Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1915. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1915
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über die Weierstrass'sche Produktdarstellung ganzer transzendenter Funktionen und über bedingt konvergente unendliche Produkte.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 6. November 1915.

Der bekannte Satz über die Darstellung einer ganzen transzendenten Funktion mit unendlich vielen vorgeschriebenen Nullstellen durch ein beständig und unbedingt konvergierendes unendliches Produkt ist von seinem Entdecker Weierstraß mit ausschließlicher Benützung von Hilfsmitteln, welche der Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen angehören, völlig einwandfrei begründet worden.[1]) Immerhin mag vielleicht gesagt werden, daß der von Weierstraß benützte Gedankengang schon eine merkliche Vertrautheit mit seinen funktionentheoretischen Methoden voraussetzt und namentlich dem Auffassungsvermögen der Anfänger einige Schwierigkeit zu bereiten pflegt. Für die Richtigkeit dieser Ansicht dürfte wohl die Tatsache sprechen, daß unter der großen Anzahl mir bekannter Lehrbücher ein einziges (dasjenige von Vivanti-Gutzmer) den Weierstraßschen Beweis ohne wesentliche Veränderung wiedergibt.[2]) Die große Mehrzahl der übrigen (mehr als ein Dutzend) versucht mit mehr oder weniger Glück, jenen

---

[1]) Abhandlungen aus der Funktionenlehre (1886), p. 16 = Mathematische Werke 2, p. 92.

[2]) A. a. O., Nr. 208 (p. 154—157).

Beweis unter Beibehaltung des Hauptgedankens etwas zu vereinfachen, wobei als gemeinsames Merkmal die Benützung des (von Weierstraß geflissentlich vermiedenen) komplexen Logarithmus und der logarithmischen Reihe sich ergibt. Mir persönlich will es nicht recht angemessen erscheinen, beim Beweise eines grundlegenden und verhältnismäßig einfachen Satzes aus der Theorie der eindeutigen Funktionen die Eigenschaften einer unendlich vieldeutigen Funktion, also einer wesentlich komplizierteren Gattung in Anspruch zu nehmen. Doch mag diese Auffassung anderen einseitig und pedantisch erscheinen, zumal wenn man dem Aufbau der Funktionentheorie den Cauchyschen Integralsatz zu Grunde legt und in diesem Falle die Theorie des komplexen Logarithmus als eine der ersten und einfachsten Anwendungen jener Methode gewinnt. Wenn nun aber einige Lehrbücher sich so weit von der Weierstraßschen Methode entfernen, daß sie den fraglichen Satz als Folgerung (!) aus dem Mittag-Lefflerschen Satze durch logarithmische Integration herleiten (und zwar dieses Verfahren nicht etwa nur in Form einer gelegentlichen, ja sehr nahe liegenden Bemerkung, sondern als einzigen und maßgebenden Beweis mitteilen), so dürfte diese Art, die Dinge auf den Kopf zu stellen, wohl von niemandem gebilligt werden, der in der Mathematik etwas anderes sieht, als eine regellose Anhäufung mathematischer Resultate.

Bei dieser Sachlage erscheint es vielleicht nicht überflüssig, wenn ich im folgenden einen Beweis des fraglichen Satzes mitteile, der an Einfachheit alle bisherigen wesentlich übertreffen dürfte. Derselbe beansprucht überhaupt keinerlei im üblichen Sinne funktionentheoretische Hilfsmittel, nicht einmal den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz, sondern liefert auf rein formal reihentheoretischem Wege ganz direkt die Konvergenz des bekannten Weierstraßschen Produktausdrucks und die Möglichkeit, denselben in eine beständig konvergierende Potenzreihe umzuformen.

Ich möchte zugleich diese Gelegenheit benützen, um zur Ergänzung früher von mir veröffentlichter Bemerkungen über bedingt konvergierende unendliche Produkte[1]) zu zeigen, wie die Weierstraßsche Methode, ein an sich divergentes Produkt durch Zusatzfaktoren unbedingt konvergent zu machen, auch dazu dienen kann, ein Kriterium für bedingte Konvergenz unendlicher Produkte abzuleiten und die etwaige Wertveränderung, die durch Umordnung der Faktoren erzeugt wird, zu bestimmen.

