \text{ oder } \lambda = 4L/(2m - 1).$$

Die Lösung für eine gedeckte Pfeife.

d) Wenn e_1 Null ist und am anderen Ende die Röhre durch eine Membran verschlossen ist, ergibt sich:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} \text{ und } \tan\left(kL + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-k\varkappa}{Q e_2}$$

oder nach einigen Umformungen:

$$\tan kL = \frac{Q e_2}{k\varkappa}.$$

Wird auch diese Membran durch eine starre Platte ersetzt, so resultiert wieder die Gleichung

$$kL = \pi(2m - 1)/2 \quad (\text{vgl. } c)$$

e) Wird e_1 und $e_2 =$ Null, d. h. die Röhre an beiden Seiten offen, so wird $kL = (m - 1)\pi$ und für den Grundton $k = 0$, $n = 0$ und $\lambda = \infty$. Dies Resultat widerspricht scheinbar der üblichen Behauptung, daß die Wellenlänge des tiefsten Tones für eine an beiden Seiten offenen Pfeife $= 2L$ ist. Aber dieser Ton ist zweifellos der erste Oberton des Systems. Der Grundton muß tiefer sein als der Ton, den eine an beiden Seiten geschlossene Röhre gibt. Denn bei dem letzteren Fall steht das System unter einem Zwang und seine Schwingungen müssen nach Rayleigh zwischen den Schwingungen der an beiden Seiten offenen Röhre liegen. Der ideale Grenzfall bietet ein gewisses systematisches Interesse. Es erscheint aber auch nicht ausgeschlossen, den beliebig tiefen Grundton experimentell darzustellen.

Sehr bemerkenswerte Resultate ergeben sich, wenn die Flüssigkeit inkompressibel oder schwach kompressibel gemacht wird.

f) Es resultiert dann, wenn $\varkappa = \infty$ ist:

$\lim \tan \varepsilon = \infty$ und $\lim \tan (kL + \varepsilon) = -\infty$; ε und $kL + \varepsilon$ werden nahezu $+\frac{\pi}{2}$.

Setzt man $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \gamma$ und $kL + \varepsilon = \frac{\pi}{2} + \delta$, worin γ und δ unendlich kleine Winkel sind, so erhält man schließlich:

$$kL = \gamma + \delta = \frac{Q}{k\varkappa}(e_1 + e_2) \text{ bzw. } n^2 = \frac{(e_1 + e_2)\,Q}{L \cdot \varrho},$$

d. h. die Formel für die Schwingung einer Flüssigkeitssäule, die von den Membranen mit den Koeffizienten e_1 und e_2 begrenzt ist. Es ist der Ausdruck für die Schwingungszahl des von mir als optisches Manometer bezeichneten Systems, vgl. S. 289. In ihm ist die wirksame Masse $M' = \frac{L\varrho}{Q}$ enthalten.

g) Kann die Flüssigkeit nicht mehr als absolut inkompressibel betrachtet werden, so muß von der Reihenentwicklung für arc tang auch das zweite Glied $-\frac{x^3}{3}$ berücksichtigt werden. Es ergibt sich dann

$$kL = \gamma + \delta = \frac{Qe_1}{k\varkappa} - \frac{1}{3}\left(\frac{Qe_1}{k\varkappa}\right)^3 + \frac{Qe_2}{k\varkappa} - \frac{1}{3}\left(\frac{Qe_2}{k\varkappa}\right)^3.$$

Berücksichtigt man, daß k^2 annähernd $= \frac{Q}{L\varkappa}(e_1 + e_2)$ ist (vgl. oben unter f und S. 297), so erhält man

$$n^2 = \frac{(e_1 + e_2)\,Q}{L\varrho}\left\{1 - \frac{LQ(e_1^3 + e_2^3)}{3\varkappa(e_1 + e_2)^2}\right\}.$$

Ich habe früher gezeigt, daß bei den leistungsfähigsten Manometern die Kompressibilität der Flüssigkeit nicht mehr vernachlässigt werden kann. Wir erhalten in dem Summanden in der Klammer einen Korrekturfaktor für die Berechnung der Schwingungszahl bei solchen Systemen.

Instruktiv werden diese analytischen Beziehungen, wenn man sie graphisch darstellt. Die Länge der Luft bzw. Flüssigkeitssäule stellen dann verschieden lange Teile einer Sinuskurve dar. In dem Fall 3b reicht die Länge von 0 bis π, in dem Fall 3c von 0 bis $\frac{\pi}{2}$. Am interessantesten erweisen sich die Fälle 3e, f, g. Bei ihnen umgreift die Länge der Säule nur das Maximum der Sinuskurve. Dadurch wird es erreicht, daß die Verrückungen für die ganze Länge der Flüssigkeitssäule bzw. der Luftsäule gleich groß werden.

Zu genau denselben Ergebnissen führt die Analyse der Schwingungen einer schweren Saite, die an masselosen Federn aufgehängt ist.

