# Sitzungsberichte

der



## mathematisch-physikalischen Klasse

der

## K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1916

München 1916
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

# Inhaltsübersicht.

## I. Sitzungsberichte.



## II. Abhandlungen.

# Sitzungsberichte

der mathematisch-physikalischen Klasse
der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
1916.

Sitzung am 8. Januar.

1. Herr A. Sommerfeld gibt in einer Arbeit:

Die Feinstruktur der Wasserstoff- und Wasserstoff-ähnlichen Linien

die experimentellen Belege für die in der letzten Sitzung vorgetragenen quanten-theoretischen Gesichtspunkte. Diese Belege werden entnommen teils den der Beobachtung noch gerade zugänglichen feinsten Dubletts und Tripletts von Wasserstoff, Helium und Lithium, teils den $K$- und $L$-Serien der charakteristischen Röntgenstrahlung, in welchen die Wasserstoff-Dubletts bei den schweren Elementen auf das Millionenfache vergrößert erscheinen.

(Erscheint in den Sitzungsberichten zusammen mit der Abhandlung vom Dezember 1915.)

2. Herr S. Finsterwalder legt für die Sitzungsberichte eine Abhandlung von L. Berwald in Prag vor:

Über die algebraisch rektifizierbaren Kurven im Nicht-Euklidischen Raume.

## Sitzung am 5. Februar.

Herr S. Finsterwalder legte für die Sitzungsberichte eine Abhandlung von Prof. H. Liebmann vor:

Elementargeometrischer Beweis des Poncelet-schen Schließungssatzes.

---

## Sitzung am 4. März.

1. Herr A. Rothpletz legt vor:

Versteinerungen aus Nordamerika,

die von dortigen Geologen als Bewohner der Erde zur archäischen Zeit beschrieben worden sind. Die mikroskopische Untersuchung der Stücke, welche der Redner 1906 und 1913 drüben gesammelt hat und die jetzt in der Münchener geologischen Staatssammlung aufgestellt sind, ergab: daß das Eozoon das unzweifelhafte Produkt einer von einer Gabbrointrusion auf ein dolomitisches Kalklager ausgeübten Metamorphose, sicher aber keine Versteinerung ist; daß hingegen das Cryptozoon ein eigenartiger Hydrozoontypus und Atikokania eine lithistide Spongie ist. Da Versteinerungen von solchem Typus aus den cambrischen Ablagerungen längst bekannt sind, so ergibt sich, daß auch diese wahrscheinlich dem Eocambrium angehören und nicht imstande sind, das Dunkel aufzuhellen, welches zur Zeit noch über den ersten Anfängen des Lebens auf der Erde ausgebreitet ist. (Erscheint in den Abhandlungen.)

2. Herr W. C. Röntgen legt für die Sitzungsberichte eine Arbeit von E. Wagner vor:

Spektraluntersuchungen an Röntgenstrahlen, II.

Die Mitteilung bringt die Fortsetzung der Messungen der charakteristischen Absorptionswellenlängen im Röntgenspektrum der $K$-Serie für Elemente höheren Atomgewichtes bis Erbium und eine Bemerkung über das Linienspektrum der $L$-Serie einiger Schwermetalle.

3. Herr A. Pringsheim legt vor eine Abhandlung von Georg Faber (Straßburg i. E.):

Neuer Beweis eines Koebe-Bieberbachschen Satzes über konforme Abbildung.

Der fragliche Satz besagt folgendes: Wird vermittelst einer Beziehung von der Form: $Z = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ das Innere eines schlichten $Z$-Gebietes mit der Begrenzung $c$ auf eine Kreisfläche $|z| < 1$ abgebildet, so ist für alle Stellen von $c$: $|z| \geqq \frac{1}{4}$, und es wird der Wert $\frac{1}{4}$ überhaupt nur dann und zwar an einer einzigen Stelle $P$ erreicht, wenn $c$ aus der geradlinigen Verlängerung $P\infty$ des Strahles $OP$ besteht.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

---

## Sitzung am 6. Mai.

1. Herr S. Finsterwalder legt vor eine Abhandlung von Professor E. v. Mecenseffy über:

Die Bildbeziehungen zwischen Kegelschnitten, die einander nach höherer als 1. Ordnung berühren.

Es werden mittels Kontinuitätsbetrachtungen die Ausartungen der 12 zentrischen Kollineationen, welche 2 Kegelschnitte mit 4 reellen Schnittpunkten ineinander überführen, abgeleitet und diese Sonderfälle zur Konstruktion von Kegelschnitten mit gegebenem Krümmungskreis verwendet.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr S. Finsterwalder spricht über:

Flächenteilung mit kürzesten Grenzen.

Soll ein berandetes ebenes oder krummes Flächenstück nach gegebenen Verhältnissen so geteilt werden, daß die Länge sämtlicher Teilungslinien möglichst klein wird, so gelten folgende Sätze: 1. die Teilungslinien stehen senkrecht zum Rand der Fläche; 2. sie treffen sich an der Grenze dreier Felder unter Winkeln von 120°; 3. sie sind Kurven konstanter geodätischer Krümmung, die jedoch in den verschiedenen Stücken der Teilungslinien zwischen je zwei benachbarten Ecken wechselt; 4. den einzelnen Teilungsfeldern kommen Zahlen zu, deren Differenz an der Teilungslinie zweier benachbarter Felder der geodätischen Krümmung jener Teilungslinie gleich ist; 5. die Summe der geodätischen Krümmungen von drei in einer Ecke zusammenstoßenden Teilungslinien ist stets gleich Null.

Bei der Teilung ebener Figuren sind die Teilungslinien Kreisbogen. Die Eigenschaft eines Systems von Kreisbogen kürzeste Teilungslinien eines ebenen Flächenstückes zu sein ist invariant gegenüber ebener und räumlicher Inversion und überträgt sich sinngemäß auf die Kugel. Es wird die Zwei- und Dreiteilung des Dreiecks und des Kreissektors untersucht und aus den Ergebnissen die Gleichteilung der Kreisfläche und der Kugeloberfläche in 2 bis 12 Teile mit geringster Teilungslänge erschlossen. Als Beispiele der Teilung in eine größere Anzahl gleicher Teile wird die Neunzehnteilung der Kreisfläche, sowie die Teilung der Kugel in 20, 32, 42 und 92 gleiche Felder gegeben.

---

## Sitzung am 3. Juni.

1. Herr v. Seeliger legt eine für die Sitzungsberichte der Akademie bestimmte Abhandlung des Konservators Professor Grossmann vor über:

### Die Bestimmung von Fixsternparallaxen.

An dem Meridiankreise der Münchener Sternwarte hat der Verfasser in den Jahren 1908—14 die Entfernungen (Parallaxen) von 765 Sternen bestimmt. Gemessen wird der Winkel, unter welchem der Erdbahnhalbmesser von dem Sterne aus erscheint. Da dieser für alle Sterne sehr klein ist, so können nur außerordentlich scharfe Beobachtungen zum Ziele führen;

vor allem muß auf Elimination der zahlreichen persönlichen und instrumentellen Fehler die größte Sorgfalt verwendet werden. Etwa 40000 Beobachtungen abwechselnd in den Abend- und Morgenstunden waren nötig. Die geringste Entfernung ergab sich für den hellen Stern Arcturus, nämlich 16 Lichtjahre. Allgemein ist jedoch die Helligkeit kein Maßstab für die Entfernung, zuverlässiger hierfür ist die scheinbare Bewegung eines Sterns und sein Spektraltypus. Es bestätigt sich hier das Resultat, welches Herr Geheimrat v. Seeliger aus der Untersuchung der Verteilung der Sterne abgeleitet hat, nämlich, daß unser Stellarsystem ellipsoidische Gestalt hat, der Art, daß die Ausdehnung in der Richtung der Milchstraße bedeutend größer ist wie an ihren Polen.

2. Herr S. Günther legte eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung vor:

Die antike Apokatastasis, auf ihre astronomischen und geophysischen Grundlagen geprüft.

Das schon auf die ionischen Naturphilosophen zurückgehende Wort bedeutet, daß nach Ablauf eines bestimmten Zeitraumes alle Vorgänge am Himmel und auf der Erde sich völlig in gleicher Weise wiederholen sollen. Als astronomisches Maß diente die Präzession der Fixsterne, die jedoch nicht einfach als solche hingenommen, an der vielmehr nach verschiedenen Regeln herumgekünstelt wurde. Die irdischen Phänomene betrachtete man teils plutonistisch teils neptunistisch, und so entwickelte sich aus der aprioristischen Grundvorstellung eine selbständige Morphologie der Erdoberfläche. Bis tief ins 16. Jahrhundert herein haben diese Gedankengänge nachgewirkt.

3. Herr S. Finsterwalder legt vor eine Arbeit von Professor R. Emden:

Über abnorme Hörbarkeit.

Die „Zone des Schweigens“ und die jenseits derselben wieder auftretenden Schallerscheinungen lassen sich, wie in der kurzen Note gezeigt wird, durch die Veränderung der Schallausbreitung einesteils durch die nach oben abnehmende Lufttemperatur, andernteils durch die dort zunehmende Windgeschwindigkeit der Art und Größe nach vollständig erklären.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr A. Sommerfeld legt eine Arbeit von Herrn K. Glitscher vor:

Über die Intensitätsverteilung im Viellinien-Spektrum des Wasserstoffs.

Nachdem neuerdings die Balmersche Wasserstoffserie mit allen Feinheiten, einschließlich ihrer Erklärung im elektrischen Felde, theoretisch erklärt wurde, drängt sich die Frage nach der theoretischen Deutung des zweiten Wasserstoff-Spektrums, des sogenannten Viellinien-Spektrums auf. Die Arbeit von Herrn Glitscher liefert die ersten Anhaltspunkte hierzu, indem sie Zusammenhänge zwischen der Intensitätsverteilung im Viellinien-Spektrum und dem Balmerschen Spektrum aufdeckt.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

---

## Sitzung am 1. Juli.

1. Herr J. Ranke legt eine Abhandlung des Professors Dr. F. Birkner vor über Ausgrabungen, die dieser mit Unterstützung der Akademie im Schulerloch im unteren Altmühltale im Jahre 1915 ausgeführt hat.

Die Grabung ergab oberflächlich eine dünne humöse, schwärzliche Schicht mit Funden aus der frühen Bronzezeit, dann eine 4 m mächtige diluviale Schichte mit Mammut, Rhinoceros tichorhinus, Höhlenlöwe, Höhlenbär, Höhlenhyäne, Steinbock, Rentier, Pferd usw. Die Fauna entspricht einer kalten Periode des Diluviums. Ebenso einheitlich wie die Reste der Tierwelt sind auch die Kulturreste des Menschen; sie gehören der nach allen bisherigen Funden ebenfalls der kalten Periode zuzurechnenden Kulturstufe der Mammutzeit an, welche nach Funden bei Le Moustier in der Dordogne als Moustierstufe bezeichnet wird. Es fanden sich nur wenige nur als gelegentliche Instrumente benützte Knochen, dagegen sehr zahlreiche (etwa 2000) „Werkzeuge“ aus Kieselsäuregesteinen (Hornstein, Jaspis, Quarz, Quarzite). Die Werkzeuge stellen Schalen, Spitzen, Kratzer, Klingen in verschiedener Ausbildung und Größe dar, wie sie zuerst aus den klassischen Fundstellen Frankreichs und Belgiens bekannt geworden sind. Die Untersuchung ist deshalb besonders wichtig, weil hier eine reine Moustierschicht vorliegt ohne Vermischung und Berührung mit älteren und jüngeren paläolithischen Stufen.

(Erscheint in den Abhandlungen.)

2. Herr A. Rothpletz legte eine Arbeit des Konservators Professor Dr. Schlosser vor, in der interessante neue Funde von tertiären und diluvialen Land bewohnenden Wirbeltieren aus Franken beschrieben werden.

Marderartige Raubtiere wohnten zur Oligocänzeit bei Mörnsheim in Spalten des lithographischen Schiefers und wurden darin von plötzlich eingeschwemmtem Lehm lebendig begraben. Im Juradolomit eingesenkt lag zur jüngeren Miocänzeit bei Attenfeld nördlich von Neuburg a. D. ein trichterförmiger Quelltümpel zur Tränke gehender Tiere, die versehentlich hineinfielen, sie konnten sich nicht mehr herausarbeiten und ertranken darin. So sammelten sich von 30 Arten die Überreste an, unter denen besonders die vom Nashorn, einem Vorfahren des Pferdes, des Schweines, von verschiedenen Hirscharten, Marder, einem neuen Geschlecht der Subursi (Aelurursus), von Maulwurf, Pfeifhase, Vögeln, Schlangen, Eidechsen und sehr vielen Landschildkröten (Testudo) erwähnenswert sind.

Die Buchenhüller Höhle bei Eichstätt, die Karl Gareis ausgegraben hat, lieferte von diluvialen Landbewohnern Reste von Mammut, Nashorn, Pferd, Bison, Edelhirsch, Riesenhirsch, Rentier, Wolf und Hyäne. Die Überreste, die im Luitpold-

Museum in Eichstätt aufgestellt sind, zeigen deshalb einen so guten Erhaltungszustand, weil die Tiere zuerst in eine wasserführende Doline gefallen und darin begraben worden waren. Nachträglich erst stürzte der ganze Inhalt der Doline in die darunter befindliche Höhle herunter.

(Erscheint in den Abhandlungen.)

## Sitzung am 4. November.

1. Herr A. Sommerfeld legt eine Arbeit vor:

Zur Quantentheorie der Spektrallinien, Ergänzungen und Erweiterungen.

Dieselbe knüpft an frühere Arbeiten des Verfassers über Wasserstoff-ähnliche Spektren an und erweitert diese auf die einfachsten Wasserstoff-unähnlichen Spektren, insbesondere die von Helium und den Alkalien.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr S. Finsterwalder legt für die Sitzungsberichte vor zwei Abhandlungen:

a) Prof. Dr. H. Liebmann:

Der allgemeine Malus'sche Satz und der Bruns'sche Abbildungssatz;

b) Prof. Dr. H. Mohrmann in Clausthal:

Gewundene reelle Kurvenzüge beliebig hoher Ordnung ohne reelle Singularität.

---

## Sitzung am 2. Dezember.

1. Herr R. Willstätter berichtet über sechs

Untersuchungen über die Assimilation der Kohlensäure,

die von ihm gemeinsam mit Herrn Dr. A. Stoll ausgeführt worden sind. Es wird zunächst gezeigt, daß im Assimilationsvorgang, und zwar auch bei langdauernder und gesteigerter assimilatorischer Tätigkeit, der Blattfarbstoff in seiner Menge und hinsichtlich des Verhältnisses der Farbstoffkomponenten unverändert bleibt. Die assimilatorischen Leistungen werden sodann in zahlreichen Beispielen quantitativ bestimmt und zum Chlorophyllgehalt der assimilierenden Blätter in Beziehung gebracht. Aus der beobachteten Disproportionalität zwischen der Assimilationsleistung und dem Chlorophyllgehalt werden Schlußfolgerungen in Bezug auf die Funktion des Protoplasmas abgeleitet. In weiteren Untersuchungen wird das Verhalten der Kohlensäure gegen die Blattsubstanz und gegen das Chlorophyll behandelt und es wird der Nachweis dissoziierbarer Kohlensäureverbindungen sowohl der farblosen Protoplasmabestandteile wie besonders der beiden Chlorophyllkomponenten erbracht. Endlich wird der assimilatorische Koeffizient zwischen Kohlendioxyd und Sauerstoff behandelt, der nach einem neuen Verfahren ohne Einfluß des respiratorischen Gasaustausches bestimmt wird.

2. Herr Alfred Pringsheim spricht:

Über die Äquivalenz der sogenannten Hölderschen und Cesàro'schen Grenzwerte und die Verallgemeinerung eines damit zusammenhängenden Grenzwertsatzes.

Der Verfasser gibt eine in gewisser Beziehung noch vereinfachte Darstellung des Schur-Landau'schen Beweises für den obigen Äquivalenzsatz und knüpft daran einen durchaus elementaren Beweis eines aus verhältnismäßig schwierigen Betrachtungen J. Schur's hervorgehenden allgemeinen Grenzwertsatzes, welcher eine bemerkenswerte Ergänzung zu einem bekannten Cauchy'schen Grenzwertsatze bildet.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

# Verzeichnis der im Jahre 1916 eingelaufenen Druckschriften.

Die Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Aachen. Geschichtsverein:
— — Zeitschrift, Bd. 37, 1915.
— K. Kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv:
— — Vjestnik, Bd. 17, Heft 3/4; Bd. 18, Heft 1.
— Kroat. Naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Glasnik, Bd. 27, No. 3/4; Bd. 28, No. 1–4.
Allegheny. Observatory:
— — Publications, vol. III, No. 19–23.
Amsterdam. K. Academie van Wetenschappen:
— — Verhandelingen, afd. Natuurkunde, I. sectie, deel XII, 1, 2.
— — Verslagen en vergaderingen, deel 24, No. 1, 2.
— — Verhandelingen, afd. Letterkunde, Nieuwe Reeks, deel XVI, 3–5; deel XVIII, 6; deel XIX, 1.
— — Jaarboek 1915.
— — Prijsvers 1916.
— K. N. aardrijkskundig Genootschap:
— — Tijdschrift, deel 33, No. 1, 2, 3b, 4–6; deel 34, No. 1.
— Wiskundig Genootschap (Société de mathémat.):
— — Nieuw archief, 2. Reeks, deel 11, stuk 1–4; deel 12, stuk 1.
— — Wiskundige opgaven, deel 11, stuk 7; deel 12, stuk 1—3.
— — Revue des publications mathém., tom. 22, partie 2; tom. 23, partie 1, 2; tom. 24, partie 1, 2.
— Zoologisch Genootschap:
— — Bijdragen, tom. 20, 2.
Annaberg. Verein für Geschichte:
— — Mitteilungen, Heft 14/15.
Aschaffenburg. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16 und Programm von Straub.
Augsburg. Historischer Verein:
— — Zeitschrift, 42. Jahrg., 1916.

**Baltimore.** Johns Hopkins University:
— — Bulletin of the Johns Hopkins Hospital, No. 299—301.
**Bamberg.** K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16 mit Programm von Klaiber.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16.
— K. Lehrerbildungsanstalt:
— — 42. Jahresbericht, 1915/16.
— Historischer Verein:
— — Jahresbericht 73, 1915/16.
**Barcelona.** R. Academia de Ciencias y Artes:
— — Boletin, vol. 3, No. 6, 7.
— — Memorias, vol. 11, No. 24—30; vol. 12, No. 1, 2, 4, 11—17.
— — Festschrift zum 150jährigen Bestand, 1915.
**Basel.** Naturforschende Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 27.
— Universität:
— — Schriften der Universität aus dem Jahre 1916 in 4⁰ und 8⁰.
**Bastia.** Société des sciences historiques et naturelles:
— — Bulletin, fasc. 331—333.
**Batavia.** R. Magnetical and Meteorological Observatory:
— — Observations, made at secondary stations, Regenfall, Text und Atlas, 1914.
— — Regenwaarnemingen, vol. 35, No. 2; vol. 36, No. 2.
— — Seismological, Bulletin 1916, No. 4, 5.
— Kon. Natuurkundige Vereenigung in Nederlandsch-Indie:
— — Tijdschrift, deel 73.
**Bayreuth.** K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16 mit Programm.
**Bergzabern.** K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16.
**Berkeley.** University of California:
— — Bulletin, third Serie, vol. V, No. 1, 2.
— — Publications, Semitic Philologie, vol. 6, No. 1, 2 (1—321).
**Berlin.** K. Preuß. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen { Philos.-histor. Klasse, 1915, 7, 8; 1916, 1—4.
Physikal.-math. Klasse, 1916, 1. }
— — Sitzungsberichte 1915, 41—53; 1916, 1—40.
— — Corpus inscriptionum Latinarum, vol. XIII, 4.
— Archiv der Mathematik und Physik:
— — Archiv, Bd. 24, Nr. 4; Bd. 25, Nr. 1—3.
— K. Bibliothek:
— — Jahresbericht 1915/16.

**Berlin.** Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft:
— — Geschäftsbericht 1915/16.
— Deutsche Chemische Gesellschaft:
— — Berichte, 48. Jahrg., Nr. 18; 49. Jahrg., Nr. 2—17; 50. Jahrg., Nr. 1.
— Deutsche Geologische Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 67, Heft 3, 4; Bd. 68, Heft 1, 2.
— — Monatsberichte 1915, Nr. 8—12; 1916, Nr. 1—3.
— Medizinische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 46, 1916.
— Deutsche Physikalische Gesellschaft:
— — Die Fortschritte der Physik, 70. Jahrg., 1914, 1—3.
— — Verhandlungen, Jahrg. 18, Nr. 1—23.
— Physiologische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Jahrg. 40, 1915.
— Redaktion des „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“:
— — Jahrbuch, Bd. 44, Heft 1.
— Kais. Deutsches Archäologisches Institut (röm. Abteilung s. unter Rom):
— — Jahrbuch, Bd. 30, Heft 4; Bd. 31, Heft 1/2 u. Bibliographie, 1915.
— — Antike Denkmäler, Bd. 3, Heft 3, 1916.
— Kaiser Wilhelms-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie:
— — 2. und 3. Jahresbericht 1913/14 und 1914/15.
— — Abhandlungen, Bd. 2 und 3.
— K. Meteorologisches Institut:
— — Veröffentlichungen, Nr. 289—291.
— Preuß. Geologische Landesanstalt:
— — Abhandlungen, N. F., Heft 55, IIIa, 64, 65, 69, 79, 80, 82.
— — Jahrbuch, Bd. 33, II, 3; Bd. 34, II, 3; Bd. 35, I, 2, 3; II, 1, 2; Bd. 36, I, 1, 2.
— — Beiträge zur geolog. Erforschung der deutschen Schutzgebiete, Heft 8—12.
— — Montanstatistik des deutschen Reiches, B. 1915, Text u. Atlas.
— Lehranstalt für die Wissenschaft des Judentums:
— — 34. Bericht.
— — Schriften, Bd. 4, Heft 3/4; Bd. 5, Heft 1—3.
— K. Astronomisches Recheninstitut:
— — Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1918.
— — Kleine Planeten, Jahrg. 1917.
— K. Sternwarte:
— — Veröffentlichungen, Bd. 2, Heft 1.

**Berlin.** Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuß. Staaten:
— — Gartenflora, Jahrg. 1916, Nr. 1—24, 1.
— Verein für Geschichte der Mark Brandenburg:
— — Forschungen zur brandenburgischen und preußischen Geschichte, Bd. 28, 2. Hälfte; Bd. 29, 1. Hälfte.
— Verein für die Geschichte Berlins:
— — Mitteilungen 1916, Nr. 1—3, 5—13.
— Zeitschrift für Instrumentenkunde:
— — Zeitschrift, 36. Jahrg., Nr. 1—12.
— Zentralstelle für Balneologie:
— — Veröffentlichungen, Bd. III, Heft 1, 2.

**Bern.** Schweizerische Naturforschende Gesellschaft:
— — Actes de la 97. Session, tom. 1, 2.
— Allg. Geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz:
— — Quellen zur Schweizer Geschichte, N. F., Bd. 3, Abt. 3, 1.
— — Jahrbuch, Bd. 41.
— Historischer Verein des Kantons Bern:
— — Archiv, Bd. 23, 1.
— Universitätskanzlei:
— — Schriften der Universität, 1914/15 und 1915/16.

**Beuron.** Bibliothek der Erzabtei:
— — Verkade Cenninis, Handbüchlein der Kunst, Jahr 1916.

**Bistritz.** Deutsches Gewerbelehrlingsinstitut:
— — Jahresbericht 40.

**Boston.** American Urological Association:
— — Transactions, vol. 9, 1915.
— Museum of Fine Arts:
— — Bulletin, No. 80, 81, 83, 84.

**Bremen.** Meteorologisches Observatorium:
— — Jahrbuch, 26. Jahrg., 1915.

**Breslau.** Schlesische Gesellschaft für Vaterländische Kultur:
— — 92. Jahresbericht 1914, I, II.
— Technische Hochschule:
— — Personalverzeichnis, S.-S. 1916; W.-S. 1916/17.

**Bromberg.** Stadtbibliothek:
— — Jahresbericht 1913/14, 1915.
— — Jahresbericht 13 und 14 der deutschen Gesellschaft.
— — Mitteilungen der Stadtbibliothek, Jahrg. 7, Nr. 5—12; Jahrg. 8, Nr. 1—4.
— Kaiser Wilhelms-Institut für Landwirtschaft:
— — Jahresbericht 1914.

Brünn. Mährisches Landesmuseum:
— — Časopis, Navzátil 1916.
— Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens:
— — Zeitschrift, 20. Jahrg., Heft 1/2, 3/4.
Budapest. Ungarische Ethnographische Gesellschaft:
— — Ethnographia, Jahrg. 26, Heft 4—6; Jahrg. 27, Heft 1—5.
— Ungarische volkswirtschaftliche Gesellschaft:
— — Közgazdasági Szemle, Bd. 55, Heft 1—5; Bd. 56, Heft 1-6.
— — Bibliographie 1913, März bis Dez.; 1914, Jan.—Dez.
— Ungarisches Nationalmuseum:
— — Ertesitöje, XVI. Jahrg., 1—4.
— K. Ungarische Geologische Reichsanstalt:
— — Földtani Közlöny, Bd. 43, Heft 10—12; Bd. 44, Heft 1—12; Bd. 45, Heft 4—12.
— — Jahrbuch, Bd. 22, Nr. 3—5; Bd. 23, Nr. 1—6.
— — Mitteilungen aus dem Jahrbuch, Bd. 21, Nr. 4—9; Bd. 22, Nr. 1 bis 4 und 6; Bd. 23, Nr. 1, 3, 5, 6.
— — Sektionsblatt, Zone 12, Kol. 17 und 29; Zone 13, Kol. 17 und 18; Zone 26/27, Kol. 25.
— — Jahresbericht 1913, Nr. 1, 2; 1914, Nr. 1, 2.
— K. Ungarische Ornithologische Zentrale:
— — Aquila 22, 1915.
Buitenzorg (Java). Departement van landbouw:
— — Mededeelingen van de afdeeling voor planten ziekten, No. 18.
— — Mededeelingen voor thee, No. 37—40.
— — Mededeelingen uit den kulturtuin, No. 4, 5.
Bukarest. Academia Română:
— — Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine 1915/16, No. 7—10.
— — Bulletin de la section historique, année 3, No. 2.
— Redaktion „L'Independance Albanaise":
— — Année II, No. 15—23.
— Société des Sciences:
— — Bulletin, anul 24, No. 5/6.
Burghausen. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16.

Cambridge (Mass.). Tufts College (Mass.):
— — Studies, vol. 4, No. 1, 2.
— — Circulars, No. 189, 190, $4^0$.
— — Annual Report, No. 69, 70.
Chicago. The Open Court:
— — The Open Court, No. 715—718, 724, 725.

Chicago. The Open Court:
— — The Monist, vol. XXVI, No. 1, 3.
— Oberlin College Library (Ornitholog. Club):
— — The Wilson Bulletin, vol. 26, No. 92, 93; vol. 28, No. 2.
— John Crerar Library:
— — 21th Report for the year 1915.
— Field Museum of Natural History:
— — Publications, No. 184, 185.
— University Library:
— — The astrophysical Journal, vol. 43, No. 1—5; vol. 44, No. 1.
Chur. Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden:
— — 45. Jahresbericht, 1915.
Cincinnati. Society of Natural History:
— — Journal, vol. 21, No. 4.
— University:
— — University Studies, vol. 10, No. 1.
Claremont. Pomona College:
— — Journal of entomology, vol. 7, No. 4.
Cleveland. Archaeological Institute of America:
— — American Journal of Archaeology, vol. 19, No. 4; vol. 20, No. 2, 3.
Colmar. Naturhistorische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, N. F., Bd. 13, 1914/15.

Danzig. Westpreußischer Geschichtsverein:
— — Mitteilungen, Jahrg. 15, Nr. 1—4.
— — Zeitschrift, Heft 56.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Schriften, Bd. XIV, Heft 2.
— Technische Hochschule:
— — Schriften des Jahres 1915/16.
— — Personalverzeichnis S.-S. 1915; S.-S. 1916.
— Westpreußischer Botanisch-zoologischer Verein:
— — Bericht 38.
Darmstadt. Firma E. Merck:
— — Jahresbericht 39, 1915.
— Historischer Verein für das Großherzogtum Hessen:
— — Archiv für hessische Geschichte, N. F., Bd. 10, Heft 1—3; Bd. 11, Heft 1.
— — Quartalblätter, 5. Bd., Nr. 13—18.
Davos. Meteorologische Station:
— — Wetterkarten 1915, Nr. 12; 1916, Nr. 1—12.

**Dessau.** Verein für Anhaltische Geschichte:
— — Mitteilungen, N. F., Heft 3.

**Dillingen.** Historischer Verein:
— — Archiv für die Geschichte des Hochstifts Augsburg, Bd. 3, Abteilung II, Register, 3. u. 4. Lief.; 5. Bd., 1. u. 2. Lief.
— K. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1915/16.

**Dresden.** K. Sächsischer Altertumsverein:
— — Neues Archiv für sächsische Geschichte, Bd. 36 u. 37.
— — Jahresbericht 1915.
— K. Sächsische Landes-Wetterwarte:
— — Deutsches meteorologisches Jahrbuch, Bd. 30, 1912, Nr. 2; Bd. 31, 1913, Nr. 1.
— — Dekaden-Monatsberichte 1914, Jahrg. 17.
— Flora, K. Sächs. Gesellschaft für Botanik und Gartenbau:
— — Jahrg. 18/19.
— Redaktion des Journals für praktische Chemie:
— — Journal 1916, Nr. 1—17.
— Verein für die Geschichte Dresdens:
— — Dresdener Geschichtsblätter, Bd. 24, 1, 2; Bd. 25, 1—4. Register zu Bd. 22—25.

**Dürkheim.** Pollichia:
— — Mitteilungen, Nr. 29, 1916.
— Progymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16.

**Einbeck.** Verein für Geschichte und Altertümer:
— — 10. Jahresbericht 1913—15.

**Eisenach.** Karl Friedrich-Gymnasium:
— — Jahresbericht für 1915/16.

**Emden.** Naturforschende Gesellschaft:
— — 99. und 100. Jahresbericht.
— — Festschrift 1814—1914.
— Gesellschaft für bildende Kunst und vaterländische Altertümer:
— — Jahrbuch, Bd. 19, 1 und Register zu Bd. 1—18.
— — Upstalsboom-Blätter, Jahrg. 5, No. 1—5; Jahrg. 6, No. 1—6.

**Erfurt.** Verein für Geschichte und Altertumskunde von Erfurt:
— — Mitteilungen, Heft 36 und 37.

**Erlangen.** K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16.

**Frankfurt a. M.** Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 36, 2.
— Physikalischer Verein:
— — Jahresbericht 1914/15 und 1915/16.
**Frankfurt a. O.** Naturwissenschaftlicher Verein für den Regierungsbezirk Frankfurt a. O.:
— — Helios, Bd. 28.
**Freiburg i. Br.** Naturforschende Gesellschaft:
— — Berichte, Bd. 21, Heft 2.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1916.
— Kirchengeschichtlicher Verein:
— — Diözesanarchiv, Bd. 42 und 44,
**Friedrichshafen.** Verein zur Geschichte des Bodensees:
— — Schriften, Heft 45, 1916.
**Fürth.** K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16.

**Genf.** Conservatoire et jardin botanique:
— — Annuaire 18/19.
— Redaktion des „Journal de chimie physique":
— — Journal, tom. XIV, No. 1—3.
— Société d'histoire et d'archéologie:
— — Bulletin, tom. 4, livr. 2.
— — Mémoires in 8⁰, vol. 33, No. 3.
— — Mémoires et documents, tom. 4, 1915.
— Société de physique et d'histoire naturelle:
— — Mémoires, vol. 38, fasc. 4, 5.
— — Compte rendu des séances 32, 1915.
— Observatoire:
— — Resumée météorolog. de l'année 1914.
— — Observations des fortifications de St. Maurice 1914.
— Universität:
— — Théses 1913/14, 1914/15.
**Giessen.** Gesellschaft für Natur- und Heilkunde:
— — Bericht, N. F., medizinische Abteilung, Bd. 9 u. 10; N. F., naturwissenschaftliche Abteilung, Bd. 6.
**Göttingen.** K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Göttingische Gelehrte Anzeigen 1916, Nr. 1—12.
— — Abhandlungen, N. F.: a) Philol.-histor. Klasse, Bd. 16, Nr. 1; b) Mathem.-phys. Klasse, Bd. 10, Heft 2—4.
— — Nachrichten: a) Philol.-hist. Klasse, 1915, Heft 3 und Beiheft; 1916, Heft 1—5 und Beiheft; b) Math.-phys. Klasse, 1915, Heft 2 und 3; 1916, Heft 1; c) Geschäftliche Mitteilungen, 1916, Heft 1.

Graz. Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen im S.-S. 1916, W.-S. 1916/17.
— — Verzeichnis der akademischen Behörden etc., 1916/17.
— Historischer Verein für Steiermark:
— — Zeitschrift, Jahrg. 13, 1—4; 14, 1—4; 15, 1—4.

Greifswald. Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Mitteilungen, Jahrg. 45, 1913.

Grimma. Fürsten- und Landesschule:
— — Jahresbericht 1915/16, 4°.

Groningen. Niederländ. botanische Gesellschaft:
— — Recueil, vol. XI, 1—4.
— — Archief 1914.

Grünstadt. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16.

Guben. Gesellschaft für Anthropologie und Altertumskunde:
— — Niederlausitzer Mitteilungen, Bd. 13, Heft 1—4.

Gunzenhausen. K. Realschule:
— — Jahresbericht 1913, 1915/16.

Haag. K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie:
— — Bijdragen, VII. Reeks, deel 71, afl. 3/4; deel 72, afl. 1—4.

Haarlem. Hollandsche Maatschappy der Wetenschappen:
— — Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, sér. III B, tom. 3, livr. 1.

Hall. Historischer Verein für das Württemberg. Franken:
— — Württemberg. Franken, N. F., Heft 11, 1915.

Halle. K. Leopoldinisch-Karolinische Deutsche Akademie der Naturforscher:
— — Nova Acta, Bd. 100 und 101.
— — Leopoldina, Heft 52, No. 1—12.
— Deutsche Morgenländische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, Bd. 70, Heft 1—4.
— — Abhandlungen, Bd. 13, Heft 2, 3.
— Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1916; W.-S. 1916/17.
— Thüringisch-Sächsischer Verein für Erforschung des vaterländischen Altertums:
— — Jahresbericht 1895/96, 1914/15.
— — Zeitschrift für Geschichte und Kunst, Bd. 5, Heft 1, 2.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen u. Thüringen:
— — Zeitschrift für Naturwissenschaften, Bd. 85, Nr. 1—6; Bd. 86, Nr. 1.

**Hamburg.** Stadtbibliothek:
— — Jahrbuch der wissenschaftlichen Anstalten Hamburgs, Jahrg. 32, 1914, Beiheft 1—9.
— — Staatshaushaltsberechnung 1914, 4⁰.
— — Entwurf des hamburgischen Staatsbudgets für 1916, 4⁰.
— — Verhandlungen zwischen Senat und Bürgerschaft 1915, 4⁰.
— Mathematische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. V, Heft 5.
— Deutsche Seewarte:
— — Annalen der Hydrographie, Jahrg. 44, Nr. 1—12.
— — Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen, Jahrg. 37.
— Verein für Hamburgische Geschichte:
— — Mitteilungen, 35. Jahrg., 1915.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Verhandlungen, III, 23, 1915.
— Verein für naturwissenschaftl. Unterhaltung:
— — Verhandlungen, Bd. 15, 1910—13.

**Hannover.** Verein für Geschichte der Stadt Hannover:
— — Hannoverische Geschichtsblätter, 19. Jahrg., Heft 1—4.
— Historischer Verein für Niedersachsen:
— — Zeitschrift, Jahrg. 1914, Heft 1—4; Jahrg. 1915, Heft 1—4.

**Heidelberg.** Akademie der Wissenschaften:
— — Sitzungsberichte: a) philol.-histor. Klasse, 1916, No. 1—11, 14; b) mathem.-naturw. Klasse, 1914, B, Nr. 1; 1915, A, Nr. 14; 1916, A, Nr. 1—11, B, Nr. 2—5.
— — Jahresheft 1915.
— Reichs-Limes-Kommission:
— — Der obergermanisch-rätische Limes des Römerreiches, Lief. 42.
— Sternwarte:
— — Veröffentlichungen des Astronomischen Instituts, Bd. 7, Nr. 6.
— Universität:
— — Schriften der Universität aus dem Jahre 1916 in 4⁰ und 8⁰.
— — Gothein, Krieg und Wirtschaft.
— — Bauer, Vorgeschichte der Union in Baden, Jahrg. 19, Heft 2.
— Historisch-philosophischer Verein:
— — Neue Heidelberger Jahrbücher, Jahrg. 19, Heft 2.
— Naturhistorisch-medizinischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 13, Heft 2.

**Hermannstadt.** Verein für siebenbürgische Landeskunde:
— — Festschrift 1914.

**Hildburghausen.** Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte:
— — Verhandlungen und Mitteilungen, Bd. 64, 1—6.

Igló. Ungarischer Karpathen-Verein:
— — Jahrbuch, 43. Jahrg., 1916.

Ingolstadt. Historischer Verein:
— — Sammelblatt, Heft 35.

Ithaca. Journal of Physical Chemistry:
— — The Journal, vol. 18, No. 7—9.

Jassy. Société des médecins et naturalistes:
— — Bulletin, année 29, 1—12; année 30, 1—4.

Jena. Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, Bd. 54, Heft 1, 2.
— Verlag der Naturwissenschaftlichen Wochenschrift:
— — Wochenschrift 1916, Nr. 1—52.

Karlsruhe. Badische Historische Kommission:
— — Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins, N. F., Bd. 31, Heft 1—4.
— — Windelband, Verwaltung etc. 1917.
— Zentralbureau für Meteorologie und Hydrographie:
— — Jahresbericht für die Jahre 1914 und 1915.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 26, 1912—16.

Kassel. Verein für hessische Geschichte und Landeskunde:
— — Zeitschrift, Bd. 49, 1915.
— — Mitteilungen 1914/15.
— Verein für Naturkunde:
— — Abhandlungen und Bericht, 54.

Kaufbeuren. Verein „Heimat“:
— — Deutsche Gaue, Heft 321—340, Sonderheft 96.

Kempten. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16.

Kiel. Gesellschaft für schleswig-holsteinische Geschichte:
— — Zeitschrift, Bd. 45, 1915 und Register zu Bd. 31—40.
— — Quellen und Forschungen, Bd. 3.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein:
— — Schriften, Bd. 16, Heft 2.

Köln. Gesellschaft für rheinische Geschichtskunde:
— — 35. Jahresbericht, 1915.

Konstantinopel. Institut d'histoire Ottomane:
— — Revue historique 1910, No. 33, 34.

Kopenhagen. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Översigt 1915, No. 5, 6; 1916, No. 1—3.

**Kopenhagen.** K. Akademie der Wissenschaften:
— — Mémoires, Section des sciences, sér. 7, tom. 12, No. 7; sér. 8, tom. 1, No. 3, tom. 2, No. 1—3, 5.
— — Gertz, Aggesøn 1916.
— Botanisk Haves Bibliothek:
— — Arbejder, No. 76—78.
— Carlsberg-Laboratorium:
— — Comptes rendus des travaux, vol. 11, No. 5.
— Conseil permanent international pour l'exploration de la mer:
— — Rapports et procès verbaux, vol. 22, 23.
— Kommissionen for Havundersøgelser:
— — Hausen-Ostenfeld, De Dansk farvantes Plankton i aarene 1898 bis 1901. Kob. 1916.
— — Jacobsen, De internat. Havundersøgelser. Kob. 1916.
— — Middelelser, Serie Fiskeri, Bd. V, 1 und 2.
— Observatorium:
— — Publikationer og mindre meddelelser frä, No. 23—25.
— Dänische biologische Station:
— — Report No. 22.
— Studiengesellschaft für soziale Folgen des Krieges:
— — No. 1.
**Krakau.** Historische Gesellschaft:
— — Biblioteka, No. 51.
— Numismatische Gesellschaft:
— — Wiadomosci 1916, No. 1—12.

**Laibach.** Musealverein für Krain:
— — Carniola, Bd. 7, No. 1—3.
**Landau** (Pfalz). K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16.
**Landsberg a. L.** K. Realschule:
— — 38. Jahresbericht 1915/16.
**Landshut.** Historischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 52.
**La Plata.** Universidad Nacional:
— — Contribucion al estudio de las ciencias, Serie fisica, vol. 1, entr. 5.
**Lausanne.** Société Vaudoise des sciences naturelles:
— — Bulletin, No. 187—190.
**Leiden.** s'Rijks Herbarium:
— — Mededeelingen, No. 21—27.
— Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde:
— — Handelingen en Mededeelingen 1914/15.

Leiden. Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde:
— — Levensberichten 1914/15.
— Redaktion des „Museum“:
— — Museum, maandblad voor philologie en geschiedenis, Jahrg. 23, No. 5—12; Jahrg. 24, No. 1—4.
— Redaktion der „Mnemosyne“:
— — Mnemosyne, N. S., Bd. 44, No. 2—4; Bl. 45, No. 1.

Leipzig. Redaktion der Beiblätter zu den Annalen der Physik:
— — Beiblätter, 1915, Nr. 24; 1916, Nr. 1—20.
— K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 33, Nr. 1—3; Bd. 34, Nr. 1, 2.
— — Abhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 34, Nr. 1, 2; Bd. 35, Nr. 1, 2.
— — Berichte über die Verhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 67, Nr. 3; Bd. 68, Nr. 1—4.
— — Berichte über die Verhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 67, Nr. 3, 4; Bd. 68, Nr. 1, 2.
— Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft:
— — Jahresbericht 1916.
— Thomasschule:
— — Bericht 1915/16.

Lemberg. K. K. Franzens-Universität:
— — Programm der Vorlesungen 1916/17.

Lindenberg. K. Preuß. Aëronautisches Observatorium:
— — Ergebnisse der Arbeiten, Bd. 10 und 11.

Linz. Museum Francisco-Carolinum:
— — 74. Jahresbericht.

Lohr. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16 mit Programm.

Ludwigshafen a. Rh. K. Oberrealschule:
— — Jahresbericht 1914/15 und 1915/16 und Programm.

Lund. Redaktion von „Botaniska Notiser“:
— — Notiser, 1916, No. 1—6.
— Kulturhist. förening och Museum:
— — Redogørelse for 1915/16.
— Filologiska föreningen:
— — Spragliga uppsatser 4.
— Universität:
— — Acta, N. Ser., aft. I, 10, 1914; 11, 1915; aft. II, 10, 1914; 11, 1915.
— — Bibelforskaren 1915, 1—6.
— — Arskrift, Kyrkohistorisk, Jahrg. 16, 1915.