§ 1.

Der Weierstrass'sche Hauptsatz.

1. Versteht man unter $\mathfrak{P}_\nu(x)$ für $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ eine unbegrenzte Folge beständig konvergierender Potenzreihen und setzt:

$$(1) \qquad \mathfrak{L}_n(x) = \prod_0^n{}^{\nu}(1 + \mathfrak{P}_\nu(x)) \quad (n = 0, 1, 2 \ldots),$$

so heißt das unendliche Produkt $\prod\limits_0^\infty{}^{\nu}(1 + \mathfrak{P}_\nu(x))$ an der Stelle x' konvergent und $\mathfrak{L}(x')$ sein Wert, wenn sämtliche $\mathfrak{P}_\nu(x')$ von -1 verschieden sind und $\mathfrak{L}_n(x')$ für $n = \infty$ den endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert $\mathfrak{L}(x')$ besitzt. Hierzu ist bekanntlich hinreichend, daß die Reihe $\sum\limits_0^\infty{}^{\nu} |\mathfrak{P}_\nu(x')|$ konvergiert und zwar konvergiert das betreffende Produkt dann auch unbedingt. Wird jetzt zugelassen, daß für eine endliche Anzahl von Indices ν die Bezeichnung $1 + \mathfrak{P}_\nu(x') = 0$ besteht, so soll das betreffende unendliche Produkt noch konvergent und Null sein Wert heißen, wenn dasselbe nach Ausschluß jener für $x = x'$ verschwindenden Faktoren in dem oben bezeichneten Sinne konvergiert. Unter der weiteren Annahme, daß die Reihe $\sum\limits_0^\infty{}^{\nu} |\mathfrak{P}_\nu(x)|$ beständig konvergiert,[2])

[1]) Math. Annalen 22 (1883), p. 475 ff. Ebendaselbst 33 (1889), p. 149 ff.; 44 (1894), p. 413 ff.

[2]) Man bemerke, daß auf Grund dieser letzteren Annahme für keine Stelle x' mehr als eine endliche Anzahl von $\mathfrak{P}_\nu(x')$ den Wert -1 haben kann.

ist sodann auch das Produkt $\prod_0^\infty {}^\nu (1 + \mathfrak{P}_\nu(x))$ ein beständig und unbedingt konvergentes.

Man hat nun für $\nu \geqq 1$:

$$\mathfrak{L}_\nu(x) = \mathfrak{L}_{\nu-1}(x)(1 + \mathfrak{P}_\nu(x))$$

und speziell:

$$\mathfrak{L}_0(x) = 1 + \mathfrak{P}_0(x),$$

so daß aus der für jedes $n \geqq 1$ geltenden Identität

$$\mathfrak{L}_n(x) = \mathfrak{L}_0(x) + \sum_1^n {}^\nu (\mathfrak{L}_\nu(x) - \mathfrak{L}_{\nu-1}(x))$$

sich ergibt:

$$(2) \qquad \mathfrak{L}_n(x) = 1 + \mathfrak{P}_0(x) + \sum_1^n {}^\nu \mathfrak{L}_{\nu-1}(x) \cdot \mathfrak{P}_\nu(x)$$

und schließlich:

$$(3) \qquad \prod_0^\infty {}^\nu (1 + \mathfrak{P}_\nu(x)) = 1 + \mathfrak{P}_0(x) + \sum_1^\infty {}^\nu \mathfrak{L}_{\nu-1}(x) \cdot \mathfrak{P}_\nu(x).$$