4. Angenäherte Berechnung des Problems 3. Ehe ich die volle Lösung des Problems 3 erreicht hatte, habe ich eine angenäherte versucht. Man kann aus Rayleigh Art. 89 ersehen, daß angenäherte Berechnungen, wenn sie sinngemäß durchgeführt werden, überraschend genau ausfallen. Sie ermöglichen zunächst nur die Berechnung der tiefsten Schwingung des Systems, aber auch die höheren lassen sich durch besondere Kunstgriffe ermitteln. Das Prinzip der angenäherten Berechnung, die ich im folgenden nur ganz kurz angebe, beruht darauf, den Teilen des Systems eine willkürlich aber vernünftig ausgewählte Verrückung zu erteilen, dann die maximale potentielle Energie und die maximale kinetische Energie der Schwingung zu berechnen. Ich lasse die Elementarscheiben der Luftsäule Verrückungen durchmachen in Form einer parabolischen Funktion der Strecke x. Sie resultiert bei der Saite, wenn sie gleichmäßig belastet wird, und bei der senkrecht gestellten Luftsäule, wenn sie sich unter ihrem eigenen Gewicht verrückt. Die Rechnungen sind ein-

fach, aber ziemlich langwierig und führen für die maximale während einer Schwingung entwickelte potentielle Energie zu dem Ausdruck

$$V = \frac{e_1 e_2 L^2 Q^2 + (4 e_1 \varkappa + 4 e_2 \varkappa) L Q + 12 \varkappa^2}{24 (e_1 e_2 L Q + e_1 \varkappa + e_2 \varkappa) \varkappa}.$$

Für die maximale kinetische Energie ergibt sich:

$$T = \frac{\varrho n^2 L}{240 Q \varkappa^2 (e_1 e_2 L Q + e_1 \varkappa + e_2 \varkappa)^2} \{e_1^2 e_2^2 L^4 Q^4$$
$$+ 7 e_1 e_2 (e_1 + e_2) L^3 Q^3 \varkappa + [16 (e_1 + e_2)^2 + 10 e_1 e_2] L^2 Q^2 \varkappa^2$$
$$+ 80 (e_1 + e_2) L Q \varkappa^3 + 120 \varkappa^4\}.$$

Die Schwingungszahl ergibt sich, wenn man diese beiden Energien gleich setzt. Es ist bemerkenswert, daß für die Grenzfälle Werte resultieren, die den nach 3 berechneten außerordentlich nahe kommen. So erhalten wir für den Fall 3b statt des Wertes $2L : 1.99\,L$ und bei dem Fall 3c statt $4L : 3.97\,L$. Wenn die Flüssigkeit inkompressibel bzw. schwach kompressibel ist, dann erhält man dieselben Beziehungen wie bei der genauen Formel. Damit ist gezeigt, daß die angenäherte Berechnung derartiger Probleme zu außerordentlich genauen Werten führen kann. Sie wird in vielen Fällen, wenn die exakte Berechnung nicht durchgeführt werden kann oder zu umständlich ist, zum Ziel führen.

5. Optisches Manometer (vgl. S. 299) mit angeschlossener Luftsäule. Eine interessante Anwendung der Lösung des Problems 3 oder 4 kann auf folgendes System gemacht werden. Es besteht aus einer Röhre vom Querschnitt Q, in der sich hinter einer Membran zunächst eine Flüssigkeitssäule von der wirksamen Masse M' und darauf eine Luftsäule von der Länge L befindet. Die Membran 1 fehlt. Damit wird $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, vgl. 3c. Der Hauptansatz lautet:

$$V n^2 M' = V e + k \varkappa A \cos\left(\frac{\pi}{2} + k L\right).$$

Hierin ist V die Volumverrückung der Flüssigkeit. Die weitere Entwicklung ist folgende:

$$V n^2 M' = V e - A k \varkappa \sin k L$$

bzw. $A k \varkappa \sin k L = V(e - n^2 M') = Q A \cos k L (e - n^2 M')$.

Lösung:

$$\tan k L = \frac{Q(e - n^2 M')}{k \varkappa} = \frac{Q(e - k^2 c^2 M')}{k \varkappa},$$