**Madrid.** R. Academia de la historia:
— — Boletín, tom. 68, No. 1, 4—6; tom. 69, No. 1, 2, 5.
**Mainz.** Altertumsverein:
— — Mainzer Zeitschrift, Jahrg. 10, 1915.
**Mannheim.** Altertumsverein:
— — Mannheimer Geschichtsblätter, 17. Jahrg., 1916, Nr. 1—12.
**Marbach.** Schwäbischer Schillerverein:
— — Rechenschaftsbericht 19, 1914/15; 20, 1915/16.
**Marburg.** Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaft:
— — Sitzungsberichte 1915, 1866, 2, 1869—1886, 1889—95.
**Marnheim** (Pfalz). Realanstalt am Donnersberg:
— — Jahresbericht 1915/16.
**Meiningen.** Henneberg. altertumsforsch. Verein:
— — Neue Beiträge, Jahrg. 27.
**Meissen.** Fürsten- und Landesschule St. Afra:
— — Jahresbericht für das Jahr 1915/16, 4⁰.
**Metten.** K. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16 mit Programm von Geiger.
**Minneapolis.** University of Minnesota Library:
— — Agricultur Experimental Studies. Bulletin, No. 135—137.
**Mount Hamilton** (California). Lick Observatory:
— — Bulletin, vol. VII, No. 276, 281—287 und Titel und Register zu Nr. 207—242 und 243—277.

**München.** Statistisches Amt:
— — Hygiene und soziale Fürsorge in München (Einzelschriften, Nr. 12).
— K. Hydrotechnisches Bureau:
— — Flußnivellement 1915.
— — Wassermessungen, Donaugebiet 1911—15.
— — " Rhein-, Elbe- und Wesergebiet 1911—15.
— — Abhandlungen: Häuser, Wolkenbruch in Augsburg.
— — " Specht, Regenfälle in Bayern.
— K. Ludwigs-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16.
— K. Luitpold-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16 und Programm.
— K. Theresien-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16 mit Programm von Greger.
— K. Wilhelms-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16.
— K. Wittelsbacher Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16.

**München.** K. Realgymnasium:
— — 52. Jahresbericht, 1915/16 und Beilage.
— K. Technische Hochschule:
— — Programm für das Studienjahr 1916/17.
— — Personalstand im S.-S. 1916.
— Metropolitan-Kapitel München-Freising:
— — Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1915/16.
— — Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising 1916 mit Register.
— K. Luitpold-Kreisoberrealschule:
— — 9. Jahresbericht 1915/16 mit Beilage.
— K. Gisela-Kreisrealschule:
— — 12. Jahresbericht 1915/16.
— K. Maria Theresia Kreisrealschule:
— — 17. Jahresbericht 1915/16.
— K. Universität:
— — Personalstand, S.-S. 1916 und W.-S. 1916/17.
— — Schriften aus dem Jahre 1915/16 in 4⁰ und 8⁰.
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1916 und W.-S. 1916/17.
— Ärztlicher Verein:
— — Sitzungsberichte, Bd. 25, 1915.
— Historischer Verein von Oberbayern in München:
— — Oberbayerisches Archiv, Bd. 60, Heft 2.
— — Altbayerische Monatschrift, Jahrg. 13, Heft 3.
— Verein zur Gründung eines Mädchengymnasiums:
— — 21. Jahresbericht 1915/16.
— K. Meteorologische Zentralstation:
— — Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreich Bayern 1915, Nr. 12; 1916, Nr. 1—11.
— — Veröffentlichungen: Deutsches meteorologisches Jahrbuch (Bayern) für 1914.
**Münster.** Westfäl. Provinzialverein für Wissenschaft u. Kunst:
— — Jahresbericht 43, 1914/15.
— Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift für vaterländische Geschichte, Bd. 73, 2.

**Neapel.** Stazione zoologica:
— — Mitteilungen, Bd. 22, Heft 11, 12.
**Neuchâtel.** Société Neuchâteloise de géographie:
— — Bulletin, tom. 25, 1916.
**New Haven.** Yale University Library:
— — Yale Review, N. S., vol. 5, No. 4; vol. 6, No. 1.
**New York.** American Museum of Natural History:
— — Journal, vol. 15, No. 8; vol. 16, No. 1, 3—6.

New York. Botanical Garden Library:
— — Bulletin, vol. 8, No. 34.
— American Geographical Society:
— — Geographical Review, vol. 1, No. 1—4 und 6; vol. 2, No. 1—5.
— American Mathematical Society:
— — Bulletin, No. 244—250.
— — Transactions, vol. 17, No. 1—3.
— Zoological Society:
— — Zoologica, vol. 1, No. 12—14; vol. 2, No. 5.

Nürnberg. Naturhistorische Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 19, No. 4.
— — Jahresbericht 1912—15.
— K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16 mit Beilage.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16 mit Programm.
— Germanisches Nationalmuseum:
— — Anzeiger 1915, Nr. 1—4.

Ó-Gyalla (Ungarn). Astrophysikalisches Observatorium:
— — Kleinere Veröffentlichungen, Nr. 2—5, 7, 10, 11, 13, 14.
— — Thage von Konkoly. — L. Terkan.

Osnabrück. Verein für Geschichte und Landeskunde:
— — Mitteilungen, Bd. 39, 1916.

Paderborn. Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift, Bd. 73, 1.

Paris. Redaction „La paix par le droit“:
— — La paix, année 25, No. 21—24; année 26, No. 3—6, 12—15, 17—22.

Pasing. K. Progymnasium:
— — 6. Jahresbericht 1915/16.

Passau. K. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1915/16.

Philadelphia. Pennsylvania Museum and School of industrial art:
— — Bulletin No. 53, 55, 56.
— — Report 40, 1916.
— Historical Society of Pennsylvania:
— — The Pennsylvania Magazine of History, vol. 37, No. 156—160.

Plauen. Altertumsverein:
— — Mitteilungen, 26. Jahresschrift, 1916.

Plauen. Gymnasium:
— — 27. Jahresbericht, 1915/16.

Pola. Hydrographisches Amt der K. K. Kriegsmarine:
— — Veröffentlichungen, Nr. 37.

Posen. Historische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, Jahrg. 29, Heft 2.
— — Historische Monatsblätter, Jahrg. 16, Nr. 1—12.
— — Warschauer Geschichte der Provinz Posen, 1914.

Potsdam. Geodätisches Institut:
— — Veröffentlichungen, N. F., Nr. 64—69.
— Zentralbureau der internationalen Erdmessung:
— — Veröffentlichungen, Nr. 29, 30.

Prag. K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Sitzungsberichte der philos.-hist. Klasse, 1915; der math.-naturwiss. Klasse, 1915.
— Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos“:
— — Lotos, Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Bd. 63, Nr. 1—10.
— — Abhandlungen, Bd. IV, Heft 1, 2.
— — Naturwissenschaftliche Schriften, Nr. 1.
— Čechoslavisches Museum:
— — Narodpisný Věstník Československý, Bd. 11, Nr. 1—3.
— K. K. Sternwarte:
— — Magnetische und meteorologische Beobachtungen, Jahrg. 75, 1914; Jahrg. 76, 1915.
— Verein böhmischer Mathematiker:
— — Časopis, Ročník 43, číslo 1—5; Ročník 44, číslo 1—5; Ročník 45, číslo 1—3.
— — Sbornik, číslo 13, 1915.
— Deutsche Karl Ferdinands-Universität:
— — Ordnung der Vorlesungen, S.-S. 1916; W.-S. 1916/17.
— — Personalstand 1914/15 und 1915/16.
— — Inauguration des Rektors 1915/16.

Regensburg. K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht für 1915/16 und Programm von Patin.
— Historischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 66.

Rio de Janeiro. Biblioteca nacional:
— — Annaes, vol. 31—34, 1909—12.
— — Relatorio 1908—14.
— — Calogeras. — A. Tavares de Lyra. — Poesias de Euaristo Ferreira da Veiga, 1915.

**Rom.** Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei:
— — Atti, anno 68, sessione 2—7; anno 69, sessione 1—7.
— — Memorie, serie II, vol. 1, 1915.
— Kaiserl. Deutsches Archäologisches Institut:
— — Mitteilungen, Bd. 30, Nr. 1—4 und Tafeln.
— Specola Vaticana:
— — Publicazioni, vol. 8, 1916.

**Rosenheim.** Gymnasium:
— — Jahresberichte für 1915/16.

**Rostock.** Universität:
— — Schriften aus den Jahren 1914/15 und 1915/16 in 4⁰ und 8⁰.

**Saargemünd.** Gymnasium mit Realabteilung:
— — 45. Jahresbericht, 1915/16.

**Salzburg.** K. K. Staatsgymnasium:
— — Programm für das Jahr 1915/16.
— Gesellschaft für Salzburgische Landeskunde:
— — Mitteilungen 56, 1916.

**Sarajevo.** Landesmuseum:
— — Glasnik 27, 1915, Nr. 3, 4.

**Schleusingen.** Hennebergischer Geschichtsverein:
— — Schriften Nr. 3—9.

**Schweinfurt.** K. Realschule:
— — Jahresbericht 1915/16.

**Schwerin.** Verein für mecklenburgische Geschichte:
— — Jahrbücher und Jahresberichte, Jahrg. 80.

**Sofia.** Société archéologique Bulgare:
— — Bulletin, vol. 4, 1914; vol. 5, 1915.

**Spalato.** K. K. Archäologisches Museum:
— — Bulletino di archaeologia e storia Dalmata, vol. 35, 1912, No. 1—12.

**Speier.** Historischer Verein der Pfalz:
— — Mitteilungen, Bd. 36.

**Stade.** Verein für Geschichte und Altertümer etc.:
— — Stader Archiv, N. F., Heft 6, 1916.

**Stavanger.** Museum:
— — Aarshefte for 1915, vol. 26.

**Stettin.** Gesellschaft für Pommersche Geschichte und Altertumskunde:
— — Baltische Studien, N. F., Bd. 19, 1916.
— — Monatsblätter 1915, Nr. 1—12.

Stockholm. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Handlingar, Bd. 51, No. 1—11; Bd. 53, No. 1—5; Bd. 55, No. 1—6.
— — Arkiv för Zoologi, Bd. 9, No. 3, 4; Bd. 10, No. 1—3.
— — Arkiv för Kemi, Bd. 6, No. 1—3.
— — Arkiv för Botanik, Bd. 14, No. 2, 3.
— — Arkiv för Matematik, astronomie och fysik, Bd. 10, No. 4; Bd. 11, No. 1—3.
— — Meddelanden från Nobel-Institut, Bd. 3, No. 3.
— — Arsbôk for år 1915 und 1916.
— — Meteorologiska Jakttagelser i Sverige, vol. 56.
— — Astronomiska Jakttagelser i Sverige, Bd. 10, No. 3, 4.
— — Berzelius Bref II, 2.
— — Dahlgren, Personförteckningar 1739—1915.
— — Lefnadsteckningar V, 1.
— K. Vitterhets Historie och Antikvitets Akademie:
— — Fornvännen, Årgangen 10, 1915.
— K. Landtbruks-Akademie:
— — Handlingar och tidskrift, Bd. 55, 1916, No. 1—8.
— K. Bibliothek:
— — Akzessionskatalog 30, 1915.
— Entomologiska föreningen:
— — Tidskrift, Jahrg. 37, 1916, No. 1—4.
— Geologiska Föreningens:
— — Förhandlingar, Bd. 38, No. 1—7.
— Nationalekonomiska föreningen:
— — Förhandlingar 1915.
— Schwedische Gesellschaft für Anthropologie und Geographie:
— — Ymer, Jahrg. 35, Heft 4; Jahrg. 36, Heft 1—3.
— Nordiska Museet:
— — Fataburen 1915, Heft 1—4.
— Reichsarchiv:
— — Meddelanden, N. F., I, No. 36—41; II, No. 5.
— — Svenska Ricks rådets protokoll, Bd. 14, 1650.
— Forstliche Versuchsanstalt:
— — Meddelanden, Heft 12, 1915.

Strassburg. K. Hauptstation für Erdbebenforschung:
— — Seismometrische Aufzeichnungen 1914, Nr. 17—51; 1915, Nr. 1—23; 1916, Nr. 1—24.
— Wissenschaftliche Gesellschaft:
— — Schriften 25—29.

**Strassburg.** Internationale Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt:
— — 1912, Heft 10—12.
— Universitätsbibliothek:
— — Schriften 1914/15.

**Straubing.** Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16 und Programm.
— Historischer Verein:
— — Jahresbericht 18, 1915.

**Stuttgart.** K. Landesbibliothek:
— — Fischer, Schwäbisches Wörterbuch, Lief. 52, 53.
— Württemberg. Kommission für Landesgeschichte:
— — Vierteljahreshefte für Landesgeschichte, N. F., Jahrg. 24, Heft 3/4; Jahrg. 25.
— — Württemberger Geschichtsquellen, Bd. 19.
— K. Württembergisches Statistisches Landesamt:
— — Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde, Jahrg. 1915, Heft 2.
— K. Württembergisches Geh. Haus- und Staatsarchiv:
— — Urkunden und Akten, I. Abteil., 1, 1, 1916.

**Tokyo.** Mathematico-Physical Society:
— — Proceedings, 2d ser., vol. 8, No. 9—11, 13—17, 20.

**Tromsö.** Museum:
— — Aarshefter 37, 1914.
— — Aarsberetning for 1914.

**Tübingen.** Universität:
— — Universitäts-Schriften 14.

**Upsala.** K. Universität:
— — Linné-Skrifter, Afd. II, 1.
— — Eranos, Acta philol. Suecana, vol. 14, fasc. 3/4.
— Meteorologisches Observatorium der Universität:
— — Bulletin mensol., vol. 46, 1914; vol. 47, 1915.

**Utrecht.** Historisch Genootschap:
— — Bijdragen en mededeelingen, deel 36. Regels 1915.
— — Werken, ser. III, No. 34—36.
— Provincial Utrechtsch Genootschap:
— — Aanteekeningen 1916.
— Institut Royal Météorologique des Pays-Bas:
— — Annuaire 1914, A, B.
— — Mededeelingen en Verhandelingen, No. 20.

Utrecht. Institut Royal Météorologique des Pays-Bas:
— — Overzicht, Jahrg. 12, No. 12; Jahrg. 13, No. 1—12.
— — Onweders 1913, deel 34.
— — Publicacion No. 108.
— Observatoire astronomique:
— — Recherches, vol. 6, 1916.
— Physiol. Laborat. d. Hoogeschool:
— — Onderzoekingen, vol. V, No. 17.

Washington. U. S. Department of Agriculture:
— — Yearbook 1915.
— — Journal of the agricultural Researche, vol. 5, No. 11—22, 25, 26; vol. 6, No. 2, 3, 5—8, 10—16, 18, 19, 21—26; vol. 7, No. 1—10.
— Department of Commerce:
— — Special publications No. 35.
— Bureau of American Ethnology:
— — Bulletin No. 57, 58, 62.
— Bureau of railway economics:
— — Bulletin No. 85—87, 89, 92—94, 96.
— Smithsonian Institution:
— — Annual Report 1913 und 1914.
— U. S. Naval Observatory:
— — Annual Report for 1914 und 1915.

Weihenstephan. A. Akademie für Landwirtschaft und Brauerei:
— — Bericht 1915/16.

Weimar. Thüring. botanischer Verein:
— — Mitteilungen, N. F., Heft 33.

Wernigerode. Harzverein für Geschichte:
— — Zeitschrift, Jahrg. 48, Heft 1—3; Jahrg. 49, Heft 1, 2.

Wien. Kaiserl. Akademie der Wissenschaften:
— — Sitzungsberichte: a) der philos.-histor. Klasse, Bd. 179, Abh. 2 u. 6; Bd. 180, Abh. 2—5; Bd. 181, Abh. 1 u. 5; Bd. 182, Abh. 1; b) der math.-naturwiss. Klasse, Bd. 124, Abt. I, Abh. 5—7; Abt. IIa, Abh. 5—10; Abt. IIb, Abh. 5—10; Bd. 125, Abt. I, Abh. 1—4 u. 8—10; Abt. IIa, Abh. 1—6; Abt. IIb, Abh. 1—5.
— — Denkschriften der philos.-histor. Klasse, Bd. 57, 58 u. $59^4$; math.-naturwiss. Klasse, Bd. 91.
— — Anzeiger (math.-naturwiss. Klasse) 1916, Nr. 1—27.
— — Almanach 1915, 65. Bd.
— — Archiv für österreichische Geschichte, Bd. 105, 1. Hälfte.
— K. K. Gesellschaft der Ärzte:
— — Wiener Klinische Wochenschrift 1916, Nr. 1—52.

Wien. Zoologisch-botanische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 66, Nr. 1–5.
— — Abhandlungen, Bd. 9, Nr. 2.
— K. K. Naturhistorisches Hofmuseum:
— — Annalen, Bd. 29, Nr. 3/4; Bd. 30, Nr. 1/2.
— Israelitisch-theologische Lehranstalt:
— — Jahresbericht 23.
— K. K. Geologische Reichsanstalt:
— — Verhandlungen 1915, Nr. 15–18; 1916, Nr. 1—12.
— — Jahrbuch, Bd. 64, Heft 4; Bd. 65, Heft 1—4.
— — Geologische Karte, Lief. 12, 1913; Lief. 13, 1914 und Erläuterungen Nr. 29a, 114, 115a, 117a, 126a.

Wiesbaden. Verein für Nassauische Altertumskunde:
— — Annalen, Bd. 43, 1914 und 1915.
— — Mitteilungen, Jahrg. 18 und 19.
— Verein für Naturkunde:
— — Jahrbücher, Jahrg. 68.

Wolfenbüttel. Geschichtsverein für das Herzogtum Braunschweig:
— — Jahrbuch, 14. Jahrg.
— — Braunschweigisches Magazin, Bd. 21, 4⁰.

Würzburg. Physikalisch-medizinische Gesellschaft:
— — Sitzungsberichte, 1915, Nr. 1—5.
— — Verhandlungen, N. F., Bd. 44, Heft 1, 2.
— K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16 mit Programm von Widder.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16 mit Programm.
— K. Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1916.
— — Personalstand W.-S. 1915/16 und 1916/17, S.-S. 1916.
— Historischer Verein:
— — Archiv, Bd. 57.
— — Jahresbericht für 1914.

Wunsiedel. K. Realschule:
— — Jahresbericht 1915/16.

Zürich. Naturforschende Gesellschaft:
— — Vierteljahresschrift, Jahrg. 60, Heft 3/4; Jahrg. 61, Heft 1/2.
— — Neujahrsblatt 118.
— Schweizerische Geodätische Kommission:
— — Astronomisch-geodätische Arbeiten, Bd. 15, 1916.

**Zürich.** Schweizerische Geologische Kommission:
— — Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz, N. F., Lief. 44 und 46, 1, 2 mit Erläuterungen Nr. 18.
— Schweizerisches Landesmuseum:
— — Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde, N. F., Bd. 17, Nr. 4; Bd. 18, Nr. 1—3.
— — 24. Jahresbericht, 1915.
— Bibliothek des Eidgenössischen Polytechnikums:
— — Dissertationen 1916.
— — Programm, S.-S. 1916, W.-S. 1916/17.
— Schweizerische meteorologische Zentralanstalt:
— — Annalen, 51. Jahrg., 1914.

**Zweibrücken.** K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1915/16 mit Programm.

---

## Geschenke von Privatpersonen, Geschäftsfirmen und Redaktionen:

Abreu, J. Capistrano de:
— rã-txa hu-ni-ku-ĩ. Rio de Janeiro 1914.

Adamkiewicz, Albert:
— Abrechnung u. Entlarvung (S.-A. aus „Der Forscher“). Hannover 1916.

Albert, E.:
— 40 Jahre Reproduktionstechnik, 1856—1916. München 1916.

Bees, Nikos A. in Berlin-Wilmersdorf:
— Verzeichnis der griechischen Handschriften des peloponnesischen Klosters Mega Spilaeon, Bd. 1. Leipzig 1915.
— Ein angebliches Autograph des Kaisers Nikephoros Phokas. Leipzig 1916.

Berger, Emil:
— Zur Geschichte eines optischen Instrumentes, eine soziologische Studie. Bern 1916.

Böhlau, Weimar:
— Zeitschrift für Rechtsgeschichte (3 Abteilungen), Bd. 37, 1916.

Fauth, Ph., Landstuhl:
— 25 Jahre Planetenforschung, beobachtungstechnische Erfahrungen und Ergebnisse. Kaiserslautern 1916.

Görz, Optische Anstalt Berlin-Friedenau:
— Die totale Sonnenfinsternis vom 21. August 1914.

Habich, Gg.:
— Die deutschen Medailleure des 16. Jahrhunderts. Halle 1916.

Ἑλληνομνήμων, Νέος:
— Bd. 10.

Mehlis, C.:
— Neuzeitliche Ruinen im Pfälzerwalde.
— Die geologische Bezirkssammlung zu Neustadt a. H.
— Gewitterstraße und Sturmflut.
— Grenzstein von der „Schmalstraße“ bei Neustadt a. H.
— Die Felskluft am Studerbildkopf.
— Zur Wiligartisburg.
— Zu den vorgeschichtlichen Eisenbarren.

Mörikofer, Walter:
— Klimatische Normalwerte für Basel. Basel 1916.

Moravek, Gottlieb:
— Allgemeine Beweise der Gültigkeit des letzten Fermatschen Satzes.

München, Lehr- und Versuchsanstalt für Photographie:
— Jahrbuch für das 15. und 16. Schuljahr.

München, Gesellschaft Münchener Germanisten:
— Abhandlungen zur deutschen Literaturgeschichte. Franz Muncker zum 60. Geburtstag dargebracht. München 1916.

Neudegger, Max:
— Zum Weltkrieg 1914—16. Geschichts- und kulturpolitische Betrachtungen. München 1916.

Ross, Herm.:
— Die Pflanzengallen Bayerns u. der angrenzenden Gebiete. Jena 1916.

Rüdin, Ernst:
— Studien über Vererbung und Entstehung geistiger Störungen. Berlin 1916. (Aus Neurologie und Psychiatrie, Heft 12.)

Ruths, Ch.:
— Neue Relationen im Sonnensysteme und Universum.

Holba, Stefan, Budapest:
— Eine neue Bahn in das Reich der Algebra (Fermatscher Satz).

Jecht, Görlitz:
— Oberlausitzer Hussitenkrieg, 2 Bde. Görlitz 1911 und 1916.
— Quellen zur Geschichte der Stadt Görlitz bis 1600. Görlitz 1909.

Illeck, Joseph:
— Richtig gestellte Theorie der Schwingungen gespannter Saiten.

Kull, J. V., München:
— Preisverhältnisse seltener Münzen und Schaustücke des Hauses Wittelsbach in der 1. Hälfte des 19. Jahrhunderts.

Kull, J. V., München:
— Die Wappenbilder des Gesamthauses Wittelsbach, insbesondere auf Münzen der pfälzischen Linie.

Legat, Maurice:
— Bibliographie du calcul des variations depuis les origines jusqu' à 1850.

Leipzig, Deutsche Bücherei:
— Denkschrift zur Einweihung der Deutschen Bücherei 1916.

Liebermann, F.:
— Die Gesetze der Angelsachen, 3. Bd. Halle 1916.

Loeb, James:
— Die Terrakotten der Sammlung Loeb, herausgegeben von Joh. Sieveking, 1. Bd. München 1916.

Luschin von Ebengreuth, Wien:
— Österreichs Anfänge in der Adria. Vortrag, 1916.

Serkowski, St.:
— Über den Einfluß gewisser physikal.-chemischer Faktoren auf Präzipitation und Agglutination (S.-A.).

Teubner, B. G., Leipzig:
— Encyclopédie des sciences mathématiques, tome V, vol. 1, fasc. 1; tome II, vol. 4, fasc. 2; tome IV, vol. 2, fasc. 2; tome II, vol. 6, fasc. 2; tome VI, vol. 2, fasc. 1.
— Enzyklopädie des Islam, Lief. 22 (1916).
— Enzyklopädie der mathemat. Wissenschaften, Bd. II, 1, Heft 9; Bd. V, 3, Heft 1.

Voigt, Andreas:
— Die Teilbarkeit der Potenzsummen und Fermatscher Satz (S.-A.).

Wahrmund, Ludwig:
— Quellen zur Geschichte des römisch-kanonischen Prozesses im Mittelalter, Bd. 3, Heft 1. Innsbruck 1916.

Wetterhoff, F.:
— Finnland im Lichte des Weltkriegs. Berlin 1916.

Zeitschrift für Assyriologie, Bd. 30, Heft 3 und 4.

Zeller, Joseph:
— Das Prämonstratenserstift Adelberg 1178—1476.
— Beiträge zur Geschichte der Melker Reform im Bistum Augsburg.

*

# Über die algebraisch rektifizierbaren Kurven im Nicht-Euklidischen Raum.

Von **Ludwig Berwald.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 8. Januar 1916.

Methoden zur Bestimmung aller algebraisch rektifizierbaren algebraischen krummen Linien, d. h. aller algebraischen krummen Linien, deren Bogen algebraisch durch die Werte der Koordinaten seiner Endpunkte ausgedrückt werden kann, verdankt man, für den dreidimensionalen Euklidischen Raum, den Herren Darboux, Stäckel, Salkowski.[1]) Herr Salkowski geht von einem Formelsystem aus, mittels dessen Herr de Montcheuil[2]) die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

ohne Anwendung von Integralzeichen gelöst hat. Ein anderes, verwandtes[3]) Formelsystem, welches das Gleiche leistet, hatte Herr de Montcheuil schon früher angegeben.[4])

---

[1]) G. Darboux, Sur la résolution de l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ et de quelques équations analogues. J. math. p. appl. (4), 3 (1887), 305—325; P. Stäckel, Über algebraische Raumkurven. Math. Ann. 45 (1894), 341—370; E. Salkowski, Über algebraisch rektifizierbare Raumkurven. Math. Ann. 67 (1909), 445—458.

[2]) M. de Montcheuil, Résolution de l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Bull. Soc. Math. France 33 (1905), 170—171.

[3]) Vgl. hierüber des Verfassers Abhandlung: „Über die Flächen mit einer einzigen Schar zueinander windschiefer Minimalgeraden." Sitzungsber. d. math.-phys. Kl. d. K. Akad. München 1913, 143—211, wo man in § 10 (S. 179 ff.) auch weitere Literaturangaben findet.

[4]) M. de Montcheuil, Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis. Bull. Soc. Math. France 31 (1903), 233

In der vorliegenden Abhandlung werden die entsprechenden Aufgaben für den dreidimensionalen elliptischen Raum vom Krümmungsmaße $\frac{1}{k^2}$ ($k$ reelle Konstante) und der absoluten Fläche:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{a}$$

erledigt. Es wird also:

1. die Gleichung

$$dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = ds^2$$

ohne Anwendung von Integralzeichen gelöst, wenn die $x_i$ der Nebenbedingung

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = k^2$$

genügen;[1]) und:

2. die Bestimmung aller algebraisch rektifizierbaren algebraischen krummen Linien im betrachteten elliptischen Raume geleistet.

Auch hier folgt die Lösung des zweiten Problems unmittelbar aus derjenigen des ersten.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, daß die Wahl gerade eines elliptischen Fundamentalraumes bei der Erledigung der vorgelegten Probleme völlig unwesentlich ist. In der Tat führen, wie bekannt, die Substitutionen:

$$x_0' = i x_0, \quad x_i' = x_i \ (i = 1, 2, 3), \quad k' = ik$$

den betrachteten elliptischen Raum in den hyperbolischen Raum von Krümmungsmaß $-\frac{1}{k'^2}$ und der absoluten Fläche:

$$x_0'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 = 0 \tag{b}$$

über. Ebenso ist auch die besondere Form (a) der Gleichung der absoluten Fläche unwesentlich, und nur der formalen Be-

—258; 32 (1904), 152—185. Das betreffende Formelsystem findet man in Bd. 31, S. 235.

[1]) Von der trivialen Lösung, die durch die Nicht-Minimalgeraden des elliptischen Raumes geliefert wird, sehen wir dabei ab.

quemlichkeit halber gewählt. Demnach lassen sich ohne besondere Schwierigkeit aus den im Texte gegebenen Formeln die entsprechenden für den hyperbolischen Raum oder für eine andere Form der Gleichung der absoluten Fläche ableiten.

## I. Die krummen Linien auf der absoluten Fläche und die krummen Minimallinien.

1. Wir legen unseren Betrachtungen den elliptischen Raum vom Krümmungsmaße $\frac{1}{k^2}$ ($k$ reelle Konstante) zugrunde, dessen absolutes Polarsystem durch die Gleichung:

$$(1) \qquad (xy) \equiv x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0$$

in den homogenen Punktkoordinaten $x_i$ und $y_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) zweier Punkte gegeben ist. Zwei Punkte $x$, $y$, die dieser Gleichung genügen, heißen zueinander orthogonal. Die nullteilige Fläche 2. Ordnung:

$$(2) \qquad (xx) \equiv x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

der Ort aller zu sich selbst orthogonalen Punkte, ist die absolute Fläche des elliptischen Raumes.

Zur Darstellung eines „eigentlichen", d. h. nicht auf der absoluten Fläche (2) liegenden (reellen oder komplexen) Punktes $x$ benutzen wir normierte Punktkoordinaten, d. h. vier Größen $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, welche durch die Gleichung:

$$(3) \qquad (xx) = k^2$$

verknüpft sind. Sie sind, bis auf den gemeinsamen Faktor $-1$, vollkommen bestimmt.[1])

Ebenso kann man zur Darstellung einer „Nicht-Minimalebene", d. h. die absolute Fläche nicht berührenden (reellen oder komplexen) Ebene $u$ normierte Ebenenkoordinaten benutzen, d. h. vier Größen $u_0$, $u_1$, $u_2$, $u_3$, welche durch die Gleichung:

$$(4) \qquad (uu) \equiv u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = k^2$$

[1]) $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ und $(-x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$ stellen also denselben Punkt dar.

verbunden und dadurch, bis auf den gemeinsamen Faktor $-1$, bestimmt sind.

Die Ebene $x$ ist dann die absolute Polarebene des Punktes $x$.

Weiterhin werden, woferne nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird, stets nur eigentliche Punkte und Nicht-Minimalebenen betrachtet.

Außer Punkten und Ebenen spielen im folgenden vor allem analytische Kurven, bzw. Stücke von solchen, eine Rolle. Bei ihrer Darstellung setzen wir voraus, daß die normierten Koordinaten eines Kurvenpunktes analytische Funktionen eines Parameters sind, die (mindestens) ein gemeinsames Existenzbereich besitzen und sich nicht sämtlich auf Konstante reduzieren. Differentiation nach dem Parameter deuten wir durch Akzente an. Wir beschränken uns dabei durchaus auf die regulären Kurvenpunkte $x$, d. h. auf diejenigen, für welche eine derartige (reguläre)[1] Parameterdarstellung existiert, daß mindestens einer der vier Differentialquotienten $x_i'$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ nicht verschwindet.

2. Sei nun insbesondere eine krumme Minimallinie $M$ des betrachteten elliptischen Raumes vorgelegt. Ihre Tangenten, und ebenso ihre Schmiegungsebenen, berühren die absolute Fläche in den Punkten einer unebenen krummen Linie $A$, die der Minimallinie umkehrbar eindeutig zugeordnet ist: die Tangentialebenen der absoluten Fläche längs der Kurve $A$ umhüllen eine Regelfläche, deren Gratlinie die Minimallinie $M$ ist.[2]) In jedem Punkte der Kurve $A$ sind die Tangente dieser Kurve und die zugehörige Tangente der Minimalkurve $M$ absolutpolare Geraden. Wir wollen die beiden Kurven $A$ und $M$ zueinander zugehörig nennen.

---

[1]) Ein Parameter $\tau$ heißt an der Stelle $\tau = 0$, $x_i = x_i^0$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ regulär, wenn in der Umgebung der Stelle für jede der Koordinaten eine einzige Reihenentwickelung nach ganzen Potenzen von $\tau$ existiert (immer abgesehen vom gemeinsamen Faktor $-1$).

[2]) Die Tangentialebenen der absoluten Fläche längs einer ebenen krummen Linie derselben gehen bekanntlich alle durch den absoluten Pol der Ebene dieser Linie: sie umhüllen einen Minimalkegel.

Seien jetzt die Koordinaten eines Punktes $x$ der Linie $M$ in der oben (Nr. 1) angegebenen Weise als Funktionen des Parameters $\tau$ gegeben. Wir können dann die Gleichung:

$$(5) \qquad (xt) \equiv x_0 t_0 + x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_3 = 0,$$

wo die $t_i$ Koordinaten einer willkürlichen Ebene (oder ihres absoluten Poles) bedeuten, als Gleichung des Punktes $x$ ansehen. Die Koordinaten von $x$ genügen der Gleichung (3) und außerdem, da die Linie $M$ eine Minimallinie ist, der Identität:

$$(6) \qquad (x'x') \equiv 0, \qquad \{\tau\}.$$[1]

Ein beliebiger Punkt $y$ der Kurventangente im Punkte $x$ hat die Gleichung:

$$(7) \qquad (yt) \equiv \pi(xt) + \varkappa(x't) = 0.$$

Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Punkt $y$ der absoluten Fläche (2) angehört, ergibt sich sofort $\pi = 0$. M. a. W.: Die zur krummen Minimallinie (5) gehörige Kurve $A$ auf der absoluten Fläche hat die Gleichung:

$$(8) \qquad (yt) \equiv \varkappa(x't) = 0,$$

wo $\varkappa$ einen (innerhalb unserer Festsetzungen) willkürlich bleibenden Proportionalitätsfaktor bedeutet. Wir nennen die Kurve (8) auch das absolute Bild der Kurve (5).

3. Wir wollen jetzt, umgekehrt von einer unebenen, krummen Linie $A$ auf der absoluten Fläche ausgehend, für die zu $A$ zugehörige Minimallinie $M$ eine Parameterdarstellung angeben, die frei von Integralzeichen ist.

Wir stellen dazu die Kurve $A$ in Punktkoordinaten $y$ durch:

$$(9) \qquad \begin{aligned} y_0 &= -\varrho i(lr+1), \quad y_1 = \varrho(l+r), \\ y_2 &= \varrho i(l-r), \quad y_3 = \varrho(lr-1) \end{aligned}$$

mit der Nebenbedingung:

$$\varrho \cdot l' \cdot r' \neq 0, \qquad \{\tau\}$$

[1] D. h. $(x'x') \equiv 0$ für alle (regulären) $\tau$.

dar, wo $l$, $r$, $\varrho$ drei analytische Funktionen eines Parameters $\tau$ mit gemeinsamem Existenzbereich bedeuten.

Man kann insbesondere $l$ oder $r$ selbst als Parameter wählen. Wir nennen dann $l$ den linken, $r$ den rechten Normalparameter.[1])

Beziehen wir alles etwa auf den rechten Normalparameter $r$ als unabhängige Veränderliche, so reduziert sich die Nebenbedingung auf:

$$\frac{dl}{dr} \cdot \varrho(r) \neq 0, \qquad \{r\}. \tag{10}$$

Wir bezeichnen ferner noch, wie üblich, mit $\{l, r\}$ den Schwarzschen Klammerausdruck:

$$\{l, r\} \equiv \frac{2\, l' \cdot l''' - 3\, l'' \cdot l''}{2\, l' \cdot l'}.$$

Die Kurve (9) ist bekanntlich dann und nur dann eben, wenn

$$\{l, r\} \equiv 0, \qquad \{r\} \tag{11}$$

ist. Wir setzen demnach bis auf weiteres voraus, daß (11) für die krumme Linie (9) nicht erfüllt sei, und schließen auch alle Stellen dieser Kurve von der Betrachtung aus, für welche der Schwarzsche Klammerausdruck verschwindet.

Faßt man in (9) die $y$ nicht als Koordinaten eines Punktes, sondern als solche einer Ebene auf, so stellen jetzt die Gleichungen (9) in Ebenenkoordinaten die Tangentenfläche derjenigen krummen Minimallinie $M$ dar, deren absolutes Bild die

[1]) Über die Begriffe „links" und „rechts" in der elliptischen Geometrie vgl. die grundlegende Arbeit von E. Study (Beiträge zur Nicht-Euklidischen Geometrie II.), Amer. J. math., 29 (1907), 116—159. Der Name „Normalparameter" stammt unseres Wissens von Herrn Eisenhart, der damit den Parameter in der einleitungsweise erwähnten de Montcheuilschen Kurvendarstellung bezeichnet. (L. P. Eisenhart, A fundamental parametric representation of space curves, Ann. Math. (2) 13 (1912), 17—34.) — Durch $l =$ konst., bzw. $r =$ konst., sind die „linksseitigen", bzw. „rechtsseitigen" Erzeugenden der absoluten Fläche — bis auf je eine — gegeben.

Kurve $A$ ist. Um die Gleichungen von $M$ in Punktkoordinaten $x$ zu erhalten, setzen wir zunächst $\varrho = 1$, und haben dann:

$$(xt) \equiv \sigma (y y' y'' t) = 0; \tag{12}$$

hierin bedeutet der Klammerausdruck rechts die Determinante $y_0 y_1' y_2'' t_3$, und $\sigma$ einen Proportionalitätsfaktor, der sich aus der Identität

$$(xx) = k^2$$

bestimmt. Eine leichte Rechnung ergibt für $\sigma$ den Wert[1])

$$\sigma = -\frac{i}{8} \cdot \frac{k}{l' \sqrt{l'}}$$

und für die einzelnen Koordinaten $x_i$ selbst:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{k}{4} \dfrac{1}{l' \sqrt{l'}} \{ l'' (l r + 1) - 2 l' (l' r - l) \}, \\[2ex] x_1 = i \dfrac{k}{4} \dfrac{1}{l' \sqrt{l'}} \{ l'' (l + r) - 2 l' (l' - 1) \}, \\[2ex] x_2 = -\dfrac{k}{4} \dfrac{1}{l' \sqrt{l'}} \{ l'' (l - r) - 2 l' (l' + 1) \}, \\[2ex] x_3 = i \dfrac{k}{4} \dfrac{1}{l' \sqrt{l'}} \{ l'' (l r - 1) - 2 l' (l' r - l) \}. \end{cases}$$

Die Indices zeigen dabei Differentiation nach $r$ an.

Die Gleichungen (I) stellen, so lange nicht:

$$\{l, r\} \equiv 0, \qquad \{r\}$$

ist,[2]) die Koordinaten einer beliebigen krummen Minimallinie des betrachteten elliptischen Raumes

[1]) $\sigma$, und ebenso weiter unten $\varrho$, usw., ist natürlich nur bis auf den Faktor $-1$ bestimmt.

[2]) Ist $\quad l' \neq 0, \quad \{l, r\} \equiv 0, \quad \{r\}$

d. h. also

$$l = \frac{a r + b}{c r + d}, \quad (a d - b c \neq 0),$$

wo $a$, $b$, $c$, $d$ Konstante bedeuten, so stellen die Gleichungen (I) überhaupt keine Kurve, sondern einen festen Punkt dar. (Vgl. S. 15, (27)).

*ohne jedes Integralzeichen* in Funktion des rechten Normalparameters dar.

Wir fragen schließlich noch, wie man in den Gleichungen (9) den Faktor $\varrho$ zu bestimmen hat, damit gerade:

$$(y\,t) \equiv (x'\,t), \qquad \{r\} \tag{8*}$$

ist. Differentiation irgend einer der Gleichungen (I) ergibt sofort:

$$\varrho = i\,\frac{k}{4}\,\frac{\{l, r\}}{\sqrt{l'}}. \tag{13}$$

4. Wir hätten die Gleichungen (I) auch aus einem System von Formeln ableiten können, mittels deren Herr de Montcheuil die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

ohne Anwendung von Integralzeichen gelöst hat.[1]) Wegen der Wichtigkeit dieser Formeln für die Bestimmung der algebraisch rektifizierbaren algebraischen Kurven des Euklidischen Raumes wollen wir auch diese Ableitung der Gleichungen (I) geben.

Durch die Substitution:

$$s = i\,x_0, \quad x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3$$

geht die obige Gleichung in die Definitionsgleichung

$$(d\,x\,d\,x) = 0 \tag{6*}$$

der Minimalkurven unseres elliptischen Raumes in normierten Punktkoordinaten $x$ über. Als Lösungen von (6*) folgen aus den de Montcheuilschen Formeln:[2])

---

[1]) A. a. O. (Bull. Soc. Math. France 33). — Dieser im Texte ausgeführte Gedanke ist bereits angegeben bei E. Salkowski, Zur Theorie der Kurven im elliptischen Raum. Jahresber. d. D. Math.-Ver. 21 (1912), 25—52, u. z. auf S. 31.

[2]) Wir schließen uns in der Bezeichnungsweise Herrn Salkowski an (vgl. die in der Einleitung zitierte Abhandlung).

$$
(14) \qquad \begin{cases} x_0 = -i\{w' + (uv' - v)\}, \\ x_1 = v' + (uw' - w), \\ x_2 = -i\{v' - (uw' - w)\}, \\ x_3 = w' - (uv' - v), \end{cases}
$$

wo $v$, $w$ zwei analytische Funktionen der Veränderlichen $u$ mit gemeinsamem Existenzbereich bedeuten.[1]) In (14) sind die Koordinaten $x_i$ noch gemäß (3) zu normieren; das gibt die Bedingung:

$$
(15) \qquad v'w - vw' = -\frac{k^2}{4},
$$

aus der weiter durch Differentiation:

$$
(16) \qquad \frac{w''}{v''} = \frac{w}{v}
$$

folgt. Nennt man den Wert dieses Bruches $l$, so ergibt sich nach einiger Rechnung aus (14):

$$
(\mathrm{I}^*) \qquad \begin{cases} x_0 = \dfrac{ki}{4l'\sqrt{l'}}\{l''(u+l) + 2l'(1-l')\}, \\[2ex] x_1 = -\dfrac{k}{4l'\sqrt{l'}}\{l''(ul+1) + 2l'(l-ul')\}, \\[2ex] x_2 = -\dfrac{ki}{4l'\sqrt{l'}}\{l''(ul-1) + 2l'(l-ul')\}, \\[2ex] x_3 = \dfrac{k}{4l'\sqrt{l'}}\{l''(u-l) + 2l'(1+l')\}, \end{cases}
$$

wo die Indices Differentiation nach $u$ anzeigen. Endlich führt die Substitution

$$
(17) \qquad u = \frac{1}{r}
$$

die Gleichungen (I*) in (I) über.

---

[1]) Da wir nur krumme Minimallinien betrachten, dürfen wir $v'' \cdot w'' \neq 0$, $\{u\}$ annehmen.

5. Aus den Gleichungen (I) findet man ohne Schwierigkeit:

$$(18)\qquad \left|\begin{aligned} r &= \frac{dx_2 - i\,dx_1}{dx_0 + i\,dx_3} = -\frac{dx_0 - i\,dx_3}{dx_2 + i\,dx_1}, \\ l &= \frac{x_0 - i\,x_3 + (x_2 + i\,x_1)\,r}{x_2 - i\,x_1 - (x_0 + i\,x_3)\,r}. \end{aligned}\right.$$

Hieraus folgt:

Man erhält alle *algebraischen* krummen Minimallinien des betrachteten elliptischen Raumes, wenn man in (I) für $l$ beliebige algebraische Funktionen von $r$ einsetzt, ausgenommen nur die Funktion $\frac{ar+b}{cr+d}$, ($a$, $b$, $c$, $d$ Konstante).

Zu entsprechenden Resultaten wären wir gelangt, wenn wir den linken Normalparameter als unabhängige Veränderliche benutzt hätten: eine Bemerkung, die auch für alle folgenden Entwicklungen gilt.

## II. Die eigentlichen, nicht-isotropen krummen Linien.[1])

5. Wir leiten nun auch für die eigentlichen krummen Nicht-Minimallinien des elliptischen Raumes eine von Integralzeichen freie Parameterdarstellung ab.