Da jedes der Produkte $\mathfrak{L}_{\nu-1}(x) \cdot \mathfrak{P}_\nu(x)$ nach der Cauchyschen Multiplikationsregel durch eine einfache Potenzreihe ersetzt werden kann, so folgt also zunächst, daß das unter den gemachten Voraussetzungen beständig konvergierende Produkt in eine beständig konvergierende Reihe von Potenzreihen transformierbar ist. Diese letztere kann aber wiederum noch in eine einfache, gleichfalls beständig konvergierende Potenzreihe umgeformt werden, wenn man die Voraussetzung dahin verschärft, daß die (aus lauter positiven Gliedern bestehende) Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu \overline{\mathfrak{P}}_\nu(|x|)$ beständig konvergieren soll, unter $\overline{\mathfrak{P}}_\nu(x)$ diejenige Reihe verstanden, welche aus $\mathfrak{P}_\nu(x)$ durch Umwandlung sämtlicher Koeffizienten in ihre absoluten Beträge entsteht. Denn unter dieser Voraussetzung (welche offenbar die ursprünglich gemachte der beständigen Konvergenz von $\sum_0^\infty {}^\nu |\mathfrak{P}_\nu(x)|$ nach sich zieht, aber nicht umgekehrt) besteht, wenn noch gesetzt wird: $\overline{\mathfrak{L}_n(x)} = \prod_0^n{}^{\nu}(1 + \overline{\mathfrak{P}_\nu(x)})$, nach Analogie der Beziehung (3) die folgende:

$$(4)\quad \prod_0^\infty{}^{\nu}(1 + \overline{\mathfrak{P}_\nu(|x|)}) = 1 + \overline{\mathfrak{P}_0(|x|)} + \sum_0^\infty{}^{\nu}\overline{\mathfrak{L}_{\nu-1}(|x|)} \cdot \overline{\mathfrak{P}_\nu(|x|)},$$

in dem Sinne, daß zunächst das links stehende unendliche Produkt und infolgedessen auch die rechts stehende Reihe beständig konvergiert. Dies besagt, daß unter der jetzt gemachten Voraussetzung die in Gl. (3) auftretende Reihe konvergent bleibt, wenn man jeden einzelnen Bestandteil durch seinen absoluten Betrag ersetzt. Alsdann ist es aber auf Grund des sogenannten Cauchyschen Doppelreihen-Satzes[1]) auch ohne weiteres gestattet, jene Reihe nach Potenzen von x zu ordnen. Hiernach ergibt sich der folgende, die eigentliche Grundlage unseres Hauptbeweises bildende Hilfssatz:

Versteht man unter $\mathfrak{P}_\nu(x)$ für $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ eine unbegrenzte Folge beständig konvergierender Potenzreihen, unter $\overline{\mathfrak{P}_\nu(x)}$ diejenige Reihe, welche aus $\mathfrak{P}_\nu(x)$ durch Verwandlung aller Koeffizienten in ihre absoluten Beträge entsteht, ist sodann auch die Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu}\overline{\mathfrak{P}_\nu(|x|)}$ beständig konvergent, so gilt das Gleiche von dem unendlichen Produkte

$$\prod_0^\infty{}^{\nu}(1 + \mathfrak{P}_\nu(x)),$$

und zwar läßt sich dasselbe in eine beständig konvergierende Potenzreihe umformen, stellt also eine ganze transzendente Funktion von x dar.

2. Reduziert sich jedes $\mathfrak{P}_\nu(x)$ auf das eine Glied $-\dfrac{x}{a_\nu}$ (wo $a_\nu \neq 0$, $\lim a_\nu = \infty$) und ist sodann $\sum_0^\infty{}^{\nu}\left|\dfrac{x}{a_\nu}\right|$ beständig,

[1]) Cauchy, Analyse algébrique, 1821, p. 540 = Oeuvres (2), T. III, p. 444.

d. h. $\sum_0^\infty \left|\frac{1}{a_\nu}\right|$ überhaupt konvergent, so liefert das unendliche Produkt $\prod_0^\infty{}^\nu \left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)$, wie aus dem bisher gesagten folgt, übrigens auch unmittelbar zu ersehen ist, eine ganze transzendente Funktion mit den Nullstellen a_ν. Dieser Fall scheidet für die weiteren Betrachtungen aus. Ist also jetzt $\sum_0^\infty{}^\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right|$ divergent, so kann man bekanntlich eine unbegrenzte Folge mit wachsendem ν niemals abnehmender natürlicher Zahlen p_ν so bestimmen, daß die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p_\nu+1}$ beständig konvergiert.[1]) Dies vorausgeschickt beweisen wir jetzt den folgenden