worin c die Schallgeschwindigkeit (adiabatisch oder isotherm) ist. Man hat das Gefühl, daß dieses System sich wie ein System von 2 Freiheitsgraden verhalten kann. Ich habe auf Grund dieser Annahme früher eine angenäherte Berechnung durchgeführt, die ich hier nicht aufnehme, da sie keine prinzipielle Bedeutung hat. Es hat sich gezeigt, daß sie hinreichend genau ist. Ich habe sie nämlich an einem Experiment erprobt, das die Anregung zu diesen Berechnungen gegeben. Die Richtigkeit der oben angegebenen Gleichung (vgl. 3 f) für die Schwingung einer Flüssigkeitssäule unter der Einwirkung einer Membran war angezweifelt worden. Von den Kritikern ausgeführte Versuche sollten dartun, daß ein solches System überhaupt keiner Regel folgt und die Schwingungen ganz unregelmäßigen schwebungsartigen Charakter tragen. Ich hatte den Verdacht, daß bei diesen Experimenten Luftsäulen angehängt waren, und habe experimentell gezeigt, daß dann ähnliche Schwingungen auftreten, wie sie der Flüssigkeitssäule allein zugeschrieben waren. Läßt man die Luftsäule weg, so resultieren schwebungsfreie Schwingungen mit bestimmtem Dekrement, deren Zahl bis auf 1—2 % nach der obigen Formel (3 f) zu berechnen ist. Fügt man die Luftsäule an, so können Schwebungen auftreten, die sich nach der angenäherten Formel gut berechnen lassen. Das System stellt sich damit in der Hauptsache als ein lose gekoppeltes von 2 Freiheitsgraden dar. Dies muß sich nun auch aus der genauen Formel ergeben. In der Tat stimmt die Berechnung nach der genauen Formel noch um 3—4 % besser mit der Beobachtung und zwar in der korrekten Richtung (vgl. Rayleigh, Art. 88, 89). Stellt man die obige Beziehung graphisch dar, so sieht man, daß die Funktion der rechten Seite die Tangentenfunktion der linken Seite schneidet oder schneiden kann und zwar zweimal von $0-\pi$. Von da ab jeweils nur hinter $(2m+1)\pi$ usw. Die zwei ersten Schnittpunkte repräsentieren die Schwingungen, die miteinander zu Schwebungen interferieren können, wenn sie nahe genug beieinander liegen.

Um den Koppelungsfaktor zu ermitteln, setze ich den Wert für die Schwingungszahl des Systems, das aus der Membran mit Flüssigkeitssäule ohne Luftsäule besteht, in die Gleichung ein. Der Wert ist $n_A^2 = \frac{e}{M'}$. Es ergibt sich dann

$$\tan k L = \frac{Q\left(e - \frac{n^2}{n_A^2} \cdot e\right)}{k \varkappa}$$

oder:

$$\frac{n^2}{n_A^2} = 1 - \frac{\varkappa k \tan k L}{Q e},$$

d. h. die Schwingungszahl des gekoppelten Systems kann um so näher an diejenige des Einzelsystems rücken, je kleiner der Wert $\frac{\varkappa}{Qe}$ ist, bzw. je größer der Querschnitt der Röhre und der Elastizitätskoeffizient E' der Membran ist. Eine ganz ähnliche Beziehung erhält man, wenn man die Schwingungen eines Systems von 2 Freiheitsgraden berechnet, das besteht aus 2 diskreten Massen, die an 2 Federn hintereinander aufgehängt sind. Dann wird der Koppelungsfaktor $= \frac{1}{\frac{e_1}{e_2} + 1}$ und um so kleiner, je größer das Verhältnis des Elastizitätskoeffizienten der dem Aufhängepunkt benachbarten Feder e_1 zu dem zweiten Elastizitätskoeffizienten e_2 ist.

6. Lufttransmission. Bei dem Verfahren der Lufttransmission, das zu Registrierzwecken wesentlich zuerst von Marey angewandt worden ist, wird eine Bewegung von einer Stelle durch eine Luftsäule auf eine Membran übertragen. Das voll-

ständige System besteht aus der Röhre, die mit Luft erfüllt und an beiden Enden durch Membranen verschlossen ist. Wird die eine Membran deformiert, so deformiert sich die zweite durch die entsprechenden Druckschwankungen. Die Deformation der zweiten Membran wird durch einen mit ihr verbundenen Hebel aufgeschrieben. Im kompliziertesten Fall wird die Deformation der ersten Membran ebenfalls durch einen mit ihr verbundenen Hebel hervorgerufen. Die Schwingungen dieses komplizierten Systems werden durch Kombination der Analyse des Falles 1 und des Falles 3 berechnet. Wenn L und Q Länge und Querschnitt der Luftsäule, ferner m_1 und m_2 die reduzierten Massen der beiden Hebel, f_1 und f_2 die Exkursionen der beiden Platten sind, schreiben sich die Bedingungen wie folgt an: ($e = E'$, η, γ, φ haben dieselbe Bedeutung wie bei 1).

a) Anfang des Systems: $x = 0$

$$f = \frac{n^2 m f}{\eta} + \gamma \varkappa k \cos\varepsilon$$

$$V = Q \sin\varepsilon = n^2 m f \gamma + \varkappa k \cos\varepsilon / e.$$

Daraus

$$f = \frac{e Q \sin\varepsilon - \varkappa k \cos\varepsilon}{e n^2 m \gamma} = \frac{e Q \sin\varepsilon - \varkappa k \cos\varepsilon}{e \gamma \eta} + \gamma \varkappa k \cos\varepsilon;$$

weiterhin

$$\tan\varepsilon = \frac{-e \eta \gamma^2 k \varkappa n^2 m + n^2 m k \varkappa - k \varkappa \eta}{e Q n^2 m - e \eta Q} = \frac{k \varkappa}{e Q}\left\{1 - \frac{n^2 m}{\varphi (n^2 m - \eta)}\right\}.$$

b) Ende des Systems $x = L$

$$f = \frac{n^2 m f}{\eta} - \gamma \varkappa k \cos(kL + \varepsilon)$$

$$V = Q \sin(kL + \varepsilon) = n^2 m f \gamma - \varkappa k \cos(kL + \varepsilon) / e.$$