Zunächst betrachten wir diejenigen unter diesen Linien, die auf der Tangentenfläche (mindestens) einer krummen Minimallinie liegen.

Sei wie oben:

$$(19)\qquad (x\,t) = 0 \qquad ((x\,x) \equiv k^2,\ (x'\,x') \equiv 0,\ \{\tau\})$$

die Gleichung einer krummen Minimallinie $M$ in normierten Punktkoordinaten $x_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) bezogen auf einen (regulären) Parameter $\tau$. Dann stellt die Gleichung

---

[1]) Eigentliche Kurven sollen die (abgesehen von einzelnen Punkten) im Endlichen verlaufenden Kurven heißen; nicht-isotrope Linie bedeutet s. v. w. Nicht-Minimallinie.

$$(20) \qquad (z\,t) \equiv (x\,t) + a(x'\,t) = 0,$$

wo $a$ gleichfalls eine analytische Funktion des Parameters $\tau$ von geeignetem Existenzbereich bedeutet, eine krumme Linie $K$ auf der Tangentenfläche von $M$ dar, und zwar in Punktkoordinaten $z$, die wegen der Nebenbedingungen von (19) gleichfalls normiert sind:

$$(z\,z) \equiv (x\,x) + 2\,a(x\,x') + a^2(x'\,x') \equiv k^2, \quad \{\tau\}.$$

Bezeichnet jetzt $s^2$ die quadrierte Bogenlänge der Kurve $K$, so hat man:

$$(21) \qquad s'^2 = (z'\,z')$$

oder, wegen (20):

$$(21^*) \qquad s'^2 = a^2(x''\,x'').$$

Man gelangt auf diese Weise zu folgender Gleichung der nunmehr orientierten Linie $K$:

$$(20^*) \qquad (z\,t) \equiv (x\,t) + \frac{s'}{\sqrt{(x''\,x'')}}(x'\,t) = 0.$$

Diese Darstellung würde nur versagen, wenn

$$(x''\,x'') \equiv 0, \quad \{\tau\}$$

wäre. Nun aber ist für die Minimalkurve $M$:

$$(22) \qquad |x_0\,x_1'\,x_2''\,x_3'''|^2 \equiv -k^2(x''\,x'')^3, \quad \{\tau\},$$

so daß $(x''\,x'')$ im betrachteten Gebiete nur an einzelnen Stellen verschwinden kann, die wir von der Betrachtung ausschließen. Im entgegengesetzten Falle müßte nämlich in (22) auch die Determinante links für alle $\tau$ identisch Null sein: die Minimalkurve wäre eben, was unmöglich ist.

An Stelle der Gleichungen (20) und (20*) kann man auch die folgenden benutzen:

$$(20\,\mathrm{a}) \qquad (z\,t) \equiv (x\,t) + a(y\,t) = 0, \quad \text{bzw.:}$$

$$(20^*\,\mathrm{a}) \qquad (z\,t) \equiv (x\,t) + \frac{s'}{\sqrt{(y'\,y')}}(y\,t) = 0.$$

Hierin hat $y$ die durch (8*) gegebene Bedeutung. Gibt man also $y$ durch (9), mit $r$ als Parameter, so ist $\varrho$ der Wert (13) beizulegen.

7. Wir brauchen jetzt nur die Koordinaten $x_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ der Minimalkurve $M$ in der Form (I) als Funktionen des rechten Normalparameters anzunehmen, um nach Anweisung von (20*) die gesuchte Parameterdarstellung der Kurve $K$ zu erhalten. Man findet mit Hilfe von (13) und (9):

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} z_0 &= \frac{k}{2\sqrt{l'}} \{f'(lr+1) - (l'r - l)\}, \\ z_1 &= \frac{ik}{2\sqrt{l'}} \{f'(l+r) - (l'-1)\}, \\ z_2 &= -\frac{k}{2\sqrt{l'}} \{f'(l-r) - (l'+1)\}, \\ z_3 &= \frac{ik}{2\sqrt{l'}} \{f'(lr-1) - (l'r - l)\}. \end{aligned} \right.$$

Hierin bedeutet $f$ eine analytische Funktion von $r$ mit geeignetem Existenzbereich, die beliebig angenommen werden kann, und die Indices zeigen die Differentiation nach $r$ an. Je nach Orientierung der krummen Linie $K$ ist dann:

$$s' = \varepsilon k i \left(f - \frac{l''}{2l'}\right), \quad (\varepsilon = \pm 1). \tag{23}$$

8. Bei der Ableitung der Formeln (II) wurde wieder vorausgesetzt, daß nicht

$$\{l, r\} \equiv 0, \qquad \{r\}$$

ist.

Lassen wir nunmehr diese Voraussetzung fallen, so daß also (10) und (11) erfüllt ist. Dann ist, wie wir bereits bemerkten, die krumme Linie $A$ auf der absoluten Fläche eine ebene Kurve, und die zugehörige Minimalkurve $M$ reduziert sich daher auf einen festen Punkt $x$, den Scheitel des längs $A$ die absolute Fläche berührenden Minimalkegels. Die Koordinaten dieses

Punktes sind gleichwohl immer noch durch (I), nur jetzt mit der Nebenbedingung (11), darstellbar.

Ebenso überzeugt man sich leicht, daß die Gleichungen (20 a) bzw. (20*a) nunmehr eine beliebige krumme Linie $K$ auf dem Minimalkegel vom Scheitel $x$ darzustellen fähig sind, wobei die durch (20 a) bzw. (20*a) definierten Koordinaten $z$ dieser Linie sich als normierte Punktkoordinaten erweisen. Auch hier versagt die Kurvendarstellung (20*a) höchstens an einzelnen Stellen des betrachteten Bereiches.

Gibt man jetzt die Koordinaten des Punktes $x$ durch (I) und diejenigen der ebenen krummen Linie $A$ durch (9) als analytische Funktionen des rechten Normalparameters — nun aber mit beliebigem, von Null verschiedenen Werte der analytischen Funktion $\varrho$ von $r$ — so erhält man wiederum die Gleichungen (II).

Hiermit ist der Satz bewiesen:

Jede (orientierte) eigentliche nicht-isotrope krumme, analytische Linie des betrachteten elliptischen Raumes ist durch die von Integralzeichen freien Formeln (II) darstellbar, in denen $f'$ und $l$ zwei analytische Funktionen des rechten Normalparameters $r$ mit gemeinsamem Existenzbereich bedeuten. $l$ darf dabei keine Konstante, und $f'$ nicht gleich $\frac{l''}{2l'}$ sein.

9. Durch das Gleichungssystem (II) wird zugleich die Aufgabe gelöst, alle algebraisch rektifizierbaren algebraischen krummen Linien[1]) des betrachteten elliptischen Raumes zu bestimmen.

Aus den Formeln (II) folgen nämlich durch Differentiation nach $r$ die weiteren:

[1]) In meiner in der Einleitung genannten Arbeit habe ich (einer Definition von Herrn Salkowski folgend) die entsprechenden Kurven im Euklidischen Raum als algebraisch rektifizierbare krumme Linien schlechthin bezeichnet, was hier ausdrücklich angemerkt sei, da der Begriff dort nicht hinreichend erklärt ist.

$$
(24)\left\{
\begin{aligned}
z_0' &= \frac{k}{4l'\sqrt{l'}}\{(2l'f''-l''f')(lr+1)+(2l'f'-l'')(l'r+l)\},\\
z_1' &= \frac{ik}{4l'\sqrt{l'}}\{(2l'f''-l''f')(l+r)+(2l'f'-l'')(l'+1)\},\\
z_2' &= -\frac{k}{4l'\sqrt{l'}}\{(2l'f''-l''f')(l-r)+(2l'f'-l'')(l'-1)\},\\
z_3' &= \frac{ik}{4l'\sqrt{l'}}\{(2l'f''-l''f')(lr-1)+(2l'f'-l'')(l'r+l)\},
\end{aligned}
\right.
$$

und mittels dieser Gleichungen nach längerer, aber keine Schwierigkeiten bietender Rechnung:

$$
(25)\left\{
\begin{aligned}
r &= \frac{z_0dz_3-z_3dz_0-z_1dz_2+z_2dz_1-\varepsilon k ds}{z_0dz_1-z_1dz_0-z_2dz_3+z_3dz_2-i(z_0dz_2-z_2dz_0-z_3dz_1+z_1dz_3)}\\
&= -\frac{z_0dz_1-z_1dz_0-z_2dz_3+z_3dz_2+i(z_0dz_2-z_2dz_0-z_3dz_1+z_1dz_3)}{z_0dz_3-z_3dz_0-z_1dz_2+z_2dz_1+\varepsilon k ds}\\
l &= -\frac{(z_2+iz_1)r+(z_0-iz_3)}{(z_0+iz_3)r-(z_2-iz_1)},\quad s-s_0=\varepsilon ki(f-l\,g\sqrt{l'}),\\
&\qquad (\varepsilon^2=1,\quad s_0=\text{konst.}).
\end{aligned}
\right.
$$

Man erhält demnach alle algebraisch rektifizierbaren algebraischen krummen Linien im betrachteten elliptischen Raume, wenn man in den Gleichungen (II) für $l$ und $f-lg\sqrt{l'}$ beliebige algebraische Funktionen von $r$ einsetzt, die keine Konstanten sind.

## III. Besondere Klassen von nicht-isotropen krummen Linien.

10. Für gewisse Kurvenklassen, nämlich für die krummen Linien auf einem Minimalkegel und diejenigen in einer Minimalebene, vereinfacht sich das Gleichungssystem (II) wesentlich.

Ist die Kurve $K$ eine krumme Linie auf (mindestens) einem Minimalkegel, so besteht. wie wir bereits sahen,[1])

[1]) Vgl. S. 7, Anm. 2.

für die Berührungskurve dieses Minimalkegels mit der absoluten Fläche die Identität:

$$l \equiv \frac{ar+b}{cr+d}, \quad (ad-bc \neq 0), \qquad \{r\}. \tag{11*}$$

wo $a$, $b$, $c$, $d$ Konstante bedeuten. Unbeschadet der Allgemeinheit darf man

$$ad-bc=1$$

voraussetzen. Man kann dann für die Koordinaten $y$ der Berührungskurve $A$ des Minimalkegels mit der absoluten Fläche:

$$\left\{\begin{aligned} y_0 &= -i\{ar^2+(b+c)r+d\},\\ y_1 &= cr^2+(d+a)r+b,\\ y_2 &= -i\{cr^2+(d-a)r-b\},\\ y_3 &= ar^2+(b-c)r-d \end{aligned}\right. \tag{26}$$

setzen, und erhält hieraus für die Koordinaten des Scheitels $x$ des Minimalkegels:

$$x_0=\frac{k}{2}(b-c),\ x_1=-\frac{ki}{2}(a-d),\ x_2=\frac{k}{2}(a+d),\ x_3=\frac{ki}{2}(b+c). \tag{27}$$

Nun liefert die Gleichung (20a) das System:

$$\left\{\begin{aligned} z_0 &= \quad\frac{1}{2}\{k(b-c)-\varepsilon is'\cdot[ar^2+(b+c)r+d]\},\\ z_1 &= -\frac{i}{2}\{k(a-d)-\varepsilon is'\cdot[-cr^2-(d+a)r-b]\},\\ z_2 &= \quad\frac{1}{2}\{k(a+d)-\varepsilon is'\cdot[cr^2+(d-a)r-b]\},\\ z_3 &= \quad\frac{i}{2}\{k(b+c)-\varepsilon is'\cdot[ar^2+(b-c)r-d]\}, \quad (\varepsilon^2=1), \end{aligned}\right. \tag{28}$$

auf welches sich die Gleichungen (II) im vorliegenden Falle reduzieren.

11. Liegt die Kurve $K$ in einer Minimalebene, deren Koordinaten $u_i$ durch

$$\begin{gathered} u_0=-i(\alpha\beta+1),\ u_1=\alpha+\beta,\ u_2=i(\alpha-\beta),\\ u_3=\alpha\beta-1,\ (\alpha,\beta \text{ Konstante}) \end{gathered} \tag{29}$$

gegeben werden können, so liefert die Bedingung:

$$(u\,z) \equiv 0, \qquad \{r\},$$

wenn für die $z_i$ die Werte (II) gesetzt werden, ohne Weiteres:

$$f' = \frac{l'}{l-\alpha} - \frac{1}{r-\beta}. \tag{30}$$

Trägt man diesen Wert in die Gleichungen (II) ein, so folgt aus ihnen das einfachere System:

$$\left\{\begin{aligned} z_0 &= \phantom{-i}\frac{k}{2}\left\{\sqrt{l'}\,\frac{\alpha r+1}{l-\alpha} - \frac{1}{\sqrt{l'}}\,\frac{l\beta+1}{r-\beta}\right\}, \\ z_1 &= \phantom{-}i\,\frac{k}{2}\left\{\sqrt{l'}\,\frac{\alpha+r}{l-\alpha} - \frac{1}{\sqrt{l'}}\,\frac{l+\beta}{r-\beta}\right\}, \\ z_2 &= -\frac{k}{2}\left\{\sqrt{l'}\,\frac{\alpha-r}{l-\alpha} - \frac{1}{\sqrt{l'}}\,\frac{l-\beta}{r-\beta}\right\}, \\ z_3 &= \phantom{-}i\,\frac{k}{2}\left\{\sqrt{l'}\,\frac{\alpha r-1}{l-\alpha} - \frac{1}{\sqrt{l'}}\,\frac{l\beta-1}{r-\beta}\right\}, \end{aligned}\right. \tag{31}$$

das geeignet ist. die krumme Linie $K$ darzustellen, so lange

$$l' \neq 0, \qquad \{r\}$$

ist.

Der Darstellung (29) entziehen sich zunächst diejenigen Minimalebenen, zwischen deren Koordinaten die Relationen

$$u_3 = i\,u_0, \quad u_1 = \pm\, i\,u_2 \tag{32}$$

bestehen. Doch bietet dieser Fall keine weitere Schwierigkeit: je nachdem $u_1$ von Null verschieden ist und in (32) das obere oder das untere Vorzeichen gilt, oder endlich $u_1$ verschwindet, folgen die Gleichungen der krummen Linien in diesen Ebenen aus (31), indem man den Grenzübergang zu $\frac{1}{\beta} = 0$ bei beliebigem endlichen $\alpha$, denjenigen zu $\frac{1}{\alpha} = 0$ bei beliebigem endlichen $\beta$, oder endlich denjenigen zu $\frac{1}{\alpha} = 0$, $\frac{1}{\beta} = 0$ vornimmt.

12. Besonderes Interesse verdienen die Schnittkurven eines Minimalkegels und einer seinen Scheitel nicht enthaltenden Minimalebene, die (irreduzibeln) singulären Kreise des elliptischen Raumes.

Um die Parameterdarstellung eines passend gewählten singulären Kreises zu finden, setzen wir in (28):

$$a = 0,\ b = 1,\ c = -1,\ d = 0;\ \varepsilon = 1$$

und erhalten so als Gleichungen einer beliebigen krummen (orientierten) Linie auf dem Minimalkegel vom Scheitel ($k$, 0, 0, 0):

$$z_0 = k,\ z_1 = \frac{1-r^2}{2} s',\ z_2 = i\,\frac{1+r^2}{2} \cdot s',\ z_3 = r \cdot s'.$$

Soll diese krumme Linie auch der Minimalebene:

$$x_0 + i x_3 = 0 \tag{33}$$

angehören, so muß sein:

$$s' = \frac{ik}{r}.$$

Die eigentlichen Punkte des singulären Schnittkreises der Minimalebene (33) und des Minimalkegels vom Scheitel ($k$, 0, 0, 0) sind also darstellbar durch

$$z_0 = k,\ z_1 = ik\,\frac{1-r^2}{2r},\ z_2 = -k\,\frac{1+r^2}{2r},\ z_3 = ik, \tag{34}$$

wobei weder $r$ noch $\frac{1}{r}$ Null sein darf.

Als Gleichungen dieses singulären Kreises ergeben sich somit die folgenden

$$x_0 + i x_3 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0. \tag{35}$$

Der singuläre Kreis (35) berührt in seinen uneigentlichen Punkten (0, 1, $i$, 0) und (0, 1, $-i$, 0) bezüglich die absoluten Geraden

$$\begin{cases} x_1 + i x_2 = 0, & x_0 + i x_3 = 0, \\ x_1 - i x_2 = 0, & x_0 + i x_3 = 0 \end{cases} \tag{36}$$

der Minimalebene (33). Seine Achse, d. h. die Verbindungslinie seiner beiden uneigentlichen Punkte, hat die Gleichungen

$$x_0 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Allgemein kann man die (irreduzibeln) singulären Kreise eines elliptischen Raumes auch definieren als diejenigen irreduziblen Kegelschnitte, welche in den Minimalebenen dieses Raumes liegen und ihre beiden absoluten Geraden berühren. Durch jede Bewegung des elliptischen Raumes werden singuläre Kreise wieder in singuläre Kreise übergeführt.

# Elementar-geometrischer Beweis des Ponceletschen Schliessungssatzes.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 5. Februar 1916.

Der Ponceletsche Schließungssatz[1]) ist bekanntlich Ausgangspunkt für eine Reihe von wichtigen Untersuchungen geworden; er hat einerseits wegen seines Zusammenhanges mit dem Additionstheorem und den Teilungsproblemen der elliptischen Funktionen eine große Bedeutung, er ist ferner nach bestimmter Seite hin von den Kegelschnitten auf höhere algebraische Kurven erweitert worden.[2]) Poncelet selbst war sich der Wichtigkeit seiner Entdeckung wohl bewußt, sonst hätte er nicht die Figur des Satzes, versehen mit der Umschrift *„aut semper aut nunquam“*, zu seinem Siegel erwählt,[3]) und Chasles nennt in seinem „Rapport sur les progrès de la géometrie“ (1870) unter den Verdiensten Poncelets den Schließungssatz an erster Stelle.

Es mag als ein Wagnis erscheinen, auf einen so bekannten Stoff nochmals zurückzukommen, doch glaubt der Verfasser im Hinblick auf neuere Untersuchungen und Darstellungen dieses Wagnis unternehmen zu dürfen, selbstverständlich ohne

---

[1]) J. V. Poncelet. Traité des propriétés projectives des figures (Paris 1822), No. 531 (S. 322).

[2]) Vgl. hierzu Math. Enc. III, C 1 (F. Dingeldey), Nr. 24 und 26—28 und II. B 3 (R. Fricke), Nr. 77.

[3]) Nach E. Kötter, Die Entwickelung der synthetischen Geometrie I (Leipzig 1901), S. 149.

den Anspruch, grundsätzlich Neues zu bieten. Von den beiden hier wiedergegebenen Beweisen soll vielmehr der erste nur den Formelaufwand möglichst einschränken, der zweite aber den Rahmen allerelementarster Rechnungen nicht überschreiten.

Demgemäß sollen sich die Beweise auch auf den einfachen von Poncelet selbst vorangestellten Fall beziehen, daß es sich um ein Kreisbüschel

$$x^2 + y^2 - r^2 - 2\lambda(x - a) = 0 \tag{1}$$

handelt und zwar um ein hyperbolisches, so daß

$$a > r$$

vorausgesetzt wird. Dann lautet der Satz so:

Legt man von einem beliebig gewählten Punkt $P_1$ des Kreises $K(\lambda = 0)$ die Tangente an einen bestimmten Kreis $\lambda_1 (< r)$ des Büschels und bezeichnet ihren zweiten Schnittpunkt mit $K$ durch $P_2$, legt man dann von $P_2$ aus eine weitere Tangente an einen bestimmten Kreis $\lambda_2 (< r)$ des Büschels, welche $K$ zum zweiten Mal in $P_3$ schneidet, so berührt unabhängig von der Wahl des Ausgangspunktes $P_1$, die Sehne $P_3 P_1$ ebenfalls immer einen und denselben Kreis $\lambda_3$ des Büschels.

### **Erster Beweis** (Differentialgeometrisch).

Wir betrachten zunächst nur eine Sehne $P_1 P_2$ des Kreises $K$ und suchen die Bedingung dafür aufzustellen, daß sie beständig einen und denselben Kreis $(\lambda_1)$ des Büschels berührt.

Es sei $P_1 P_2$ eine bestimmte Lage der Berührungssehne und

$$\sphericalangle A O P_1 = \varphi_1, \quad \sphericalangle A O P_2 = \varphi_2,$$

ferner $T$ ihr Berührungspunkt mit dem Kreis $(\lambda_1)$ und $Q_1 Q_2$ eine benachbarte Berührungssehne, die denselben Kreis $\lambda_1$ berührt, wobei

$$\sphericalangle A O Q_1 = \varphi_1 + d\varphi_1, \quad \sphericalangle A O Q_2 = \varphi_2 + d\varphi_2$$

ist. Bezeichnet man den Schnittpunkt der beiden benachbarten

Sehnen $P_1 P_2$ und $Q_1 Q_2$, also den Berührungspunkt mit $(\lambda_1)$ durch $T$, so ist

$$\triangle T P_1 Q_1 \sim \triangle T P_2 Q_2,$$

wenn man also die Sehnenabschnitte $T P_1$ und $T P_2$ mit $s_1$ und $s_2$ bezeichnet, hat man aus der Proportion

$$P_1 Q_1 : T P_1 = P_2 Q_2 : T P_2$$

oder

$$r\, d\varphi_1 : s_1 = r\, d\varphi_2 : s_2$$

die Gleichung

(2)
$$\frac{d\varphi_1}{s_1} - \frac{d\varphi_2}{s_2} = 0.$$

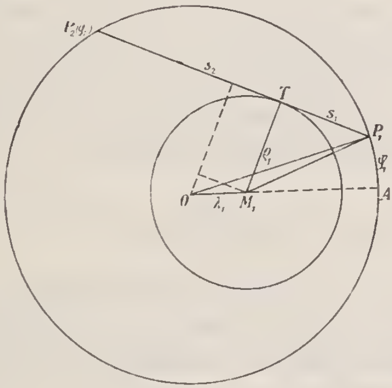



Fig. 1

Ist ferner (nach 1)

$$\varrho_1 = \sqrt{r^2 - 2\, a\, \lambda_1 + \lambda_1^2}$$

der Radius des Kreises $(\lambda_1)$, so gibt die aus den beiden Dreiecken $M_1 T P_1$ und $O M_1 P_1$ folgende Formel

$$\varrho_1^2 + s_1^2 = (M_1\, T)^2 = r^2 + \lambda_1^2 - 2\, r\, \lambda_1 \cos \varphi_1$$

in Verbindung mit dem Wert von $\varrho_1^2$ den Wert

$$s_1^2 = 2\, \lambda_1 (a - r \cos \varphi_1).$$

In derselben Weise folgt

$$s_2^2 = 2\lambda_1 (a - r\cos\varphi_2),$$

und aus (2) folgt dann

$$(3) \qquad \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a - r\cos\varphi_1}} - \frac{d\varphi_2}{\sqrt{a - r\cos\varphi_2}} = 0.$$

Hieraus folgt, daß die Zentriwinkel ($\varphi_1$ und $\varphi_2$), welche zu den Endpunkten $P_1$ und $P_2$ der Sehne gehören, dann und nur dann die Differentialgleichung (3) erfüllen, wenn die Sehne $P_1 P_2$ beständig einen und denselben Kreis $\lambda_1$ berührt.

Auf der andern Seite denken wir uns jetzt $\varphi_1$ und $\varphi_2$ frei veränderlich, dann kann man immer den Parameter ($\lambda_1$) desjenigen Kreises bestimmen, der von $P_1 P_2$ berührt wird. Bei dieser Betrachtung wird also $\lambda_1$ eine Funktion von $\varphi_1$ und $\varphi_2$ und $d\lambda_1$ drückt sich linear durch $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ aus; und wenn $\lambda_1$ konstant ist, muß hieraus die Gleichung (3) entstehen. Demnach folgt für diesen allgemeinen Fall

$$(3') \qquad \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a - r\cos\varphi_1}} - \frac{d\varphi_2}{\sqrt{a - r\cos\varphi_2}} = d\lambda_1 \cdot f(\varphi_1, \varphi_2).$$

Mit dieser einen einfachen Überlegung ist aber der Schließungssatz bewiesen; denn wenn sowohl $P_1 P_2$ beständig denselben Kreis $\lambda_1$ wie $P_2 P_3$ denselben Kreis $\lambda_2$ berührt, so folgt durch zweimalige Anwendung von (3), daß auch

$$\frac{d\varphi_3}{\sqrt{a - r\cos\varphi_3}} - \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a - r\cos\varphi_1}} = 0$$

ist, daß also auch $P_3 P_1$ beständig denselben Kreis ($\lambda_3$) berührt.

## Zusatz zum ersten Beweis.

Obwohl dies die bisherige Betrachtung nicht erfordert, möge nun doch noch der Vollständigkeit halber die genaue Berechnung von (3′) folgen unter Verwendung der Abkürzungen

$$u_1 = a - r\cos\varphi_1, \quad u_2 = a - r\cos\varphi_2.$$

Aus Fig. 1 entnimmt man

$$2r\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)=s_1+s_2=\sqrt{2\lambda_1}(\sqrt{u_2}+\sqrt{u_1}).$$

Außerdem ist

$$(\sqrt{u_2}+\sqrt{u_1})\cdot(\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1})=u_2-u_1=r(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)$$
$$=2r\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)$$

und hieraus folgt in Verbindung mit der ersten Formel für $\lambda_1$

$$\sqrt{2\lambda_1}\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)=\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}.$$

Aus der ersten Formel für $\lambda_1$ folgt

$$(\sqrt{u_2}+\sqrt{u_1})\frac{d\lambda_1}{\sqrt{2\lambda_1}}=$$
$$r\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)(d\varphi_2-d\varphi_1)-\sqrt{2\lambda_1}\left(\frac{r\sin\varphi_1\,d\varphi_1}{2\sqrt{u_1}}+\frac{r\sin\varphi_2\,d\varphi_2}{2\sqrt{u_1}}\right).$$

Setzt man nun rechts den zweiten Wert ein, also

$$\sqrt{2\lambda_1}=\frac{\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)},$$

so findet man nach kurzer Rechnung

$$(3'')\quad \frac{d\varphi_2}{\sqrt{u_2}}-\frac{d\varphi_1}{\sqrt{u_1}}=\frac{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_1}}{r\sqrt{2\lambda_1}}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\sin\varphi_2\sqrt{u_1}+\sin\varphi_1\sqrt{u_2}}\cdot d\lambda_1,$$

womit (3') ergänzt und bestätigt ist. —

Der Umstand, daß

$$\lambda_1=constans$$

ein Integral der Differentialgleichung (3) ist, führt bekanntlich nach einer schon von Euler[1]) herrührenden, von Legendre aufgenommenen Betrachtung zum Additionssatz der elliptischen Integrale bzw. der elliptischen Funktionen, und zwar gelangt man mit Leichtigkeit gerade zur Legendreschen Normalform.

---

[1]) Vgl. Fricke, a. a. O., Nr. 1, 6 und 77.

Dies soll natürlich hier nicht rechnerisch durchgeführt werden, aber ein Hinweis mag deswegen erlaubt sein, weil die längst gewonnene Erkenntnis, daß das Integral $\lambda_1$ eben gerade durch den Schließungssatz gewonnen wird, noch mehrfach in den Darstellungen über Gebühr zurücktritt.

**Zweiter Beweis** (Elementargeometrisch).[1])

Bei diesem zweiten Beweis, der naturgemäß etwas mehr Rechnung erfordert, dafür aber auch die bisher nicht abgeleitete *„Schließungsbedingung“* zwischen den Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der von den drei Sehnen $P_1 P_2$, $P_2 P_3$ und $P_3 P_1$ berührten Kreise liefert, bezeichnen wir die Zentriwinkel

$$\sphericalangle AOP_1, \ \sphericalangle AOP_2, \ \sphericalangle AOP_3$$

mit

$$2\varphi_1, \ 2\varphi_2, \ 2\varphi_3,$$

weil dadurch die Formeln einfacher werden.

Die Radien der berührten Kreise hängen mit den Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zusammen durch die Gleichungen

$$\varrho_i = \sqrt{r^2 - 2a\lambda_i + \lambda_i^2} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{4}$$

[1]) Der Ponceletsche Beweis, von E. Kötter (a. a. O., S. 150 genau besprochen) macht bekanntlich von der Betrachtung Gebrauch, daß eine Kurve, die von Kegelschnitten eines Büschels in jedem ihrer Punkte berührt wird, notwendig ein bestimmter Kegelschnitt des Büschels sein muß. — R. Sturm (Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften I, Leipzig 1908, § 31) erhält den Satz aus allgemeineren über cyklische Involutionen. — Vgl. auch K. Rohn (Jahresberichte der Deutschen Math. Ver. 22 (1913), S. 330—340) und Leipz. Ber. 60 (1908), S. 94—131. — J. Steiner (Ges. Werke I, Berlin 1881, S. 159) hat bekanntlich die Beziehungen für Vierecke, Fünfecke usw. bis zu den Achtecken angegeben, welche bestehen, wenn ein solches Vieleck einem Kreis unbeschrieben und zugleich einem andern einbeschrieben lst. Die Vermutung, die auch E. Kötter schon früher ausgesprochen hat (a. a. O., S. 152), daß Steiner den Schließungssatz aus seinem „Kreisreihen-Satz“ (Werke I, S. 43) abgeleitet hat, ist wohl schwer nachzuprüfen. Ein Versuch, durch die Laguerresche Linieninversion in Verbindung mit der Transformation durch reciproke Radien den viel schwierigeren Ponceletschen Satz aus dem Kreisreihen-Satz abzuleiten, hat zu keinem Ergebnis geführt.

außerdem ist im Hinblick auf Fig. 1 und die neu eingeführten Winkelbezeichnungen ($2\varphi$ an Stelle von $\varphi$)

$$
\begin{aligned}
&\varrho_1 = r\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \lambda_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_2),\\
(5)\qquad &\varrho_2 = r\cos(\varphi_3 - \varphi_2) - \lambda_2 \cos(\varphi_3 + \varphi_2),\\
&\varrho_3 = -r\cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \lambda_3 \cos(\varphi_1 + \varphi_3).
\end{aligned}
$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, diejenige Beziehung zwischen $\lambda_1$, $\lambda_2$ und $\lambda_3$ aufzustellen, vermöge deren die Formeln 4 und 5 für die Winkel eine ganze Wertschar ($\infty^1$ Wertsysteme) liefern. — Eine endliche Anzahl von (imaginären) Wertsystemen für die trigonometrischen Funktionen erhält man selbstverständlich auch dann, wenn die aufzustellende Bedingung nicht erfüllt ist.

Zunächst eliminieren wir $\varphi_2$ aus den beiden ersten Gleichungen (5), wobei beständig von (4) und (5) Gebrauch zu machen ist. Das Ergebnis ist bei Anwendung der Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
&u = \cos(\varphi_1 + \varphi_3),\quad v = \cos(\varphi_1 - \varphi_3),\\
(6)\qquad &g(u, v) = (r^2 + \lambda_1\lambda_2)\, v - r(\lambda_1 + \lambda_2) - \varrho_1\varrho_2,\\
&f_2(u, v) = r^2(u^2 + v^2 - 1) - 2aruv + a^2
\end{aligned}
$$

die Gleichung zweiten Grades

$$
(7)\qquad F_2(u, v) \equiv (g(u, v))^2 - 4\lambda_1\lambda_2 f_2(u, v) = 0.
$$

Die weitere Untersuchung wird nun zeigen, daß eine einzige Gleichung zwischen den Parametern $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ hinreicht, damit jedes Wertsystem $u$, $v$, das die dritte Gleichung (5) oder

$$
(8)\qquad h(u, v) \equiv \lambda_3 \cdot u - r \cdot v - \varrho_3 = 0
$$

erfüllt, auch (7) erfüllt.

[Projektivische Begründung. Die Gleichungen (7) und (8) zeigen unmittelbar, wie man nun die weitere Ausführung zu gestalten hat, wenn man sich der Gedankengänge der analytischen projektiven Geometrie bedienen will und $u$ und $v$ als rechtwinklige Koordinaten deutet.

(7) stellt einen Kegelschnitt dar, der den Kegelschnitt

$$f_2(u, v) = 0$$

in den beiden Schnittpunkten mit der Geraden

$$g(u, v) = 0$$

berührt.

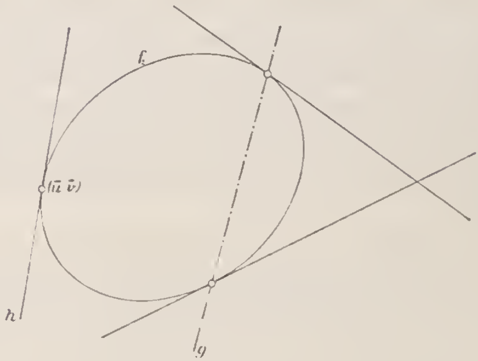



Fig. 2

Soll nun unsere ganze Betrachtung zum Ziel führen, so muß vor allem der Kegelschnitt (7), in dessen Gleichung $\lambda_3$ gar nicht vorkommt, von selbst in ein Geradenpaar zerfallen.

Das ist in der Tat der Fall. und man rechnet dies am einfachsten in der Weise nach, daß man zeigt, daß $F_2(u, v) = 0$ den Pol der Geraden $g(u, v) = 0$ in Bezug auf den Kegelschnitt $f_2(u, v) = 0$ enthält. Dies läßt sich durch kurze Rechnung zeigen, und damit ist dann bewiesen, daß (7) in ein Geradenpaar zerfällt, und zwar in die beiden Tangenten, die von jenem Pol an $f_2(u, v) = 0$ sich legen lassen.

Weiterhin wird verlangt, daß (8) eine der beiden Geraden werden soll, also jedenfalls eine Tangente von $f_2(u, v) = 0$.

Daß dies immer der Fall ist, erkennt man. indem man aus (8) einsetzt

$$r\, v = \lambda_3 u - \varrho_3$$

und dann erhält

$$\begin{aligned} f_2(u, v) &= r^2(u^2 - 1) + (\lambda_3 u - \varrho_3)^2 - 2 a u (\lambda_3 u - \varrho_3) + a^2 \\ &= u^2 (r^2 + \lambda_3 - 2 a \lambda_3) + 2 u \varrho_3 (\lambda_3 - a) + a^2 + \varrho_3^2 - r^2 \\ &= u^2 \varrho_3^2 - 2 u \varrho_3 (\lambda_3 - a) + \lambda_3^2 - 2 a \lambda_3 + a^2 \\ &= (u \varrho_3 - (\lambda_3 - a))^2 = 0. \end{aligned}$$

Demnach ist (8) in der Tat Tangente und zwar hat der Berührungspunkt die Koordinaten

$$\bar{u} = \frac{\lambda_3 - a}{\varrho_3}, \quad \bar{v} = \frac{\lambda_3 \bar{u} - \varrho_3}{r} = \frac{\lambda_3 (\lambda_3 - a) - \varrho_3^2}{r \varrho_3} = \frac{a \lambda_3 - r^2}{r \varrho_3}.$$

Jetzt finden wir die „Schließungsbedingung" leicht: Wenn nämlich $\bar{u}, \bar{v}$ einer der beiden Punkte ist, in denen $g(u, v) = 0$ den Kegelschnitt $f_2(u, v) = 0$ schneidet, dann ist $h(u, v) = 0$ sicher eine der beiden Tangenten, in die (7) zerfällt (vgl. Fig. 2).

Demnach ergibt sich als einzige Bedingung, *daß $g(u, v) = 0$ den Berührungspunkt* $(\bar{u}, \bar{v})$ des Geraden $h(u, v) = 0$ *mit dem Kegelschnitt $f_2(u, v) = 0$ enthält.*

Um aber das eigentliche Ziel eines ganz elementaren Beweises zu verfolgen, gehen wir auf die Rechnung nicht ein, die diesen Gedankengang durchführt.]

Die lineare Gleichung (8) kann ersetzt werden durch

$$(8') \qquad \begin{aligned} u &= \frac{\lambda_3 - a}{\varrho_3} + t \cdot r = \bar{u} + t \cdot r, \\ v &= \frac{a \lambda_3 - r^2}{r \varrho_3} + t \cdot \lambda_3 = \bar{v} + t \cdot \lambda_3, \end{aligned}$$

wobei $t$ willkürlich bleibt, denn es ist

$$\lambda_3 (\bar{u} + t r) - r (\bar{v} + t \lambda_3) - \varrho_3$$
$$= \lambda_3 \cdot \frac{\lambda_3 - a}{\varrho_3} - r \cdot \frac{a \lambda_3 - r^2}{r \varrho_3} - \varrho_3 = \frac{\lambda_3^2 - 2 a \lambda_3 + r^2 - \varrho_3^2}{\varrho_3} = 0.$$

Im Anschluß hieran zeigen wir, daß jedes Wertsystem (8′) der Gleichung (7) identisch, d. h. für jeden Wert von $t$ erfüllt, sobald

$$g(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \text{ ist.}$$

Bevor dieser Nachweis erbracht wird, soll diese Forderung noch genauer berechnet werden. Man erhält zunächst die symmetrisch gebaute Gleichung

$$
\begin{aligned}
(9) \qquad a\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + a r^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - r^4 - r\varrho_1\varrho_2\varrho_3 \\
= H - r\varrho_1\varrho_2\varrho_3.
\end{aligned}
$$

Rationalisiert man diese Gleichung, indem man in

$$H^2 - r^2\varrho_1^2\varrho_2^2\varrho_3^2 = 0$$

die Werte (4) der Radien der berührten Kreise einsetzt, so kommt ein Ausdruck, der in $r$ vom sechsten Grade ist und von dem sich überdies der von Null verschiedene Faktor $a^2 - r^2$ abspalten läßt. (9) ist dann ersetzbar durch

$$
\begin{aligned}
(9') \qquad r^4(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-2\lambda_1\lambda_2-2\lambda_2\lambda_3-2\lambda_3\lambda_1)-2r^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2 \\
+\lambda_3-4a)+\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2=0.
\end{aligned}
$$

Um nun die Wirkung der Bedingung (9) oder (9') zu prüfen, stellen wir zunächst fest, daß

$$g(\bar u + tv, \bar v + t\lambda_3) = -t(r^2(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3)$$

wird. Außerdem wird

$$f_2(\bar u + tr,\ \bar v + t\lambda_3) = At^2 + 2Bt + C \text{ mit}$$

$$A = r^2(r^2 + \lambda_3^2) - 2ar\lambda_3 r = r^2\varrho_3^2$$

$$B = r^2(\bar u r + v\lambda_3) - ar(\bar u\lambda_3 + \bar v r)$$

$$= \frac{r}{\varrho_3}(r^2(\lambda_3 - a) + a\lambda_3^2 - r^2\lambda_3 - a(\lambda_3^2 - a\lambda_3 + a\lambda_3 - r^2)) = 0$$

$$C = \bar u(r^2\bar u - ar\bar v) + \bar v(-ar\bar u) + r^2\bar v) - r^2 + a^2$$

$$= \bar u\left(r^2\frac{\lambda_3 - a}{\varrho_3} - a\frac{(a\lambda_3 - r^2)}{\varrho_3}\right) + \bar v\left(-ar\frac{(\lambda_3 - a)}{\varrho_3}\right.$$

$$\left.+ r\frac{(a\lambda_3 - r^2)}{\varrho_3}\right) - r^2 + a^2 = \frac{r^2 - a^2}{\varrho_3}(\bar u\lambda_3 - vr - \varrho_3) = 0.$$

Demnach wird schließlich

$$F_2(\bar{u}+tr, \bar{v}+t\lambda_3) = t^2(r^2(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)-\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 t^2 r^2 \varrho_3^2$$
$$= t^2\{r^4(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-2\lambda_1\lambda_2-2\lambda_2\lambda_3-2\lambda_3\lambda_1)-2r^2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-4a)+\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2\} \equiv 0.$$

Damit ist bewiesen, daß jedes beliebige Wertsystem $u, v$, welches (8) erfüllt, auch (7) erfüllt, sobald die Schließungsbedingung (9) bzw. (9′) erfüllt ist.

## Zusatz zum zweiten Beweis.

Es mögen noch einige Bemerkungen folgen.

Bei gegebenem $\lambda_1$ und $\lambda_2$ ist die Schließungsbedingung für $\lambda_3$ vom zweiten Grad. Man kann nun noch nachweisen, daß unter den gegebenen Voraussetzungen ($\lambda_1 < r$, $\lambda_2 < r$) nur diejenige Wurzel $\lambda_3$ in Betracht kommt, die auch kleiner als $r$ ist. Das geht sehr einfach durch die Betrachtung des Grenzfalls, wo die Kreise konzentrisch sind.

Sodann wollen wir den Satz auf den besonderen Fall anwenden, wenn die Sehnen alle denselben Kreis $\lambda$ berühren. (9′) geht dann über in

$$-3r^4 - 2r^2\lambda(3\lambda-4a) + \lambda^4 = 0$$

oder wegen

$$2a\lambda = r^2 + \lambda^2 - \varrho^2$$

in

$$\lambda^4 - 2r^2\lambda^2 + r^4 - 4r^2\varrho^2 = 0$$
$$\lambda^2 = r^2 \pm 2r\varrho.$$

Von den beiden Werten kommt aber wegen $\lambda < r$ nur der zweite in Betracht, und man erhält die längst bekannte[1]) Beziehung, welche zwischen den Radien $r$ und $\varrho$ des unbeschriebenen und einbeschriebenen Kreises eines Dreiecks und dem Mittelpunktabstand der Kreise besteht.

Schon Poncelet selbst[2]) hat aus dem Schließungssatz für Dreiecke den Schließungssatz für Polygone gefolgert, d. h. für

[1]) Sie rührt (nach Angabe von M. Cantor) schon von W. Chapple (1746) her.

[2]) Poncelet, a. a. O., Nr. 534, S. 326.

Sehnen — $n$ — Seite $P_1 P_2 \ldots P_n$ eines Kegelschnitts $K$, dessen Seiten bei der Wanderung von $P_1$ längs $K$ je einen bestimmten Kegelschnitt eines Büschels berühren, dem auch $K$ angehört. Auch darf darauf hingewiesen werden, daß man selbstverständlich in einzelnen Fällen, z. B. bei der Aufstellung der Beziehung zwischen $\lambda$, $r$ und $\varrho$, vermöge deren sich dem Kreis $(r)$ ein konvexes Sehnenviereck einbeschrieben läßt, dessen Seiten den Kreis $(\varrho)$ berühren, eben auf Grund des Schließungssatzes von einer besonderen Lage ausgehen kann. Übrigens kann gerade für den Fall des Sehnen-Tangentenvierecks noch der Schließungssatz unmittelbar durch trigonometrische Rechnung abgeleitet werden, ein Verfahren, das den Anstoß zu dem hier mitgeteilten Beweis des allgemeinen Schließungssatzes gegeben hat und also dazu geführt hat, den bisher auch in neueren Werken über höhere Elementarmathematik bei Seite gelassenen Satz durch die Art der Begründung da einreihen zu können, wohin er seinem Wesen nach eigentlich gehört.

# Spektraluntersuchungen an Röntgenstrahlen II.

Von **Ernst Wagner.**

Vorgelegt von W. C. Röntgen in der Sitzung am 4. März 1916.