Hauptsatz: Legt man den Zahlen a_ν, p_ν die soeben angegebene Bedeutung bei und setzt:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &E_\nu(x) = \left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)\cdot e^{g_\nu(x)},\\ &\text{wo:}\quad g_\nu(x) = \frac{x}{a_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{p_\nu}, \end{aligned}\right.$$

---

[1]) Gibt es Exponenten p (die natürlich ≥ 1 sein müssen), derart, daß die Reihe $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$, also auch für jedes endliche x die Reihe $\sum \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p+1}$ konvergiert, so setze man $p_\nu = p+1$, wobei man unter p etwa die kleinste, der fraglichen Bedingung genügende ganze Zahl zu verstehen hat. Gibt es kein solches p, so wird durch die Annahme $p_\nu = \nu - 1$ oder besser (weil wesentlich kleinere p_ν liefernd) durch die folgende:

$p_\nu = [\lg \nu]$ (d. h. gleich der größten in $\lg \nu$ enthaltenen ganzen Zahl) das Verlangte geleistet. Wird nämlich $R > 0$ beliebig groß angenommen, darauf n so fixiert, daß:

$$\frac{R}{|a_\nu|} < \frac{1}{e^2} \quad \text{für } \nu \geq n,$$

so hat man, wegen: $p_\nu + 1 > \lg \nu$, für $|x| \leq R$:

$$\sum_n^\infty{}^\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p+1} < \sum_n^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu^2},$$

so daß die fragliche Reihe in der Tat beständig konvergiert.

so ist das unendliche Produkt $\prod_{0}^{\infty}{}_{\nu} E_{\nu}(x)$ beständig und unbedingt konvergent und läßt sich in eine beständig konvergierende Potenzreihe umformen, stellt also eine ganze transzendente Funktion mit den Nullstellen a_{ν} vor.

Beweis. Um die Faktoren $E_{\nu}(x)$ auf die im vorigen Hilfssatze betrachtete Form zu bringen, hat man lediglich $E_{\nu}(x)$ nach Potenzen von x zu entwickeln. Diese Entwickelung läßt sich wesentlich einfacher bewerkstelligen, wenn man dieselbe zunächst nicht an $E_{\nu}(x)$ selbst, sondern an der Derivierten $E_{\nu}'(x)$ vornimmt. Man findet zunächst:

$$(6) \qquad E_{\nu}'(x) = \left(-\frac{1}{a_{\nu}} + \left(1 - \frac{x}{a_{\nu}}\right) g_{\nu}'(x)\right) \cdot e^{g_{\nu}(x)}.$$

Andererseits ergibt sich:

$$\left(1 - \frac{x}{a_{\nu}}\right) g_{\nu}'(x) = \left(1 - \frac{x}{a_{\nu}}\right)\left(\frac{1}{a_{\nu}} + \frac{x}{a_{\nu}^2} + \cdots + \frac{x^{p_{\nu}-1}}{a_{\nu}^{p_{\nu}}}\right)$$
$$= \frac{1}{a_{\nu}} - \frac{x^{p_{\nu}}}{a_{\nu}^{p_{\nu}+1}}$$

und daher:

$$(7) \qquad E_{\nu}'(x) = -\frac{x^{p_{\nu}}}{a_{\nu}^{p_{\nu}+1}} \cdot e^{g_{\nu}(x)}.$$

Um jetzt noch $e^{g_{\nu}(x)}$ nach Potenzen von x zu entwickeln, hat man:

$$(8) \qquad \begin{aligned} e^{g_{\nu}(x)} &= 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa!}\left(\frac{x}{a_{\nu}} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_{\nu}}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p_{\nu}}\left(\frac{x}{a_{\nu}}\right)^{p_{\nu}}\right)^{\varkappa} \\ &= \sum_{0}^{\infty}{}_{\varkappa}\, c_{\varkappa}^{(\nu)} \left(\frac{x}{a_{\nu}}\right)^{\varkappa}, \end{aligned}$$

wo die $c_{\varkappa}^{(\nu)}$ durchweg positive (rationale) Zahlen sind (speziell: $c_0^{(\nu)} = c_1^{(\nu)} = 1$) und die betreffende Reihe beständig konvergiert.