Daraus:

$$\tan(kL + \varepsilon) = -\frac{k \varkappa}{e Q}\left\{1 - \frac{n^2 m}{\varphi (n^2 m - \eta)}\right\}.$$

Die Größen m, $e = E'$, η, γ, φ sind für den Anfang des Systems ($x = 0$) und das Ende ($x = 0$ und das Ende ($x = L$) verschieden.

Eine Diskussion der Schlußergebnisse unterlasse ich. Es empfiehlt sich, zunächst das Experiment anzusetzen, um aus den Möglichkeiten, welche die Theorie liefert, diejenigen heraus zu wählen, die praktisch von Bedeutung sind. Ähnlich wie die Lufttransmission verhält sich die elektrische Transmission.

7. **Schwingungen von Luftsäulen in ungleich weiten Röhren.** x sei die Achse der Röhre, ihr Querschnitt ein Kreis vom Radius $y = f(x)$. Ich nehme vorerst an, daß sich die Bewegung nur senkrecht zu dem Querschnitt der Röhre vollzieht. Die Volumänderung, welche die Querscheibe $y^2 \pi\, dx$ durch die maximalen Verrückungen ihrer Grundflächen um ξ und $\xi + \frac{d\xi}{dx}$ im Verhältnis zu dem Volumen der Querscheibe im ungestörten Zustand erfährt, berechnet sich zu

$$\frac{dV}{V} = \frac{2\xi}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d\xi}{dx}.^{1)}$$

Darnach ist der Druck in dieser Scheibe

$$p = -\varkappa \left(\frac{2\xi}{y} \frac{dy}{dx} + \frac{d\xi}{dx} \right).$$

Der Differentialquotient $\frac{dp}{dx}$ bestimmt die durch die Druckdifferenz auf beiden Seiten der Scheibe wirkende bewegende Kraft. Die Differentialgleichung zur Ermittelung der Schwingungszahl lautet demgemäß:

$$\xi n^2 \varrho = -\varkappa \left[\frac{2 d\xi}{y dx} \frac{dy}{dx} - \frac{2\xi}{y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{2\xi}{y} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dx^2} \right].$$

Die Formel kann experimentell an einigen einfach gestalteten Röhren verifiziert werden. Ihre Tragweite kann aber auch bis zu einem gewissen Grade theoretisch voraus bestimmt

[1]) $V = Q \cdot h$; $\delta V = \frac{\partial V}{\partial h} \delta h + \frac{\partial V}{\partial Q} \delta Q = y^2 \pi \frac{d\xi}{dx} dx + 2 y \pi \frac{dy}{dx} \xi\, dx.$

werden. Zu dem Zweck wende ich sie auf Probleme an, deren Lösung bekannt ist. Zunächst auf eine gleichmäßig konische Röhre. Die Spitze des Konus liege im Anfang der x Achse, μ sei die Tangente des halben Öffnungswinkels des Konus. y ist dann $= \mu \cdot x$. Die Differentialgleichung wird zu

$$\xi n^2 \varrho = - \varkappa \left(\frac{2\,d\xi}{x\,dx} - \frac{2\,\xi}{x^2} + \frac{d^2\,\xi}{dx^2} \right).$$

Ich habe das Integral dieser Differentialgleichung nicht direkt ermittelt. Aber ich war der Überzeugùng, daß es schon auf einem anderen bewährten Weg gefunden werden kann. Es ist bekanntlich gelungen, die Schwingung einer Luftmasse zu berechnen, die in einer Hohlkugel enthalten ist. Die Lösung dieses Problems basiert auf der Lösung der Gleichung:

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0.$$

φ ist das Geschwindigkeitspotential, von dem die Bewegung ableitbar sein soll, die also wirbelfrei ist. Die Lösung dieser Gleichung unter den bestehenden Grenzbedingungen wird auf Kugelfunktionen zurückgeführt. Sie ergibt sich in folgender Form: $\varphi = \Sigma R_n r^n S^n$[1]) (ohne den Zeitfaktor). In diesem Ausdruck ist S_n eine Kugelflächenfunktion $n$ter Ordnung und R_n eine Funktion von r allein. Wenn $n = 0$ ist, resultiert $\varphi = A \frac{\sin k\,r}{k\,r}$ mit der Grenzbedingung $\left(\frac{d\varphi}{d\,r}\right)_{r=a} = 0$, welche die Schwingungszahl definiert. Dieser Fall entspricht einer Bewegung in radiärer Richtung. Man kann aus der Kugel beliebige Konuse durch feste Wände abgrenzen, ohne daß die Schwingungszahlen sich ändern. Es muß also die Gleichung auch die Lösung für die konische Luftsäule sein. Aus dem Geschwindigkeitspotential läßt sich die Verrückung in der r Richtung durch Differentiation nach r ermitteln, was ergibt:

$$\xi = k\,A \left(\frac{\cos k\,r}{k\,r} - \frac{\sin k\,r}{k^2\,r^2} \right).$$

---

[1]) Vgl. z. B. Lamb, Hydrodynamics, S. 478 oder Rayleigh, tom. II, S. 260 ff.