## I. Absorptionsspektren im kurzwelligen Gebiet der *K*-Serie.

Die früher[1]) mitgeteilten Messungen betrafen die langwelligen Absorptionsspektren der Elemente Fe Ni Cu Br Pd Ag Cd Sn. Nunmehr wurden Sb Te J Ba Ce Nd Er + Ho Ta untersucht. Mit der Absorptionsbandkante von Er + Ho ist die bis jetzt kürzeste Wellenlänge einer charakteristischen Röntgenstrahlung erreicht. Nur die radioaktiven Elemente zeigen kürzere Wellen in ihren wesensgleichen $\gamma$-Strahlenspektren (vgl. Rutherford und Andrade, Phil. Mag. August 1914).

Die Untersuchungsmethode ist die früher beschriebene.

Die Substanzen waren teils in Form dünner Blättchen geschmolzen (Sb und Te), oder Folien (Ta); teils wurden die Elemente in ihren Verbindungen als Salze oder Oxyde in Pulverform (in Papier gewickelt) zur Absorption gebracht, so bei IK, $BaSO_4$, $CeNO_3$, $NdNO_3$, ErO + HoO. Ce war von Kahlbaum, Nd von Droßbach, ErO + HoO verdanke ich Herrn Prof. Hofmann.

Bei einigen Elementen wurde die Absorptionsbandkante (mit der Wellenlänge $\lambda_A$) in erster und zweiter Ordnung spektrographiert, in den meisten Fällen war zur Ausmessung der Bandkanten als Bezugswellenlängen die Absorptionskante des Zinns

[1]) Diese Sitzungsberichte 1914, p. 329 und Ann. d. Physik 46, p. 868, 1915.

und die stets auf der Bromsilberplatte erhältliche Silberbandkante aufgenommen.

Die chemische Verunreinigung einer Cerverbindung mit Neodym und Praseodym zeigte sich deutlich an der Unschärfe ihrer Absorptionsbandkante, ebenso machte sich die Mischung der Er + Ho-Oxyde geltend.

Es ist bemerkenswert, auf wie experimentell einfache Weise die Messung von $\lambda_A$ erfolgt, welche die eindeutige chemische Charakterisierung des absorbierenden Stoffes ermöglicht im Gegensatz zu den Methoden, diese Stoffe als Antikathoden- oder Sekundärstrahler ihrer Linienspektren zu benutzen. Auch konnten bei einem einzigen Versuch 3 Elemente gleichzeitig untersucht werden. Andererseits ist die mangelnde Intensität des weißen Röntgenspektrums bei engem Spalt ein Nachteil der Absorptionsmethode. Wir hatten bei 0.4 mm Spaltbreite immerhin einige Stunden Expositionszeit nötig zur Erhaltung der Spektren. Bei langen Wellen steigt diese Schwierigkeit sehr erheblich an. — Wie zu erwarten, standen Jod und Tellur, entsprechend den Barklaschen Versuchen und Broglies Messungen ihrer Spektrallinien in der Reihenfolge der Atomnummern N, die im Widerspruch mit ihren Atomgewichten steht. Malmers[1]) entgegengesetztes, fehlerhaftes Resultat ist soeben[2]) von Siegbahn korrigiert, dessen Werte für die $\lambda_\alpha$ und $\lambda_\beta$ unten verwandt sind.

Während die Absorptionsmessungen ohne experimentelle Schwierigkeiten mit einer harten Wolframröhre bis herab zu $\lambda_A = 0{,}227 \cdot 10^{-8}$ cm für Erb-Ho sich durchführen ließen, scheiterten alle mannigfach variierten ausführlichen Versuche, für Ta eine Absorptionskante zu entdecken, obwohl die Atomzahl sich hier nur von 68 auf 73 erhöht und obwohl das kontinuierliche absorbierende Spektrum die nötigen kurzwelligen Bereiche zu enthalten schien. Dieser Unfähigkeit, Strahlung zu absorbieren, entspräche nach dem Fluorescenzvorgang die Unfähigkeit, Linien zu emittieren. In der Tat beobachteten

[1]) Dissertation. Lund 1915.

[2]) M. Siegbahn, Verh. phys. Ges., 1916, p. 39.

Rutherford und Barnes (vgl. Phil. Mag., Sept. 1915) selbst bei extremen Spannungen in einer Coolidgeröhre keine Linienemission ($K_\alpha$-Linie) des Wolframs, des Nachbars vom Tantal. Auch ich war trotz zahlreicher Versuche nicht mit Sicherheit imstande, die $K_\alpha$-Linien im kontinuierlichen Spektrum des Wolframs bei maximaler Härte mit dem Kristallspektrometer zu entdecken. Dies ist um so bemerkenswerter, als die $K_\alpha$-Linie in unmittelbarer spektraler Nähe der leicht zu erhaltenden Erb-Absorptionskante liegen muß. — Ein Versuch, mit Ra C-$\gamma$-Strahlen beim Pt die $K$-Serie zu erregen, scheiterte trotz 4 wöchentlicher Dauer an Unterexposition.

Folgende Tabelle enthält die Versuchsresultate:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\lambda_A$ | $\sqrt{\nu_A}\cdot 10^{-1}$ | $\lambda_\alpha$ | $\lambda_\beta$ | $\lambda_\gamma$ | $\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta}$ | $\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_A}$ | $(K_A\text{-}K_\beta)\cdot 10^{-6}$ |
| Ta | nicht | gefunden | | | | | | |
| Er + Ho | 0,227 | 2098 | — | | | | | |
| Nd | 0,282 | 1883 | 0,330 | 0,292 | — | 1,131 | 1,171 | 12 |
| Ce | 0,298 | 1832 | 0,355 | 0,314 | — | 1,132 | 1,184 | 15 |
| Ba | 0,331 | 1738 | 0,388 | 0,343 | — | 1,132 | 1,172 | 10 |
| J | 0,369 | 1646 | 0,437 | 0,388 | — | 1,121 | 1,184 | 14 |
| Te | 0,383 | 1616 | 0,456 | 0,404 | — | 1,129 | 1,190 | 13 |
| Sb | 0,405 | 1571 | 0,468 | 0,416 | 0,407 | 1,126 | 1,157 | 7,2 |
| Sn | 0,425 | 1534 | 0,488 | 0,432 | — | 1,128 | 1,148 | 3,6 |
| Cd | 0,468 | 1462 | 0,536 | 0,479 | — | 1,120 | 1,145 | 4 |
| Ag | 0,490 | 1429 | 0,560 | 0,501 | 0,491 | 1,121 | 1,143 | 4,2 |
| Pd | 0,513 | 1396 | 0,586 | 0,523 | 0,513 | 1,130 | 1,136 | 3,6 |
| Br | 0,926 | 1039 | 1,045 | — | — | — | 1,128 | |
| Cu | 1,386 | 849 | 1,549 | 1,402 | 1,390 | 1,105 | 1,116 | 0,8 |
| Ni | 1,502 | 816 | 1,662 | 1,506 | 1,500 | 1,104 | 1,106 | 0,1 |
| Fe | 1,759 | 754 | 1,946 | 1,765 | 1,760 | 1,103 | 1,106 | 0,1 |

Bemerkungen zur Tabelle. Die erste Kolumne enthält die Wellenlängen $\lambda_A$ der Absorptionsbandkante der $K$-Serie (wie üblich, in $10^{-8}$ cm), wie sie aus unseren früheren und jetzigen Messungen folgen. Zugrunde liegt die Gitterkonstante vom NaCl bzw. KCl $= 2{,}814\cdot 10^{-8}$ cm bzw. $3{,}136\cdot 10^{-8}$ cm; in den meisten Fällen sind die Wellenlängen $\lambda_A$ direkt an Moseleysche Werte von $\lambda_\alpha$- und $\lambda_\beta$-Linien angeschlossen. Eine Neuberechnung aller $\lambda$-Werte werde ich demnächst in den Annalen der Physik geben, die auf genau bestimmte Pd- und Pt-Linien bezogen ist.

## Ergebnisse.

1. Wie aus den früheren Messungen ergibt sich auch jetzt, daß $\lambda_A$ eines jeden Elementes eine für seine Atomzahl $N$ charakteristische Größe ist, und daß dieselbe einfache Beziehung zwischen $\lambda_A$ und N besteht, wie sie Moseley zwischen $\lambda_\alpha$ und $N$ fand. Die Frequenz der Absorptionsbandkante $\nu_A = \frac{1}{\lambda_A}$ hat aber offenbar eine noch fundamentalere Bedeutung für das Atom als die Linienfrequenzen, entsprechend der Tatsache, daß nur eine Absorptionsbandkante, d. h. ein Absorptionsakt besteht, aber eine Vielheit dadurch bedingter Linien. Im Bohrschen Atommodell bedeutet in der Tat $\nu_A$ die Energie, um das Elektron aus dem $K$-Ring an die Atomoberfläche zu schaffen, während die Linienfrequenzen in energetischer Beziehung des $K$-Rings zu den vielen stationären Zwischenringen innerhalb des Atoms stehen. Trägt man in die Moseleysche graphische Darstellung (Phil. Mag. 1914, p. 709) $\sqrt{\nu_A}$ für die einzelnen Elemente ein, so erhält man die gut lineare Beziehung:

$$\sqrt{\nu_A} = 329\,(N - 3{,}5).$$

Selbst bis Er + Ho scheint hier eine Abweichung von der Linearität nicht stattzufinden, wie sie Moseley und Malmer für die höheren Linienfrequenzen fanden.

Aus obiger Beziehung folgt: $\nu_A = 108000 \cdot (N - 3{,}5)^2$. Die Konstante 108000 ist in guter[1]) Übereinstimmung mit der Rydbergschen $1{,}1 \cdot 10^5$, was nach der Bohrschen Theorie zu erwarten ist, da $\nu_A$ die Grenzfrequenz der Serie darstellt.

2. Die Tabelle (Kolumne 7) lehrt ferner, daß der Stokessche Sprung $\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_A}$ für die $\alpha$-Linie seine mit wachsendem Atomgewicht steigende Tendenz zu verlieren scheint; jedoch ist zu bedenken, daß die Werte von $\lambda_\alpha$ für die schwereren Atome Malmer entnommen sind, die sich nicht völlig an die Moseleyschen (und

[1]) Diese Übereinstimmung mit der Rydbergschen Zahl — mit numerisch weniger befriedigendem Ergebnis — hat bereits Herr W. Kossel (nach mündlicher Mitteilung) aus meinen früheren Messungen abgeleitet.

demnach an die unsrigen für $\lambda_A$) anschließen. Jedenfalls erweist sich hier, meiner früher geäußerten Annahme gemäß, der Stokessche Sprung in der $K$-Serie bei den schwereren Atomen $= 1{,}18$ nicht mehr weit entfernt von dem Wert 1,20, den ich in der $L$-Serie bei den (noch schwereren!) Atomen Pt und Au festgestellt habe (vgl. Ann. Phys., l. c., p. 888).

3. Bemerkenswert konstant von Pd bis Er zeigt sich $\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\beta} = 1{,}13$.

4. Nach Kolumne 5 ist $\lambda_\gamma$ merklich gleich $\lambda_A$. $\lambda_\gamma$ ist teilweise Malmer, meistens eigenen (demnächst für die Gruppe Cu bis Cr in den Annalen d. Phys. zu veröffentlichenden) Messungen entnommen.

Beim Pd habe ich spezielle genauere Messungen angestellt, die eine minimale Differenz möglich erscheinen lassen in dem Sinne $\lambda_A < \lambda_\gamma$. Bei schwereren Atomen als Pd bleibt die Frage offen, ob diese Differenz etwa ansteigt, wie zu vermuten ist.

Es erscheint nämlich diese Frage von Wichtigkeit für den Atombau im Sinne Bohrs. Eine Kongruenz von $\lambda_\gamma$ mit $\lambda_A$ würde bedeuten, daß der vierte Ring vom Kern nach außen gezählt (d. i. der $N$-Ring), mit der Atomoberfläche energetisch zusammenfällt entsprechend der Frequenz- bzw. Energiebeziehung: $K_A - K_\gamma = N_A = 0$. Hier beziehen sich die Indices auf die Absorptionskante $A$ und die $\gamma$-Linie; $K$ und $N$ bedeuten die Frequenz für die Indices in der $K$- bzw. $N$-Serie.

In solchen Atomen würden also nur 4 Ringe existieren. Nimmt man diese Ringe nicht nur, wie bei Bohr, als mögliche stabile Lagen an für das überspringende Elektron, sondern als konstitutionelle, von den das Atom aufbauenden Elektronen besetzte an, so würde man im Pd-Atom z. B. 46 Elektronen beim Cr 24 Elektronen auf 4 Ringe zu verteilen haben.

In Hinsicht auf diese Erörterungen scheint mir folgende Beobachtung wichtig zu sein. Es zeigte sich auf meinen Spektrogrammen, daß die Intensität der $\gamma$-Linie mit abnehmendem Atomgewicht (von Pd zu Cr) relativ zu den anderen $K$-Linien abnimmt. Dürfen wir daraus entnehmen, daß mit abnehmendem Atomgewicht und entsprechend geringerer Elektronenzahl der äußerste $N$-Ring an Elektronen verarmt und dadurch die Häufigkeit der Übergänge des ausstrahlenden Elektrons von diesem Ring nach dem $K$-Ring nach Bohr immer seltener wird, bis der $N$-Ring und damit die $\gamma$-Linie ganz zu existieren aufhören?

Es wird von großem Interesse sein, experimentell zu untersuchen, ob einerseits das Verschwinden der $\gamma$-Linie bei einer konstitutionell wichtigen Stelle der leichteren Elemente (Argon? vgl. W. Kossel, Ann. Phys. 49, p. 229, 1916) im periodischen System statt hat, ob andererseits etwa ein Neuauftreten einer $\delta$-Linie zwischen der $\gamma$-Linie und der Absorptionsbandkante bei schweren Atomen (jenseits Krypton?) die Bildung neuer Ringe anzeigt.

Es liegt im Sinne unserer Betrachtungen, daß bei leichteren Atomen die $\beta$-Linie die Rolle übernimmt, welche der $\gamma$-Linie bei schwereren zufällt, entsprechend der Gleichung: $K_A - K_\beta = M_A$.

Wir sehen nach Kolumne 8, daß wirklich $M_A$ sehr schnell (etwa mit $N^4$) mit abnehmendem Atomgewicht gegen Null abnimmt. In dem Maße als der äußerste $N$-Ring (die Intensität der $\gamma$-Linie) verschwindet, scheint der nächst innere $M$-Ring energetisch gegen die Atomoberfläche zu rücken. Nach Moseleys Beobachtungen bleibt die $\beta$-Linie, d. i. der $M$-Ring, bis Al erhalten, unter Al treten kompliziertere noch unaufgeklärte Verhältnisse ein.

## II. Zur $L$-Serie.

Herr Sommerfeld hat jüngst in diesen Berichten eine Theorie der Feinstruktur der Spektrallinien mitgeteilt, die auch auf die Röntgenspektren erfolgreiche Anwendung fand. Nach dieser Theorie kommen dem $K$-Ring 1, dem $L$-Ring 2, dem $M$-Ring 3 etc. „Freiheitsgrade“ zu. Diese Voraussicht bestätigt sich am deutlichsten in der Zahl der Absorptionsbandkanten, deren für die $K$-Serie eine, für die $L$-Serie zwei bestehen, wie ich Ann. 46, 883, 1915 gezeigt habe. Nach meiner dort gegebenen Auflösung der $L$-Serie des Pt in 2 Liniengruppen gehören zusammen: $A_1 \gamma \alpha$ und $A_2 \delta \beta \cdot A_1$ u. $A_2$ sind die Absorptionskanten, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ die stärksten Linien. In dieser Kombination war eine Schwierigkeit gegeben, da die Frequenzbeziehung nach Bohr-Kossel: $L_\gamma - L_\alpha = M_\alpha = L_\delta - L$ nicht genau genug durch die Beobachtungen erfüllt war. Nach Herrn Sommerfelds Theorie wird nahe gelegt $\alpha'$, den lichtschwachen Begleiter von $\alpha$, an Stelle von $\alpha$ zu setzen; jedenfalls wird dann die obige Beziehung am Pt-Spektrum gut wiedergegeben, wie folgende Frequenzmessungen $\left(\frac{1}{\lambda} \cdot 10^4\right)$ zeigen:

$$\begin{array}{rlcrl} L_\gamma &= 910 & \qquad & L_\delta &= 1046 \\ L_{\alpha'} &= \underline{758} & & L_\beta &= \underline{\phantom{0}895} \\ M_\alpha &= 152 & & M_\alpha &= \phantom{0}151 \end{array}$$

Weniger gut bestätigt sich folgende Frequenzgleichung für die $N$-Serie: $L_{A_1} - L_\gamma = L_{A_2} - L_\delta = N_A$

$$\begin{array}{rlcrl} L_{A_1} &= 933 & \qquad & L_{A_2} &= 1077 \\ L_\gamma &= \underline{910} & & L_\delta &= \underline{1046} \\ N_A &= \phantom{0}23 & & N_A &= \phantom{00}31 \end{array}$$

Entsprechend finden wir für die $L$-Serie am Wolfram und Tantal nach unseren Messungen:

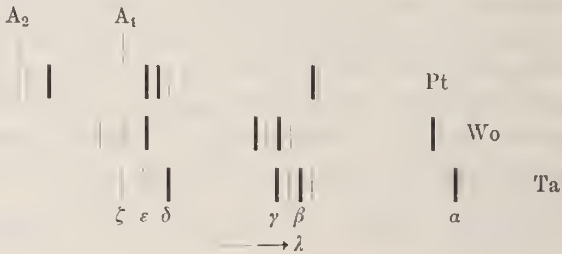
| Wolfram | | Tantal | |
|---|---|---|---|
| $L_\gamma = 808$ | $L_\delta = 913$ | $L_\gamma = 755$ | $L_\delta = 880$ |
| $L_{\alpha'} = \underline{680}$ | $L_\beta = \underline{785}$ | $L_{\alpha'} = \underline{653}$ | $L_\beta = \underline{780}$ |
| $M_\alpha = 128$ | $M_\alpha = 128$ | $M_\alpha = 102$ | $M_\alpha = 100$ |

### III. Vergleich der $L$-Serie von Pt, Wo und Ta.

Ta und Wo zeigten als Atomnachbarn ein einander selbst im feinen Detail sehr ähnliches Spektrum, vgl. Figur; Pt zeigte in der $\beta\gamma$-Gruppe dagegen schon deutliche — durch die Sommerfeldsche Beziehung $\frac{\Delta \nu}{(Z-1)^4} = \text{konst.}$[1]) verständliche — Unterschiede. Dagegen erweist der Vergleich der 3 Spektren, daß

[1]) Vgl. diese Berichte 1915, p. 493.

die Liniengruppe $\delta\,\varepsilon\,\zeta$ mit dem markanten feinen Duplett $\varepsilon$ bei allen 3 Elementen wiederkehrt und daß sie daher reelle gesetzmäßige Serienlinien sind.




Mit dieser Feststellung der $\zeta$-Linie als reeller $L$-Serienlinie ist die Ungültigkeit des Stokesschen Gesetzes für die $\zeta$-Linie (vielleicht auch für die kurzwelligere $\varepsilon$-Linie) beim Pt (vgl. Annalen d. Phys., l. c., p. 887) erwiesen. Denn die kurzwelligere der beiden $L$-Absorptionsbandkanten $A_2$ (vgl. Fig.) hat eine geringere Frequenz als die $\zeta$-Linie. Dieser Folgerung kann man entgehen durch die Annahme, daß die $\zeta$-Linie durch eine höher frequente Absorption — in der $K$-Serie? — erregt wird.

Beim Pt fallen $A_2$ und $A_1$ sehr nahe auf Emissionslinien; auch für diese ist daher obige Frequenzgleichung erfüllt:

$$L_{A_2} - L_{A_1} = L_\delta - L_\gamma = L_\beta - L_{\alpha'}.$$

Diese Linien würden dem Übergang des Elektrons vom $O$-Ring zum $L$-Ring entsprechen.

München, physikal. Institut d. Univ. Anfang März 1916.

Bemerkung bei der Korrektur. Auf den Spektren der $L$-Serie des Pt und Ta zeigte sich eine mittelstarke Linie jenseits $\alpha$ im langwelligen Gebiete von der Wellenlänge $\lambda = 1{,}50 \cdot 10^{-8}$ (Pt) und $1{,}73 \cdot 10^{-8}$ cm (Ta). Ihre Einordnung in die Bohr-Moseleyschen wasserstoffähnlichen Serien begegnet Schwierigkeiten. Diese Linie hat einen diffusen Charakter; vielleicht ist sie ein Duplett; dann wäre der Abstand der Komponenten auf ca. $\frac{1}{3}$ von dem der $K\alpha$- und $\alpha'$-Linie beim Cu zu schätzen.

# Neuer Beweis eines Koebe-Bieberbachschen Satzes über konforme Abbildung.

Von **Georg Faber.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 4. März 1916.

Herr Koebe hat zuerst folgenden Satz bewiesen und ihn zur Grundlage wichtiger Untersuchungen gemacht:

Wenn durch

$$(1) \qquad Z = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \quad (|z| < 1)$$

ein schlichtes Gebiet $g$ der $Z$-Ebene mit der Begrenzungsmenge $c$ auf das Innere des Einheitskreises $k$ der $z$-Ebene abgebildet wird, so gibt es eine für alle derartigen Abbildungen unveränderliche Zahl $\varkappa$, der Art, daß für keinen Punkt von $c$

$$(2) \qquad |Z| < \varkappa \text{ ist.}$$

Einen viel schärferen Satz hat Herr Koebe nur vermutet, nämlich:

Die Zahl $\varkappa$ ist $= \frac{1}{4}$ und es gibt auf $c$ nur dann einen Punkt $P$, für den

$$(3) \qquad |Z| = \tfrac{1}{4}$$

ist, wenn $c$ aus dem geradlinigen Schnitte $P\infty$ besteht, dessen Verlängerung durch $O$ geht.

In seiner Schrift über konforme Abbildung[1]) erwähnt Herr Bieberbach, daß es ihm gelungen sei, die Richtigkeit dieser Vermutung zu beweisen: der Beweis wird im 77. Bande der Annalen erscheinen. Durch diese Bemerkung angeregt, suchte

[1]) Sammlung Göschen 1915.

und fand ich selbst einen Beweis jenes verschärften Koebeschen Satzes. Und da Herr Bieberbach, dem ich diesen Beweis mitteilte, ihn als von dem seinigen verschieden und merklich einfacher bezeichnete, so möchte ich mir erlauben, ihn im folgenden auseinander zu setzen.

Ich ersetze in (1) $Z$ durch $\frac{1}{Z}$, $z$ durch $\frac{1}{z}$ und beweise dann folgenden von dem Koebe-Bieberbachschen nur in der Fassung des Wortlautes verschiedenen Satz:

Wenn durch

$$(4) \qquad \begin{aligned} Z &= b_1 z + b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \cdots \quad |z| > 1 \\ &= f(z) \end{aligned}$$

das Äußere des Einheitskreises $k$ der $z$-Ebene auf das Äußere $G$ einer Kurve $C$ in der $Z$-Ebene abgebildet wird, und wenn es innerhalb oder auf $C$ zwei Punkte $P_1$, $P_2$ von der Entfernung 4 gibt, so ist

$$(5) \qquad |b_1| > 1;$$

nur in dem Ausnahmefall, wo $G$ aus der längs der Strecke $P_1 P_2$ aufgeschlitzten Ebene besteht, ist $|b_1| = 1$.

Multipliziert man die rechte Seite von (4) mit irgend einer Zahl vom Betrage 1 und verändert man gleichzeitig in beliebiger Weise das Glied $b_0$, so bedeutet dies für die Abbildung nur die Ersetzung der Kurve $C$ durch eine kongruente. Darnach ist es von vornherein erlaubt, voraus zu setzen, daß die Punkte $P_1$, $P_2$ mit $\pm 2$ zusammenfallen. Der Ausnahmefall des Satzes führt dann einfach auf die Funktion

$$f(z) = z \cdot e^{i\alpha} + \frac{1}{z \cdot e^{i\alpha}}$$

mit beliebigem reellen $\alpha$ und kann somit als erledigt gelten. Im allgemeinen Falle gibt es eine $P_1$, $P_2$ verbindende, von der Strecke $P_1 P_2$ verschiedene doppelpunktlose Linie $l$, von der kein Punkt dem Gebiete $G$ angehört. Durch

$$(6) \qquad Z = u + \frac{1}{u}, \text{ aufgelöst } u = \varphi(Z),$$

wird der Kurve $C$ eine Kurve $\Gamma$ und der doppelt gezählten Linie $l$ eine Kurve $\lambda$ in der $u$-Ebene zugeordnet. $\lambda$ geht bei der Vertauschung von $u$ mit $\frac{1}{u}$, ebenso wie die Kreislinie $|u| = 1$, in sich über, umschließt daher ein Gebiet $> \pi$; denn bei der Spiegelung am Einheitskreise entspricht jedem Gebiete innerhalb des Kreises ein größeres außerhalb. Um so mehr ist

(7) die von $\Gamma$ umschlossene Fläche $> \pi(1+\varepsilon)^2$

bei hinreichend kleinem positivem $\varepsilon$.

Das Äußere von $\Gamma$ wird durch die Funktion

$$u = \varphi(f(z)) = c_1 z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots \quad (|z| > 1) \tag{8}$$

auf das Gebiet $|z| > 1$ abgebildet und es ist offenbar

$$c_1 = b_1. \tag{9}$$

Neben (8) betrachte ich noch die Abbildungen[1])

$$u = c_1 z^4 + c_0 + \frac{c_{-1}}{z^4} + \frac{c_{-2}}{z^8} + \cdots \text{ und} \tag{10}$$

$$v = \left(c_1 z^4 + c_0 + \frac{c_{-1}}{z^4} + \frac{c_{-2}}{z^8} + \cdots\right)^{\frac{1}{4}} \tag{11}$$

(mit beliebiger Fortsetzung der vierten Wurzel)

$$= d_1 z + d_0 + \frac{d_{-1}}{z} + \frac{d_{-2}}{z^2} + \frac{d_{-3}}{z^3} + \cdots, \text{ wo}$$

$$|d_1| = |c_1|^{\frac{1}{4}} \text{ und} \tag{12}$$

$$d_0 = d_{-1} = d_{-2} = 0. \tag{13}$$

Durch (10) wird das 4fach überdeckte Äußere von $\Gamma$ mit einem Windungspunkt im Unendlichen auf das einfach überdeckte Gebiet $|z| > 1$ abgebildet. Dagegen wird durch (11)

---

[1]) An sich ist die Einführung dieser Hilfsabbildungen unnötig; denn die oben bewiesene Beziehung (16) für die Bilder der Kreise $|z| = R$ in der $v$-Ebene gilt, wie man fast eben so leicht einsieht, auch für die Bilder dieser Kreise in der $u$-Ebene, und der Beweis kann in der $u$-Ebene genau, wie es oben in der $v$-Ebene geschieht, zu Ende geführt werden. Diese Bemerkung verdanke ich Herrn Bieberbach.

das schlichte Äußere einer gewissen Kurve $\Gamma_1$ der $v$-Ebene auf $|z| > 1$ abgebildet. Die Punkte von $\Gamma_1$ ergeben sich zu je vieren aus denen von $\Gamma$ durch die Beziehung

$$v = \sqrt[4]{u}; \tag{14}$$

ebenso die Punkte einer geschlossenen Linie $\lambda_1$ der $v$-Ebene aus denen von $\lambda$ in der $u$-Ebene. Die von $\lambda_1$ umschlossene Fläche ist aus dem nämlichen Grunde wie die von $\lambda$ größer als $\pi$; und um so mehr ist wieder bei hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$:

(15) die von $\Gamma_1$ umschlossene Fläche $> \pi\,(1 + \varepsilon)^2$.

Allgemeiner möge $\Gamma_R$ in der $v$-Ebene das Bild der Kreislinie $|z| = R$ sein; aus (13) folgt sofort, daß

(16) die von $\Gamma_R$ umschlossene Fläche mit beliebiger Annäherung $= |d_1|^2 R^2 \pi$

ist, wenn nur $R$ hinreichend groß ist. Aus (15) und (16) schließt man, daß für kleine Werte von $\varepsilon$ und große von $R$

(17) die von $\Gamma_{1+\varepsilon}$ und $\Gamma_R$ begrenzte Ringfläche $< |d_1|^2 R^2 \pi - (1 + \varepsilon)^2 \pi$ ist.

Andererseits wird die Fläche dieses Ringgebietes durch folgendes Doppelintegral ausgedrückt,[1]) erstreckt über den Kreisring $1 + \varepsilon < |z| < R$:

$$\begin{aligned} \iint \left|\frac{dv}{dz}\right|^2 dw &= 2\pi \int_{1+\varepsilon}^{R} \left( |d_1|^2 + \frac{|d_{-1}|^2}{r^2} + \frac{4\,|d_{-2}|^2}{r^3} + \cdots \frac{\nu^2\,|d_{-\nu}|^2}{r^{\nu+1}} \right) r\,dr \\ &> |d_1|^2 R^2 \pi - |d_1|^2 (1 + \varepsilon)^2 \pi. \end{aligned} \tag{18}$$

Die Abschätzungen (17) und (18) widersprechen einander nur dann nicht, wenn $|d_1|^2 > 1$ ist; es muß mithin wegen (12) auch $|c_1| > 1$ und wegen (9) $|b_1| > 1$ sein, w. z. b. w.

[1]) Vgl. Bieberbach, Rend. del Circ. mat. di Palermo, Bd. 38, oder Einführung in die konforme Abbildung. Berlin und Leipzig 1915, S. 95.

# Die Bildbeziehungen zwischen Kegelschnitten, die einander nach höherer als erster Ordnung berühren.

Von E. v. Mecenseffy.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 6. Mai 1916.

Für altbekannt und längst bewiesen darf gelten:

Wenn zwei Kegelschnitte sich in vier wirklichen (reellen) Punkten schneiden und vier wirkliche Berührende gemein haben, lassen sie sich immer gleichzeitig als Ellipsen abbilden, einer davon sogar als Kreis. Sie sind dann ohne weiteres strahlverwandt (kollinear) und liegen bildhaft (perspektiv) zueinander. Jede der sechs gemeinsamen Sehnen ist Verwandtschaftsachse, jeder der sechs Schnittpunkte der gemeinsamen Berührenden ist Strahlenfluchtpunkt (Kollineationszentrum).

Die sechs Achsen schneiden einander, außer in den vier Kurvenpunkten, noch in drei weiteren „Achsenfluchtpunkten", den Ecken des gemeinsamen Polardreiecks der beiden Kegelschnitte, d. h. drei ihnen gemeinsamen Polen. Durch diese gehen überdies noch je zwei von den drei Verbindungsgeraden der Strahlenfluchtpunkte, die außer den vier gemeinsamen Berührenden noch möglich sind, also der „Fluchtlinien": es sind die zu jenen Polen gehörigen gemeinsamen Polaren.

Achsen und Strahlenfluchtpunkte sind einander paarweise zugeordnet, so daß zu einer Achse eines Paares dieselben zwei Strahlenfluchtpunkte gehören wie zur anderen und umgekehrt. Gepaart sind immer diejenigen Achsen, die einen Achsenfluchtpunkt, und diejenigen Strahlenfluchtpunkte, die eine Fluchtlinie miteinander gemein haben. Jedes Achsenpaar ist demjenigen Strahlenfluchtpunktpaar zugeordnet, auf dessen Fluchtlinie sein Schnittpunkt nicht liegt.

Jedem Punkte des einen Kegelschnittes können somit zwölf verschiedene Punkte des anderen entsprechen, je nach Wahl der Achse und des Strahlenfluchtpunktes.

Die Bezeichnungen: „Strahlenfluchtpunkt". „Achsenfluchtpunkt" und „Fluchtlinie" ergeben sich sehr ungezwungen, wenn man in Bild 1 die Darstellung in der Mitte („m.") als Schaubild (Zentralprojektion) des Nebenbildes links oben („l. o.") ansieht. Ich vermute, daß ihre Einbürgerung namentlich für Lehrzwecke dem leichteren Verständnis dienlich sein möchte.

Im Hauptbild sind durch einen beliebigen Kreispunkt $A$ die sechs Verwandtschaftsstrahlen gezogen. Für jeden Strahlenfluchtpunkt ergibt dies zwei dem $A$ entsprechende Ellipsenpunkte, die im Bilde mit ihm gleiche Zeiger haben, aber je nach der betreffenden Achse durch römische und Rundschrift unterschieden sind. Es gehören also zum Strahlenfluchtpunkt $F_2$ die Punkte $A_2$ durch die Achse II, $\mathcal{A}_2$ durch die Achse I. Außerdem ist die Art der Zuordnung durch die Berührenden in allen fraglichen Punkten kenntlich gemacht, die einander auf den jeweiligen Achsen treffen. Gleiches gilt auch für Bild 2.

Wir haben in unserem Bilde 1 m. ein Abbild desjenigen allgemeinen Falles vor uns, von dem alle Berührungen höherer Ordnung Sonderfälle sind. Alles, was wir daraus ableiten, dürfen wir ohne weiteres auf alle Kegelschnitte verallgemeinern; denn es handelt sich nur um Lagebeziehungen, die durch keinerlei Abbildung geändert werden.

Es ist klar, daß an diesen Dingen sich auch dann nichts ändert, wenn etwa ein Strahlenfluchtpnnkt ins Unendliche rückt, wie z. B. $F_1$ in Bild 1 rechts oben (r. o.). Nur kommt noch dazu, daß jeder einer zugeordneten Achse gleichlaufenden

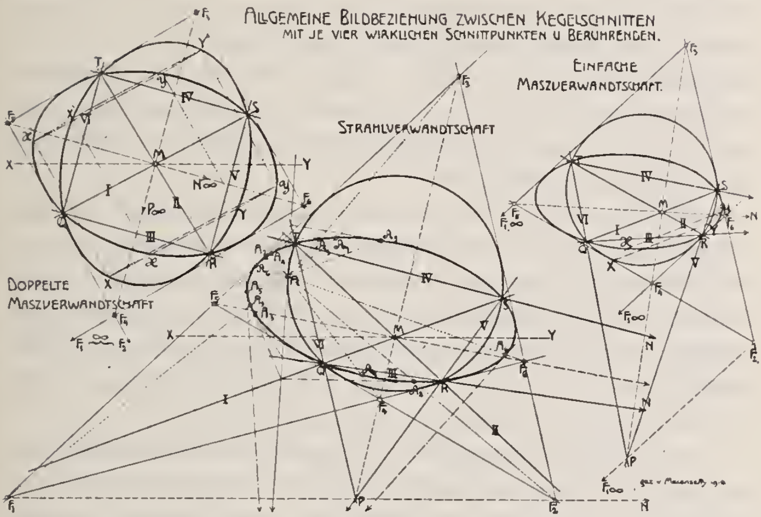

ALLGEMEINE BILDBEZIEHUNG ZWISCHEN KEGELSCHNITTEN
MIT JE VIER WIRKLICHEN SCHNITTPUNKTEN U BERÜHRENDEN.
EINFACHE MASZVERWANDTSCHAFT.
STRAHLVERWANDTSCHAFT
DOPPELTE MASZVERWANDTSCHAFT

Bild 1.

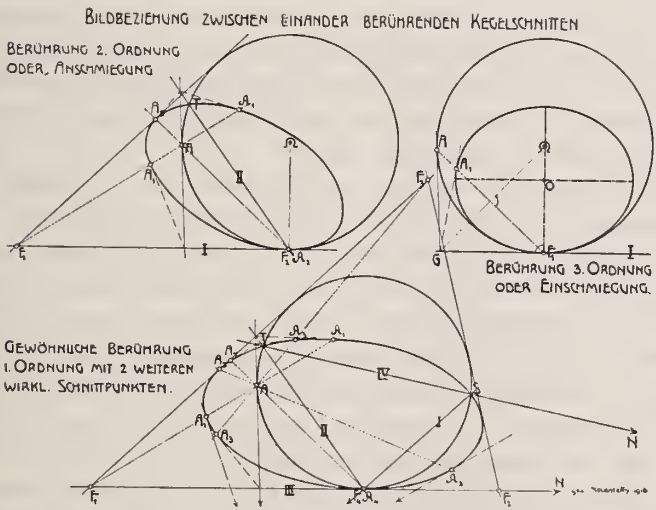

BILDBEZIEHUNG ZWISCHEN EINANDER BERÜHRENDEN KEGELSCHNITTEN
BERÜHRUNG 2. ORDNUNG ODER ANSCHMIEGUNG
BERÜHRUNG 3. ORDNUNG ODER EINSCHMIEGUNG.
GEWÖHNLICHE BERÜHRUNG 1. ORDNUNG MIT 2 WEITEREN WIRKL. SCHNITTPUNKTEN.

Bild 2.

Strecke $XY$ im Bereich der einen Kurve, auch im Bereich der anderen eine gleichlaufende und gleichlange $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ entspricht. Es handelt sich dann, aber blos für den einen Strahlenfluchtpunkt und seine beiden Achsen, um Maßverwandtschaft (Affinität). Dieselben beiden Achsen geben mit dem anderen zugeordneten Strahlenfluchtpunkt nur gewöhnliche Strahlverwandtschaft.

Rückt auch noch ein zweiter Strahlenfluchtpunkt ins Unendliche, so entsteht ein Verhältnis wie im Nebenbild 1 l. o.: Die gleichlange und gleichgerichtete Strecke findet sich auch in der zweiten Strahlenrichtung bei $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'$, und umgekehrt im Bereich der ersten Kurve eine zweite solche Strecke $X'Y'$, die sowohl gegen $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ als auch gegen $\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'$ bildhaft liegt. Dies ist dann doppelte Maßverwandtschaft.

Liegen die ins Unendliche gerückten Strahlenfluchtpunkte auf einer gemeinsamen Berührenden, so werden beide Kurven zu Parabeln. Zwei Parabeln sind also ohne weiteres maßverwandt, und sogar dreifach, wenn sie vier wirkliche Schnittpunkte haben.

Wären die unendlich weit abrückenden Fluchtpunktpaare aber $F_3$ und $F_4$ oder $F_5$ und $F_6$, so fielen gleichzeitig auch $F_1$ und $F_2$ ins Unendliche, das dritte Paar aber auf den Umfang beider Kegelschnitte, so daß Doppelberührung entstünde, wovon später die Rede sein soll.

Nun aber denken wir uns im Bild 1 m. die Fluchtlinie gleichlaufend zu sich selbst so lange verschoben, bis sie den Kreis berührt. Die Berührenden $F_1F_3$ und $F_2F_3$ sollen dabei ihre Lage beibehalten, wie auch der Schnittpunkt $T$. Die Ellipse wird sich natürlich etwas verändern. Die Schnittpunkte $Q$ und $R$ rücken einander immer näher, ebenso $M$, $P$ und $F_4$; schließlich fallen alle fünf Punkte im Berührungspunkt zusammen. $F_5$ vereinigt sich mit $F_1$, $F_6$ mit $F_2$.

Da die beiden Kurven nunmehr die zwei unendlich benachbarten und in $F_4$ vereinigten Punkte $Q$ und $R$ miteinander und mit der $F_1F_2$ gemein haben, berühren sie einander und zugleich die Gerade $F_1F_2$, in der sich zwei gemeinsame Berührende, $F_1 F_6$ und $F_2 F_5$ mit den Fluchtlinien $MN$ und $NP$, sowie der Achse $QR$ vereinigt haben. Diese gleichsam doppelte gemeinsame Berührende wollen wir die Mitberührende der beiden Kurven nennen. Ihr Berührungspunkt $F_4$ steht also in Bild 2 m. u. für die zwei unendlich benachbarten Punkte $Q$ und $R$, somit auch er allein für die kurzen Bogenstücke $QR$ auf beiden Kurven in Bild 1 m., während die dortigen langen Bogenstücke $QR$ sich in Bild 2 m. u. zu dem ganzen Umfang der betreffenden Kurven ausgewachsen haben. Daraus folgt für die Strahlverwandtschaft hinsichtlich des Strahlenfluchtpunktes $F_4$ und der Achse III, daß der Berührungspunkt $F_4$ des Kreises für sich allein dem ganzen Umfang der Ellipse entspricht und derselbe Punkt $\mathfrak{A}_4$ der Ellipse dem ganzen Kreisumfang.

Wir fassen das Erkannte zusammen, wie folgt:

Zwei einander berührende Kegelschnitte können außer ihrem Berührungspunkt nur noch zwei wirkliche Punkte und außer ihrer Mitberührenden nur noch zwei wirkliche Berührende gemein haben. In diesem Falle bilden die Mitberührende und die nicht durch den Berührungspunkt gehende gemeinsame Sehne ein Achsenpaar, dem der Berührungspunkt selbst und der nicht auf der Mitberührenden liegende Strahlfluchtpunkt zugeordnet sind. Die Zuordnung zwischen der Mitberührenden und dem Berührungspunkt ist aber derart, daß immer dem ganzen Umfang des einen Kegelschnittes am anderen nur der einzige Berührungspunkt entspricht. Das zweite Achsenpaar schneidet sich im Berührungspunkt und das ihm zugeordnete Paar Strahlenfluchtpunkte liegt auf der Mitberührenden.

Jedem Punkte des einen Kegelschnittes können acht verschiedene Punkte des anderen entsprechen; oder sieben, wenn man den Berührungspunkt nicht mitzählt.

Auch in diesem Falle könnte einfache Maßverwandtschaft dadurch entstehen, daß einer der drei Strahlenfluchtpunkte $F_1$, $F_2$ oder $F_3$ ins Unendliche rückt.

Jene Fälle doppelter Maßverwandtschaft, bei denen $F_1$ und $F_3$, oder $F_2$ und $F_3$ unendlich fern liegen, betreffen Parabeln.

Rücken $F_1$ und $F_2$ ins Unendliche, so gibt es ebenfalls eine doppelte Maßverwandtschaft. Da aber $F_1$ und $F_2$ auch auf derselben Geraden III liegen, so fallen sie nunmehr zusammen. Dies Letztere, auch wenn es im Endlichen geschieht, ist das Merkmal der Doppelberührung; $T$, $S$ und $F_3$ fallen dann am Ende der vereinigten Sehnen I und II im zweiten Berührungspunkt zusammen.

Halten wir dagegen $T$ fest und lassen $S$ auf dem Kreisumfang immer näher an $F_4$ heranrücken, bis es ihm unendlich nahe benachbart ist, so wird auch $F_2$ nach dem Berührungspunkt $F_4$ gelangt sein, ebenso der letzte Achsenfluchtpunkt $N$. Die Achse I ist mit III, IV mit II zusammengefallen. Der Strahlenfluchtpunkt $F_3$ aber ist zunächst bis ins Unendliche von $F_1$ weg, dann aber von der anderen Seite wieder darauf zu gewandert, bis er sich schließlich mit $F_1$ vereinigte. Dieses Ergebnis zeigt Bild 2 l. o.

Nachdem nunmehr an der Berührungsstelle $F_2$ drei den beiden Kurven gemeinsame Punkte in unendlich naher Nachbarschaft vereinigt sind, handelt es sich zwischen Ellipse und Kreis um eine Berührung zweiter Ordnung oder Anschmiegung (Oskulation). Der Kreis ist zum Krümmungskreis der Ellipse geworden, sein Mittelpunkt $\Omega$ zum Krümmungsmittelpunkt. Von den ursprünglichen vier gemeinsamen Berührenden sind drei, die drei Fluchtlinien aber sämtlich in die Mitberührende gefallen. Diese vereinigt endlich auch drei der Achsen: I, III und V, in sich, während II, IV und VI mit der nunmehr einzigen gemeinsamen Sehne $F_2T$ zusammengefallen sind. An den verschiedenen Paarungen und Zuordnungen hat sich aber nichts geändert, so daß folgende Beziehungen festgestellt werden dürfen:

Ist die Berührung zwischen zwei Kegelschnitten von höherer als erster Ordnung, so liegen alle möglichen Strahlenfluchtpunkte auf der Mitberührenden.