Hiernach geht die Gleichung (7) in die folgende über:

$$(9)\qquad E'_\nu(x) = -\frac{1}{a_\nu{}^{p_\nu+1}}\cdot\sum_0^\infty{}_\varkappa\, c_\varkappa^{(\nu)}\,\frac{x^{p_\nu+\varkappa}}{a_\nu^\varkappa}.$$

Mit Berücksichtigung des Umstandes, daß nach Gl. (5) $E_\nu(0) = 1$ ist, folgt hieraus weiter:

$$(10)\qquad \begin{aligned} E_\nu(x) &= 1 - \frac{1}{a_\nu{}^{p_\nu+1}}\sum_0^\infty{}_\varkappa\,\frac{c_\varkappa^{(\nu)}}{p_\nu+\varkappa+1}\cdot\frac{x^{p_\nu+\varkappa+1}}{a_\nu^\varkappa} \\ &= 1 - \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{p_\nu+1}\cdot\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right), \end{aligned}$$

wo

$$(11)\qquad \mathfrak{P}_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = \sum_0^\infty{}_\varkappa\,\frac{c_\varkappa^{(\nu)}}{p_\nu+\varkappa+1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa$$

eine beständig konvergierende Potenzreihe mit lauter positiven Koeffizienten.

Nachdem jetzt $E_\nu(x)$ auf die für die Anwendung des vorigen Hilfssatzes erforderliche Form gebracht ist (wobei offenbar $\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p_\nu+1}\cdot\mathfrak{P}_\nu\left(\left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right)$ die Rolle der dort mit $\mathfrak{P}_\nu(|x|)$ bezeichneten Reihe spielt), bleibt nur noch nachzuweisen, daß die Reihe

$$\sum_0^\infty{}_\nu\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p_\nu+1}\cdot\mathfrak{P}_\nu\left(\left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right)$$

für jedes endliche x konvergiert. Da aber diese Eigenschaft vermöge der getroffenen Auswahl der Zahlen p_ν bereits der Reihe

$$\sum_0^\infty{}_\nu\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p_\nu+1}$$

zukommt und andererseits die Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_\nu\left(\left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right)\qquad(\nu = 0, 1, 2\ldots)$$

für jeden einzelnen Wert des Index ν beständig konvergieren, so ist nur noch zu zeigen, daß nach Annahme einer beliebig großen oberen Schranke für $|x|$ ihre Summen auch für unbegrenzt wachsende ν unter einer endlichen Schranke bleiben.

Mit Benützung der Gleichungen (11), (8) und (5) findet man zunächst:

$$(12)\quad \begin{aligned}\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right) < \sum_0^\infty{}^{\varkappa}\, c_\varkappa^{(\nu)}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^\varkappa &= c^{\left|\frac{x}{a_\nu}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^2 + \cdots + \frac{1}{p_\nu}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p_\nu}} \\ &< c^{\left|\frac{x}{a_\nu}\right| + \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p_\nu}}.\end{aligned}$$

Wird also jetzt $R > 0$ beliebig groß angenommen, sodann n so definiert, daß $\left|\frac{R}{a_\nu}\right| < \frac{1}{2}$ für $\nu > n$, so folgt weiter, daß:

$$(13)\qquad \mathfrak{P}_\nu\left(\frac{x}{a_\nu}\right) < e \text{ für: } |x| \leq R,\ \nu > n,$$

womit die einzige noch offen gebliebene Frage erledigt und somit der ausgesprochene Satz vollständig bewiesen ist.

§ 2.

Über bedingt konvergente unendliche Produkte.