Dies müßte die Lösung der obigen Differentialgleichung sein, wenn unsere Überlegungen stichhaltig sind. In der Tat trifft dies zu, wie man durch Einsetzen von ξ in die Differentialgleichung ersehen kann (x statt r gesetzt).[1])

Wenn man jetzt die allgemeine Differentialgleichung (S. 305) auf einen weiteren Fall, dessen Lösung bekannt ist, auszubeuten versucht, nämlich für eine Schwingung der in einer Kugel enthaltenen Luftsäule, die von einem Pol der Kugel zu dem entgegengesetzten erfolgt, so erkennt man sofort die Grenzen ihrer Anwendungsmöglichkeit. Wandelt man die Differentialgleichung für diesen Fall der kugelförmigen Begrenzung um, und vergleicht sie mit dem nach der obigen Gleichung für $n = 1$ erhaltenen partikulären Integral, so erkennt man ohne weiteres, daß es nicht die Lösung der Differentialgleichung sein kann. Eine nähere Überlegung zeigt, daß meine Differentialgleichung zu einer größeren Schwingungszahl führen muß. Denn bei ihrer Aufstellung wurde angenommen, daß die Bewegung streng in einer Richtung parallel zur x Achse erfolgt. Dadurch, daß wir diese Annahme gemacht haben, haben wir dem System einen Zwang auferlegt und die danach berechnete Schwingungszahl muß größer als die wirkliche sein (vgl. Rayl., Art. 88). Dies kann man für den Fall des Konus auch ohne Kenntnis dieses Rayleighschen Satzes sehen. Konus und Kugelsektor stimmen ja nur für kleine Öffnungswinkel überein. Für große Öffnungswinkel ist ein Konus, welcher dieselbe Höhe

[1]) Mehr unmittelbar gelangt man zu der Lösung der Differentialgleichung, wenn man bedenkt, daß für einen engen Konus r statt x gesetzt werden kann. Führt man noch statt ξ das Geschwindigkeitspotential $\xi = \frac{d\varphi}{dr}$ in die Differentialgleichung ein, so wird sie zu

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\varphi}{dr}\right) + k^2\frac{d\varphi}{dr} = 0.$$

Wenn φ wie hier nur von r abhängt, so wird $\nabla^2\varphi = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{d\varphi}{dr}$ und die Differentialgleichung geht in $\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0$ über, deren nur von r abhängige Lösung ist: $\varphi = A\frac{\sin kr}{kr}$.

wie der Radius des Sektor hat, an Inhalt größer als der Sektor. Es muß also seine Schwingungszahl kleiner sein als diejenige des Kugelsektors. Unsere Beziehung ergibt aber die gleiche Schwingungszahl wie die für den Kugelsektor streng, d. h. für eine wirbelfreie Bewegung abgeleitete Formel, also für den Konus eine zu hohe Schwingungszahl. Sie ist nur richtig für einen Konus von kleiner Öffnung. Man darf so wohl schließen, daß die Differentialgleichung für enge Röhren richtig ist, streng wahrscheinlich für Stromröhren. Eine spätere Diskussion wird dies zu erweisen haben. Aber ich habe gar keinen Zweifel, daß der Geltungsbereich der Differentialgleichung sehr weit reicht. Früher angestellte Experimente erweisen dies.[1]) Wir haben in eine Röhre von mehrmals plötzlich wechselndem Querschnitt Flüssigkeit unter dem Einfluß einer Membran schwingen lassen. Die Schwingungszahl wurde so berechnet, als ob die Flüssigkeitsbewegung parallel den Wänden erfolgte, die Stromlinien an den Querschnittsveränderungen also unterbrochen wurden. Die Abweichung der Beobachtung von der Rechnung war, trotzdem der Fall extrem gelagert war, äußerst gering.

Es fragt sich nun, ob es nicht möglich ist, diese Abweichung irgendwie zu schätzen. Hier scheint mir zunächst ein Weg gegeben durch Benutzung einer Analogie, die Rayleigh für ähnliche Verhältnisse mit der elektrischen Strömung gezogen hat.[2]) Bei der Berechnung der Schwingungszahlen von Luftresonatoren, die aus einem weiten Gefäß mit angeschlossenem Hals bestehen, kommt Rayleigh zu der Überlegung, daß für die Schwingungszahl erstens maßgebend ist die Kompressibilität der in den Bauch des Resonators eingeschlossenen im wesentlichen ruhenden Luft, zweitens die Trägheit der in dem Hals als inkompressibel behandelten Luftsäule. Die Trägheit wird bestimmt durch den zweiten Differentialquotienten des Flusses nach der Zeit und durch eine von der

---

[1]) Brömser-Frank-Petter, Zeitschr. f. Biol., 59, S. 232.