Im Falle der Anschmiegung oder Berührung zweiter Ordnung ist nur ein Doppelpaar von Achsen und Strahlenfluchtpunkten vorhanden: Außer der Mitberührenden selbst die einzige gemeinsame Sehne, und außer dem Berührungspunkt noch irgend ein Punkt der Mitberührenden. Die Zuordnung zwischen dem Berührungspunkt und der Mitberührenden ist von derselben Art wie bei Berührung erster Ordnung. Jedem Punkte eines der Kegelschnitte können somit vier des anderen entsprechen; oder drei, wenn man den Berührungspunkt nicht mitzählt.

Der einzige außer dem Berührungspunkt noch mögliche gemeinsame Punkt muß notwendig wirklich sein. Denn da die vier gemeinsamen Punkte nur paarweise wirklich oder unwirklich werden können und drei davon, weil der Berührungsstelle unendlich benachbart, schon wirklich sind, muß es auch der vierte sein. Genau dasselbe gilt von der einzigen außer der Mitberührenden möglichen gemeinsamen Berührenden, weil die Mitberührende allein schon die übrigen drei enthält. Aus beidem folgt, daß die beiden Kurven im Berührungspunkt die Seiten tauschen: die links davon außen war, ist rechts innen, und umgekehrt. Erstens diese bekannte Tatsache, die unter keinen anderen Umständen eintritt; dann das Vorhandensein einer Strahlverwandtschaft mit Bezug auf die Mitberührende als Achse und einen auf ihr liegenden Strahlenfluchtpunkt; drittens eine andere Strahlverwandtschaft mit Bezug auf den Berührungspunkt als Strahlenfluchtpunkt und eine durch ihn gehende gemeinsame Sehne als Achse: diese drei Erscheinungen, die unter keinen anderen Umständen eintreten, können also jede für sich als genügendes Kennzeichen für eine Berührung zweiter Ordnung zwischen Kegelschnitten gelten und bedingen einander wechselseitig.

Rückt der Strahlenfluchtpunkt $F_1$ ins Unendliche, so ergibt sich Maßverwandtschaft. Gleichliegende, zu I gleichlaufende Strecken fallen in ihrer Richtung zusammen, verschieben sich also nur auf demselben zur Mitberührenden gleichlaufenden Strahl.

Rückt der Schnittpunkt $T$ auf dem Kreise gegen $F_2$, bis er diesem unendlich benachbart ist, so entsteht die Berührung dritter Ordnung oder Einschmiegung. Der Strahlenfluchtpunkt $F_1$ fällt mit $F_2$, die Verwandtschaftsachse II mit I zusammen. Hieraus folgt:

Berühren sich zwei Kegelschnitte nach dritter Ordnung, handelt es sich also um eine Einschmiegung, so gibt es nur eine Achse, die Mitberührende, und nur einen Strahlenfluchtpunkt, den Berührungspunkt selbst. Die Zuordnung zwischen beiden ist doppelt: Einmal die bei allen Berührungen stattfindende, aber praktisch belanglose, daß dem ganzen Umfange des einen Kegelschnittes am anderen der einzige Berührungspunkt entspricht. Außerdem aber entspricht mit Bezug auf dieselbe Achse und denselben Strahlenfluchtpunkt jedem Umfangspunkt des einen Kegelschnittes ein einziger Umfangspunkt des anderen.

Bild 2 r. o. zeigt diese Art der Strahlverwandtschaft. Sie ist das untrügliche Kennzeichen für die Berührung dritter Ordnung, der innigsten, die es bei Kegelschnitten gibt; denn ein fünfter gemeinsamer Punkt, ob unendlich benachbart oder nicht, müßte die Kurven zur Deckung bringen.

Maßverwandtschaft ist hier undenkbar, weil der Strahlenfluchtpunkt an die Berührungsstelle gebunden ist.

Wir haben als Bleibendes im Wechsel einen Kreis angenommen; dieser ist zu dem Berührungslot in $F_1$ (Bild 2 r. o.) spiegelhälftig (rechtwinklig symmetrisch). Da nun der Strahlenfluchtpunkt in der Spiegelachse (Symmetrieachse) $F_1 \Omega$ liegt und die Verwandtschaftsachse I dazu winkelrecht ist, muß auch die strahlverwandte Kurve zu $F_1 \Omega$ spiegelhälftig sein, also $F_1 \Omega$ eine Ellipsenachse und $F_1$ ein Scheitel. Daraus folgt, daß am Scheitel eines Kegelschnittes mit dem Krümmungskreise Berührung dritter Ordnung stattfindet; daß ferner zwei Kegelschnitte einander in ihren Scheiteln nicht nach zweiter, sondern nur nach erster oder nach dritter Ordnung berühren können.

Aus Bild 2 r. o. folgt auch sofort eine wertvolle Anwendung unseres Satzes. Der Verwandtschaftsstrahl $F_1 A_1 A$ ist zugleich Sehne der Ellipse und ihres Krümmungskreises. Die Berührenden in $A$ und $A_1$ schneiden sich auf der Verwandtschaftsachse in $G$. Verbindet man $G$ mit $\Omega$, so ist

$$G\Omega \perp F_1 A.$$

Ist demnach ein Kegelschnitt durch einen Scheitel nebst der Achsenrichtung, sowie einen beliebigen zweiten Punkt nebst der daselbst Berührenden gegeben, so ist das Sehnenlot aus dem Schnittpunkt der beiden Berührenden geometrischer Ort für den Krümmungsmittelpunkt des Scheitels.

Sind beide gegebenen Punkte Scheitel, so ergibt sich diese altbekannte Beziehung: Das Lot zur Scheitelsehne aus deren Pol ist geometrischer Ort für die Krümmungsmittelpunkte beider Scheitel.

Denken wir uns aus dem Gebilde in Bild 2 r. o. durch Strahlverwandtschaft, zwar mit Bezug auf die Achse I, aber auf einen beliebig gewählten Strahlenfluchtpunkt, ein anderes abgeleitet, so ändert sich an der Berührung dritter Ordnung nichts; die Spiegelhälftigkeit aber wird in Schräghälftigkeit (schiefe Symmetrie) übergehen, wenn der Strahlenfluchtpunkt nicht gerade zufällig in der Spiegelachse $F_1 \Omega$ gewählt wurde. Demnach müssen bei Berührung dritter Ordnung die Durchmesser des Berührungspunktes für beide Kegelschnitte zusammenfallen.

Der Inhalt des Bildes 2 r. o. läßt sich auch so aussprechen:

Die Pollote aller durch einen Kegelschnittscheitel gelegten Sehnen schneiden einander im Krümmungsmittelpunkte dieses Scheitels.

Wie verträgt sich dies mit dem von Pelz[1]) erweiterten Steinerschen Satze: Die Pollote aller durch irgend einen Umfangspunkt eines Kegelschnittes gelegten Sehnen werden von

[1]) In den Sitzungsberichten der Kgl. Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, 1879, S. 210.

einer Parabel umhüllt? Sehr gut, denn diese sogenannte Steinersche Parabel artet für den Scheitel eines Kegelschnittes in einen Halbstrahl aus, der, vom Krümmungsmittelpunkt ausgehend, zur Scheitelberührenden gleichläuft; natürlich wiederholt er sich spiegelgleich zu der betreffenden Achse.

Zum Beweise der behaupteten Ausartung der Steinerschen Parabel diene, daß ihre Leitgerade (Direktrix) der Durchmesser des betreffenden Kegelschnittpunktes ist, während in der Schar der Pollote sich naturgemäß beide Achsen, sowie die Berührende und ihr Lot im gegebenen Punkte befinden. Das letztere berührt die Steinersche Parabel im Krümmungsmittelpunkte. Für einen Scheitel fallen nun das Berührungslot und die eine Achse des Kegelschnittes, also zwei Berührende der Parabel, mit deren Leitgeraden zusammen, wodurch die Ausartung bewiesen ist.[1])

In Bild 3 l. sind von einem Kegelschnitt ein Scheitel $A$ und ein zweiter Punkt $B$ nebst den Berührenden gegeben und der Krümmungsmittelpunkt $\Omega_a$ des Scheitels durch $C\Omega_a \perp AB$ bestimmt. Mit Hilfe der Steinerschen Parabel und des Satzes von Brianchon läßt sich sofort der Krümmungsmittelpunkt $\Omega_b$ finden. Von der Steinerschen Parabel sind fünf Berührende

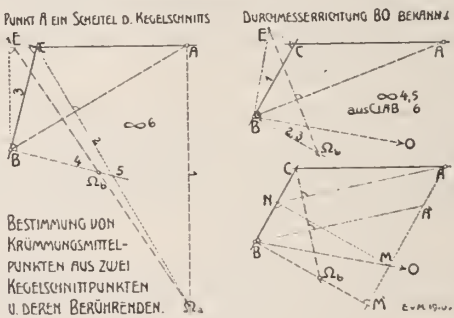



Bild 3.

[1]) Pelz geht a. a. O. darauf nicht ein; auch die hier und im folgenden angegebenen Verfahren finden sich bei ihm nicht.

gegeben: Die Achse $A\Omega_a$ (1), das Pollot $C\Omega_a$ der Sehne $AB$ (2), die Berührende $BC$ (3), das Berührungslot in $B$ (4, 5) und die unendlich ferne Gerade (6). Man zieht

$$\mathrm{I}\begin{cases}6{,}1\\3{,}4\end{cases}\text{nämlich } BE \parallel A\Omega_a,\text{ dann II}\begin{cases}2{,}3\\5{,}6\end{cases}\text{nämlich } CE \perp BC$$

und erhält damit den Brianchonschen Punkt $E$. Die Verbindung $E\Omega_a$, nämlich III $\begin{cases}1{,}2\\4{,}5\end{cases}$ ergibt als Schnitt mit dem Berührungslot den Krümmungsmittelpunkt.

Dieses Verfahren leistet namentlich beim Aufreißen von Korbbogen gute Dienste, wie in meiner demnächst[1]) erscheinenden Schrift gezeigt wird. Ebenda findet sich ein rechnerischer Beweis aus der Scheitelgleichung des Kegelschnittes.

Wäre $A$, wie in Bild 3 r. o., kein Scheitel, sondern irgend ein anderer Kegelschnittpunkt, dafür aber die Richtung des Durchmessers $BO$ bekannt, so ist letzterer die Leitgerade der Steinerschen Parabel, somit deren Achsrichtung gegeben, und man darf der unendlich fernen Geraden zwei Nummern beilegen (4, 5), während das — nicht gezeichnete — Pollot auf $AB$ mit 6 bezeichnet sei. Die Berührende erhalte die Nummer 1, das Berührungslot 2, 3. Dann geben

$$\mathrm{I}\begin{cases}1{,}2\\4{,}5\end{cases}\text{nämlich } BE \perp BO\text{ und II}\begin{cases}6{,}1\\3{,}4\end{cases}\text{nämlich } CE \perp BC$$

den Brianchonschen Punkt $E$, während man $E\Omega_b \perp BA$, d. h. III $\begin{cases}5{,}6\\2{,}3\end{cases}$ den Krümmungsmittelpunkt $\Omega_b$ erhält.

Unabhängig von der Steinerschen Parabel läßt sich dieselbe Aufgabe lösen, wie in Bild 3 r. u. durchgeführt. Man benutzt dabei den in dieser Schrift bewiesenen Satz über die Berührung zweiter Ordnung, indem man sich $MA$ nach $M'A'$ verschoben denkt. Dadurch würde $B$ zum Scheitel eines dem gegebenen maßverwandten Kegelschnittes, der $BM$ zur Achse

[1]) Bei Wilh. Ernst & Sohn, Berlin, sofort nach Beendigung des Krieges: „Abhandlungen aus der Geometrie des Baumeisters“, Heft 1.

und $BA'$ zur Sehne hätte; der Krümmungsmittelpunkt für $B$ bliebe derselbe wie bei der gegebenen Kurve, und der Pol $C$ von $BA$ wäre auch der von $BA'$. Das Pollot $C\Omega_b \perp BA'$ liefert den Krümmungsmittelpunkt $\Omega_b$. Da es sich somit nur um die Richtung von $BA'$ handelt, vereinfacht sich das Verfahren in: $MN \perp BC$ und $C\Omega_b \perp NA$.

In Bild 4 o. ist die Aufgabe gelöst, einen Kegelschnitt zu suchen, von dem drei Punkte $A$, $B$, $C$ und der Krümmungskreis $\Omega$ für $A$ gegeben sind.

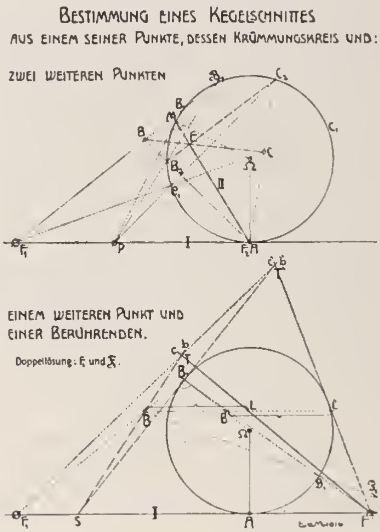



Bild 4.

$A$ als Berührungspunkt ist Strahlenfluchtpunkt $F_2$, ihm als Achse II zugeordnet die noch unbekannte gemeinsame Sehne. Die Strahlen $F_2C$ und $F_2B$ geben die den $C$ und $B$ entsprechenden Kreispunkte $C_2$ und $B_2$, deren Geradverbindung sich mit $BC$ in einem Punkt $E$ der Verwandtschaftsachse, hier der gemeinsamen Sehme, schneiden muß. — Den zweiten Strahlenfluchtpunkt findet man mit Hilfe von $\mathfrak{C}_1$ oder $\mathfrak{B}_1$: Die Berührenden in $C_2$ und $\mathfrak{C}_1$ müssen sich auf $AM$, der Achse II, schneiden; also geht $C_2\mathfrak{C}_1$ durch den Pol $P$ von $AM$ mit Bezug auf den Kreis. $P$ ist der Schnitt der Berührenden in $M$ und der Mitberührenden I. $F_1$ bestimmt sich dann durch den Schnitt von $C\mathfrak{C}_1$ mit I, zugleich erhält man $C_1$ usw.

Bild 4 u. hat statt $C$ die Berührende $c$ gegeben. Zieht man aus deren Schnitt $F'$ mit I die ihr entsprechende Kreisberührende $c'$, dann $BL' \parallel$ I und trägt $BL$ von $L'$ nach $B'$ auf, so ist durch die Punkte $B'$ und $A$ nebst den Berührenden I und $c'$ ein Kegelschnitt bestimmt, der ebenfalls $\Omega$ zum Krümmungskreis hat.

$F'$ ist Strahlenfluchtpunkt für dessen Verwandtschaft mit $\Omega$ in Bezug auf die Achse I, darum gibt $F'B'$ in den beiden Schnittpunkten mit $\Omega$ die Kreispunkte $B_1$ und $\mathfrak{B}_1$, die dem $B'$ und damit auch dem Punkt $B$ des gesuchten Kegelschnittes entsprechen. $BB_1$ und $B\mathfrak{B}_1$ geben die einander ausschließenden Strahlenfluchtpunkte $F_1$ und $\mathfrak{F}_1$. Eine Nachprüfung ist mit Hilfe der Berührenden in $B_1$ bzw. $\mathfrak{B}_1$ leicht möglich und für $F_1$ im Bilde ausgeführt: Man erhält zunächst $S$ und $T'$, dann durch $SB$ auch $T$; $TT'$ geht durch $F_1$. Das Weitere ist klar; $F_1$ gibt eine Ellipse, $\mathfrak{F}_1$ eine Hyperbel.

Daß die Umkehrung der bewiesenen Sätze für Kegelschnitte zurecht besteht, geht aus dem Bisherigen schon hervor. Zwei einander berührenden, aber sonst irgendwie gestalteten Kurven lassen sich zwei Kegelschnitte zuordnen, die mit ihnen jeweils fünf der Berührungsstelle unendlich benachbarte Punkte gemein haben. Waren nun die gegebenen Kurven einander strahlverwandt mit Bezug auf die gerade Mitberührende, so sind es auch die beiden Kegelschnitte untereinander; aus der Lage des Strahlenfluchtpunktes ergibt sich dann die Ordnung ihrer Berührung. Diese aber muß sich ebenso notwendig auf die beiden Urkurven übertragen. Somit ist folgendes bewiesen:

Zwei einander berührende ebene krumme Linien irgend einer Art, die derart strahlverwandt sind und bildhaft liegen, daß sie ihre mitberührende Gerade zur Achse und einen auf dieser liegenden Punkt zum

Strahlenfluchtpunkt haben, berühren sich mindestens nach zweiter Ordnung. Fällt der Strahlenfluchtpunkt mit dem Berührungspunkt zusammen, so ist die Berührung mindestens von dritter Ordnung.

Die nachgewiesenen einfachen Bildbeziehungen sind für die Anwendung, besonders im Bauwesen, sehr fruchtbar. Ich muß mir aber versagen, hier darauf einzugehen und verweise auf meine schon erwähnte, wegen des Krieges leider noch nicht erschienene Schrift.

# 765 Fixsternparallaxen der Zone AGC XI (Berlin A).

## Versuch zur Herstellung einer parallaktischen Durchmusterung.

Von **Ernst Grossmann.**

Vorgelegt von H. v. Seeliger in der Sitzung am 3. Juni 1916.

Die mechanischen Verhältnisse des Stellarsystems sind bestimmt durch Eigenbewegung, Radialbewegung und Parallaxe. Der Erweiterung unserer Kenntnisse des ersten Elements in absehbarer Zeit sind die Grundlagen gegeben; die Erforschung des zweiten hat in jüngster Zeit große Fortschritte gemacht — allerdings sind ihr durch die Lichtschwäche der Sterne Schranken gesetzt. Am ungünstigsten steht es mit der Parallaxe. Seit der klassischen Arbeit Bessels über die Parallaxe von 61 Cygni in den Jahren 1837/38 sind zwar einige Hundert Untersuchungen ausgeführt, aber wie viele von ihnen zuverlässige Resultate ergeben haben, steht dahin. Es gibt vorderhand kein anderes Mittel zum Nachweise der Realität einer Parallaxe als wiederholte Messung. Das auch mag manchen Astronomen bewogen haben, bereits untersuchte Sterne wiederum auf sein Programm zu setzen, zugleich auch um die Ursachen etwaiger Differenzen aufzudecken. Gar manche Fehlerquelle ist in der Tat hierdurch gefunden. Die Ausdehnung des Parallaxen-Materials wurde naturgemäß hierdurch gehemmt. Aber noch eine andere Ursache trug hierzu bei. Bessels Erfolg mit dem Heliometer verdankt wohl dieses Instrument zugleich mit der Vervollkommnung, die ihm die Repsolds gegeben haben, seine für lange Zeit behauptete erste Stellung unter den Präzisionsinstrumenten, bis ihm in der Photographie ein sehr viel bequemer zu bedienender Rivale entstand. Das Arbeitsfeld des Heliometers aber ist begrenzt; es gestattet bei mühevoller Arbeit nur die jeweilige Untersuchung eines einzelnen Sterns. Diese Einschränkung haben mit wenigen Ausnahmen die neueren Methoden übernommen, obwohl sie ihnen nicht geboten war.

Die bis jetzt bekannten Parallaxen können uns über die räumliche Verteilung der Sterne kein allgemeines Bild liefern; Massenbestimmungen sind dringend erforderlich. Schon im Jahre 1900 und ausführlicher 1906 in seinem „Plan of selected Areas" hat Kapteyn den Vorschlag der Herstellung einer par. Durchmusterung auf photographischem Wege nach der Methode des latenten Bildes gemacht, der bislang leider nicht zur Ausführung gekommen ist.

Als ich im Jahre 1908 den Repsoldschen Meridiankreis (*MKr*) der Münchener Sternwarte übernahm, entschloß ich mich, an diesem nach der zuerst von Bessel (1815/16) und in jüngster Zeit mehrfach angewandten Methode der Beobachtung von *AR* Differenzen solche Massenbestimmungen von Parallaxen auszuführen in der Weise, daß ich nicht wie bisher einen Parallaxenstern an einige wenige Vergleichssterne anschließen wollte, sondern daß ich vielmehr gleich eine größere Gruppe von Sternen einheitlich beobachtete, um dadurch die Parallaxen aller dieser Sterne relativ zu einer mittleren Gruppenebene zu erhalten. Gruppe sollte sich an Gruppe anschließen über den gesamten Umfang der gewählten Deklinationszone.

Der Breslauer Versammlung der A. G., 1910, habe ich meinen Plan zugleich mit den ersten Resultaten vorgelegt (V. d. A. G. 45, p. 292) und hier wie 1913 in Hamburg zu weiterer Mitarbeit aufgefordert. Zur Förderung des Unternehmens wurde eine Kommission eingesetzt, aber infolge der jetzigen politischen Verhältnisse wird eine Ausführung desselben vorderhand nicht zu erwarten sein.

Die Frage: Ist der *MKr* mit Registriermikrometer (*RM*) zu einer solchen Arbeit geeignet, ist zweifelsohne zu bejahen, denn da hier die Ausdehnung der Gruppen sehr viel weniger begrenzt ist als bei den anderen Methoden (Heliometer und Photographie), so vermag man besonders solche Sterne zu bevorzugen, die unser Interesse wegen *EB*, Radialbewegung, Spektraltypus etc. in erster Linie in Anspruch nehmen. Der Nachteil der Beschränkung der Beobachtung auf den Meridian und der damit verbundene Verlust am parallaktischen Faktor in den Sommermonaten wird dadurch aufgehoben, daß nach der Erfahrung sich eine solche Beschränkung auch für die anderen Methoden als notwendig erwiesen hat, weil sich sonst leicht systematische Fehler infolge der Einflüsse der Luft, etwaiger Verzeichnungen und Verspannungen des Objektivs und einer ungenauen Nachführung (Stundenwinkelfehler) einschleichen. Das Meßwerkzeug und seine Handhabung sind hier von außerordentlicher Einfachheit, ebenso auch die erforderliche Reduktionsarbeit.

Gewährt ferner der *MKr* die erforderliche Genauigkeit? Der m. F. einer Beobachtung wird hier bei den sich in Bewegung befindlichen Objekten ohne Frage größer, aber einmal handelt es sich hier um Massenbestimmungen und deshalb wird im Endresultat der m. F. wesentlich vermindert sein; sodann war es weniger mein Bestreben, möglichst genaue Einzel-Parallaxen abzuleiten, als vielmehr aus Mittelwerten, also durch direkte Beobachtung das typische Bild der räumlichen Verteilung der Sterne zu bestimmen, wie es von Herrn v. Seeliger in seinen bekannten Arbeiten auf ganz anderem Wege geschehen ist. Zum dritten aber ist weniger die sogenannte innere Genauigkeit für die Entscheidung der obigen Frage maßgebend, als vielmehr der zu befürchtende systematische Fehler. Wägen wir nach diesem Gesichtspunkte die Methoden gegeneinander ab, so dürfte nach den vorliegenden Erfahrungen der *MKr* nicht hinter den anderen Methoden zurückstehen. Eine ausführliche Gegenüberstellung aller dieser Fehler führt hier zu weit; ich gebe sie in einer größeren bereits drucktertig vorliegenden Arbeit, von der diese nur einen Auszug darstellen soll, die in den Annalen der Sternwarte erscheinen wird. Ich bemerke lediglich, daß es sich bei dem *MKr* nur um die Helligkeitsgleichung und mehr der Vermutung nach um einen Führungsfehler handelt. Nach der Erfahrung hat sich die erstere nur klein erwiesen; außerdem läßt sich ihr mit bekannten Hilfsmitteln vorbeugen. Ich habe mit Erfolg Objektivlamellen benutzt, wie ich sie Astr. Nachr. Bd. 189 beschrieben habe.

Noch auf einen anderen Punkt habe ich Gewicht gelegt. In die Bedingungsgleichungen

$$a_1 - a_0 = x + P \cdot \pi + T \cdot y$$

gehen 3 Unbekannte ein; es genügt also die Beobachtung in 3 aufeinanderfolgenden Epochen. Sind jedoch systematische Fehler oder auch Schwerpunktbewegungen vorhanden, so werden diese voraussichtlich in einer Epoche als konstante Fehler auftreten, und nur von Epoche zu Epoche variieren. Sie gehen also bei der Beschränkung auf 3 Epochen mit vollem Betrage in die Resultate ein und die Darstellung gibt über ihr Vorhandensein keine Auskunft. Ich habe deshalb in mindestens 5 Epochen beobachtet. Um etwaige Schwerpunktbewegungen im Endresultat unschädlich zu machen, empfiehlt sich schon die Erhöhung der Anzahl der Vergleichssterne.

Als Beobachtungszone wählte ich A G C XI. Ich teilte sie in 26 Hauptgruppen und 9 Zusatzgruppen, da eine einmalige Durchbeobachtung in allen *A R* Stunden nicht ausreichte. Besonders bevorzugt wurden die Sterne bis zur Größe 6.5. Das Programm enthielt insgesamt 765 Sterne, davon 231 helle und 534 schwache. Jede Gruppe sollte mindestens 40 mal beobachtet werden, also etwa 8 mal in jeder Epoche. Für die meisten Gruppen erwiesen sich jedoch wegen ungünstigen Wetters mehr Epochen erforderlich. Die Arbeit begann 1908 Juni und wurde abgeschlossen 1914 Oktober. Insgesamt sind an 585 Tagen, und zwar 459 Nachmittagen und 345 Vormittagen, 36300 Parallaxensterne und ca. 4000 Fundamentalsterne zur Bestimmung der Aufstellungsfehler und der Uhrgänge beobachtet.

Hinsichtlich der an dem Instrumente vorgenommenen

Änderungen muß ich auf die Hauptarbeit verweisen, ebenso hinsichtlich des Verhaltens der Uhr Riefler Nr. 23, die sich als eine erstklassige erwies. Leider war ihr luftdichter Verschluß häufig ungenügend.

Bei der Handhabung des *RM* war ich darauf bedacht, den Wechsel der Finger stets rhythmisch erfolgen zu lassen, denn es ist Erfahrungstatsache, daß eine Erscheinung sich um so schärfer beobachten läßt, je einfacher sie in ihrer Wirkung auf das Bewußtsein verläuft. Die rhythmische Tätigkeit aber ist eine dem Menschen angeborene, die arrhythmische eine erzwungene, die somit einen größeren Teil der Aufmerksamkeit für sich beansprucht. Mit dem Wechsel der Deklination braucht sich nur die Greifweite der Finger zu ändern. Bei der Tasterregistrierung, die bei Polsternen zur Verwendung kam, habe ich mich stets der sogenannten verkürzten Reaktionsmethode bedient.

Zur Bestimmung des Schraubenwerts verdienen bei dem *RM* südlichere Sterne gegen Polsterne den Vorzug. Will man jedoch zugleich durch Kombination beider Arten von Registrierungen auch die Kontaktlagen erhalten, so muß man zu Polsternen zurückkehren. Aus Beobachtungen in beiden Kreislagen oder Kulminationen erhält man auch die persönliche Gleichung.

Ist das Mittel aller Tastersignale $T_t$, das der automatischen $T_s$; die hierzu gehörigen Trommelangaben sind $V_t$ (bekannt) und $V_s$ (unbekannt). Jede Art von Registrierung ergibt den Schraubenwert $r_t$ und $r_s$ nach dem Ansatze

$$(V_{t,n} - V_t)(r_t' + y) = [T_{t,n} - (T_t' + x)]$$

und analog für die Selbstregistrierung. Ferner ist, wenn wir $T_t' + x = T_t$ und $T_s' + x = T_s$ setzen,

$$(V_s - V_t) r \sec\delta = T_s - T_t \qquad KrW,\ OC;\ KrO,\ UC$$
$$(V_t - V_s) r \sec\delta = T_s - T_t \qquad KrW,\ UC;\ KrO,\ OC.$$

Hieraus folgt $V_s$ und aus diesem in Verbindung mit den Einzelnbeobachtungen erhält man die Kontaktlagen. Ist $g$ die

Reaktionszeit und $H$ die Helligkeitsgleichung, beide als Korrektionen angesetzt, letztere für $OC$, so ist

$$(V_s - V_t)\, r \sec\delta = T_s \mp H_s \sec\delta - (T_t - g \mp H_t \sec\delta) \begin{cases} Kr\,W\,O\,C \\ Kr\,O\,U\,C \end{cases}$$

$$(V_t - V_s)\, r \sec\delta = \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \begin{cases} Kr\,O\,O\,C \\ Kr\,W\,U\,C. \end{cases}$$

In guter Übereinstimmung aller Beobachtungen von 1908 bis 1915 findet sich

$$r = 4\overset{s}{.}6770 - 0\overset{s}{.}00005\,(T - 7^{0}.0).$$

Der kleine Temperaturkoeffizient ist offenbar reell; er befindet sich auch in guter Übereinstimmung mit dem Werte, der sich aus den Temperaturkoeffizienten von Messing (Fernrohr) und Stahl (Schraube) ergibt. Fortschreitende Fehler der Schraube zeigen sich nicht. Ferner folgt:

$$V = V_t + 0.5615 \quad (V_t = 10.0 \text{ gesetzt})$$
$$\Delta H = H_s - H_t = + 0\overset{s}{.}0072$$
$$g = - 0\overset{s}{.}0028 \sec\delta.$$

Es zeigen sich also nur Spuren von persönlichen Fehlern angedeutet.

Aus $V_s$ und $V_t$ und den Einzelsignalen ergeben sich jetzt die Lagen der Kontaktstellen. Zwischen diesen und den mehrfach mit Hilfe eines Relais bestimmten Stellen findet volle Übereinstimmung statt.

Die Reduktion der Beobachtungen auf den scheinbaren Ort wurde für jeden Stern streng nach der Besselschen Formel durchgeführt, denn da die Reduktionselemente stets nur klein waren, machte dieses nicht mehr Mühe als die Anwendung von Differentialformeln; die Reduktionen auf den mittleren Ort (1910.0) wurden jedoch mit Hilfe solcher gerechnet, wobei wenn nötig die Glieder 2. Ordnung berücksichtigt wurden.

Für die Bestimmung der Unbekannten wurde jede Gruppe als einheitliches Ganze behandelt, denn nur dadurch wurde der Bedingung genügt, daß die Fehlerquadrate ein Minimum bilden. Nehmen wir in erster Annäherung an, daß die Instrumentalfehler sich während der Dauer einer Gruppe nicht ändern, so wird jede Tagesreihe eine Tageskorrektion $c$ erfordern infolge der den Reduktionselementen noch anhaftenden Unsicherheiten. Dann ist

$$\alpha' + c = a_0 + x' + P \cdot \pi' + t \cdot \mu',$$

wo $\alpha'$ = beob. $AR$ 1910.0, $a_0$ = beliebig anzunehmender Mittelwert, $x$ seine Korrektion auf das System der Gruppe, $P$ = par. Faktor, $\pi$ = Parallaxe, $t$ = Zeit in Einheiten des Jahres und $\mu = EB$. Setzen wir $\alpha' - a_0 = \Delta\alpha$, so lauten die Normalgleichungen:

$$\begin{array}{rll}
\text{I.} & n \cdot x^{1\cdots m} + [c] + [P]\pi^{1\cdots m} + [t]\mu^{1\cdots m} = [\Delta\alpha]^{1\cdots m} & m\,\text{Gl.} \\
\text{II.} & [x] + m \cdot c_{1\ldots n} + P_{1\ldots n}[\pi] + t_{1\ldots n}[\mu] = [\Delta\alpha]^{1\cdots n} & n\,\text{Gl.} \\
\text{III.} & [P]x^{1\cdots m} + [Pc] + [PP]\pi^{1\cdots m} + [Pt]\mu^{1\cdots m} & \\
 & \qquad = [P\Delta\alpha^{1\cdots m}] & m\,\text{Gl.} \\
\text{IV.} & [t]x^{1\cdots m} + [tc] + [Pt]\pi^{1\cdots m} + [tt]\mu^{1\cdots m} = [t\Delta\alpha^{1\cdots m}] & m\,\text{Gl.}
\end{array}$$

Die Indices $m$ beziehen sich auf die einzelnen Sterne einer Gruppe, die Indices $n$ auf die Beobachtungstage. Wir haben also $m \cdot n$ Bedingungsgleichungen und $3m + n$ Normalgleichungen.

Die obigen Gleichungen enthalten eine Zwangsbedingung, denn es ist

$$\Sigma \text{ System I} = \Sigma \text{ System II}.$$

Das war zu erwarten, denn die Unbekannten $c$ müssen ohne nähere Definition unbestimmt bleiben. Wir fügen deshalb noch die zunächst willkürliche Bedingung $\Sigma c = 0$ hinzu. Ferner setzen wir $\Sigma(\alpha' - a_0) = \Sigma\Delta\alpha_{1\ldots n} = 0$; damit wird auch $\Sigma x = 0$. Da auch $\Sigma\pi = 0$ und $\Sigma\mu = 0$ wird und wir auch $\Sigma t = 0$ setzen können, so vereinfachen sich die Normalgleichungen wesentlich. Zunächst wird

$$c_{1\ldots n} = \frac{[\Delta\alpha]_{1\ldots n}}{m}$$

und aus dem zusammenhängenden System der Normalgleichungen löst sich ein für jeden einzelnen Stern gültiges System aus von der Form

$$
\begin{aligned}
n \cdot x + [P]\pi &= 0 \\
[P] \cdot x + [PP]\pi + [Pt]\mu &= [P(\Delta a - c)] \\
+ [Pt]\pi + [tt]\mu &= [t(\Delta a - c)].
\end{aligned}
$$

Für die einzelnen Sterne wurden die strengen par. Faktoren berechnet und nicht die für die Gruppenmitte gültigen Werte gesetzt. Eine Kontrolle der Rechnung ist durch die Nullbedingung der Summe der 3 Unbekannten gegeben. Gewichte wurden nicht angesetzt, aus Gründen, die ich bereits wiederholt dargelegt habe.

Für die m. F. finden sich die Gleichungen, wenn $\varepsilon' =$ m. F. einer beobachteten $AR$ Differenz ist:

$$\varepsilon_c = \varepsilon' \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{m \cdot n}}$$

m. F. der Gewichtseinheit $\varepsilon = \varepsilon' \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{m \cdot n}}$

$$\varepsilon_x = \varepsilon' \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{m \cdot n^2}}$$

$$\varepsilon_\pi = \varepsilon' \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{m \cdot n\,[PP]}}$$

$$\varepsilon_\mu = \varepsilon' \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{m \cdot n \cdot [tt]}}$$

Die Aufstellungsfehler wurden in der bekannten Weise bestimmt. Der Kollimationsfehler hat sich sehr konstant gehalten. In der Neigung zeigt sich zunächst ein mit der Zeit fortschreitendes Glied von der Form

$$i_0 = -0\overset{s}{.}193 - 0\overset{s}{.}159\,(t - 1912.0),$$

das offenbar mit der Temperatur in keinem Zusammenhang steht. Außerdem tritt deutlich eine Jahreskurve auf, die gegen die Temperaturkurve um etwa 4 Wochen nach vorwärts verschoben ist und die sich alsdann sehr gut darstellen läßt durch die Formel

$$29{,}0 \cdot i = T - 8^\circ.3.$$

Es sind also nicht die obersten metallischen Instrumententeile, die diese Änderung bedingen, und es wird sich daher auch die tägliche Temperaturschwankung kaum merklich in der Neigung äußern. In der Tat ist

$$i\,(\mathrm{Vm}) - i\,(\mathrm{Nm}) = -\,0^s\!.0007 \quad (8^h \text{ Zwischenzeit}).$$

Ungünstiger liegt die Sache während der Beobachtungstätigkeit, denn hier findet sich

$$i\,(\text{Schluß der Beob.}) - i\,(\text{Beginn}) = +\,0^s\!.0055 \;\; (3^h),$$

also für die Dauer einer Gruppe ($50^m$) $\Delta i = +\,0^s.0015$. Dieser Unterschied gegen oben ist zweifelsohne darauf zurückzuführen, daß während der Pausen der Spalt geschlossen wurde.

Das aus der Kombination von Pol- und Südsternen bestimmte Azimut weist kein Zeitglied auf und die Jahreskurve verläuft in den einzelnen Jahren sehr verschieden; im Mittel ist sie um ca. 8 Wochen gegen die Temperaturkurve verschoben. Dieses gegen die Neigung abweichende Verhalten ist wahrscheinlich auf die Art der Montierung der metallischen Pfeilerköpfe zurückzuführen. In Bezug auf die kurzperiodischen Änderungen findet sich

1. In 24 Stunden ändert sich die äquatoreale Neigung $n$ nicht.

2. Im Verlaufe von $6^h$ in der Nacht tritt eine Änderung ein von $\Delta n = -\,0^s\!.032$, also in $50^m$ und bei $\delta = +\,17^0\,5$ eine solche von $-\,0^s\!.0014$.

Ferner ergibt die Diskussion der Polsterne $\alpha$ und $\lambda$ Urs. min. die Differenz der Helligkeitsgleichung für diese beiden Sterne $H_\alpha - H_\lambda = +\,0^s.002$. Ist diese Differenz nahezu Null, so wird der Fehler überhaupt gleich Null sein. Für die Korrektion des $FC$ Systems Auwers folgt $\Delta\alpha = -\,0^s\!.010 \operatorname{tg}\delta$, ein Wert, der mit anderen früher von mir abgeleiteten in guter Übereinstimmung steht.

Vergleichen wir hiermit die Beobachtungen selbst, so ist zunächst an die A R 1910.0 die Tageskorrektion $c$ anzubringen. Da aber zunächst willkürlich $\Sigma c = 0$ gesetzt war, so haben wir zur Reduktion auf $FC$ noch eine weitere Korrektion $C$ in Rechnung zu stellen; es ist also für die Gruppe $n$

$$a'_n + c'_n + C_n = a_n + C_n = a_n (FC).$$

Die $c'_n + C_n$ enthalten die Unsicherheiten der Reduktionselemente $J_n$ sowie den Orientierungsfehler $O$, also

$$c'_n + C_n = J_n + O$$

und für die Differenz zweier aufeinander folgender Gruppen ist

$$(c'_{n+1} - c'_n) + C_{n+1} - C_n = J_{n+1} - J_n,$$

d. h. gleich dem Gang des Instruments und der Uhr in der Zwischenzeit. In der Summe aller dieser Differenzen für die einen geschlossenen Zyklus bildenden 26 Gruppen muß

$$\Sigma (C_{n+1} - C_n) = 0$$

sein, also

$$\Sigma (c_{n+1} - c_n) = \Sigma (J_{n+1} - J_n).$$

Aus der Diskussion der direkt bestimmten Instrumentalfehler ergibt sich, daß der Gang des Instruments während des ganzen Jahres der gleiche ist. Ferner dürfen wir den Uhrgang als hinreichend berücksichtigt annehmen. Wir können somit setzen

$$\frac{\Sigma (c_{n+1} - c_n)}{n} = J_{n+1} - J_n.$$

Dieses oben eingesetzt

$$c'_{n+1} - c_n - \frac{\Sigma (c_{n+1} - c_n)}{n} = - (C_{n+1} - C_n).$$

Das ist die Beziehung von je 2 Gruppen zueinander.

Die numerische Rechnung zeigt zunächst für die Tageskorrektionen $c$ die sofort in die Augen springende Erscheinung, daß diese während der Nacht kontinuierlich anwachsen. Die stündliche Änderung ergibt sich zu $\Delta c = + 0^s\!.0035$, konstant während des ganzen Jahres. Ebenso folgt für die Tagesstunden diese Änderung zu $- 0^s\!.0027$. Es findet also offenbar ein Rückgang statt. Vergleichen wir dieses Resultat mit dem, welches wir bei der Diskussion der Aufstellungsfehler gefunden haben, so geht der Differentialquotient $\frac{dn}{dt}$ in die Beobachtungen ein mit dem Betrage

$$(\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\varphi)\frac{dn}{dt} = +\, 0^s.0042.$$

Die Übereinstimmung mit dem obigen Werte ist in der Tat überraschend; sie wird noch besser, wenn wir auch der kleinen Änderung von $i$ Rechnung tragen; dann folgt

$$+\, 0^s.0042 - 0^s.0007 \sec\varphi = +\, 0^s.0032.$$

Bilden wir jetzt das Mittel der $c_{n+1} - c_n = \Delta c$ für 2 aufeinander folgende Gruppen, so findet sich

$$\frac{\Sigma(c_{n+1} - c_n)}{n} = J_{n+1} - J_n = +\, 0^s.0090.$$

Nach dem früheren war

$$\frac{di}{dt}\sec\varphi + \frac{dn}{dt}(\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\varphi) = +\, 0^s.0084,$$

also wiederum eine überraschende Übereinstimmung. Wir dürfen hieraus den bemerkenswerten Schluß ziehen, daß die Beobachtungen als im hohen Maße homogen anzusehen sind.

Nach diesen Feststellungen sind wir in der Lage, die *AR* jeder Gruppe in sich homogen zu machen und alle Gruppen auf ein einheitliches Instrumentalsystem zu reduzieren. Es verbleibt nur noch, dieses an das System des *FC* anzuschließen. Dazu benutzen wir die zahlreich beobachteten Fundamentalsterne. Nach der Deklination geordnet ergibt sich zwischen $\alpha$ (beob.) und $\alpha$ (B. J.) die Differenz:

$$\Delta\alpha_\delta = -\, 0^s.0050 - 0^s.0240 \operatorname{tg}\delta.$$

Also auch hiernach bedürfen die *AR* des *FC* einer negativen Korrektion, deren Größe mit dem oben gefundenen Wert völlig übereinstimmt.

Nach der Helligkeit geordnet ergeben sich Differenzen, die ebenfalls mit anderweitig abgeleiteten Helligkeitsgleichungen des *FC* sich in voller Übereinstimmung befinden. Wir dürfen somit schließen, daß unser Instrumentalsystem bereits fehlerfrei ist.

Nach allen diesen Ergebnissen können wir annehmen, daß die Instrumentalfehler mit großer Schärfe in Rechnung gestellt sind, daß somit für die Beurteilung der Genauigkeit der Beobachtungen zur Hauptsache nur noch die Frage in Betracht kommt, wie weit ist der Beobachter befähigt, bei der Fadenführung strenge Bisektion von Faden und Stern inne zu halten. Bilden wir zu diesem Zwecke zunächst den m. F. eines Kontakts, so ergibt sich

| Größe | Bildbeschaffenheit gut | mäßig |
|---|---|---|
| 1.0 | ± 0ˢ0287 | ± 0ˢ0382 |
| 2.3—3.8 | 333 | 381 |
| 5.0—6.5 | 349 | 403 |
| 8.5—9.0 | 323 | 397 |
| 9.1—9.2 | 415 | 432 |

Die Abhängigkeit von der Bildbeschaffenheit tritt klar hervor. Nach den bisherigen Erfahrungen ist der m. F. bei dem *RM* am kleinsten bei den Sternen der Größe 5—6; nach beiden Seiten steigt er etwas an. Hier ist das nicht der Fall. Der kleinste Wert bei den hellsten Sternen ist ohne Frage eine Folge der Objektivlamellen; durch die Beugungsspektren wird die Führung sehr viel sicherer.