1. Setzt man in dem zuvor bewiesenen Hauptsatze:

$$\frac{x}{a_\nu} = -u_\nu,$$

so daß also die u_ν $(\nu = 0, 1, 2 \ldots)$ eine Folge irgend welcher komplexer Zahlen von der Beschaffenheit bedeuten, daß $\lim_{\nu=\infty} u_\nu = 0$ und die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu\, |u_\nu|$ divergent ist, so folgt zunächst:

Werden natürliche Zahlen p_ν $(\nu = 0, 1, 2 \ldots)$ so bestimmt, daß die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu\, |u_\nu|^{p_\nu+1}$ konvergiert (was stets auf unendliche viele Weisen ausführbar ist), so ist das unendliche Produkt

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{P} = \prod_0^\infty{}^\nu\left((1+u_\nu)\cdot e^{-U_\nu}\right), \\ \text{wo: } U_\nu = u_\nu - \frac{1}{2}u_\nu^2 + \frac{1}{3}u_\nu^3 - \cdots + (-1)^{p_\nu-1}\cdot\frac{1}{p_\nu}u_\nu^{p_\nu} \end{cases}$$

unbedingt konvergent.

Um dieses Ergebnis zur Aufstellung eines Kriteriums für bedingte Konvergenz des (infolge der vorausgesetzten Divergenz von $\Sigma |u_\nu|$ sicher nicht unbedingt konvergierenden) Produktes $\prod_0^\infty {}^\nu (1 + u_\nu)$ zu benützen (wobei wir die u_ν durchweg als von -1 verschieden annehmen wollen), werde gesetzt:

$$(2) \qquad \mathfrak{P}_n = \prod_0^n {}^\nu (1 + u_\nu) \cdot e^{-U_\nu}, \quad \mathfrak{U}_n = \prod_0^n {}^\nu (1 + u_\nu),$$

so daß also zwischen $\mathfrak{P}_n$ und $\mathfrak{U}_n$ die Beziehung besteht:

$$(3) \qquad \mathfrak{U}_n = \mathfrak{P}_n \cdot e^{\sum_0^n U_\nu}.$$

Alsdann ergibt sich, falls die Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu U_\nu$ konvergiert:

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \mathfrak{U}_n = \mathfrak{P} \cdot e^{\sum_0^\infty {}^\nu U_\nu},$$

und umgekehrt muß offenbar jene Reihe konvergieren, wenn ein endlicher, von Null verschiedener Grenzwert $\lim_{n=\infty} \mathfrak{U}_n$ existieren soll. Somit finden wir:

Das unendliche Produkt $\prod_0^\infty {}^\nu (1 + u_\nu)$ konvergiert in der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung dann und nur dann, wenn die Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu U_\nu$ konvergiert, und zwar hat dasselbe, wenn gesetzt wird:

$$(5) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu U_\nu = U$$

den Wert $e^U \cdot \mathfrak{P}$, stimmt daher mit dem unbedingt konvergierenden Produkt (1) nur dann überein, wenn $U = 0$ ist.[1])

[1]) Man bemerke noch, daß das Produkt $\prod_0^\infty {}^\nu (1 + u_\nu)$ offenbar nach 0 divergiert, wenn der reelle Teil von $\sum_0^\infty {}^\nu U_\nu$ nach $-\infty$ divergiert.

2. Die soeben hergestellte Beziehung zwischen einem bedingt und einem ihm gewissermaßen zugeordneten unbedingt konvergierenden Produkte kann dazu dienen, um die etwaige Wertveränderung zu bestimmen, welche das bedingt konvergierende Produkt bei irgend einer Umordnung der Faktoren erleidet.

Bezeichnet man etwa mit

$$v_0, v_1, \dots v_\nu, \dots$$

irgend eine Umordnung der Zahlen

$$u_0, u_1, \dots u_\nu, \dots$$

mit

$$q_0, q_1, \dots q_\nu, \dots$$

die entsprechende Umordnung der Zahlen

$$p_0, p_1, \dots p_\nu, \dots,$$

so daß also die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu |v_\nu|^{q_\nu+1}$ lediglich eine Umordnung der Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu |u_\nu|^{p_\nu+1}$ vorstellt und, wie diese, konvergiert, setzt man ferner:

$$\mathfrak{Q}_n = \prod_1^n{}^\nu ((1+v_\nu)e^{-V_\nu}), \tag{6}$$

wo: $V_\nu = v_\nu - \frac{1}{2}v_\nu^2 + \frac{1}{3}v_\nu^3 + \dots + (-1)^{q_\nu - 1} \cdot \frac{1}{q_\nu} v_\nu{}^{q_\nu}$,

so wird das mit $\mathfrak{Q}_n$ bezeichnete Produkt bei unbedingt wachsendem n von dem unbedingt konvergierenden Produkte $\mathfrak{P}$ sich lediglich durch die Anordnung der Faktoren unterscheiden, und da diese auf den Wert des betreffenden unendlichen Produktes hier ohne Einfluß ist, so hat man:

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{Q}_n = \mathfrak{P}. \tag{7}$$

Bildet man ferner:

$$\mathfrak{V}_n = \prod_0^n{}^\nu (1+v_\nu) = \mathfrak{Q}_n \cdot e^{\sum_0^n{}^\nu V_\nu}, \tag{8}$$

so folgt, wenn man diese Gleichung durch die Gleichung (3) dividiert:

$$(9)\qquad \frac{\mathfrak{V}_n}{\mathfrak{U}_n} = \frac{\mathfrak{Q}_n}{\mathfrak{P}_n}\, e^{\sum_0^n {}^{\nu} (V_\nu - U_\nu)},$$

und daher unter der Voraussetzung, daß die Reihe $\sum_0^\infty {}^{\nu} V_\nu$ konvergiert und daß

$$(10)\qquad \sum_0^\infty {}^{\nu} V_\nu = V, \quad \lim_{n=\infty} \mathfrak{U}_n = \mathfrak{U}, \quad \lim_{n=\infty} \mathfrak{V}_n = \mathfrak{V}$$

gesetzt wird, schließlich:

$$(11)\qquad \frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{U}} = e^{V-U},$$

d. h. der Wert des umgeordneten Produkts unterscheidet sich von demjenigen des ursprünglichen um den Exponentialfaktor e^{V-U}.

3. Die vorstehenden Ergebnisse nehmen noch eine etwas durchsichtigere Form an, wenn wir den Spezialfall $p_\nu = q_\nu = p$ (d. h. konstant) etwas näher ins Auge fassen, wenn also angenommen wird, daß die Reihe $\sum u_\nu{}^{p+1}$ für irgend ein ganzzahliges $p \geqq 1$ konvergiert (wobei dann unter p die kleinste ganze Zahl dieser Art verstanden werden soll). In diesem Falle wird zunächst:

$$(12)\qquad U_\nu = u_\nu - \tfrac{1}{2} u_\nu^2 + \tfrac{1}{3} u_\nu^3 - \cdots + (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{p}\, u_\nu^p.$$

Wenn dann jede der Reihen

$$\sum_0^\infty {}^{\nu} u_\nu, \quad \sum_0^\infty {}^{\nu} u_\nu^2, \quad \ldots \sum_0^\infty {}^{\nu} u_\nu^p$$

zum mindesten in der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung konvergiert, so ergibt sich:

$$(13)\qquad \sum_0^\infty {}^{\nu} U_\nu = \sum_0^\infty {}^{\nu} u_\nu - \tfrac{1}{2} \sum_0^\infty {}^{\nu} u_\nu^2 + \cdots + (-1)^{p-1} \cdot \frac{1}{p} \sum_0^\infty {}^{\nu} u_\nu^p,$$

so daß also $\sum_0^\infty {}^{\nu} U_\nu$ gleichfalls konvergiert.

Man erhält daher in diesem Falle aus dem Satze von Nr. 1 den folgenden:[1])

Ist $\sum_0^\infty {}^\nu |u_\nu|$ divergent, dagegen $\sum_0^\infty {}^\nu |u_\nu|^{p+1}$ für irgend ein ganzzahliges $p \geqq 1$ konvergent, so besteht die *notwendige und hinreichende* Bedingung für die bedingte Konvergenz des unendlichen Produktes $\sum_0^\infty {}^\nu (1 + u_\nu)$ bei der durch die Indices vorgeschriebenen Anordnung in der (bedingten) Konvergenz der Reihe:

$$\sum_0^\infty {}^\nu \left(\frac{u_\nu}{1} - \frac{u_\nu^2}{2} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{u_\nu^p}{p}\right).$$