[2]) Rayleigh, sound II, S. 181.

Konfiguration des Halses abhängige Konstante. Sie wird gleich $\frac{Q}{L}$, wenn der Hals gleich weit zylindrisch ist und die Stromfäden in den Zylinderwänden parallel verliefen. Sie ist vergleichbar der Leitfähigkeit eines leitenden Körpers für den elektrischen Strom. (Die Leitfähigkeit entspricht vollständig dem reciproken Wert der von mir eingeführten wirksamen Masse $\frac{\varrho L}{Q}$. Vgl. oben unter 1).

Da sowohl der elektrische Strom als die Verrückungen sich von einem Potential ableiten, kann man aber auch umgekehrt die Trägheit aus der Leitfähigkeit eines mit der Röhre gleich geformten leitenden Körpers entnehmen. Dies ließe sich durchführen für ähnliche Systeme, wie sie bei den obigen Experimenten benutzt worden sind, bei denen die Flüssigkeit inkompressibel ist, also auch für Manometer mit optischer Registrierung. Viel schwieriger liegen jedoch die Verhältnisse für die kompressible Luft. Hier müßte die Erhöhung der lebendigen Kraft gegenüber der angenommenen, aus der gradlinigen Bewegung sich ergebenden, für möglichst kleine Abschnitte der Röhre einzeln angesetzt werden. Es wird kaum möglich sein, die Leitfähigkeit so festzustellen, daß die einzelnen Stücke einer Röhre sich richtig aneinander schließen würden. Dagegen dürfte eine andere Methode zum Ziel führen, die auf dem obigen Experiment beruht. Man verschließt die Röhrenstücke an beiden Seiten mit Membranen, nachdem sie mit einer inkompressiblen Flüssigkeit gefüllt worden sind, und stellt nun die Abweichung der beobachteten Schwingungszahl von der unter der Voraussetzung einer gradlinigen Bewegung berechneten fest.

8. Schwingungen der Luft in den Vokalräumen. Von wesentlich größerer Bedeutung für physiologische Zwecke ist die Berechnung der Schwingungen einer Luftsäule, die in einem unregelmäßigen Hohlraum enthalten ist, für dessen Begrenzung sich keine hinreichend einfache Gleichung aufstellen läßt. Sie kommt nämlich in Betracht für die Theorie der

Erzeugung der Vokale durch die „Vokalräume". Sie bestehen aus Kehlkopf, Rachen und Mundhöhle. Man muß hier den Leitfaden der Theorie haben, um sich in dem Gewirre der empirischen Daten zurecht zu finden. Für die Berechnung der Hauptschwingung der Luftmasse, die in einem derartigen Raum schwingt, schlage ich ein Verfahren vor, das in ganz ähnlicher Weise zuerst für die Berechnung der Schwingungen der Saite angewandt worden ist, nämlich eine sinngemäße Unterteilung des Raumes in einzelne Kammern. Wie rasch man durch eine derartige Berechnung zu genügend genauen Resultaten kommt, zeigen die folgenden Beispiele.

a) Angenäherte Berechnung der Schwingungsdauer einer Luftsäule, die sich in einer beiderseits geschlossenen zylindrischen Röhre befindet. Ebenso wie bei der Saite werden entsprechende Massen der Luft an den Wänden als stillstehend angenommen. Teilt man die Röhre in 2 Kammern ein, verlegt die halbe Masse in die Mitte und an den beiden Enden je ein Viertel der Masse, die sich an diesen Stellen nicht bewegen, während nur die mittlere Masse unter dem Einfluß der Elastizität der beiden Kammern schwingt, so erhält man bei dieser ganz rohen Anordnung eine Wellenlänge $\lambda = 2.22\, L$, also eine um 11 % zu geringe Schwingungszahl. Teilt man die Röhre in 3 Kammern ein, beläßt je ein Sechstel der Masse an den Enden, während zwischen den Kammern je ein Drittel der Masse unter dem Einfluß der Elastizität der Kammern schwingt, so erhält man $\lambda = 2.09\, L$, welcher Wert nur mehr um 4.5 % von dem richtigen abweicht.

b) Führt man dasselbe aus für die diametralen Schwingungen einer Luftmasse, die sich in einer Hohlkugel befindet, vgl. S. 307, so erhält man für eine 3 Kammer-Einteilung, wobei das System 2 Freiheitsgrade besitzt, den Wert $\frac{\lambda}{2a} = 1.566$ statt 1.509. Teilt man die Kugel in 4 Kammern ein, so resultiert $\frac{\lambda}{2a} = 1.521$ statt 1.509, also nur mehr eine Differenz von $^2/_3$ %. Im letzten Fall besitzt das vereinfachte System 3 Freiheitsgrade und die Behandlung führt zu einer algebraischen Gleichung dritten Grades. Geht man noch weiter mit der Kammer-Einteilung, so macht die Auflösung dieser Gleichung Schwierigkeiten. Mir erscheint es daher in diesem Fall vorteilhafter, durch die Einteilung der Säule in 2 oder 3 Kammern einen angenäherten Wert für die Schwingungszahl auszurechnen und dann bei der Elimination der Verrückungen aus den verschiedenen Gleichungen diesen Wert plus einer kleinen Größe δ einzusetzen und alle höheren Potenzen als die erst von δ fortzulassen, so daß schließlich eine lineäre Gleichung für δ resultiert.