Durch Division mit der Wurzel der Anzahl der beobachteten Kontakte (20 bis 40) wird der m. F. eines Durchgangs rund ± 0ˢ006. Betrachten wir jedoch die Mittelwerte zweier durch eine kurze Pause voneinander getrennter Revolutionen, so zeigen diese weit größere Differenzen, als nach dem obigen m. F. zu erwarten ist. Im Mittel vieler solcher betragen diese bei guter Bildbeschaffenheit 0ˢ027 und bei mäßiger 0ˢ051. Die Ursache ist in der bereits bei der ersten Anwendung des *RM* erkannten Erscheinung zu suchen, daß benachbarte Signale nicht unabhängig voneinander sind; es zeigen sich in der Darstellung Nester von Vorzeichenfolgen von wechselnder Ausdehnung. Wir fragen: Sind diese tatsächlicher Natur, pendelt der Lichtschwerpunkt während des Durchgangs um eine Mittellage hin und her etwa infolge lateraler Refraktionen, oder sind sie rein persönlicher Natur, ist die Fadenführung und Bisektion unvollkommen? Zur Untersuchung wären auch Sterne höherer Deklinationen heranzuziehen. Ich muß mich mit folgenden Feststellungen begnügen, die ich gewonnen habe aus der Verfolgung und Darstellung von Sternen durch das ganze Gesichtsfeld hindurch:

1. Der Beobachter besitzt die Fähigkeit einer nahezu vollkommenen Fadenführung.

2. Diese wird beeinträchtigt durch den jeweiligen Zustand der Bilder, besonders durch die Unruhe.

3. Fehler in der Bisektion sucht er weniger durch ruckweise Bewegung des Fadens als vielmehr allmählich auszugleichen.

4. Daraus folgt, daß allzu rasch aufeinander folgende Kontakte nicht unabhängig voneinander sind. Die aus ihnen abgeleiteten m. F. geben uns kein richtiges Maß für die Genauigkeit. Es ist daher zweckmäßig, mehr Revolutionen zu beobachten und von jeder weniger Kontakte abzulesen. Damit geht allerdings der Vorteil des Zeitgewinns bei dem *RM* wieder verloren.

Der weiteren Vergleichung habe ich den aus den Differenzen der Revolutionsmittel folgenden m. F. zu Grunde gelegt. Dieser ist

| | bei guten Bildern | bei mäßigen Bildern |
|---|---|---|
| für 2 beob. Rev. | $\pm 0\overset{s}{.}012$ | $\pm 0\overset{s}{.}022$ |
| „ 4 „ „ | $\pm 0\overset{s}{.}009$ | $\pm 0\overset{s}{.}016$ |

Diese Werte sollen sich mit den aus den Beobachtungen folgenden identisch erweisen. Diese sind im Mittel

| m. F. | | helle Sterne (4 Rev.) | schwache Sterne (2 Rev.) |
|---|---|---|---|
| einer $AR$ | $\varepsilon =$ | $\pm 0\overset{s}{.}0141$ | $\pm 0\overset{s}{.}0183$ |
| für $x$ | $\varepsilon_x =$ | 21 | 27 |
| „ $\mu$ | $\varepsilon_\mu =$ | 22 | 27 |
| „ $\pi$ | $\varepsilon_\pi =$ | 38 | 48 |

Oben war nach der Bildbeschaffenheit getrennt, was hier nicht möglich ist. Nehmen wir aber an, daß gute Bilder nur etwa an $^1/_3$ aller Tage stattfinden, so folgt aus den obigen Werten

$$\varepsilon = \pm 0^s\!.013 \text{ (helle Sterne)} \qquad \pm 0^s\!.019 \text{ (schwache Sterne)},$$

also volle Übereinstimmung mit oben, woraus zu schließen ist, daß in die Resultate nur die Unsicherheit der Beobachtung eingegangen ist, daß die Instrumentalfehler zum Verschwinden gebracht sind.

Nach Größenklassen zergliedert, ergibt sich

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha$ Bootis | $\varepsilon = \pm 0^s\!.0142$ | $\varepsilon_\pi = \pm 0\overset{''}{.}039$ |
| $\alpha$ Tauri | 230 | 55 |
| 2.0—4.9 | 141 | 37 |
| 5.0—6.5 | 141 | 38 |
| 8.5—9.0 | 180 | 48 |
| 9.1—9.2 | 195 | 53 |

Auf $\alpha$ Tauri komme ich noch zurück. Nach diesen Ergebnissen ist die Durchgangsmethode mit dem *RM* für Parallaxenbestimmungen sehr wohl brauchbar.

Von größerer Bedeutung als die zufälligen sind die systematischen Fehler. Zu ihrer Untersuchung stehen uns hier drei Wege zur Verfügung.

1. Wir vergleichen die aus den Ausgleichungen hervorgehenden Zeitglieder mit den *EB*, wie sie aus Katalogvergleichungen hervorgehen. Ergibt sich zwischen beiden innerhalb noch festzusetzender Grenzen Übereinstimmung, so dürfen wir schließen, daß die Zeitglieder frei von systematischen Fehlern sind. Für die Parallaxen ist freilich dieser Schluß noch nicht unbedingt zulässig, hebt aber bereits ihre Vertrauenswürdigkeit.

2. Zeigen sich in den Resultaten Gesetzmäßigkeiten, die nach anderweitigen Untersuchungen bereits als astronomische Tatsachen angesehen werden können, so ist der Schluß auf Realität berechtigt, allerdings nur in Bezug auf die Gesamtheit, nicht auf jeden Einzelwert.

3. Die Vergleichung mit bereits bestimmten Parallaxen.

Ich rechne zuerst die *EB* durch Vergleichung der vorliegenden *AR* mit denen des bereits 40 Jahre zurückliegenden, von Auwers mit großer Sorgfalt beobachteten und bearbeiteten AGC XI. Diese müssen sich von den Zeitgliedern unterscheiden um die *EB* der Gruppen, ihre Motus par. und Motus pec. Um die erstere zu bestimmen, nehme ich die Apexkoordinaten als bekannt an: $A = 18^h\ 20^m$, $D = +35^\circ$, denn da hier nur eine Komponente der *EB* vorliegt, gehen hieraus diese Koordinaten nur unsicher hervor. Ferner setze ich für die Radialbewegung der Sonne $q = 20$ km. Dann ergibt sich nach dem bekannten Ansatze

$$x + 0.211\, q \cos D \sin(\alpha - A) \cdot \pi = 15\, \Delta\alpha \cos\delta$$

$$x = -0\overset{s}{.}00096 \pm 0\overset{s}{.}00014 \qquad \mathrm{I}$$

$$\pi = +0\overset{''}{.}00902 \pm 0\overset{''}{.}00082$$

Variationen von $A$ und $D$ innerhalb der zulässigen Grenzen ändern die Unbekannten nur um ein geringes. Die Darstellung befriedigt dem Vorzeichenwechsel nach nicht besonders.

Das konstante Glied $x$ kann als eine Korrektion der benutzten Newcombschen Präzessionskonstanten nicht gedeutet werden; sie müßte schon um fast 0ˢ001 verkleinert werden. Ebensowenig läßt es sich als eine Reduktion des vorläufigen *FC*, an den der AGC angeschlossen ist, auf den definitiven auslegen. Zur Aufklärung nehme ich die Ausgleichung noch einmal vor unter Trennung nach Größenklassen und erhalte:

| Größe | Anzahl | $x$ | $\varepsilon x$ | $\pi$ | $\varepsilon\pi$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| bis 5.0 | 35 | + 0ˢ00113 | ± 0ˢ00054 | + 0.″0195 | ± 0.″0036 | |
| 5.1—6.5 | 179 | + 35 | 32 | + 160 | 19 | II |
| 8.5—9.1 | 522 | — 158 | 16 | + 55 | 10 | |

Die Abhängigkeit der Unbekannten von der Helligkeit ist offensichtlich. Deutet man jetzt $x$ als Helligkeitsgleichung und nimmt man die Münchener Beobachtungen als frei von solcher an, so müssen bei dem AGC XI die helleren Sterne um etwa

$0^s.045$ zu früh, die schwachen um $0^s.063$ zu spät beobachtet sein. Auwers gibt folgende Zahlen (A. N. 161):

| | | | |
|---|---|---|---|
| Größe | 5.5 | H. Gl. | $+ 0^s.026$ |
| | 6.5 | | $+$ 18 |
| | 8.5 | | $-$ 55 |
| | 9.0 | | $-$ 64 |

Die Übereinstimmung läßt nichts zu wünschen übrig. Für die mittleren Parallaxen finden auf ganz anderen Wegen

| Gr. | v. Seeliger | Kapteyn | Grossmann (oben) |
|---|---|---|---|
| 4.0 | $+ 0''.0270$ | $+ 0''.0265$ | $+ 0''.0195$ |
| 5.8 | $+$ 146 | $+$ 143 | $+$ 160 |
| 8.8 | $+$ 50 | $+$ 50 | $+$ 55 |

Die Differenz der ersten Kategorie erklärt sich mit der geringen Anzahl von Sternen.

Zum dritten habe ich die $EB$ nach den galaktischen Koordinaten der Sterne geordnet. Die Untersuchung stößt hier, wo nur $EB$ in $AR$ vorliegen, auf eine Schwierigkeit, denn die Kurven der par. Faktoren und der galaktischen Breite verlaufen nahezu parallel, wie ihre Gleichungen sofort zu erkennen geben:

$$\text{par. Faktor} = -\frac{\cos D}{\cos \delta} \cos(\alpha - \Delta A)$$

$$\sin \text{gal. Breite} = \cos i \sin \delta - \sin i \cos \delta \cos(\alpha - 49^m)$$

$$\Delta A = \text{Überschuß der Apex } AR \text{ über } 270^0$$

$$AR \text{ des gal. Pols} = 12^h\ 49^m.$$

Deshalb läßt sich die Abhängigkeit der Parallaxe von der Michstraße hier nicht scharf bestimmen, es sei denn, daß sie sich durch eine über den ganzen Bereich des Systems gültige einfache Interpolationsformel darstellen läßt, m. a. W. daß das Milchstraßensystem ein mathematischer Rotationskörper ist, was aber durchaus unwahrscheinlich ist.

Wir müssen uns deshalb mit Annäherungen begnügen. Quadrantenweise geordnet und für sich ausgeglichen ergibt

| Gruppe | gal. Breite | $x$ | $\pi$ | |
|---|---|---|---|---|
| 1—6 | — 25° | $-0\overset{s}{.}00040$ | $+0\overset{''}{.}0085$ | |
| 7—12 | + 35 | — 75 | + 102 | |
| (13—15 | + 76 | — | + 133) | III |
| 13—20 | + 53 | — 5 | + 150 | |
| 21—26 | — 22 | — 68 | + 28 | |

Der dritte eingeklammerte Wert ist einfach der Quotient $\mu_a$ : par. Faktor. Die Darstellung ist auffallend gut. Der Versuch, die $\pi$ durch eine einfache trig. Funktion darzustellen, führte zu keinem befriedigenden Ziel. Die Abhängigkeit der mittl. Parallaxe von der gal. Breite kommt deutlich zum Ausdruck. Das Mittel aus dem ersten und letzten Wert von $\pi$ verhält sich zum dritten wie 1 : 2,3. v. Seeliger findet für die Sterne der Größe 8.5

$$\pi\,(\text{Pol}) : \pi\,(\text{Milchstraße}) = 2.34.$$

Ist diese auffallende Übereinstimmung nicht zufällig und damit das obige Ergebnis reell, so gibt es zu einer bemerkenswerten Folgerung Anlaß: Das vorliegende Material umfaßt noch nicht 8 % der Sterne bis zur Größe 9.0 einer schmalen nur 5° breiten Zone. Und doch spiegelt es das gleiche typische Bild wieder, wie es Herr v. Seeliger aus einem viel umfassenderen Material auf ganz anderem Wege gewonnen hat. Das muß überraschen! Denn es müßte doch bei Voraussetzung gleicher Dichtigkeit und gleicher Verteilung der Leuchtkräfte als ein höchst merkwürdiger Zufall angesehen werden, wenn bei der Auswahl unserer Sterne in ihrer großen Mehrzahl nur solche getroffen worden wären, die die galaktische Abhängigkeit so offenkundig darstellen. Hingegen wird das Ergebnis leichter erklärlich, wenn die genannten Voraussetzungen nicht zutreffen, d. h. wenn Verteilung und Dichtigkeit Funktionen der Parallaxe sind, wie es in einem System nicht homogener Struktur der Fall sein würde.

Ich bilde jetzt die Differenzen: Katalog $EB$ — beob. $EB$, $\mu_a - \mu_a'$ und ziehe hiervon die Motus par. nach System I ab, da es sich ja nur um mittlere Par. handelt. Dann verbleiben die Mot. pec. der Gruppen. Diese sind wie zu erwarten war, nur klein; sie zeigen keinerlei Gesetzmäßigkeit in ihrer Anordnung nach der *AR*. Bringt man auch diese an, so sollen nur noch zufällige Fehler verbleiben. Bei der großen Mehrzahl der Sterne ist dieses offenbar der Fall, bei vielen sind die Reste auffallend groß. Zum Teil ist dieses ohne Frage auf eine Unsicherheit der AGC Position oder der beobachteten *EB*, hier besonders bei lichtschwachen Sternen, zurückzuführen; zum Teil sind sicherlich auch dritte, nämlich Schwerpunktbewegungen nicht ausgeschlossen. Nach Ausweis der bekannten Doppelsternkataloge enthält unser Programm 62 visuelle und 16 spektroskopische, bereits bekannte Doppelsterne, also mehr als 10°/o. Trifft diese Erklärung zu, so steht zu erwarten, daß sie sich auch mehr oder weniger in der Darstellung der Bedingungsgleichungen zu erkennen gibt. In der Tat ist diese bei einer großen Anzahl von Sternen keineswegs befriedigend; epochenweise treten Vorzeichenfolgen auf, aber immer nur bei einzelnen Sternen, ohne jegliche Gesetzmäßigkeit. Es erscheint hiernach ausgeschlossen, daß in dem Zeitgliede noch eine Änderung der persönlichen Auffassung enthalten ist.

Schließe ich jetzt alle verdächtigen Sterne aus, d. h. jene, bei denen die obige Differenz größer als $\pm\,0^s\!.0055$ ist, und bilde aus den übrigen den m. F., so ergibt sich dieser zu $\pm\,0^s\!.0025$. Setzen wir den m. F. einer AGC Position nach Auwers zu $\pm\,0^s\!.036$, den m. F. einer *AR* unseres Katalogs nach oben zu $\pm\,0^s\!.0024$, so folgt der m. F. von $\mu_\alpha$ zu $\pm\,0^s\!.0009$, also von $\mu'_\alpha$ zu $\pm\,0^s\!.0023$. Aus der Ausgleichung ergab sich für die hellen Sterne der m. F. von $y$ zu $\pm\,0^s\!.0022$, für die schwachen zu $\pm\,0^s\!.0027$. Wir können also schließen: Das Zeitglied $y$ der Ausgleichung ist im allgemeinen identisch mit der *EB*.

Trennt man nach der Helligkeit, so beträgt im Mittel das Restglied $v$ für die hellen Sterne $+\,0^s\!.0005$ und für die schwachen $-\,0^s\!.0003$, Größen, die als unmerklich bezeichnet werden können.

Des weiteren habe ich die Häufigkeitskurve der beob. $EB$ gebildet; es zeigt sich naturgemäß eine Symmetriekurve. Rechnet man den dieser entsprechenden m. F., so ergibt sich $\pm 0^s\!.0047$, während die Beobachtungen selbst ergaben $\pm 0^s\!.0022$ für die hellen Sterne und $\pm 0^s\!.0027$ für die schwachen. Das Zeitglied kann also nicht als lediglich zufälliger Fehler angesehen werden.

Prüft man die Verteilung der verdächtigen Sterne mit großen Restgliedern $v$ noch etwas näher, so finden sich hierfür 30 helle und 96 schwache Sterne; das sind 13 und 18 % der Gesamtheit. Ein merkliches Vorwiegen einer Kategorie besteht also nicht. In 61 Fällen ist $v$ positiv, in 65 negativ. Auffallenderweise aber häufen sich diese Sterne in den $AR$ Stunden 4—$7^h$ und 14—$21^h$. In die Stunde $4^h$ aber fallen die Hyaden, in 5—$7^1/_2$ und 18—$21^h$ fällt die Milchstraße; in diesen Gegenden aber häufen sich bekanntlich die Doppelsterne.

Wenden wir uns jetzt zu den Parallaxen, so dürfte für diese zunächst der Analogieschluß zulässig sein: Sind die beobachteten Zeitglieder reell, so darf man bis zu einem gewissen Grade auch die Parallaxen als reell ansehen, es sei denn, daß zwischen Abend- und Morgenbeobachtungen systematische Auffassungsunterschiede aber nur differentieller Natur bestehen. Solche anzunehmen, liegen jedoch keinerlei Anhaltspunkte vor.

Ich konstruiere zunächst die Häufigkeitskurve für alle Sterne ($n$) und unter Ausschluß der verdächtigen ($n_1$). Als solche sind hier gemeint alle bekannten Doppelsterne, die Sterne mit großen Restgliedern $v$ und die Sterne, deren Darstellung auffallende epochenweise Vorzeichenfolgen aufweisen. Es ergibt sich:

| $\pi$ | | $n$ | $n_1$ | $\pi$ | | $n$ | $n_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| > | +0″150 | 21 | 9 | 0″000 bis | —0″049 | 191 | 136 |
| +0″149 bis | +0.100 | 70 | 43 | —0.050 „ | —0.099 | 85 | 57 |
| +0.099 | +0.050 | 135 | 99 | —0.100 | —0.149 | 27 | 12 |
| +0.049 | 0.000 | 218 | 172 | > | —0.150 | 8 | 1 |

Eine Symmetriekurve ist angedeutet, aber der negative Ast fällt steiler ab als der positive, besonders unter den $n_1$. Der Häufigkeitskurve entspricht ein m. F. von ± 0".072, aus der Ausgleichung ergab sich ± 0".038 für die hellen Sterne und ± 0".048 für die schwachen.

Nach $EB$ geordnet ergibt sich:

| $EB$ | $n$ | $\pi$ | $n_1$ | $\pi_1$ |
|---|---|---|---|---|
| > 0$^s$.0100 | 24 | + 0".0596 | 10 | + 0".0656 |
| 0.0099 — 0.0067 | 42 | + 162 | 30 | + 0.0246 |
| 0.0066 — 0.0034 | 123 | + 232 | 76 | + 233 |
| 0.0033 — 0.0000 | 522 | + 240 | 376 | + 217 |

Das Überwiegen großer Par. bei großen $EB$ tritt deutlich hervor; in den 3 letzten Kategorien zeigt sich dieser Zusammenhang nicht. Günstiger gestaltet sich die Sache nach Ausschluß der verdächtigen Sterne unter $\pi_1$. Ich bemerke, daß hier nur $EB$ in $AR$ vorliegen. Da für 259 helle Sterne die vollständigen $EB$ von Auwers bestimmt sind, so habe ich noch nach diesen geordnet, jetzt auch unter Ausschluß der großen negativen Parallaxen, die ohne Frage nicht als reell angesehen werden können. Es ergibt sich:

| $EB$ | $n_2$ | $\pi_2$ | $(\pi)$ |
|---|---|---|---|
| > 0".200 | 10 | + 0".0732 | + 0".0928 |
| 0.199—0.150 | 4 | + 540 | + 406 |
| 149 100 | 24 | + 283 | + 290 |
| 99 50 | 43 | + 238 | + 174 |
| 49 0 | 56 | + 32 | + 29 |

Jetzt zeigt sich ausgesprochene Gesetzmäßigkeit: Einer Änderung der $EB$ um 0".050 entspricht eine solche in Par. um 0".0116. Die Darstellung ist unter $(\pi)$ gegeben. In der ersten Kategorie, die stärker herausfällt, befinden sich einige Sterne mit starker $EB$ und einer dieser nicht entsprechenden kleinen Par. (z. B. $\alpha$ Bootis). Die $\pi_2$ sind relative Par., die $(\pi)$ aber sind als absolute anzusehen, da sie sich auf die unendlich ferne Ebene beziehen, in der jede $EB$ verschwindet.

Setzt man die Anzahl der Sterne als Gewichte an, so ergibt sich im Mittel für die benutzten Sterne — bis zur Größe 6.5 — eine mittlere absolute Par. von $(\pi)_m = + 0\farcs020$. Aus der Sonnenbewegung ergab sich (System II) $+ 0\farcs017$. Dem Mittelwerte $(\pi)_m$ entspricht eine $EB$ von $(\mu)_m = 0\farcs090$. Nehmen wir an, daß aus diesem Wert die Mot. pec. eliminiert sind, so folgt für die mittl. Par. $+ 0\farcs017$ eine Motus par. von $+ 0\farcs070$. Die Übereinstimmung muß befriedigen.

Wir ordnen jetzt nach der Helligkeit:

| | $n$ | $\pi$ | $n_1$ | $\pi_1$ | Kapteyn |
|---|---|---|---|---|---|
| bis 4.0 | 17 | $+ 0\farcs0544$ | 6 | $+ 0\farcs0508$ | $+ 0\farcs0312$ |
| 4.1—5.0 | 22 | + 255 | 8 | + 229 | + 214 |
| 5.1—6.0 | 87 | + 164 | 43 | + 149 | + 161 |
| 6.1—7.0 | 95 | + 48 | 74 | + 48 | + 122 |
| 8—9.2 | 486 | + 285 | 360 | + 239 | + 63 |

Die Par. der schwachen Sterne fallen stark heraus. Ein Gleiches zeigt sich auch bei den 163 Yale Parallaxen und ebenfalls weichen die von Campbell und Plummer abgeleiteten hyp. Par. von der Kapteynschen Formel ab (Lick Obs. Bull. VII, pag. 36). Es darf hier natürlich nicht vergessen werden, daß die Größenklasse im Mittel einer relativ geringen Anzahl von Sternen kein zuverlässiger Maßstab für die Parallaxen sein kann. Andererseits darf auch wohl die Kapteynsche Formel nicht als endgültig angesehen werden.

Schließlich untersuchen wir noch die Abhängigkeit der Parallaxe vom Spektraltypus. Nach der Potsdamer Spectr. D. M. sind bis zur Größe 7.5 enthalten in

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Klasse | Ia | 122 Sterne, | davon | 29 | mit $\pi > 0\farcs050$, | 23.8 % |
| „ | IIa | 74 „ , | „ | 21 | „ — , | 28.4 „ |
| „ | IIIa | 23 „ , | „ | 4 | „ — , | 17.4 „ |

Im Mittel ergibt sich

| | alle Sterne | nach Auswahl | Ausschluss der grossen negativen $\pi$ |
|---|---|---|---|
| Ia | $+ 0\farcs0151$ | $+ 0\farcs0073$ | $+ 0\farcs0119$ |
| IIa | + 0.0211 | + 0.0175 | + 0.0226 |
| IIIa | + 0.0034 | + 0.0079 | + 0.0023 |

Es bestätigt sich also hier das wiederholt gefundene Resultat, daß die Sterne des Typus IIa bei gleicher Gesamthelligkeit uns am nächsten sind.

In unserem Programm sind leider nur wenige Sterne vorhanden, deren Parallaxen bereits von anderer Seite bestimmt sind. Unter den Yale-Parallaxen kommen folgende 8 vor:

| AGC Nr. | Yale | München | AGC Nr. | Yale | München |
|---|---|---|---|---|---|
| 490 | + 0ʺ12 | + 0ʺ116 | 5012 | + 0ʺ03 | + 0ʺ076 ($\tau$ Bootis) |
| 1233 | + 0.109 | + 0.097 ($\alpha$ Tauri) | 5168 | + 0.066 | + 0.198 ($\alpha$ „ ) |
| 1399 | + 0.01 | + 0.093 | 5702 | + 0.09 | + 0.091 ($\gamma$ Serp.) |
| 4528 | + 0.12 | − 0.020 ($\beta$ Leon) | 7897 | + 0.16 | + 0.086 (15 Sag.) |

3 Sterne zeigen vollständige Übereinstimmung, 3 allenfalls noch innerhalb ihrer m. F. und 2 weichen stark voneinander ab, hierunter auch $\alpha$ Bootis.

Die Parallaxe der Hyaden ist von Kapteyn und de Sitter nach der Methode des latenten Bildes durch Ausmessung von Aufnahmen in Helsingfors und Bonn bestimmt. Gemeinsam sind mit den unsrigen 17 und 9 Sterne, davon haben 13 und 6 gute Übereinstimmung, 4 und 3 ungenügende.

Ich führe von ihnen nur $\alpha$ Tauri an:

$$\begin{array}{ll} \pi\ \text{(Helsingfors)} & +\ 0''079 \\ \quad\text{(Bonn)} & -\ 0.005 \\ \quad\text{(München)} & +\ 0.097 \end{array}$$

Das Gewicht ist bei den beiden ersten nur sehr gering.

Unter der Annahme, daß die Sterne vom $A$ Typus sich in Ebenen parallel zur Milchstraße bewegen, bestimmt Plummer (Lick Obs. Bull. VII) aus $EB$ und Radialgeschwindigkeit ihre Parallaxen. In unsrer Liste sind 7 dieser Sterne enthalten, bei 4 findet Übereinstimmung statt. Für $\beta$ Leonis findet Plummer + 0ʺ394 (Yale und München siehe oben); der Wert ist ohne Frage viel zu groß.

Außerdem liegen vor

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ Tauri | A. Hall | + 0."102 | $\alpha$ Bootis | Flint | + 0."07 |
| | Flint | + 0.02 | | Yale | + 0.066 |
| | Yale | + 0.109 | | München | + 0.198 |
| | Kapteyn | — 0.005 | $\gamma$ Serp | Flint | + 0.05 |
| | Jewdokimow | + 0.04 | | Yale | + 0.09 |
| | München | + 0.097 | | München | + 0.091 |
| 42 Comae | Slocum | + 0.058 | 15 Sagittae | Jost | + 0.076 |
| | München | — 0.011 | | Yale | + 0.16 |
| | | | | München | + 0.086 |

Es ist schwierig, aus solchen Zusammenstellungen weitere Schlüsse zu ziehen und Entscheidungen zu treffen, ob größere Differenzen zufälliger Natur sind, ob in dem einen oder anderen Falle systematische Fehler vorhanden sind oder ob sie reell sind, d. h. ob noch dritte Bewegungen die Werte beeinflussen. $\alpha$ Tauri ist ein vierfacher Stern, jedoch ohne merkliche Bewegungen der Komponenten. In unserem Falle ist die Darstellung nicht befriedigend; er ist in 7 Epochen 44 mal beobachtet, davon treten in 4 Epochen auffallende Vorzeichenfolgen auf. Das Restglied $v$ ist $= + 0^s\!.0057$, liegt also an der Grenze der zufälligen Fehler.

Ebenso ist 42 Comae Doppelstern mit einer Umlaufszeit von 25 Jahren. Eine Fälschung der Parallaxe ist somit nicht ausgeschlossen.

Auffallen muß der große Unterschied der Parallaxen von $\alpha$ Bootis. Der Yale Wert ist sehr sorgfältig bestimmt und verdient großes Vertrauen. In unserem Falle läßt die Darstellung nichts zu wünschen übrig; der m. F. beträgt $\pm 0\overset{''}{.}039$. Zwischen Katalog $EB$ und beobachteter findet volle Übereinstimmung statt. Helligkeit, Farbe und $EB$ des Sterns sprechen offenbar für eine große Parallaxe. Rechnet man mit $\mu = 2\overset{''}{.}285$ und Rad. geschw. = 4.7 km die Gesamtbewegung, so folgt mit der Münchener Par. 54 km, mit der Yale Par. aber 164 km, ein Betrag, wie ihn nach unseren jetzigen Kenntnissen kein anderer heller Stern erreicht. Die Sterngröße auf $\pi = 1''$

reduziert, ist in dem einen Falle — 3.2, in dem anderen — 5.6. Je größer dieser Wert ist, um so weniger ist er bekanntlich mit der roten Farbe dieses Sterns zu vereinigen.

Weitere Einzelresultate zu besprechen, würde hier zu weit gehen. Ich beschränke mich deshalb nur noch auf einen Stern, der besonders auffällt, den Doppelstern 24 Com. Ber. Für diesen ergibt sich

| | Nr. | Gr. | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 4705 | 7.6 | $\pi = +0''.321 \pm 0''.057$ | $\mu = -0''.0004$ | $v = +0^s.0100$ |
| A | 4706 | 5.1 | $= +0.098 \pm 0.048$ | $-\quad 7$ | $+\quad 10$ |

Die Parallaxen können nicht als reell betrachtet werden; die Darstellung ist durchaus unbefriedigend. B ist in 6 Fpochen, A in 7 beobachtet mit je 35 und 40 Beob. Fast in allen Epochen treten in der Darstellung Vorzeichenfolgen auf. Ich habe die Ausgleichung unter Einführung eines quadratischen Zeitgliedes wiederholt, ohne jedoch ein besseres Resultat zu erzielen. Auwers hat den Doppelstern in 8 Zonen an durchweg je 10 Fäden beobachtet; die *AR* Differenz beträgt bei ihm $1^s.495$, bei mir dagegen nur $1^s.410$. Bewegungen der Komponenten zueinander sind bislang nicht festgestellt.

Fasse ich zum Schluß die Resultate kurz zusammen, so lauten sie

I. Das Registriermikrometer mit Handbetrieb hat sich hier vollkommen bewährt; systematische Fehler haben sich bis auf verschwindende Reste nicht ergeben. Will man die größte Genauigkeit erzielen, so empfiehlt es sich, eine größere Anzahl von Revolutionen zu beobachten und von jeder nur wenige Kontakte abzulesen.

II. Das Material in seiner Gesamtheit kann als sehr homogen bezeichnet werden.

1. Die in der üblichen Weise bestimmten Aufstellungsfehler decken sich ihrer Größe und Veränderlichkeit nach vollständig mit Schwankungen, wie sie die Beobachtungen selbst zu erkennen geben.

2. Der bereits aus anderen Beobachtungsreihen abgeleitete Orientierungsfehler des *FC* Auwers von der Form $\Delta n$ tg $\delta$ findet sich auch hier sowohl bei den Polsternen wie bei den Südsternen bestätigt.

3. Desgleichen die H. Gl. des *FC* Auwers.

III. Die Ergebnisse in ihrer Gesamtheit sind als reell anzusehen.

1. Die aus den Katalog *EB* (München 1910 — AGC XI 1875) abgeleiteten mittleren Parallaxen geben sowohl allgemein wie auch nach Helligkeiten und galaktischen Breiten der Sterne geordnet, das gleiche typische Bild, wie es besonders Herr v. Seeliger aus seinen Untersuchungen über die räumliche Verteilung der Fixsterne gewonnen hat.

2. Die beobachteten *EB* sind identisch mit den Katalog *EB*, vermindert um die Mot. par. der Gruppen.

3. In der Anordnung der *EB* und Parallaxen nach ihrer Größe zeigen sich zwar Symmetriekurven, die sich jedoch mit den Fehlerkurven nicht decken.

4. Zwischen *EB* und Parallaxe bestehen Gesetzmäßigkeiten, wie sie bereits anderweitig festgestellt sind.

5. Als mittlere absolute Parallaxe der Sterne bis zur Größe 6.5 ergibt sich $(\pi)_m = +0\overset{''}{.}020$, aus der Sonnenbewegung $+0\overset{''}{.}017$.

6. Dem Werte $(\pi)_m$ entspricht eine mittlere *EB* von $(\mu)_m = 0\overset{''}{.}090$, während sich aus der Sonnenbewegung eine solche von $0\overset{''}{.}070$ findet.

7. Die Beziehung zum Spektraltypus bringt deutlich zum Ausdruck, daß die Sterne des II. Typus uns am nächsten sind.

8. In der Anordnung nach der Helligkeit zeigt sich bei den schwächeren Sternen keine Gesetzmäßigkeit, nur bei den hellsten.

IV. Die Resultate im Einzelnen können nicht sämtlich als reell angegeben werden; eine Entscheidung ist in jedem einzelnen Falle nicht möglich. Jedoch lassen teils völlig ungenügende Darstellungen, teils Differenzen zwischen Katalog *EB* und beobachteten auf noch vorhandene systematische Fehler schließen.

V. An Parallaxenbestimmungen sind künftig folgende Anforderungen zu stellen:

1. Die Anzahl der Epochen ist möglichst über die Mindestzahl auszudehnen.

2. Die Anzahl der Vergleichssterne ist zu erhöhen.

3. Die Resultate sind soweit wie möglich einer Prüfung zu unterwerfen, besonders durch Vergleichung der Zeitglieder mit den Katalog *EB*.

4. Massenbestimmungen von Parallaxen sind dringend erwünscht. Der Meridiankreis mit Registriermikrometer kann zu diesem Zwecke wertvolle Dienste leisten.

# Die antike Apokatastasis auf ihre astronomischen und geophysischen Grundlagen geprüft.

Von **Siegmund Günther.**

Vorgelegt in der Sitzung am 3. Juni 1916.

## § I. Die Begriffsbestimmung.

Das griechische Wort, dessen naturwissenschaftliche Deutung uns hier beschäftigen soll, würde ursprünglich soviel als Wiederherstellung bedeuten — Wiederherstellung nämlich eines Zustandes, wie er vor einer bestimmten Zeit obgewaltet hat. An und für sich hat der Begriff also mit den Verhältnissen der Erdoberfläche nichts zu tun, aber es scheint, daß er wesentlich nur in dem Sinne Anwendung fand, der sich auf einen regelmäßigen Wechsel in der Verteilung des festen und flüssigen Elementes auf der Erde zu beziehen hat. Auf diese Bedeutung der „*ἀποκατάστασις*“ scheint zuerst v. Lasaulx in einer viel zu wenig gewürdigten, noch immer höchst lesenswerten Münchener Akademierede[1]) mit Nachdruck hingewiesen zu haben. Leider geben uns die Quellen über die Art der Vorstellungen, welche sich die einzelnen Schriftsteller über das Wesen der restitutio in integrum machen, nur ganz aphoristische und unbestimmte Andeutungen. Doch kann man im allgemeinen sagen, daß die neuere Katastrophen-

[1]) E. v. Lasaulx, Die Geologie der Griechen und Römer, ein Beitrag zur Philosophie der Geschichte, München 1851.

lehre, wie sie am schroffsten Cuvier ausgesprochen[1]) und die aktualistische Auffassung der Lyellschen Schule[2]) vielleicht wieder allzu schroff abgelehnt hat, völlig, wenngleich vielfach halb unbewußt, in jenen älteren Gedankenkreisen wurzelt.

In ein einigermaßen helleres Licht treten diese erst bei den Griechen. Wenn der Kirchenvater Origenes, der sich in einem Bruchstücke seiner „Hexapla", überliefert durch Eusebius, mit diesen Fragen befaßt hat, ihre Entstehung auf die Lehren der Chaldäer, Inder und persischen Feueranbeter zurückführt, ja sogar deren Übertragung nach Europa durch die „sibyllinischen Bücher" geschehen läßt[3]), so sind das natürlich nur Phantasmen, in denen vielleicht ein Korn Wahrheit verborgen ist, die jedoch einer ernsten Nachprüfung nicht standhalten können. Die jonischen Naturphilosophen dagegen haben, mögen auch die uns über ihre Hypothesen berichtenden Nachrichten noch so schwankend und unzuverlässig erscheinen, doch zweifellos sehr viel über die Veränderung der Erde in gesetzmäßigen Zeiträumen nachgedacht. Auf diesen letzten Zusatz ist besonderes Gewicht zu legen. Wie in späteren Jahrhunderten, so stehen sich auch hier von Anfang an plutonistische und neptunistische Vermutungen gegenüber, aber die ersteren, die in der Annahme einer „ἐκπύρωσις", einer

---

1) Den theologisch-naturwissenschaftlichen „Konkordisten" des XVIII. Jahrhunderts schließen sich später an die Naturforscher Sullivan, Deluc, Cuvier (Discours sur les révolutions du Globe, Paris 1812, 1821), deren letzter den extremsten „Katastrophismus" vertritt (Zöckler, Geschichte der Beziehungen zwischen Theologie und Naturwissenschaft, 2. Abteilung, Gütersloh 1879, S. 501 ff.; Noeggerath, Cuviers Ansichten von der Urwelt, Bonn 1822).

2) Vgl. hiezu die das Wesen der neuen Anschauungen in ihrer Ausbildung schildernde Darstellung Penck s (Sir Charles Lyells Leben, Ausland, 55. Band, S. 629 ff.).

3) Origenis e tomo III commentariorum in Genesim fragmentum ad cap. I, v. 14. Opera omnia, ed. J. P. Migne, 2. Band (12. Band der „Patrologia Graeca"). Daß Origenes, der ja auch sonst keinen strenge orthodoxen Standpunkt behauptet, sogar eine Vielheit der Weltschöpfungen, nicht etwa bloß der Erdumwälzungen lehrt, bezeugt Zöckler (a. a. O., 1. Abteilung, S. 162).

radikalen Vernichtung durch Feuer, gipfeln, konnten schon deshalb keine größere Rolle spielen, weil es schwer hielt, dem Zerstörungsfaktor nun auch wieder die Fähigkeit des Aufbauens, des Neugestaltens zuzuschreiben. Daß Heraclit[1]) ein Anwalt des Feuers war, ist leicht zu verstehen, wogegen die in der polemisch-apologetischen Literatur, z. B. bei Celsus und seinem Gegner Minucius Felix, auftretende angebliche Lehre des Pythagoras, Weltverbrennungen und Weltzerstörungen müßten in regelmäßigem Wechsel wiederkehren, sobald die Gestirne „ihre ursprüngliche Ordnung" wieder erreicht hätten, wohl auch nur heraclitische Ideen einem anderen zuteilt. Wahrscheinlich auf „den dunklen Philosophen" geht auch die astronomische Einkleidung dieser Katastrophenhypothese selbst zurück, die man bei verschiedenen späteren Autoren — bei Censorinus, Galenus, Pseudo-Plutarch, Stobäus u. a. — vorfindet. Dort ist die Rede von einem Weltjahre, dem eine nicht genau festzustellende Dauer von 10800 oder von 18000 gewöhnlichen Sonnenjahren beigelegt wird[2]). Die stoische Schule, hauptsächlich vertreten durch Cleanthes und Chrysippus[3]), brachte ebenfalls die „*εἱμαρμένοι χρόνοι*" mit der Weltverbrennung in Zusammenhang, und diese solle stets dann eintreten, „wenn dieselben Himmelszeichen" von den Planeten erreicht seien. Dies ist natürlich eine ganz vage Äußerung, die zweifellos auf Mißverstehen dessen, was eigentlich gemeint war, beruht haben wird. Jeder dachte sich unter

---

[1]) Er half sich aus der Verlegenheit durch die ihm eigene Doktrin einer Verwandlungsfähigkeit der Urstoffe, indem er Feuer in Wasser und Erde und umgekehrt übergehen ließ (E. Zeller, Die Philosophie der Griechen, 1. Band, 4. Auflage, Tübingen 1894, S. 626 ff.).

[2]) v. Lasaulx, a. a. O., S. 22 ff.

[3]) Ihnen wird in den uns hier angehenden Beziehungen zumal gerecht O. Gilbert (Die meteorologischen Theorien des griechischen Altertums, Leipzig 1907, S. 235): „Findet im Laufe großer Weltperioden eine Auflösung des Kosmos in der ‚*ἐκπύρωσις*' statt, so bleibt der Stoff als solcher doch erhalten. . ." Dazu: v. Arnim, Stoicorum veterum fragmenta, II (Chrysippi fragmenta logica et physica), Leipzig 1903.

dem „annus mundanus“ etwas anderes[1]) und suchte eine namhafte Autorität für seine Behauptung anzuführen[2]). Irgend einen wissenschaftlich greifbaren Sinn mit der Verbrennungsperiode zu verbinden, scheint unmöglich; anders ist es mit jener Periode bestellt, die sich an eine allgemein-tellurische Wasserwirkung hält. Diese ist es deshalb auch allein, die als „ἀποκατάστασις“ im richtigen Sinne zu gelten hat und für die folgenden Erörterungen maßgebend sein soll. Damit stellt sich demzufolge unser Problem in bestimmterer Weise so, wie wir es jetzt formulieren. Die Antike, und ihr folgend auch das Mittelalter, rechnete mit einer Säkularperiode, nach deren Ablauf eine neue Erde durch Einfluß gigantischer Überflutungen sich bilden sollte, und so drängt sich die Doppelfrage auf: Wie hat man sich eine derartige Periodizität und wie hat man sich Ursache und Wesen der Gewässerzunahme gedacht.

## § 2. Die Apokatastasis in ihrer Abhängigkeit vom Sternenhimmel.

Auf den ersten Teil Antwort zu geben ist uns erheblich erleichtert worden durch eine Schrift P. Duhems[3]), des gelehrten Geschichtschreibers der Physik. Dieselbe bekundet alle die wohlbekannten Vorzüge der Arbeitsmethode ihres Verfassers, freilich auch die übliche geringe Rücksichtnahme auf das, was in deutscher Sprache darüber vorliegt und gewiß nicht wenig ist. Die Möglichkeit, daß schon in vorhellenischer

---

[1]) Nach v. Lasaulx (a. a. O., S. 39 ff.) beläuft sich das Weltenjahr bei Aristarchus auf 2484, bei Aretes aus Dyrrhachium auf 5532, bei Dio von Neapolis auf 10884, bei Cicero (nach dem Zeugnis des Tacitus) auf 12954, bei Macrobius auf 15000, bei Cassander von Salamis auf 2600000 und bei dem Byzantiner Nicetas Chioniates auf 17503200 gewöhnliche Jahre.

[2]) So ist auch für Ovid (Metamorph., XV, V. 252 ff.), der übrigens nur Erde und Meer ihre Plätze tauschen läßt, Pythagoras der sich sozusagen von selbst verstehende Kronzeuge.

[3]) P. Duhem, La précession des équinoxes selon les Astronomes Grecs et Arabes, Loewen 1912 (Extrait de la „Revue des Questions scientifiques“, Januar-April-Juli 1912).

Zeit der Rückgang der Äquinoktialpunkte bekannt gewesen sei[1]), wird mit Recht nur gestreift, weil irgendwelche sichere Anhaltspunkte nach dieser Richtung hin nicht gegeben sind. Wir können als zuverlässig nur gelten lassen, daß Hipparch, mit dessen Leistungen uns Ptolemäus einwandfrei bekannt gemacht hat[2]), die Präzession zuerst qualitativ und quantitativ feststellte, damit den Unterschied zwischen tropischem und siderischem Jahre ermittelte[3]) und die bis dahin in der Luft schwebende Existenz einer kosmischen Periode rechtfertigte. Die beiden großen hellenischen Astronomen waren von der Gleichförmigkeit der Präzessionsbewegung überzeugt, und wenn man deren Betrag mit Tannery für 100[a] gleich 1° 23′ 20″ setzt[4]), so ergibt sich, daß nach 25920 Jahren

---

[1]) Die Ägypter könnten, meinte L. Ideler (Historische Untersuchungen über die astronomischen Beobachtungen der Alten, Berlin 1806, S. 91), recht wohl in dieser Lage gewesen sein. Neuerdings hat man mehr an die Kulturvölker der mesopotamischen Ebene gedacht. So hat auf Grund der ertragreichen Hilprechtschen Grabungen F. Hommel (Beilage zur Allgem. Zeitung, 1907, Nr. 69) die Ansicht ausgesprochen, daß den Babyloniern die Tatsache der konstanten Längenveränderung der Fixsterne nicht unbekannt gewesen sein könne. Unmöglich ist das gewiß nicht, allein überzeugende Beweise stehen doch noch aus. Daß die in Indien allerdings nachweisbaren Kenntnisse tatsächlich aus griechischen Quellen geschöpft waren, ist von Henri Martin (Mémoire sur cette question: La précession des équinoxes-a-t-elle été connue des Égyptiens ou de quelque autre peuple avant Hipparche?, Paris 1869) dargetan worden.