Hierzu ist *hinreichend* die (bedingte) Konvergenz der Reihen:

$$\sum_0^\infty {}^\nu u_\nu, \quad \sum_0^\infty {}^\nu u_\nu^2, \quad \ldots \quad \sum_0^\infty {}^\nu u_\nu^p.\text{[2])}$$

Zugleich ergibt sich, daß (unter Beibehaltung der in Nr. 2 benützten Bezeichnungen) die Wertveränderung $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{U}} = e^{V-U}$, falls die letztgenannte Konvergenz-Bedingung erfüllt ist und die entsprechende auch nach der Umordnung besteht, lediglich abhängt von den Differenzen $\sum_0^\infty {}^\nu u_\nu^\lambda - \sum_0^\infty {}^\nu v_\nu^\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$, also von den einzelnen Wertveränderungen, welche die Reihen $\sum_0^\infty {}^\nu u_\nu^\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots p)$ durch die betreffende Umordnung erleiden.

Sind die u_ν (zum mindesten von irgend einem bestimmten Index ν ab sämtlich reell, so kann offenbar die Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu u_\nu^2$,

[1]) Vgl. Stolz-Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie (1905), p. 436.

[2]) Beispiel: $u_\nu = \frac{i^\nu}{\sqrt[3]{\nu + 1}}$ (also: $p = 3$).

wenn sie überhaupt konvergiert, nicht anders als absolut konvergieren. Ist dies der Fall, also $p = 1$ zu setzen, so ergibt sich als notwendig und hinreichend für die bedingte Konvergenz des Produktes $\prod_0^\infty {}^{\nu} (1 + u_\nu)$ die (gleichfalls nur bedingte) Konvergenz der Reihe $\sum_0^\infty {}^{\nu}\, u_\nu$.[1]) Ist dagegen zwar diese letztere konvergent, die Reihe $\sum_0^\infty {}^{\nu}\, u_\nu^2$ jedoch divergent, so divergiert offenbar (s. die Fußnote auf S. 396) jenes unendliche Produkt nach Null.[1])

Ersetzt man wieder u_ν durch $-\dfrac{x}{a_\nu}$, so lassen sich die obigen Ergebnisse auch unmittelbar auf unendliche Produkte von der Form $\prod_0^\infty {}^{\nu} \left(1 - \dfrac{x}{a_\nu}\right)$ übertragen.[2])

---

[1]) Satz von Cauchy: Analyse algébrique, p. 563 = Oeuvres (2), T. III, p. 460.

[2]) Beispiel: Das unbedingt konvergente Produkt:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_1^\infty {}^{\nu} \left(\left(1 - \frac{x}{\nu}\right) \cdot e^{\frac{x}{\nu}}\right) \left(\left(1 + \frac{x}{\nu}\right) \cdot e^{-\frac{x}{\nu}}\right)$$

kann ohne weiteres durch das folgende bedingt konvergente:

$$\prod_1^\infty {}^{\nu} \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) \text{ d. h. } \lim_{n=\infty} \prod_1^\infty {}^{\nu} \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) \cdot \prod_1^n {}^{\nu} \left(1 + \right)$$

ersetzt werden, da hier: $\sum_0^\infty U_\nu = \sum_1^\infty \left(\dfrac{x}{\nu} - \dfrac{x}{\nu}\right) = 0.$

Ordnet man dagegen p Gliedern von der Form $\left(1 - \dfrac{x}{\nu}\right)$ immer q solche von der Form $\left(1 + \dfrac{x}{\nu}\right)$ zu, so liefert die Gleichung (11) mit Benützung der bekannten Beziehung: $\lim_{m=\infty} \sum_{pm+1}^{qm} \dfrac{1}{\nu} = \lg \dfrac{q}{p}$ die Wertveränderung: $\lim_{m=\infty} \prod_1^{pm} {}^{\nu} \left(1 - \dfrac{x}{\nu}\right) \cdot \prod_1^{qm} {}^{\nu} \left(1 + \dfrac{x}{\nu}\right) = e^{x \cdot \lg \frac{q}{p}} \cdot \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}.$