Das Beispiel des kugelförmigen Raumes trügt insofern etwas, als es den Anschein erweckt, daß man sich bei der Einteilung in eine wachsende Zahl von Kammern dem richtigen Wert sukzessive nähern würde. Es ist aber kein Zweifel, daß dann wegen der ungenauen Annahme über die Bewegung der wahre Wert unterschritten wird. Denn wir haben hier dieselbe Grundannahme gemacht wie bei der Aufstellung der obigen Differentialgleichung (vgl. S. 305) und müssen schließlich eine zu hohe Schwingungszahl erhalten. Wir lassen ja ebenfalls die Bewegung nur in einer Richtung erfolgen, haben das System also einem Zwang unterworfen. Wenn man hierfür noch eine Korrektur einführen will, so muß man das obige Verfahren der experimentellen Bestimmung der wirksamen Masse für die einzelnen Kammern anwenden (vgl. S. 309).

Die gesamte Energie ist immer größer als diejenige der wirbelfreien Bewegung, was ebenfalls aus dem Satz von der Einwirkung eines Zwanges oder aus dem Kelvinschen Theorem folgt.[1]) Die wirkliche Schwingungszahl ist also immer kleiner als die unter Annahme der Existenz eines Geschwindigkeitspotentials berechnete.

9. Schwingung einer kreisförmigen Membran. Angenäherte Berechnung. Die Gleichungen für die Berechnung der Membranschwingungen sind bekannt (vgl. Rayl., I, S. 306—351). Sie führen auf Besselsche Funktionen. Da

[1]) Vgl. z. B. Lamb, Hydrodynamics, S. 45, und Rayleigh, Art. 79.

die angenäherte Berechnung der Hauptschwingung eines Systems von Bedeutung sein kann, gebe ich hier eine solche für die Membran nach einem von Rayleigh, I, Art. 89 für die Saite vorgeschlagenen Weg. Ich nehme an, daß die einzelnen Punkte der Membran eine Schwingung nach der folgenden Beziehung ausführen.

$$y = \cos n t \left\{ 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^m \right\}.$$

Die potentielle Energie berechnet sich daraus wie folgt:

$$V = \tfrac{1}{2} S \int_0^a 2 r \pi \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 dr = \frac{\pi m S}{2} \cos^2 n t.$$

Die kinetische Energie des Systems ergibt sich aus folgender Formel:

$$T = \tfrac{1}{2} \int_0^a 2 r \pi d \cdot \varrho \dot{y}^2 dr = n^2 \pi d \cdot \varrho \left(\frac{m^2 a^2}{2(m+1)(m+2)}\right) \sin^2 n t.$$

Durch Gleichsetzung der beiden maximalen Werte von V und T erhält man für die Schwingungszahl

$$n^2 = \frac{(m+1)(m+2) S}{d \cdot \varrho m a^2}.$$

Da die Schwingungszahl bei einer derartigen Berechnung nach Rayleigh immer zu hoch wird, hat man m so zu wählen, daß sie ein Minimum wird, was für $m = \sqrt{2}$ eintritt. Dann wird die Schwingungszahl zu $\frac{2.414}{a}\sqrt{\frac{S}{d \cdot \varrho}}$. Sie ist nur 0.4 % höher als die korrekte (vgl. Rayleigh, S. 345). Aber auch wenn man $m = 1$ oder 2 entsprechend der Schnittkurve als gebrochene Grade oder Parabel gewählt hätte, würde die Differenz immer gering, nämlich 1.8 % sein.

10. Kreisförmige Membran mit einer starren Scheibe in der Mitte. Radius der Membran $= a$, Radius der Scheibe $= b$, Maße der Scheibe: M. Die Differentialgleichung lautet:

$$\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr} = -\frac{n^2 d \cdot \varrho}{S} \cdot \zeta.$$

(Nur symmetrische Schwingungen berücksichtigt.)