[2]) Vgl. des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie, 2. Band, aus dem Griechischen übersetzt und mit erklärenden Anmerkungen versehen von K. Manitius, Leipzig 1913. Das 2. Kapitel des 7. Buches bringt den „Nachweis, daß die Fixsternsphäre eine in der Richtung der Ekliptikzeichen vor sich gehende Bewegung hat".

[3]) Die Einführung einer dritten Definition des zuvor ohne solche allseitig hingenommenen Wortes „Jahr" vollzog sich (Duhem, a. a. O., S. 14 ff.) bei Theo Smyrnäus, der auf den Zeitabschnitt des anomalistischen Jahres aufmerksam machte und diesen dann freilich wieder ungeheuerlich überschätzte; sehr im Gegensatze zu Ptolemäus, in dessen „Almagest" Peri- und Apogäum als stabil angenommen werden.

[4]) P. Tannery, Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne, Mém. de la soc. des sciences phys. et natur. de Bordeaux, (4) 1. Band, S. 265.

jeder der beiden Knoten wieder an seinem anfangs eingenommenen Platze angekommen ist. Diese Periode von rund 26000 Jahren ist die einzige, welcher auch nach den Begriffen jener Zeit die Konstanz zuerkannt werden konnte; es ist für sie der allerdings recht wenig zutreffende Name des großen Platonischen Jahres geprägt worden, und wenn man überhaupt an die Möglichkeit glaubte, daß gewisse tellurische Ereignisse an einen festen astronomischen Zeitraum gebunden seien, so konnte von vornherein mit einigem Rechte nur dieser ernsthaft in Betracht gezogen werden.

Daß Plato selber von einer numerischen Festlegung des von ihm aus ganz anderen Beweggründen in seine Erwägungen hereingezogenen „Jahres" nichts wußte, erhellt schon aus der Tatsache, daß er zweihundert Jahre vor Hipparch gelebt und sich mit praktischer Astronomie gar nicht beschäftigt hat. Ein gewisser Hang zur Zahlenmystik war ihm ja eigen, ebenso wie seinem jüngeren Zeitgenossen, dem die Verbindung zwischen der Pythagoreischen und Platonischen Schule herstellenden Archytas[1]). Die in der „Republik" genannte „Platonische Zahl", über deren wahren Charakter die Meinungen weit auseinander gehen, deckt sich jedenfalls nicht mit derjenigen des „Timäus", die eben den Anstoß zu der als ungeeignet bezeichneten Namenwahl gegeben hat[2]). Eine exakte Bestimmung verbot sich ja an sich, wenn man mit Archytas, dessen Denkart uns Proclus am treusten aufbehalten hat, mehr metaphysisch als physikalisch ganz allgemein von einem „διά-

---

[1]) Was wir von ihm und seiner Geistesarbeit wissen, suchten klarzustellen G. Hartenstein (De Archytae Tarentini fragmentis philosophicis, Leipzig 1833) und O. Gruppe (Über die Fragmente des Archytas, Berlin 1840).

[2]) Es sei verwiesen auf eine Bearbeitung des Dialoges, die von einem eifrigen Anhänger jener naturphilosophischen Richtung herrührt, wie sie vor einem Jahrhundert in Deutschland, nicht gerade zum Nutzen der Sache, fast allein herrschend war (K. J. Windischmann, Platons Timäos, eine echte Urkunde wahrer Physik, aus dem Griechischen übersetzt und erläutert, Hadamar 1804). Der Übersetzer steht bei der fraglichen Stelle (S. 31 ff.) offenbar ganz im Banne der Platonischen Ideenwelt.

*στημα τῆς τοῦ παντὸς φύσεως*“ spricht[1]). Auch ist bei diesem Neuplatoniker nicht der Abschluß einer Präzessionswanderung maßgebend, sondern ein Zeitabschnitt (s. o.), der vorüber ist, wenn sich sämtliche Wandelsterne wieder im „Krebs“ zusammenfinden. Über die Art und Weise der chronischen Längenveränderung der Fixsterne scheint das klassische Zeitalter der griechischen Sternkunde — zufrieden, die hochwichtige Tatsache klar erkannt zu haben — nicht in besondere Untersuchungen eingetreten zu sein, aber nachmals begannen sich um so eifriger die Epigonen an die Aufgabe zu machen, den Sachverhalt noch genauer aufzuklären, tatsächlich jedoch zu verschleiern. Und damit konnte dann auch eine neue Periodenjagd anheben.

Vielleicht ist der uns bereits bekannte Patristiker Origenes (185—254 n. Chr.) der erste, der uns von Klügeleien über die Art und Weise der Präzession zu erzählen weiß[2]); die exakte griechische Wissenschaft hatte von solchen mit um so mehr Recht abgesehen, da ja doch an eine Kausalerklärung einstweilen nicht entfernt zu denken war. Man nahm an, daß jenseits der achten Sphäre, bis zu welcher das Ptolemäische Weltsystem sich erstreckte, noch eine neunte vorhanden sei, und diese sollte das Rückschreiten der Schnittpunkte von Äquator und Ekliptik bewirken. Das Wie? blieb natürlich dahingestellt. Erwähnung findet diese willkürliche Vorstellung auch bei Themistius, Macrobius und dem Plato-Kommentator Theo Alexandrinus[3]). Am deutlichsten gab ihr Ausdruck ein anderer Scholiast, nämlich Simplicius, der ganz auf dem Boden der von Eudoxus geschaffenen, von Aristoteles nicht eben vervollkommneten Hypothese der homozentrischen Sphären stand und jene neunte Kugelfläche geradezu als Realität ansprach.

---

[1]) Duhem, a. a. O., S. 57.

[2]) Duhem, a. a. O., S. 23.

[3]) Duhem, a. a. O., S. 25 ff. Die Macrobius-Stelle (Somnium Scipionis, lib. I, cap. 17) ist beachtenswert, weil dort auf die neunte Sphäre angespielt wird.

In einer gewissen, zunächst nicht näher aufzuhellenden Beziehung zu diesem Versuche, die einfachen Aufstellungen des Hipparch und Ptolemäus abzuändern oder zu ergänzen, stand das weitere Hirngespinst, die konstante Präzessionsbewegung in einen „motus accessus et recessus“ umzuwandeln. Die Knoten sollten sich eine Zeit lang um 8° in der entgegengesetzten Richtung bewegen. Wer „die alten Astrologen“, die „παλαιοὶ ἀποτελεσματικοί“ (also Sterndeuter, nicht Astronomen im strengeren Sinne) gewesen sind, die für diese Verschlechterung verantwortlich zu machen wären, ist nicht bekannt; nach Henri Martin[1]), dem wir in diesem Punkte gegenüber Duhem Recht geben möchten, wären sie jünger als Hipparch anzusetzen. Von Theo Alexandrinus hat auch der Arabohebräer Meschalla[2]) die betreffende Nachricht übernommen, denn seine „auctores, qui faciunt imagines secundum Astronomiam Altasamec“ sind eben die „älteren Astrologen“ des Vaters der Hypatia.

Das Prinzip der Achtgradperiode ist auch bei den Indern nachweisbar, die jedoch hier, wie auf so manchem anderen Arbeitsfelde, nur als Schüler der späteren Griechen anzusehen sein dürften. Aber wenn sie auch die „Bewegung vor- und rückwärts“ anerkannten, so gelangten sie doch zu anderen Beträgen für die Amplitude. Diese wird in dem Fundamentalwerke Surya-Siddhanta mit 25°, von Aryabhatta mit 48°

[1]) H. Martin, a. a. O., II, 2.

[2]) Einer der wenigen entschiedenen Verfechter der Astrologie im XVI. Jahrhundert, der Nürnberger Professor J. Heller, hat mehrere hierher gehörige Schriften des Mittelalters lateinisch herausgegeben (Doppelmayr, Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern, Nürnberg 1730, S. 55), darunter auch: De elementis et orbibus coelestibus liber antiquus ac eruditus Messahalae laudatissimi inter Arabes astrologi, Nürnberg 1549. Zumal Kapitel 18 bis 20 kommen hier in Betracht. Näheres erfährt man über ihn bei M. Steinschneider (Vite di Matematici Arabi tratte da un opera inedita di Bernardino Baldi con note, Rom 1864, S. 429 ff., S. 452 ff.). Dieses „Altrasamec“ wird auch von Albertus Magnus (Liber de causis proprietatum elementorum, lib. I, tract. II, cap. 3) im Hinblick auf eine Periodizität von 640 Jahren angeführt.

in Rechnung gebracht.[1]) Und diese Werte gingen dann auch auf die von ihren indischen Vorbildern in hohem Maße abhängigen Araber über, denn der Umstand, daß spätere Inder wieder zur klassischen Lehre der Griechen zurückkehrten, wie der hervorragende Mathematiker Bhascara Acharya, machte sich gerade in der Blütezeit der arabischen Wissenschaft nicht mehr bemerklich. Auch der hebräische Gelehrte Abraham bar Chija (Savasorda) ist mit der alternierenden Bewegung bekannt und gibt bestimmt an, der Ekliptikpol beschreibe um den Himmelspol einen kleinen Kugelkreis von $8^0$ sphärischem Durchmesser im Verlaufe von 1600 Jahren, so daß auf das Jahr eine Knotenverschiebung von $^1/_{100}{}^0$ entfiele. Dieser Vorgang hat wenigstens den Vorzug, leicht verständlich zu sein, allein gerade jetzt, in dieser Epoche einer an die berühmtesten Namen der arabischen Kulturwelt geknüpften fortschrittlichen Entwicklung entsteht eine neue Verböserung des Präzessionsbegriffes. Man war zu der Ansicht gekommen, die Schiefe der Ekliptik sei ein Winkel von wechselnder Größe, und diese vermeintliche Erkenntnis, die ja auch erst in einer weit späteren Zeit zu einer tatsächlichen erhoben werden konnte, trieb dazu an, zwei Erscheinungen, die zunächst nichts miteinander zu tun haben, in unheilvoller Weise zu verquicken[2]). So bildete sich die sogenannte Trepidationslehre heraus,

---

[1]) Die Kenntnis der indischen Anschauungen bürgerte in Europa vorzugsweise ein M. Reinaud (Mémoire géographique, historique et scientifique sur l'Inde antérieurement au milieu du XI[e] siècle de l'ère chrétienne d'après les écrivains arabes, persans et chinois, Paris 1849, S. 324 ff.). Es ist in erster Linie der Araber Massudi, dessen vielgestaltige „Goldwiesen" das Material zu den einschlägigen Ausführungen geliefert haben, und nächstdem schöpfte er aus der damals noch unerschlossenen, seitdem durch Sachaus Forschungen in ein helles Licht gerückten Indischen Reisebeschreibung des scharfsichtigen Albîrûnî (a. a. O., S. 274 ff.).

[2]) Auch Copernicus glaubte, von seinem Lehrer Domenico Maria in Bologna hiezu angeregt, an eine stärkere und stetige Verminderung der Ekliptikschiefe (Prowe, Nikolaus Coppernicus, 1. Band, 1. Teil, Berlin 1883, S. 244).

die bis in die Neuzeit ihre ungünstige Wirkung geltend machen sollte[1]).

Der Meister der arabischen Himmelskunde, Albategnius, lehnte noch die Annahme einer „vor- und rückschreitenden Bewegung der Knotenpunkte" ab, über deren Ursprung er sich indessen nicht ganz im klaren befand[2]). Er mußte schon um deswillen ein Gegner des Grundgedankens sein, weil eine unstetige Bewegung, wie sie „von den alten Astrologen" den Knoten beigelegt ward, einem Prinzipe der Araber zuwider lief. Um nun dieses mit der alternierenden Bewegung von verhältnismäßig kurzer Periode zu versöhnen, um aber zugleich der Vermutung zu genügen, daß der Winkel zwischen Äquator und Ekliptik keine konstante Größe sei, verfiel man auf den Ausweg, die Schnittpunkte nicht in einem größten, sondern in einem kleinen Kugelkreise sich bewegen zu lassen. Diese Ausgestaltung der Ptolemäischen Epizyklenlehre soll als der erste der ebenfalls sehr bedeutende Tâbit ibn Kurrah vollzogen haben[3]). Der festen ward eine be-

[1]) Bereits vor nunmehr bald vierzig Jahren suchte der Schreiber dieser Zeilen die mitunter mißverstandene Natur der Trepidationshypothese aufzuhellen (Die Lehre von der Erdrundung und Erdbewegung bei den Arabern, Halle a. S. 1877, S. 76 ff.). Daß in Wirklichkeit nicht Tâbit der Urheber dieser Irrlehre sei, ist dort schon betont worden. Der Reformator der Astronomie bekämpfte jene (Günther, Der Wapowski-Brief des Coppernicus, Mitteil. d. Coppernicus-Vereines für Wissenschaft und Kunst zu Thorn, II, S. 3 ff.).

[2]) Die ausgezeichnete Notenausgabe, die Nallino vom Hauptwerke des Albategnius besorgt hat, gibt über diese Fragen die genaueste Auskunft (Al Battânî sive Albatenii Opus astronomicum, 1. Teil, Mailand 1903, S. 126 ff.). Während Ptolemäus die Präzessionsbewegung bekanntlich als sehr langsam erkannt hatte, erachtete sie der Araber für eine äußerst schnelle.

[3]) Das Buch des berühmten, dem IX. Jahrhundert angehörenden Bearbeiters griechischer exakt wissenschaftlicher Texte ist in lateinischer Übertragung vorhanden („Liber de motu octavae sphaerae"). Vgl. vor allem: Wüstenfeld, Geschichte der arabischen Ärzte und Naturforscher, Göttingen 1840, S. 37 ff. Diese inhaltreiche Monographie wird auch von Duhem (a. a. O., S. 91) namhaft gemacht.

wegliche Ekliptik gegenüber gestellt; der Durchmesser des neuen Epizykels sollte 8° 37′ 26″ betragen. An und für sich mußte selbstverständlich, wie es die Kinematik des Ptolemäus verlangte[1]), die Bewegung auf dem Beikreise gleichförmig sein, aber ihre Projektion auf den festen Kreis mußte dann die größte scheinbare Geschwindigkeit erreichen, wenn der Wider- und Wagepunkt sich zunächst den Durchschnittspunkten von Haupt- und Nebenkreis befanden, und wenn die Knoten um 90° von ersterem abstanden, so wurde die Geschwindigkeit anscheinend ein Minimum. Angeblich sollte das mit Hipparchs und Ptolemäus' Beobachtungen übereinstimmen, was aber natürlich nicht der Fall ist. Die Zeitdauer der Durchlaufung des Epizykels wird mit 4171ª in Rechnung gebracht; wie diese Zahl ermittelt worden sein könnte, erfährt man weder aus dem Originale, noch auch aus den Zusatzbemerkungen[2]) eines Grosseteste und Campanus von Novara, welch letzterer nach Nallinos Meinung[3]) das Verdienst beanspruchen konnte, den Traktrat von der achten Sphäre uns überliefert zu haben. Freilich hat Duhem recht[4]), wenn er von einem „mysteriösen Charakter" eben dieser Schrift spricht. Denn eingehenderes Studium hat dazu geführt, den Tâbit überhaupt nicht als den richtigen Verfasser anzusehen, sondern als solchen den spanischen Araber Arzachel[5]) gelten zu lassen, der zweifel-

---

[1]) Ptolemäus-Manitius, a. a. O., 2. Band, S. 94. „Wir haben uns die Aufgabe gestellt, auch für die fünf Wandelsterne, wie für die Sonne und für den Mond, den Nachweis zu führen, daß ihre scheinbaren Anomalien alle vermöge gleichförmiger Bewegungen auf Kreisen zum Ausdruck gelangen, weil nur diese Bewegungen der Natur der göttlichen Wesen entsprechen. . ." Den treuen Schülern der Griechen mußte somit eine Diskontinuität der Bewegung geradezu widerwärtig sein.

[2]) Duhem, a. a. O., S. 94 ff.

[3]) Vgl. Al Battânî-Nallino, a. a. O., S. XXXVI. Ein bei Houzeau-Lancaster (Bibliographie générale de l' astronomie, 1. Band, Brüssel 1878, S. 466) aufgeführter Druck scheint mit dem hier gemeinten nicht verwechselt werden zu dürfen.

[4]) Duhem, a. a. O., S. 101.

[5]) Eine umsichtige Charakteristik des Mannes besitzt man von Steinschneider (Étude sur Zarkali, Bullettino Boncompagni, 14. Band,

los in der zweiten Hälfte des XI. Jahrhunderts seine Blütezeit hatte.

Tâbit lebte somit weit früher als der zuletzt genannte[1]), und es muß sonach das in Rede stehende Werk ihm mit Notwendigkeit abgesprochen werden, wenn die dessen Hauptinhalt bildende Theorie geistiges Eigentum Arzachels ist. Ob die sogenannten Tafeln von Toledo auch in erster Linie von ihm gefertigt wurden, steht nicht völlig fest, aber aus gewissen mehr indirekten Anzeichen zieht Duhem den Schluß[2]), daß jene astronomischen Tabellen und vor allem die als Einleitung dienenden „Canones" durchaus den Inhalt der astronomischen Anschauungen des „Andalusiers" wiederspiegeln. Als Erfinder der Trepidation bezeichnet ihn vorbehaltlos der durch seine antiptolemäische, allerdings aber auch nicht heliozentrische Planetentheorie bekannt gewordene Alpetragius[3]). Auf dem nämlichen Standpunkte steht Averroes[4]), und nicht minder gilt dies[5]) für Ibn Esra und den bekannten Abûl

---

S. 171 ff.; 16. Band, S. 493 ff.; 17. Band, S. 765 ff.; 18. Band, S. 343 ff.; 20. Band, S. 1 ff., S. 575 ff.).

[1]) Als Vorgänger Tâbits nennt den Arzachel Pietro d'Abano in seinem handschriftlich aufbehaltenen „Lucidator Astronomiae" (Duhem, a. a. O., S. 118). Diesen anscheinend damals verbreiteten Irrtum teilt auch noch viel später der in Spanien von gelehrten Juden unterrichtete A. Ricci (De motu octavae sphaerae, Paris 1521, fol. 6).

[2]) Duhem, a. a. O., S. 108 ff. „Quelque que soit l'histoire exacte de la composition des tables de Tolède, il semble, en tout cas, que ces tables nous présentent un reflet fidèle des doctrines astronomiques professées par Al Zarkali." Selbstverständlich kann auch einer seiner Schüler beteiligt gewesen sein.

[3]) Eine der „Planetarum Theoria" des Al Bitrodji entnommene Darstellung des auf Exzenter und Epizykeln verzichtenden, wesentlich auf Eudoxus sich stützenden Systemes gibt nach Kalonymos (Alpetragii Arabis planetarum theoriae physicis rationibus probatae, Venedig 1539) Baldi-Steinschneider (a. a. O., S. 44 ff.).

[4]) Averrois Epitome Metaphysicae (Ausgabe der aristotelischen Metaphysik), Venedig 1553, fol. 152.

[5]) Duhem, a. a. O., S. 113 ff.

Hassân, Autor eines berühmten Handbuches der astronomischen Instrumentenkunde[1]).

Man wird somit Arzachel mit einem hohen Grade von Wahrscheinlichkeit als den arabischen Gelehrten hinstellen dürfen, der durch seine Umdeutung der alten, einfachen Auffassung der Präzession eine recht folgenschwere Verwirrung in die spätmittelalterliche Atronomie hineintrug. Denn sogar die Alfonsinischen Tabellen machten, ob auch der klar denkende König noch so entschieden alle Komplikationen verwarf und für seine Person an dem gleichförmigen Rückschreiten der Äquinoktialpunkte ($1^0$ in 60 Jahren nach Albategnius) festhielt, in der späteren Redaktion die „Kompromißhypothese" der Trepidation mit[2]), um gleichzeitig die Gleichmäßigkeit der Bewegung und eine relativ kurze Periodizität zu retten[3]). Und angesichts der hohen Bedeutung, welche dem Tafelwerke von der ganzen vorcopernicanischen Folgezeit nicht ohne Grund zuerkannt wurde, konnte es nicht ausbleiben, daß diese Verballhornung[4]) der einfachen Hipparchschen Feststellungen sich durchsetzte und erst im Laufe des XVI. Jahrhunderts nach und nach von der wissenschaftlichen Tagesordnung verschwand.

## § 3. Wesen und Erklärungsversuche der Überflutungen.

Die Verbrennungshypothese ist anscheinend niemals näher in ihre Einzelheiten verfolgt worden, was einerseits wohl mit ihrer sachlichen Unmöglichkeit, andererseits jedoch gewiß mit

---

[1]) Traité des instruments astronomiques des Arabes, par Aboul Hassân Ali de Maroc, traduit par S. J. Sédillot, 1. Band, Paris 1834 bis 1835, S. 150.

[2]) Vgl. hiezu: A. Wegener, Die astronomischen Werke Alfons' X., Bibliotheca Mathematica. 5. Die Tafelfragmente, S. 171 ff. Das kastilianische Original, S. 174 ff.

[3]) Duhem, a. a. O., S. 127.

[4]) Die „Indignation" Delambres (Histoire de l'astronomie au moyen âge, Paris 1819, S. 74) gegen die Schwankungshypothese scheint Duhem (a. a. O., S. 99) zu weit zu gehen, allein sie kommt uns, wenn wir ihre nachteilige Beeinflussung der astronomischen Arbeit mehrerer Jahrhunderte uns vergegenwärtigen, eben nicht ungerechtfertigt vor.

der Tatsache zusammenhängt, daß die Alten, gelegentliche Hinweise abgerechnet, den vulkanischen Erscheinungen an sich ziemlich gleichgültig gegenüberstanden[1]). Die Erdbeben, die ja doch eigentlich nur bei Seneca eine halb und halb vulkanistische Deutung erfahren haben[2]), standen weit mehr im Vordergrunde des Interesses, und sie werden denn auch gelegentlich mit der wäßrigen Umwälzung der Erdoberfläche in Verbindung zu bringen gesucht[3]). Im großen und ganzen darf man sagen, daß in erster Linie Beobachtungen es waren, die hier den Weg zeigten, und an sie knüpfte dann auch die Erinnerung an alte Volkssagen an. Hören wir z. B. den besten Kenner antiker Geographie[4]): „Die Aufmerksamkeit auf eingetretene Veränderungen der Erdoberfläche wurde nicht nur durch Beobachtungen in den Anschwemmungsgebieten kleinasiatischer Flüsse und durch die Spuren früheren Seebodens im Binnenlande geweckt, sondern das an merkwürdigen geologischen Vorkommnissen so reiche, von häufigen verheerenden Erdbeben heimgesuchte Kleinasien mußte den alten Physikern Gelegenheit bieten, ihre Forschungen auch auf die Ursachen und Wirkungen der in diesen Erscheinungen wahrnehmbaren Mächte auszudehnen.“ In diesem Lande wurde zuerst (um 500? v. Chr.) Xanthus auf Versteinerungen aufmerksam, und er, wie auch Herodot,

[1]) Eine gute Übersicht gewährt eine Dissertation von A. Serbin (Bemerkungen Strabos über den Vulkanismus und Beschreibung der den Griechen bekannten vulkanischen Gebiete, Erlangen 1893). Am besten gekannt war aus ersichtlicher Ursache der Ätna, dem ein gewisser Lucilius nach Teuffel (Geschichte der römischen Literatur, 1. Band, Leipzig 1873, S. 669 ff.) das so betitelte Lehrgedicht widmete.

[2]) Hiezu: Nehring, Die geologischen Anschauungen des Philosophen Seneca, 1. Teil, Wolfenbüttel 1873, S. 32. Eine mit der modernen Dreiteilung der seismischen Ursachen teilweise übereinstimmende Interpretation gibt auch Lucretius (De rerum natura, lib. VI, V. 534 ff.) auf der Grundlage der epicureischen Naturphilosophie.

[3]) Besonders unzweideutig spricht sich Strabo aus (Geographia, lib. I, cap. 149): „τὰ πεδία ποτὲ θάλατταν γενέσθαι.“

[4]) H. Berger, Geschichte der wissenschaftlichen Erdkunde der Griechen, Leipzig 1903, S. 151.

dem in der Oase des Jupiter Ammon ähnliches aufgefallen war, erkannten darin Spuren dereinstiger Meeresbedeckung[1]), indem sie so in halb unbewußter Weise einen Grundstein für paläontologische Schlüsse legten, zu denen erst eine sehr viel spätere Zeit wieder den Weg gefunden hat[2]). Der Geograph und Mathematiker Eratosthenes trat dem Probleme der Erdrevolutionen auch seinerseits näher, soweit wir aus den von Strabo, dem konsequenten Kritiker seines Vorgängers, der Vergessenheit entrissenen Bruchstücken schließen können[3]). Es wird auf Xanthus und auf den zu großartiger Spekulation hinneigenden Lampsazener Strato[4]) verwiesen, den Begründer der Doktrin von der gewaltsamen Bildung des zwischen Ägäischem und Schwarzem Meere bestehenden Straßensystemes. In seinen Konstruktionen paläogeographischer Natur, durch die an der einen Stelle Meeresrückgang, an einer anderen Meeres-

---

[1]) Im astrognostisch-astrologischen Poem des Manilius liest man (lib. IV, V. 828 ff.):

„Concutitur tellus validis compagibus haerens
Subducitque solum pedibus, natat orbis in ipso
Et vomit Oceanus pontum sitiensque resorbet
Nec sese ipse capit. Sic quondam menserat urbes . . .
In tantum longo mutantur tempore cuncta
Atque iterum in semet redeunt . . .“

Über Manilius verbreitet sich F. Boll (Studien zu Claudius Ptolemäus; ein Beitrag zur Geschichte der griechischen Philosophie und Astrologie, Leipzig 1894, S. 205 ff.). Auch sonst ist neuerdings viel über Manilius gearbeitet worden (Gilbert, a. a. O., S. 653 ff., S. 695 ff.). Eine modern-kritische Ausgabe, der eine holländische Übersetzung voranging, verdankt man J. van Wageningen in Groningen (M. Manilii Astronomica, Leipzig 1915).

[2]) Die Anfänge der Versteinerungskunde bei v. Zittel (Geschichte der Geologie und Paläontologie, München-Leipzig 1899, S. 15 ff.).

[3]) H. Berger, Die geographischen Fragmente des Eratosthenes neu gesammelt, geordnet und besprochen, Leipzig 1880, S. 57 ff.

[4]) Die originelle Stellung dieses Mannes in der Geschichte der ältesten Naturwissenschaft kennzeichnete zuerst H. Diels (Über das physikalische System des Straton, Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wissensch., 1893, S. 101 ff.).

transgression ermittelt werden sollte, scheint Eratosthenes etwas kühn vorgegangen zu sein, was ihm Einwürfe Strabos und zuvor schon Hipparchs zuzog[1]).

Schon zuvor spielt auch bei den beiden größten Philosophen des Altertums die Kataklysmenlehre eine gewisse Rolle. Platos Erfindung oder Wiederbelebung der Atlantissage, die sich neuerdings so manche sonderbare Neuaufwärmung hat gefallen lassen müssen, gehört offenbar in diesen Gedankenkreis herein. Dem „Timäus" zufolge sollen die Weisen Ägyptens dem lernbegierigen Solon erzählt haben, der Phaëton-Mythus berge einen Keim von Wahrheit in sich, wenn nämlich durch aus dem Erdinneren hervorquellendes Wasser, ohne alles Zutun von Regengüssen, der ganze Erdraum überschwemmt werde[2]). Die periodische Wiederkehr des Ereignisses, die (s. o.) für Plato mindestens eine hohe Wahrscheinlichkeit darstellte, war dann von selbst gegeben, denn mit der wässerigen Vernichtung sollte ja die feurige abwechseln. Aristoteles stand ebenfalls auf dem Standpunkte, daß das ganze sublunare Leben und Treiben periodischen Veränderungen unterworfen sei[3]), und zwar lasse sich für jede Äußerung organischen und anorganischen Lebens ein Zeitalter des Werdens, Reifens und Verfallens unterscheiden[4]). Seine astronomische Umschreibung

[1]) Daß auch der große Astronom in die geomorphologischen Streitigkeiten eingriff, erfahren wir eben von Strabo selber (a. a. O., lib. I, cap. 57). Ersterer scheint sich durch seine Überzeugung, das Meer müsse allenthalben vom Erdmittelpunkte gleichweit abstehen, zur Gegnerschaft gegen die Durchbruchhypothesen hingeführt gesehen zu haben.

[2]) Timäus-Windischmann, a. a. O., S. 31 ff., S. 35 ff. Die Insel Atlantis lag angeblich vor den Säulen des Herkules und wurde von der hohen See verschlungen (vgl. Berger, Gesch. d. wissensch. Erdk. d. Gr, S. 567 ff.).

[3]) Sehr gründlich erörtert die in der Schrift „De generatione et corruptione" niedergelegten Ansichten O. Gilbert (Die meteorologischen Theorien des griechischen Altertums, Leipzig 1907, S. 436 ff.).

[4]) Daß Aristoteles sogar die „Deukalion-Flut" heranzieht (Meteorolog., lib. I, cap. 14), um „den ewigen Kreislauf" zu erweisen, verdient als eine auffällige Konzession an die Volksvorstellungen angemerkt zu werden.

dieser Entwicklungsstadien läßt die sonstige Klarheit vermissen. Jedenfalls übertrug er diese mehr einem Dogma als einem Lehrsatze gleichende Festsetzung auch auf seinen Schüler Theophrast, der insofern sie bestimmter faßte, als er ein vorher anscheinend nicht beachtetes Flächenprinzip, wie man sich ausdrücken möchte, noch hinzunahm[1]). Meer und Festland sollten in ununterbrochener Umsetzung begriffen sein, aber das Arealverhältnis beider sei dabei keiner Veränderung unterworfen.

Als den selbständigsten und mutmaßlich bedeutendsten Vertreter der antiken Physik der Erde hat uns eindringende neuere Forschung den Stoiker Posidonius erkennen lassen[2]). Seine literarische Hauptleistung, ein Werk „περὶ ὠκεανοῦ“, das jedoch nicht etwa blos die Meereskunde, sondern darüber hinaus die gesamte physische Geographie abgehandelt haben dürfte, ist leider nicht auf uns gekommen, und wir sind darauf angewiesen, den Umstand zu verwerten, daß alle späteren Schriftsteller, die auf diesem Untersuchungsgebiete tätig waren, reichlich aus der kraftvoll fließenden Quelle geschöpft haben. Das gilt für Strabo, der indessen in vielen Fällen sich auch ohne literarische Anlehnung durch den gesunden Blick des weitgereisten Mannes leiten ließ[3]), und in noch höherem Maße für Seneca[4]), dem man aber doch kaum streitig machen kann,

[1]) Das Fragment „περὶ καθαρσίας κόσμου“ hat Philo gerettet und Diels in seine umfassende Sammlung aufgenommen (Doxographi Graeci, Berlin 1879, S. 486 ff.).

[2]) Für ihn seien genannt drei Schriften von Schühlein: Studien zu Posidonius Rhodius, Freising 1891; Untersuchungen über des Posidonius Schrift περὶ Ὠκεανοῦ, ebenda 1900 und 1901.

[3]) Die Kataklysmenlehre steht für Strabo, dem allgemeine Spekulation ziemlich ferne lag, nicht im Vordergrunde seiner Überlegungen. Wir dürfen zu seiner Charakteristik hinweisen auf eine Abhandlung von H. Fischer: Über einige Gegenstände der physischen Geographie bei Strabon, als Beitrag zur Geschichte der alten Geographie, Wernigerode 1879.

[4]) Die Quellenkritik Senecas hat sich Nehring (a. a. O., 2. Teil, S. 20 ff.) angelegen sein lassen, obwohl er an diesem Orte nur die all-

daß in seinen wertvollen „Naturales Quaestiones“ zu den Lesefrüchten auch Ergebnisse einer geschulten Autopsie hinzutreten. Im 3. Buche dieser kleinen Enzyklopädie des Naturganzen wird, nachdem begreiflicherweise auch wieder der Deukalion-Flut unter Hinweis auf Ovid[1]) Erwähnung geschah, dem „großen Diluvium“, das nach bestimmten Gesetzen umgestaltend auf die Erde einwirkte, besonderes Augenmerk zugewendet. Diese Diluvialfluten beruhen nach Seneca[2]) auf vorübergehenden Niveauerhöhungen, hier genau geschilderten Grenzüberschreitungen des Weltmeeres. Die Anlässe zu solcher Durchbrechung des ruhigen Naturgesetzes können verschiedenartig sein, und der Kataklysmus ist immer nur ein partieller, kein allumfassender. Es können die Gestirne, d. h. Sonne und Mond, mitwirken, daß der Meeresspiegel steigt, und da das Verhältnis auch der größten Erderhebungen zum Erdhalbmesser ein ganz minimales ist,[3]) so ist es wohl möglich, daß auch höhere Berge

gemeinen Resultate seines Nachforschens mitzuteilen in der Lage war. Entlehnt hat der Römer viel von Aristoteles und dem nur wenig älteren Strabo, am meisten dagegen von Posidonius. Allein auch Chrysippus, Epicur, Theophrast sind von ihm benützt worden, und ebenso kannte er die pseudoaristotelische Schrift „περὶ κόσμου“, über deren wahren Verfasser die Akten noch nicht geschlossen sind. Man nahm als solchen längere Zeit den Syrer Apulejus an, allein da dieser erst im II. nachchristlichen Jahrhundert lebte, kann Seneca nicht als Leser jenes Traktates in Betracht kommen, mag auch dessen gleichnamiger „de mundo“ manche Berührungspunkte darbieten. Daß ersterer der Feder des Posidonius selbst entstamme, wäre gar nicht unmöglich (Goldbacher, Zur Kritik von Apulejus de mundo, Zeitschr. f. d. österreich. Gymnasien, 1873, S. 670 ff.). S. auch: Bursians Jahresberichte über die Fortschritte der klassischen Altertumswissenschaft, 1. Band, S. 197 ff., S. 690 ff. Über die Abhängigkeit Senecas von Posidonius trachtet Licht zu verbreiten J. Müller (Über die Originalität der Naturales Quaestiones Senecas, Innsbruck 1893).

[1]) Ovidius, Metamorph., lib. XV, V. 259 ff.

[2]) Seneca, Nat. Quaest., lib. III, cap. 27–30. Vorzugsweise ist es Kapitel 29, das den Schwerpunkt dieser Darlegungen bildet.

[3]) Diese Äußerung Senecas weicht sehr zu seinem Vorteile ab von den Übertreibungen, die vielfach betreffs der Berghöhen umliefen. Später erst wurde der Sachverhalt zahlenmäßig geklärt (Künßberg, Über eine

vom Wasser zugedeckt werden. Weiter wirken mit Regenfluten, Austreten der Flüsse, Einbruch des Meeres in die Landfeste, Erderschütterungen und — nunmehr begegnet uns eine neue, noch zu besprechende Idee — Transmutation der die Erde aufbauenden Grundstoffe. Wir sehen, der römische Rhetor und Philosoph hat sich nicht minder die Umsicht des gewiegten Naturforschers bewahrt.

Durch ihn sind wir auch der Frage näher gerückt worden, wie man sich denn eigentlich die tellurischen Vorgänge gedacht habe. Wenn Seneca davon spricht, daß ein Strom oder das Meer selbst über seine Ufer getreten sei, so mußte gleichwohl zuvor irgend eine Wasservermehrung Platz gegriffen haben. Heftiger Regen oder ein Erdstoß waren auch nur von örtlich begrenzter und zeitlich beschränkter Einwirkung. Es bleiben bei schärferem Zusehen nur zwei Hypothesen als primär und damit bestimmend übrig, nämlich die sogenannte Schwammtheorie[1]) und die Lehre von der Umwandlung der Elemente. Und diese beiden sind es auch, auf die unter nicht immer gleich bleibenden Gesichtspunkten zurückgegriffen wurde.

Die erstere ist altgriechischen Ursprunges und erscheint gleichzeitig mit dem ersten Griechen auf dem Plane, der ernsthaft naturwissenschaftliche Aufgaben in Angriff nahm. Die Erde erschien bereits Thales[2]) als eine Art vollgesogenen Schwammes; der ganze Körper war durchzogen von einem Systeme gröberer und feinerer Adern, Kanäle, Spalten, die mit dem Meere in Verbindung standen, und aus denen gelegentlich das darin enthaltene Wasser durch eine Störung

---

mathematisch geographische Stelle bei Theon, Bl. f. d. bayer. Gymnasialwesen, 20. Band, S. 368 ff.).

[1]) Die Bezeichnung dürfte vermutlich zuerst vom Verf. in dem hier verwendeten Sinne gebraucht worden sein, und zwar bei verschiedenen Anlässen. Aufgenommen ist sie dann insonderheit von Gilbert worden (a. a. O., S. 400).

[2]) Das kühne Beginnen des Euthymenes und Hecatäus, zu Thales' Zeit alles Süßwasser oberirdisch vom „Okeanos" herzuleiten, hat diese Epoche nicht überlebt.

des hydrostatischen Gleichgewichtes ausgepreßt ward. Da demgemäß Quellwasser nur filtriertes Meerwasser sein konnte, welchem beim Durchfließen jener Röhren die Salzbestandteile verloren gegangen waren, so ist auch der Name Filtriertheorie am Platze. An Thales schloß sich Hippo von Rhegium an[1]), bei dem vielleicht auch die ersten Ansätze jener für das ganze Mittelalter typischen Lehrmeinung zu finden sein mögen[2]), es fielen die Schwerpunkte der Land- und Wassersphäre nicht zusammen, und es vermöge infolge dessen auch das „höher gelegene“ Meer einen Druck auf die internen Wassermassen auszuüben. Auch andere griechische Denker, vor allem Plato[3]), billigten die Schwammhypothese, und späterhin sind Epicur, Lucretius, Seneca — dieser immerhin nur bedingt — deren Anhänger gewesen. Sie hatte schon ziemlich frühzeitig mit der heute von der ungeheuren Mehrzahl der Sachverständigen angenommenen meteorischen Theorie zu knüpfen, die Grundwasser und Quellen auf in den Erdboden eingedrungenes Regenwasser zurückgeführt wissen will[4]). Sie klingt, selbstredend in einer uns heute oft sonderbar anmutenden Form, in den uns noch erhaltenen literarischen Überresten eines Anaximander, Xenophanes, Anaxagoras, Diogenes Apolloniates an, wurde zwar durch Aristoteles bekämpft, errang sich dagegen den

---

[1]) Gilbert, a. a. O., S. 399 ff. Wenn wir mit Sicherheit auch nur Hippo als Vertreter der Schwamm- oder Filtrationstheorie nachweisen können, so spricht doch alle Wahrscheinlichkeit dafür, daß schon Thales oder seine Schule dieselbe begründet hat.

[2]) Diese einflußreiche Irrlehre wurde vom Verf. zusammenhängend darzustellen versucht (Ältere und neuere Hypothesen über die chronische Versetzung des Erdschwerpunktes, Halle a. S. 1878). Dort wird, was nach obigem einer gewissen Korrektur bedarf, Herodot als der angeführt, bei dem sich eine erste Vorstellung verwandter Art finde.

[3]) Berger, a. a. O., S. 285 ff.

[4]) An und für sich trug die ganze Auffassung ein naturphilosophisches Gepräge, aber man kann doch schon in ihr, ohne ihr Zwang anzutun, eine Vorahnung dessen erkennen, was wir den Kreislauf des Wassers nennen.

wenigstens eingeschränkten Beifall des Posidonius[1]) und fand nochmals ihren klarsten Ausdruck in dem architektonischen Werke des berühmten Baumeisters Vitruvius[2]). Dann freilich mußte sie völlig vom Schauplatze abtreten, um erst viel später zur Anerkennung und zur Herrschaft zu gelangen[3]), während das ganze Mittelalter hindurch ihre Konkurrentin das Feld behauptete[4]). Und gerade in unserem Falle mußte diese

---

[1]) Gilbert, a. a. O., S. 427 ff.

[2]) Vitruvius, De architectura, lib. VIII, cap. 1.

[3]) S. die Charakteristik der Quellentheorien bei Günther (Handbuch der Geophysik, 2. Band, Stuttgart 1899, S. 792 ff.).

[4]) Bei Kretschmer (Die physische Erdkunde des Mittelalters, Pencks Geograph. Abhandl., 4. Band, 1. Heft) wird über diese Phase des Beharrens auf einer für klassisch erachteten Lehre nähere Auskunft gegeben. Die früheren und späteren Scholastiker, wie Albertus Magnus, halten unverbrüchlich an ihr fest, und noch um die Wende der Neuzeit sind Claramontius und Lionardo da Vinci ihre Anhänger. Eine gute Probe gibt auch die „Margaritha philosophica" des Gregor Reysch. Auf die Araber mußte eine so bequeme Erklärungsweise für zahlreiche Naturerscheinungen ganz von selbst übergreifen, wie z. B. folgender bezeichnende Satz aus einem weit verbreiteten Werke beweist (Dieterici, Die Naturanschauung und Naturphilosophie der Araber im X. Jahrhundert, Posen 1864, S. 102): „Die Meere, welche wir als die großen Wasserbehälter auf der Erdoberfläche darstellten, zwischen denen hohe Berge als Dämme stünden, sind miteinander entweder durch Meerengen auf der Erdoberfläche oder durch unterirdische Kanäle oder durch die Wasseradern der Quellen im Inneren der Erde verbunden." Von eigenartigem Interesse sind die beiden italienischen Enzyklopädisten des XIII. Säkulums, Brunetto Latini, der Lehrer Dantes, und Ristoro von Arezzo. Ersterer verkündet es als seine Überzeugung, daß auch die auf Bergen entspringenden Quellen vom Meere aus gespeist würden (Li livres du Tresor par Brunetto Latini, publié d'après les manuscrits de la bibliothèque impériale par P. Chabaille, Paris 1863, S. 110). Beim Aretiner ferner lesen wir (La Composizione del Mondo di Ristoro d'Arezzo, testo italiano del 1252 pubblicato da Enrico Narducci, Rom 1859, S. 198):

„E trouiamo correre laqua entro per lo corpo della terra et trouiamola andare sopra la faccia della terra. Et trouiamola sallire a somma de monti et uedemola scendere. Et

Und wir finden, daß das Wasser das ganze Innere des Erdkörpers durchdringt und sich über das Antlitz der Erde erhebt. Und wir bemerken, wie es vom Gipfel der Berge auf den Zeitgeschmack eine entschiedene Anziehungskraft ausüben. Denn die im Erdinneren verborgenen Hohlräume, die Katavothren („βάραθρα“), in welche sich die oberirdischen Flüsse hinabstürzten, und die ihrerseits wieder zum Meere sich öffneten[1]), bildeten ja die unsichtbaren Behälter, deren Inhalt nach Ablauf der astronomisch regulierten Zeit hervorbrach und weithin Alles unter Wasser setzte. „Die Erdteile“, so soll sich der mysteriöse Ocellus geäußert haben[2]), „erleiden gewaltsame Veränderungen, indem das Meer teils seinen Erguß auf einen anderen Ort hin nimmt, teils auch die Erde selbst sich erweitert und auseinander geht infolge von Winden oder Wässern, welche unbemerkt in sie eingedrungen sind.