Setzt man

$$\frac{n^2 d \cdot \varrho}{S} = \mu^2,$$

so ist die Lösung

$$\zeta = A J_0(\mu r) + B K_0(\mu r).$$

J_0 und K_0 sind Besselsche Funktionen erster und zweiter Art. Die Grenzbedingungen ergeben sich aus folgender Gleichung:

$$0 = A J_0(\mu a) + B K_0(\mu a).$$

Ferner aus der Bewegungs-Gleichung für die Scheibe selbst. Sie lautet, wenn α der Neigungswinkel der meridionalen Schnittkurve am Rand der Scheibe ist. $2 b \pi S \sin \alpha = M n^2 \varrho$. Setzt man statt $\sin \alpha$ die Tangente, so erhält man folgende Gleichung:

$$A \mu J_0'(\mu b) + B \mu K_0'(\mu b) = -\frac{M n^2}{2 b \pi S}[A J_0(\mu b) + B K_0(\mu b)].$$

Hieraus:

$$J_1(\mu b) - \frac{J_0(\mu a) K_1(\mu b)}{K_0(\mu a)} = \frac{M \mu}{2 b d \varrho \pi}\left[J_0(\mu b) - \frac{J_0(\mu a)}{K_0(\mu a)} K_0(\mu b)\right].$$

Das durch die vorhergehende Gleichung charakterisierte System wird bei manchen akustischen Registrierungen verwendet, so zum Beispiel bei dem von Hermann vorgeschlagenen. In ähnlicher Weise läßt sich auch das Weißsche Phonoskop behandeln oder die von Garten vorgeschlagene Methode, bei der eine Seifenmembran mit eingestreutem Eisenspähnchen der wesentliche Teil ist.

11. Kreisförmige in der Mitte mit einer starren Scheibe von der Masse M verkittete Platte. Die Phonographen- und Grammophonkapseln sind nach diesem Prinzip gebaut. Wenn die in folgendem skizzierte Berechnung zu große Schwierigkeiten bieten sollte, dürfte für unseren Zweck auch eine angenäherte genügen, die etwa nach dem Schema von

Nr. 9 durchgeführt werden müßte. Die Platte ist am Rand eingeklemmt. Ebenso ist die Scheibe starr mit dem mittleren Teil der Platte verbunden.

$$\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr} = \mp \mu^2 \zeta.$$

$$\mu^4 = n^2 \times \frac{12\varrho(m^2-1)}{h^2 E m^2}$$

(m = Koeffizient der Querkontraktion, vgl. Föppl, Festigkeitslehre, 1. Aufl., S. 8, h = Dicke der Platte).

Lösung:

$$\zeta = AJ_0(\mu r) + BJ_0(i\mu r) + CK_0(\mu r) + DK_0(i\mu r)$$

Grenzbedingungen $\zeta = 0$ für $r = a$

$$\frac{d\zeta}{dr} = 0 \quad „ \quad r = a$$

$$\frac{d\zeta}{dr} = 0 \quad „ \quad r = b$$

$$\frac{h^3 E m^2}{12(m^2-1)}\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr}\right) \times 2b\pi = n^2 M\varrho \quad \text{für } r = b.$$

12. **Einige weitere den unter 9—11 Angeführten verwandte Systeme.** Von Ph. Brömser und mir ist zu akustischen Registrierzwecken eine Kapsel vorgeschlagen worden, in der eine Glimmerplatte eingespannt ist. Auf der Glimmerplatte ist unmittelbar ein kleines Spiegelchen exzentrisch aufgeklebt und zwar an der Stelle, wo der Neigungswinkel der Meridiankurve der elastischen Fläche bei der Einwirkung eines hydrostatischen Druckes am größten wird. Das ist in einer Entfernung von $\frac{1}{\sqrt{3}}$ des Radius der Platte der Fall. Ich habe eine angenäherte Berechnung dieses Systems in ähnlicher Weise, wie vorher angegeben wurde, durchgeführt und hierzu die von Föppl, Sitzungsberichte der Akademie München 1912, S. 155 angegebenen Gleichungen verwendet. Die Berechnung ist jedoch so kompliziert, daß ich sie vor-

läufig nicht veröffentliche. Erst nach der Ausführung einiger Experimente wird sich der beste Weg für die Lösung des Problems ergeben.

Dasselbe gilt für ein System, das aus einer Membran oder Platte, deren Masse nicht mehr vernachlässigt werden kann, und einer an sie angeschlossenen Luftsäule besteht. Seine Berechnung ist wertvoll für die Theorie des Mikrophons und ähnlicher Apparate mit angeschlossenem Schalltrichter. Auch hier hat mir eine angenäherte Berechnung eine ziemlich gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen ergeben.

Ganz ähnlich wird sich ferner das schallleitende System berechnen lassen, das aus Trommelfell, Gehörknöchelchen, den Membranen in dem ovalen und dem runden Fenster mit der Flüssigkeit in der Schnecke besteht. Es dürfte sich auf ein System mit 3 Freiheitsgraden zurückführen lassen, während bis jetzt noch nicht der geringste Versuch gemacht worden ist, es überhaupt von dieser Seite zu behandeln.

Auch die Schwingungen einer Membran von der Gestalt eines Kreissegments, die mit einer segmentförmigen Scheibe verbunden ist, werden sich mit genügender Annäherung bestimmen lassen, nachdem durch Sommerfeld die Deformation festgestellt worden ist, die sie unter Einwirkung eines hydrostatischen Druckes erfährt.