So die eine der beiden sich entgegen stehenden Auffassungen. Die andere ist gleichfalls sehr alt, denn die Wandelbarkeit der Urstoffe ist ein Glaube, der schon in der ursprünglichen Stoa hervortritt und von Chrysippus bis zu Posidonius lückenlos verfolgt werden kann[3]). Strato, der eifrige Physiker, dachte sogar ernsthaft daran, durch Versuche nachzuweisen, daß eine Überführung des einen Elementes in ein anderes möglich sei[4]). Bedeutungsvoll für die Umbildungs-

di questa aqua uedemo fare rij et de rij fare fiumi.“

entspringt und sehen es emporsteigen. Und solchergestalt sehen wir, wie das Wasser Bäche bildet, und wie aus den Bächen Flüsse entstehen.

Diese Denkweise durchdringt auch die nach Ansicht Vieler Dante zuzuschreibende, jedoch nicht zweifellos authentische Schrift „De aqua et terra“ (W. Schmidt, Über Dantes Stellung in der Geschichte der Kosmographie, 1. Teil, Graz 1876). Einen letzten Verteidiger erlebte noch das XVIII. Jahrhundert (H. Kühn, Meditationes de origine fontium et aquae putealis [gekrönte Preisschrift], Bordeaux 1741).

[1]) Die Beeinflussung der griechischen Gewässerkunde durch die ausgesprochene Natur des Landes, von dem man die beste Kenntnis besaß, stellten zuerst C. Neumann und J. Partsch ins richtige Licht (Physikalische Geographie von Griechenland, Breslau 1885, S. 254 ff.).

[2]) v. Lasaulx, a. a. O., S. 30 ff.

[3]) Gilbert, a. a. O., S. 253 ff.

[4]) Hievon spricht der Alexandriner Hero (Herons von Alexandria Druckwerke und Automatentheater, griechisch und deutsch herausgegeben

hypothese wurde das Auftreten des Aristoteles[1]), dem ja doch die Suprematie je länger je weniger verweigert werden konnte. Innerhalb des Erdballes vollzieht sich eine stetige Neubildung des Wassers, jedoch nicht etwa aus Erde, wie zunächst anzunehmen wäre, sondern vielmehr aus der dort eingedrungenen Luft. Diese hätte den kürzesten Weg zu den in die Atmosphäre aufragenden Bergen, und deshalb stammten auch alle großen Flüsse von den Hochgebirgen ab[2]). Wir haben hier eine neue Schwammtheorie vor uns; „die Berge seien in nächster Verbindung mit der Luft; sie seien gleichsam Schwämme, welche die Luft in ihre Poren aufsaugen, um sie sodann in Wasser umzuwandeln. . . .“ Atmosphärisches Wasser kommt auch hinzu, aber die eingedrungenen Massen hält Aristoteles nicht für genügend, um vom Phänomen der Quellbildung ausreichende Rechenschaft zu geben.

Auch Posidonius dürfte dieser Auffassung zugetan gewesen sein[3]), denn er verwirft zwar (s. o.) die meteorische Entstehung des Grundwassers nicht, beharrt aber auch bei der Transmutionslehre, wie denn auch die landwirtschaftliche Schriftensammlung einer sehr viel späteren Zeit („Geoponica“) in einem ganz auf den Stoiker zurückgehenden Teile beiden Möglichkeiten ihr Recht angedeihen läßt. Subsidiär wenigstens will auch Seneca die Bildung von Bodenwasser aus anderen Elementen zulassen[4]). Und so verblieb es auch noch im Mittelalter, wo neben der nach dieser Seite hin oben be-

---

v. W. Schmidt, Leipzig 1899, S. 5). Es handelt sich um die Ablehnung der Lehre vom allgemeinen Vakuum.

[1]) A. a. O., S. 416 ff.

[2]) Der geographische Fundamentalirrtum hat, wie man weiß, dazu geführt, in Mittelrußland ein gigantisches Gebirge vorauszusetzen, das erst im XVI. Jahrhundert von der Karte verschwand (Günther, Geschichte der Erdkunde, Leipzig-Wien 1904, S. 98).

[3]) Auf dieses als „*Δημοκρίτου ὑδροσκοπικόν*“ bezeichnete Exzerpt wird von Gilbert (a. a. O., S. 427) mit dem Bemerken hingewiesen, daß es tatsächlich nicht auf Democritus, sondern eben auf Posidonius zurückgehe.

[4]) Gilbert, a. a. O., S. 131 ff.

sprochenen Filtriertheorie auch die Elementenverwandlung ihre Rolle spielte[1]). Das war man der höchsten Autorität, dem Stagiriten, schuldig.

Hiemit wäre sonach unsere Überschau über die Möglichkeiten abgeschlossen, welche der antiken Welt zur Verfügung standen, um sich kausal die Transgression terrestrischer Wassermengen verständlich zu machen. Auf zwiefache Weise konnte, sozusagen, die Erde auf die ihr von den Gestirnen vermeintlich auferlegten Verpflichtungen reagieren:

I. Die in den unterirdischen „Hydrophylazien" aufgespeicherten Wasservorräte fanden dort nicht mehr den notwendigen Raum und traten, weite Flächen überschwemmend, aus ihrem Gefängnisse hervor[2]);

II. Durch den nie rastenden Umwandlungsprozeß, der sowohl Erde als auch Luft in Wasser verwandelt, war ein Überschuß des letzteren erzeugt worden, und es ergab sich so die gleiche Konsequenz des Kataklysmus, der mithin auch unter dieser Voraussetzung kein universeller, sondern nur ein örtlicher sein konnte.

Zum Schlusse darf nicht unerwähnt bleiben, daß, wie aus einer Andeutung Senecas[3]) erhellt, der umsichtige Posidonius auch noch eine dritte ursächliche Beziehung gestreift hat, die er vielleicht in seinem verloren gegangenen Werke (s. o.) noch ausgestaltet haben mag, die aber leider von uns nicht weiter verfolgt werden kann. Wir kennen von

---

[1]) Ristoro läßt auch das vierte Element, das Feuer, teilnehmen. Er sagt (a. a. O., S. 233):

| | |
|---|---|
| „Et quando el fuocho si ingrossa per la virtu delle stelle diventa aire. Et quando laire s'ingrossa diventa acqua." | „Und wenn das Feuer sich durch die Kraft der Gestirne verdichtet, wird es Luft. Und wenn die Luft sich verdichtet, geht sie in Wasser über." |

[2]) Es wäre dies in großem Maßstabe der nämliche Effekt, der sich in Karstländern geltend macht, wenn aus den Speilöchern („Ponoren") das subterrane Wasser austritt, um die „Poljen" und leeren Seemulden anzufüllen.

[3]) H. Berger, a. a. O., S. 567 ff.

E. Sueß[1]) einen lapidaren Ausspruch: Der Erdball sinkt ein, das Meer folgt nach. Und Ablagerungen bedingen den Austritt. Ist dem so, dann verdient Posidonius in der Geschichte der Tektonik einen Ehrenplatz, und seine Erklärung der Meerestransgression wäre ohne Zweifel die rationellste gewesen — diejenige, die auch von der fortgeschrittenen Wissenschaft unserer Tage in vielen Fällen den Verschiebungen der Grenzlinie zwischen Meer und Festland zu grunde gelegt wird[2]).

## § 4. Wechselwirkung zwischen Himmel und Erde.

Es bleibt, wie wir sahen, noch eine wichtige Frage übrig: Dachte das Altertum überhaupt daran, eine andere als eine rein äußerliche Beziehung zwischen der astronomischen Periode und der sich in den wiederholten Überflutungen aussprechenden zu konstruieren? Der Gegenwart erscheint das so selbstverständlich, daß man analoge Bestrebungen auch bei der Vergangenheit voraussetzen zu müssen glaubt. Allein das Kausalitätsbedürfnis verschiedener Zeiten ist nicht das nämliche. Die Epizyklentheorie des Ptolemäus ist gewiß ein geometrisch-kinematisches Meisterstück, aber selbst Copernicus, der ja bekanntlich einen Teil dieses Rüstzeuges noch beibehielt[3]), nahm nicht den geringsten Anstoß an der für uns sinnlosen Annahme, ein materieller Körper könne sich auf der Peripherie eines Kreises um einen ideellen Mittelpunkt

[1]) E. Sueß, Das Antlitz der Erde, 2. Band, Prag-Wien-Leipzig 1888, S. 677 ff.

[2]) Aus dem späteren Mittelalter scheint auch eine abweichende Auffassung vorzuliegen, die einer Überprüfung bedürftig wäre. Wir lesen nämlich bei v. Zittel (a. a. O., S. 16), Alessandro Alessandri habe die periodischen Überschwemmungen auf Schwankungen der Umdrehungsachse der Erde zurückführen wollen. Allein wer wußte zwischen 1461 und 1523 etwas von der Rotation der Erdkugel um ihre Achse?

[3]) Den sehr verbreiteten Irrtum, der Begründer der heliozentrischen Weltanschauung habe endgültig mit Exzentren und Epizykeln aufgeräumt, berichtigt R. Wolf (Geschichte der Astronomie, München 1877, S. 238 ff.).

bewegen. So besteht anscheinend zwischen den beiden Teilen, in welche das Phantom der Apokatastasis zerfällt, zwar ein vollständiger Parallelismus, nicht aber ein ursächlich einigendes Band.

Man könnte zunächst darauf verfallen, dieses fehlende Band in der sogenannten Geographischen Astrologie der Griechen — und der in ihre Fußtapfen tretenden Römer — zu erblicken. Auf deren Bedeutung ist mit vollem Bewußtsein wohl erst von Boll[1]) unsere Aufmerksamkeit hingelenkt worden. Er benennt Hipparch, Hephästio, Ptolemäus, Vettius Valens, ferner Manilius (s. o.) und einige Araber, unter denen wieder Abû Mâsâr hervorsticht, als diejenigen Schriftsteller, aus denen man sich über jenen sonderbaren, darum aber von Manchen nicht minder hoch gewerteten Wissenszweig unterrichten könne. Der Endzweck desselben mag etwa so bestimmt werden: Die Länder und die sie bewohnenden Völker stehen unter der Einwirkung gewisser angebbarer Gestirne und Konstellationen. Diese Beeinflussung mußte dann also auch natürliche Gründe haben, und wenn demzufolge Gesetzmäßigkeiten zwischen Himmels- und Erdsphäre obwalteten, so konnten solche auch in dem uns hier allein angehenden Falle ihre Pflicht tun.

Diese Erwartung geht jedoch nicht in Erfüllung. Man staunt, mit wie wenig Geist, das muß offen zugestanden werden, gelehrte und gescheite Männer sich über das, bestünde es wirklich, so folgenschwere Problem hinweg setzen zu können wähnten. Es waren großenteils recht oberflächliche, ja nach unseren Begriffen läppische Vergleiche, die man zwischen den für die Namengebung der Sternbilder maßgebenden Sagen und den Örtlichkeiten auf der Erdoberfläche zog; Vergleiche, die

[1]) F. Boll, Die Erforschung der alten Astrologie, Neue Jahrb. f. d. klass. Altertum, Gesch. u. Literatur, I, 21. Band, S. 114. Indessen findet man auch nach dieser Richtung hin manch sehr Verwertbares in früheren Schriften (Uhlemann, Grundzüge der Astronomie und Astrologie der Alten, besonders der Ägypter, Leipzig 1857; Häbler, Astrologie im Altertum, Zwickau 1879, letztere in vielen Hinsichten wertvoll).

sich kaum je aus dem Bereiche des Mythologisch-Trivialen heraushoben. Carneades, an den sich gleichwohl Römer, Neuplatoniker und christliche Schriftsteller mit Vorliebe hielten, war eigentlich kein Freund dieser ganzen Richtung[1]). Auf ihn folgte Panätius, der für uns hier eine gewisse Bedeutung insoferne beanspruchen kann, als er ein Anhänger des Dogmas von der Unzerstörbarkeit des Kosmos war[2]) und folglich auch den astronomischen Einflüssen keine allzu große Tragweite zuerkannte. Es gehören ferner in diese Klasse von Autoren noch Ptolemäus[3]) und Firmicus Maternus[4]), aber weder bei ihnen, noch bei ihren arabischen Nachtretern[5]) begegnet man einem ernstlichen Versuche, die irdischen und astronomischen Geschehnisse durch mehr als durch bloße Worte zu verknüpfen. Darüber, wie sich im Altertum auch die Denkweise über die unmittelbar meteorologische Betätigung der Gestirne gewandelt hat, gibt Pfeiffer[6]) schätzbare Aufklärungen. Ursprünglich galt lediglich die zeitliche Übereinstimmung; gewisse Erscheinungen am gestirnten Himmel waren die tatsächlichen Vorboten des Eintretens gewisser Lufterscheinungen, aber nach und nach sollte diese Übereinstim-

[1]) Boll, Studien zu Claudius Ptolemäus (s. o.), S. 181 ff.

[2]) Gilbert, a. a. O., S. 236. „Panätius schloß sich der Lehre von der Vergänglichkeit der Welt nicht an".

[3]) Ptolemäus, Tetrabiblos, lib. II, cap. 1.

[4]) In Betracht zu ziehen ist das siebente Buch im „Liber Matheseos" dieses Spätrömers. Seine Hauptquelle ist Manilius (s. o.), aber sklavisch war er von ihr nicht abhängig. „Firmicus hatte rhetorische Bildung genug, um nicht nur abschreiben zu müssen", sagt Boll (Sphära; neue griechische Texte und Untersuchungen zur Geschichte der Sternbilder, Leipzig 1903, S. 401).

[5]) Am eingehendsten finden sich alle diese Fragen erörtert bei Abû Mâsâr (Boll, a. a. O., S. 413 ff.).

[6]) E. Pfeiffer, Studien zum antiken Sternglauben, Leipzig-Berlin 1916. Den Mittelpunkt der Gegensätzlichkeit bildet die Fragestellung: Verursachen („ποιεῖν") die Vorgänge in der Sternenwelt die Witterungsphänomene oder sind sie blos die sonst unbeteiligten Ankündiger, die zuverlässig anzeigen („ἐπισημαίνειν"), daß dies oder jenes in unserer Lufthülle sich ereignet?

mung auch eine kausale werden. Vorab die minder kritisch veranlagten Römer[1]) stellten sich auf diesen Standpunkt. Auch da warf aber niemand die schwierige Frage des warum? auf.

Wir sehen uns auf diesem Wege hingeleitet zu einem Endergebnis unserer Untersuchung, das wir etwa folgendermaßen zu formulieren berechtigt sind: Die griechische Apokatastasis wurde zugleich auf astronomische und physisch-geographische Perioden begründet, über die man sich klare und in einem bestimmten Sinne auch richtige Anschauungen gebildet hatte; ein zielbewußter Versuch dagegen, diese beiden Erscheinungskomplexe auch als innerlich zusammengehörig zu erkennen und zu erweisen, ist niemals unternommen worden. Die in langer Geistesarbeit gewonnene Einsicht, daß ein solches Bestreben schon deshalb aussichtslos gewesen wäre, weil die vermutete tellurische Periodizität in Wirklichkeit nicht vorhanden ist, stand der Antike nicht zur Verfügung, und so muß das Unterbleiben des Versuches eben doch als ein grundsätzlicher Mangel der in so mancher anderen Rücksicht wahrlich nicht gering zu schätzenden griechischen Naturwissenschaft anerkannt werden.

---

[1]) Hauptsächlich Vitruvius, Plinius und Columella, der den Aufgang Arcturs als Vorboten von Stürmen stigmatisiert. Der Agronom erinnert auch (v. Lasaulx, a. a. O., S. 39 ff.) an die von den Landleuten gelegentlich behauptete, astronomisch gedeutete Klimaänderung, will sie jedoch nicht gelten lassen. Die Araber freilich (Massudi, Alpetragius) dehnen diesen klimatischen Wechsel so weit aus, daß man sogar mit dem Übergange einer Erdgegend aus dem Zustande der Bewohnbarkeit in den entgegengesetzten zu rechnen hätte (Duhem, a. a. O., S. 66 ff.).

## Namen-Index.

# Über abnorme Hörbarkeit.

Von R. Emden.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 3. Juni 1916.

Durch zufällige, größere Explosionen, die Lufterschütterungen bei Vulkanausbrüchen und namentlich durch den Donner der schweren Geschütze im gegenwärtigen Kriege konnte mit Sicherheit festgestellt werden, daß von dem Gebiete normaler Hörbarkeit getrennt durch eine bis zu 100 Kilometer breite Zone des Schweigens sich häufig in einem begrenzten, wahrscheinlich in Windrichtung gelegenen Sektor (gleichzeitige Windbeobachtungen aus der Höhe liegen nicht vor) wieder ein Gebiet deutlicher Hörbarkeit einstellt. Bei der Belagerung von Antwerpen erstreckte sich das Gebiet normaler Hörbarkeit über eine Kreisfläche von rund 100 Kilometer Radius; in nordöstlicher Richtung begann dann in 160 Kilometer Entfernung eine neue Zone der Hörbarkeit, um bei 200 Kilometer am stärksten aufzutreten und in 230 Kilometer Entfernung wieder zu verschwinden. Die kühne Hypothese von dem Bornes, die Schallstrahlen durch eine akustisch dünnere, in Höhen von über 60 Kilometer angenommene Wasserstoffatmosphäre total reflektieren zu lassen, wurde durch W. Schmidt durch den Hinweis widerlegt, daß auf diesem Wege nur ein verschwindend kleiner Bruchteil der ausgesandten Schallenergie den Erdboden wieder erreichen kann. Von verschiedenen Seiten wurden mit der Höhe wechselnde Windströmungen zur Erklärung beigezogen, ohne aber diesem Gedanken die wünschenswerte, präzise Fassung zu geben.[1]) Ich werde im folgenden zeigen, daß durch

[1]) Siehe Anmerkung am Schlusse.

die normalen, mit der Höhe sich stetig ändernden Temperaturen und Windgeschwindigkeiten die beobachteten, scheinbar abnormen Verhältnisse sich qualitativ und quantitativ vollständig erklären lassen.

Jede Strahlung bewegt sich bekanntlich in Gebieten stetig veränderlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c$ in stetig gekrümmten Bahnen. Ist das durchstrahlte Medium horizontal geschichtet, so ist der Krümmungsradius $\sigma$ der einfach gekrümmten Bahnkurve

$$\text{1)} \qquad \sigma = -\frac{c}{\left(\frac{dc}{d\sigma}\right)} = -\frac{c}{\frac{dc}{dz}\sin i}$$

$\left(\frac{dc}{d\sigma}\right)$ ist der Gradient von $c$ parallel $\sigma$, $z$ die nach oben gerichtete Vertikale, $i$ der Winkel der Wellennormalen mit der Vertikalen; $\sigma$ selbst und der Gradient $\frac{dc}{dz}$ sind entgegengesetzt gerichtet. Aus 1) folgt bekanntlich, daß längs des Strahles

$$\text{2)} \qquad \frac{c}{\sin i} = \text{konst.} = A$$

sein muß. In einem vollkommenen Gase, das der Zustandsgleichung $pv = RT$ folgt, ist $c = \sqrt{\varkappa RT}$. Die Krümmung eines Schallstrahles in der Atmosphäre ist durch die Temperaturverteilung längs der Vertikalen gegeben.

Gegeben sei eine polytrope Atmosphäre von der Klasse $n$. Dann ändert sich die Temperatur linear mit der Höhe nach dem Gesetze

$$\text{a)} \qquad dT = -\frac{g\,dz}{(n+1)R}$$

und die Höhe der polytropen Atmosphäre ist

$$\text{b)} \qquad H_n = \frac{(n+1)RT}{g}$$

Für $n = 0$ und $T = 273$ ist $H_0 = 8000$ m. Zu Temperaturgradienten zwischen $0{,}85^0$ und $0{,}49^0$ auf 100 m gehören $n$ zwischen 3 und 6 und Höhen $H_n$ zwischen 32000 und 56000 m; für $T = 273$.

Dann ergibt sich leicht

$$\sigma = + \frac{2 H_n}{\sin i} \tag{3}$$

Das heißt: In jeder polytropen Atmosphäre ist an jeder Stelle der Krümmungsradius des horizontal streichenden Strahles gleich der doppelten Höhe der polytropen Atmosphäre. Für den Strahl folgt aus 2) die Gleichung

$$\operatorname{tg} i = \frac{dx}{dz} = \frac{c}{\sqrt{A^2 - c^2}}.$$

die sich leicht integrieren läßt und eine Cykloide ergibt. Eine einfachere Bahnkurve folgt, wenn man in $c$ (mit genügender Genauigkeit) $\left(\frac{z}{H_n}\right)^2$ gegen 1 vernachlässigt. Dann ergibt sich die Kettenlinie

$$z = -2 H_n + 2 H_n \frac{e^{\frac{x}{2 H_n}} + e^{-\frac{x}{2 H_n}}}{2} \tag{4}$$

$H_n$ gebildet an der Stelle $x = 0$, $z = 0$. Handelt es sich um keine zu großen Spannweiten, so kann die Kettenlinie durch den Krümmungskreis vom Radius $\sigma = 2 H_n$ ersetzt werden. Liegt die Schallquelle auf dem Erdboden, so beschreibe man von einem um die Strecke $2 H_n$ höher gelegenen Punkte den die Erde tangierenden Kreisbogen. Sieht man von Störungen durch den Erdboden, sowie von Beugungserscheinungen an dieser Grenzkurve ab, so ist das Gebiet zwischen beiden eine Zone des Schweigens. Sie beginnt für ein Ohr in der Höhe $z\,m$ in einer Entfernung $D = \sqrt{2 \cdot 2 H_n \cdot z}$, für $z = 1,5\,m$ in rund $D = {}^1/_2$ Kilometer. Ein Wind von konstanter Stärke würde, wie sich aus den unten gegebenen Formeln folgern läßt, die Grenzkurve in Windrichtung niederdrücken, in entgegengesetzter Richtung heben. Für gleiche Höhe wird auf der Leeseite die Zone der Hörbarkeit wachsen, auf der anderen Seite abnehmen. Stets aber würde sich die Grenzkurve nach größeren Höhen verlängern, eine neue Zone der Hörbarkeit könnte nicht auftreten. Temperaturzunahme nach oben könnte den in die Höhe strebenden Strahl wieder nach der Tiefe umlenken; in der dazu erforderlichen Stärke würde sie aber nur äußerst selten vorhanden sein. Im Folgenden soll gezeigt werden, daß die in der Regel auftretende Windzunahme nach oben die Temperaturabnahme überkompensieren und den Strahl wieder in die Tiefe leiten kann.

Daß Windzunahme nach oben einen horizontal streichenden Strahl nach der Tiefe abbiegen kann, ist leicht einzusehen. Ein vertikal stehendes Element der Wellenfläche wird durch den Wind mitgeführt, die obere Kante rascher wie die untere Kante. Die Wellennormale neigt sich nach abwärts und der Strahl geht in die Tiefe. Die Größe und Lage des Krümmungsradius läßt sich, falls die Schallgeschwindigkeit $c$ (Temperatur) und die Geschwindigkeit $w$ des horizontal streichenden Windes beide mit der Höhe sich ändern, leicht ermitteln (Fig. 1).

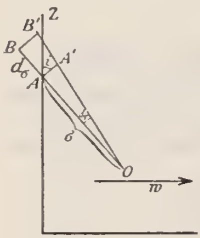


Fig. 1

Die Normale eines Elementes $AB$, $AB = d\sigma$, der Wellenfläche bildet mit der Vertikalen den Winkel $i$. Die untere Kante $A$ verschiebt sich in der Zeit $dt$ in Richtung der Normalen um die Strecke $(c + w \sin i)\, dt = W dt$, die obere Kante $B$ um die Strecke $\left(W + \left(\frac{dW}{d\sigma}\right) d\sigma\right) dt$. Nach Ablauf der Zeit $dt$ hat sich das Element um den Winkel $d\varphi = \left(\frac{dW}{d\sigma}\right) dt$ gedreht, und wir erhalten, da $AA' = W dt = \sigma d\varphi = \sigma \left(\frac{dW}{d\sigma}\right) dt$

$$5)\quad \sigma = -\frac{W}{\left(\frac{dW}{d\sigma}\right)} = -\frac{W}{\frac{dW}{dz}\sin i} = -\frac{c + w \sin i}{\frac{d(c + w \sin i)}{dz}\sin i}.$$

In einer polytropen Atmosphäre von der Klasse $n$ können wir nach a), b) den Temperaturgang darstellen in der Form

$$T = T_0\left(1 - \frac{z}{H_n}\right).$$

$H_n$ die im Niveau $z = 0$ errichtete Höhe der polytropen Atmosphäre. Daraus folgt für die Schallgeschwindigkeit der Gang

$$c = \sqrt{\varkappa R T} = c_0 \sqrt{1 - \frac{z}{H_n}} = c_0\left(1 - \frac{z}{2 H_n}\right) = c_6(1 - \beta z);$$

$$\beta = \frac{1}{2 H_n}.$$

Denn die quadratischen Glieder können mit genügender Genauigkeit vernachlässigt werden. Setzen wir weiter die Windgeschwindigkeit linear mit Höhe an in der Form

$$w = w_0(1 + \alpha z),$$

so folgt

6) $$\sigma = -\frac{w_0(1 + \alpha z)\sin i + c_0(1 - \beta z)}{(w_0 \alpha \sin i - c_0 \beta)\sin i}.$$

Haben wir es nur mit nahezu horizontal streichenden Strahlen zu tun, so kann $\sin i = 1$ gesetzt werden

6') $$\sigma = -\frac{w_0 + c_0 + (w_0 \alpha - c_0 \beta) z}{w_0 \alpha - c_0 \beta}$$

und da die Gradienten kleine und entgegen gerichtete Größen sind, folgt schließlich mit hinreichender Genauigkeit

7) $$\sigma = -\frac{w_0 + c_0}{w_0 \alpha - c_0 \beta}.$$

Je nachdem $w_0 \alpha \gtrless c_0 \beta$ überwiegt die Wind- oder die Temperaturverteilung, ist der Krümmungsradius nach unten oder nach oben gerichtet. Bereits schwache Windzunahme nach oben kann die Temperaturabnahme kompensieren. Denn zu dem starken Temperaturgradienten $0{,}85^\circ/_{100}\,m$, $n = 3$, gehört ein $H_n$ von rund $33000\,m$, $\beta = \frac{1}{66000}$. Für den kompensierenden Windgradienten ergibt sich $w_0 \alpha = \frac{330}{66000} = \frac{1}{200}$. Eine Windzunahme von nur 5 m pro Kilometer würde bereits einen geradlinigen Strahl liefern.

Formel 6) gilt für das Verhalten des Strahles in Windrichtung; in der entgegengesetzten Richtung haben wir $w_0$ mit neg. Vorzeichen anzusetzen; die beiden Gradienten unterstützen sich, wodurch sich stark gekrümmte Strahlen ergeben können. Auf gleichmäßigen Wind können wir durch $a = 0$ spezialisieren.

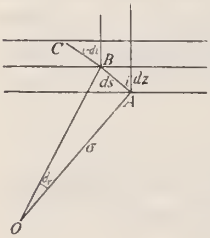


Fig. 2

Die Kurve, deren Krümmungsradien durch 5) dargestellt werden, kann auch auf folgendem Wege entwickelt werden (Fig. 2). Wir betrachten 2 aufeinander folgende dünne Schichten von der Dicke $dz$. Zwei aufeinander folgende Wellennormalen $AB$ und $BC$ von der Länge $ds$ bilden mit der Vertikalen die Winkel $i$ und $i + di$. Die Figur liefert die Beziehungen

$$ds = -\sigma d\varphi = -\sigma di = \frac{dz}{\cos i}; \quad \sigma \text{ war} = -\frac{W}{\frac{dW}{dz}\sin i}.$$

Daraus folgt
$$\frac{dW}{W} = \frac{\cos i\, di}{\sin i}$$

und schließlich

$$\text{8)} \qquad \frac{W}{\sin i} = \frac{c}{\sin i} + w = \text{konst.} = A.$$

Für $w = 0$ ergibt sich Gl. 2). Diese Gleichung liefert das Brechungsgesetz, falls Schallgeschwindigkeit und Windgeschwindigkeit gleichzeitig sich ändern.

Der Kurvenzug, der durch die Gl. 8) definiert ist, wird gebildet durch die aufeinander folgenden Elemente der Wellennormalen und darf nicht mit dem Strahle, dem Wege des Energietransportes, der für unser Problem in erster Linie in Betracht kommt, verwechselt werden. Jeder Wind trennt Normalengang und Strahlengang. Dies läßt sich am einfachsten durchblicken, wenn eine ebene Welle, die bei konstantem Winde vertikal nach oben geht, vorliegt. Die Ebene bleibt sich parallel, alle Normalenelemente sind vertikal gestellt; aber durch den Wind getragen verschieben sich die Ebenen in sich selbst, und jedes Ebenenelement verschiebt sich auf einer Geraden, dem Strahle, die in Windrichtung um den Winkel $i''$, $\operatorname{tg} i'' = \frac{w}{c}$

geneigt ist. (In diesem Falle lassen sich die Elemente der zusammengehörigen Elemente der Wellennormalen nicht mehr zu Bahnen zusammensetzen.)

Um in dem allgemeinen Falle den Zusammenhang zwischen Normale und Strahl, sowie die Strahlgleichung festzustellen, leiten wir das Brechungsgesetz 8) nochmals ab für den Übergang zwischen 2 Schichten I und II, wobei in jeder Schicht konstante Geschwindigkeiten $c$ und $w$, herrschen sollen, die sich an der Berührungsstelle sprungweise ändern (Fig. 3).

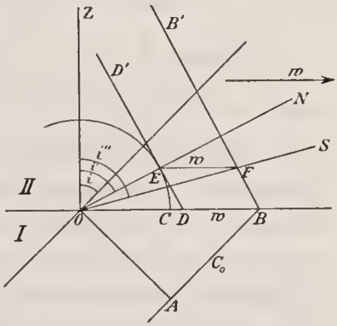


Fig. 3

In diesem Falle kann die Schicht I auch als ruhend angenommen werden.

Eine ebene Welle $OA$ falle unter einem Winkel $i$ ein; ihre Geschwindigkeit sei $AB = c_0$. In der Schicht II schlagen wir mit der herrschenden Geschwindigkeit $OC = c$ um $O$ einen Kreis, gehen von $B$ um die Strecke $BD = w$ dem Winde entgegen und legen von $D$ die Tangente an den Kreis; der Berührungspunkt sei $E$. (Fällt der Punkt $D$ in den Kreis, also links von $c$, so ist die Tangente nicht mehr möglich, und es tritt Totalreflexion ein.) Nach Ablauf der Zeit 1 hat sich unter Einfluß des Windes $DD'$ parallel mit sich selbst nach $BB'$ verschoben. $BB'$ stellt die gebrochene Wellenfront dar, die Wellennormale $N$, die Verlängerung von $OE$, bildet mit der Vertikalen den Winkel $i'$, und die Konstruktion gibt das Brechungsgesetz der Normalen

$$\frac{c}{\sin i'} + w = \frac{c_0}{\sin i} = \text{konst.}$$

Da die linke Seite der Gleichung konstant bleibt, wenn wir $c$ und $w$ beliebig ändern, und $w$ die Relativgeschwindigkeit der Schicht II gegen die Schicht I bedeutet, haben wir auch bei dem Durchgang durch beliebig viele Schichten wiederum Gl. 8)

$$8)\qquad \frac{c}{\sin i'} + w = \frac{c_0}{\sin i} + w_0 = \text{konst.} = A.$$

(Grenzen 2 gleich temperierte Schichten, $c = c_0$, aneinander, so tritt Totalreflexion ein, wenn $w - w_0 > c\left(\frac{1}{\sin i} - 1\right)$ wird. Für flach einfallende Wellen genügen dazu bereits kleine, sprungweise Änderungen der Windgeschwindigkeit, für $i = 80^0$ schon $w - w_0 = 5\ ^{\mathrm{m}}/\mathrm{sec}$. Solche akustische Schlieren, hervorgebracht durch aneinander grenzende Konvektionsströme, können in der stark durchmischten Gewitteratmosphäre wesentlich zum Rollen des Donners beitragen.)

Den zur Normalen $N$ gehörigen Strahl $S$ zu finden gehen wir von $E$ in Richtung des Windes um die Strecke $w$ vorwärts, treffen die Wellenfront in $F$ und erhalten durch $OF$ den Strahl $S$. ($OF = OE + EF = c + w$), der mit der Vertikalen den Winkel $i''$ bildet. Die Figur und Gl. 8) ergeben

$$9)\qquad \operatorname{tg} i'' = \frac{c \sin i' + w}{c \cos i'} = \frac{c^2 + (A - w)\, w}{c\sqrt{(A - w)^2 - c^2}}.$$

Somit erhalten wir die Differentialgleichungen

für die Normalen

$$10)\qquad \frac{dx}{dz} = \operatorname{tg} i' = \frac{c}{\sqrt{(A - w)^2 - c^2}},$$

für die Strahlen

$$11)\qquad \frac{dx}{dz} = \operatorname{tg} i'' = \frac{c^2 + (A - w)\, w}{c\sqrt{(A - w)^2 - c^2}}$$

$$w = w_0(1 + az);\ c = c_0(1 - \beta z);\ \beta = \frac{1}{2H_n}.$$

Beide Gleichungen lassen sich leicht integrieren, falls wir in $w$ und $c$ Glieder mit $\left(\frac{z}{H_n}\right)^2$ gegen 1 vernachlässigen. Den Anfangspunkt der Koordinaten verlegen wir in die horizontale Stelle des Strahles. Dann folgen mit hinreichender Genauigkeit für die Normale

$$12)\quad z = -\frac{c_0}{c_0\beta - w_0\alpha} + \frac{1}{2}\frac{c_0}{c_0\beta - w_0\alpha}\left(e^{\frac{c_0\beta - w_0\alpha}{c_0}x} + e^{-\frac{c_0\beta - w_0\alpha}{c_0}x}\right)$$

und für den Strahl

$$13)\qquad Bx = \lg\left[\sqrt{y^2 - 1} + y\right] + \frac{w_0}{c_0}\sqrt{y^2 - 1}.$$

$$y = 1 + Bz; \qquad B = \frac{c_0\beta - w_0\alpha}{c_0}.$$

Damit ist die Aufgabe gelöst, die Zonen des Schweigens und der Hörbarkeit zu trennen. Liegt die Schallquelle am Erdboden, so ziehe man durch dieselbe den die Erde tangierenden Strahl und verfolge ihn mit Hülfe der Gl. 13 durch die abteilungsweise geschichtete Atmosphäre hindurch, wobei dafür zu sorgen ist, daß an den Schichtgrenzen die Tangentenrichtungen zusammenfallen.

Ich gebe ein einfaches Beispiel. Die Atmosphäre ist nach der Polytropen $n = 4{,}75$ gebaut, der Temperaturgradient beträgt $0{,}62^0/_{100}$ m, $H_n$ rund 46000 m. Auf der Erde liegt eine windstille Zone, die sich bis 350 m Höhe erstreckt. Dann beginne stetig Wind einzusetzen, dessen Geschwindigkeit auf je 1000 m Erhebung um 4 m/sec zunimmt und so in der Höhe 3350 m, die der Grenzstrahl erreicht, 12 m/sec beträgt. Die Schallquelle (Fig. 4) liege auf dem Erdboden in $A$. Wir schlagen durch $A$ mit einem Radius $2H_n = 92000$ m den die Erde tangierenden Kreisbogen, der in einer Entfernung $AB = 8$ Kilometer die obere Schicht erreicht. In diese unter einem Winkel $85^0$ eindringend kulminiert der Strahl in einer Entfernung $BC =$ 72,6 Kilometer in einer Höhe von 3350 m und steigt von da auf symmetrisch gelegenem Wege wieder zur Erde herab, die er in $E$ erreicht. (Der zugehörige Normalenbogen kulminiert in gleicher Entfernung 300 m höher.) Mit den in Wirklichkeit häufig beobachteten Entfernungen von rund 150 Kilometern beginnt in $E$ in einer Entfernung $OE = 161$ Kilometern eine neue Zone der Hörbarkeit. Die geringe Höhe, bis zu welcher der Grenzstrahl ansteigt, bewirkt, daß in $E$ die Intensität des Schalles nicht quadratisch, sondern angenähert linear mit der Entfernung abgenommen hat. In der zwischenliegenden Zone des Schweigens können Gebirge bis zur Höhe der Grenzkurve aufsteigen, ohne die Hörbarkeit in $E$ zu beeinträchtigen. Da der Grenzstrahl sich periodisch verlängern läßt, sind weitere, durch Zonen des Schweigens getrennte Gebiete der Hörbarkeit nicht ausgeschlossen.

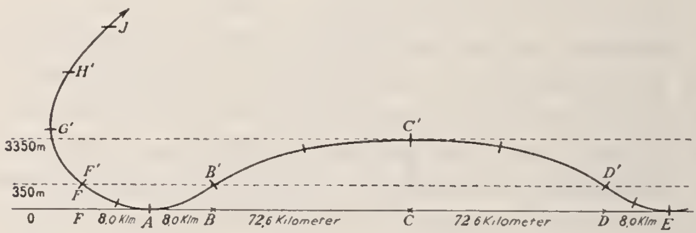



Fig. 4

Gänzlich verschieden sind die Verhältnisse auf der Luvseite von der Entfernung $OF$ an, in welcher der Grenzstrahl in die obere Schicht eindringt. Der Strahl krümmt sich stark, da Windgradient und Temperaturgradient sich unterstützen. Das Element der Wellenfläche des Grenzstrahles, das bei $F'$ noch beinahe senkrecht steht ($i = 85^0$), wird allmählich horizontal gestellt, um durch die Schallbewegung nach oben, durch den Wind in der Horizontalen fortgeführt, die Bahn $G'$, $H'$, $J'$ zurückzulegen. Eine neue Zone der Hörbarkeit ist auf dieser Seite nicht zu erwarten, der Schall erfüllte Raum ist von der Kurve $J'$, $H'$, $F'$, $A$, $B'$, $C'$, $D'$, $E$ umschlossen.

Liegt die Schallquelle nicht unmittelbar auf dem Erdboden auf, oder ist dieser nicht horizontal, so sind die Verhältnisse wesentlich verwickelter. An Stelle des Grenzstrahles ergibt sich eine Katakaustik und in dem Gebiete der Hörbarkeit gelegene Orte können durch verschiedene Schallstrahlen erreicht werden, so daß, in Analogie zur Luftspiegelung, ein Schallsignal sich in zeitlich getrennte Signale auflösen kann. Über diese Verhältnisse soll an anderer Stelle berichtet werden.[1])

[1]) Erst bei Durchsicht der Korrektur werde ich mit einer Publikation: S. Fujiwhara, On the obnormal propagation of sound wave in the Atmosphere; The Bulletin of the Central Meteorological Observatory of Japan, vol. II, No. 1, 1912, bekannt, die in anders geführter, theoretischer Behandlung qualitativ ebenfalls zu den oben mitgeteilten Ergebnissen führt. Ich werde an anderer Stelle auf sie zurückkommen, will aber schon hier auf das reiche Beobachtungsmaterial hinweisen, wonach bei Vulkanausbrüchen in Japan der Sektor der abnormen Hörbarkeit stets in jener Richtung liegt, in welcher die Eruptionsprodukte durch den Wind fortgeführt werden und niederfallen.

# Über die Intensitätsverteilung im Viellinienspektrum des Wasserstoffs.

Von K. Glitscher.

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 3. Juni 1916.

Das Bohrsche Modell des Wasserstoffatoms, in dem bekanntlich ein Elektron in quantenhaft ausgezeichneten Bahnen einen positiv geladenen Kern umläuft, hat in letzter Zeit in der Erklärung von Erscheinungen der Lichtemission neue Erfolge gezeitigt. Herr Sommerfeld[1]) vermochte durch eine Ausdehnung des Quantenansatzes auf zwei Freiheitsgrade und durch Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Elektronenmasse die Feinstruktur der „Wasserstoff-ähnlichen" Linien in guter Übereinstimmung mit dem Experiment zu erklären, sogar schwächere Linien voraus zu sagen, die dann durch das Experiment gefunden wurden. Herr Epstein[2]), und in etwas anderer Weise Schwarzschild[3]), gaben eine Theorie des Stark-Effekts, die auch über dessen feinere Einzelheiten Rechenschaft ablegt.

Diese Erfolge lassen erhoffen, daß wir auch mit Hülfe des Bohrschen Modells Aufschluß über den Emissionsvorgang beim zweiten oder Viellinienspektrum des Wasserstoffs erhalten werden. Ein etwaiger Einwand, daß ein so einfaches Gebilde aus Kern und Elektron keine solche Menge von Linien veranlassen könne, dürfte durch die obigen Untersuchungen widerlegt sein. Freilich dürfen wir kaum annehmen, daß Kreis-

---

[1]) Diese Berichte, 1915, S. 425.

[2]) Phys. Zeitschr., 1916, S. 148.

[3]) Sitzungsber. d. K. Pr. Akad. d. Wissensch., 1916, S. 548.

und Ellipsenbahnen des Elektrons, die Veranlassungen zur Balmer-Serie, zur Erklärung des zweiten $H$-Spektrums ausreichen werden. Die Überlegungen des Herrn Stark[1]) sprechen ja auch für verschiedene Träger der beiden $H$-Spektren. Er nimmt das positive $H$-Atomion als Träger der Balmer-Serie an, die in den Kanalstrahlen bewegte Intensität zeigt, während das zweite $H$-Spektrum, das keine solche zu besitzen scheint, vom neutralen Atom verursacht sein soll. Im Zusammenhang hiermit machte mich Herr Sommerfeld darauf aufmerksam, daß gewisse Spiralbahnen in der Nähe des Kerns möglich sind, mit denen sich also das Modell wie ein neutrales $H$-Atom verhält. Ich halte es auch nicht für ausgeschlossen, daß eine Spaltung der $H_2$-Moleküle zu $H$-Atomen bzw. der umgekehrte Vorgang der Wiedervereinigung die Veranlassung zur Emission von Linien sein kann. Berechnungen, die in diesem Sinne von Nicholson[2]) und in etwas anderer Weise auch von mir angestellt worden sind, haben jedoch zu keinem sicheren Resultat geführt. Daß sehr verschiedenartige Bahnen bei der Erzeugung des Viellinienspektrums mitwirken können, scheint mir durchaus möglich in Hinsicht auf den komplexen Charakter des Spektrums, in dem eine große Anzahl von Linien, die sich nach Fulcher[3]) und Croze[4]) zum Teil zu Banden vereinigen, den Zeeman-Effekt nicht, andere hingegen einen normalen und wieder andere einen abnormalen zeigen.

Die vorliegende Mitteilung soll auf eine Gesetzmäßigkeit hinweisen, die in der Intensitätsverteilung im $H$-Viellinienspektrum vorzuliegen scheint und vielleicht den Anhalt für eine künftige Spektralformel dieses Spektrums bieten dürfte.

Im Gebiete von 6527 Å-E. bis 2483 Å-E. sind die meisten $H$-Linien von Watson[5]) nach Wellenlänge und Intensität ge-

---

[1]) Ann. d. Phys., 1916, S. 179.

[2]) Monthly Not. of the Roy. Astr. Soc., vol. LXXIV, p. 425.

[3]) Phys. Zeitschr., 1912, S. 1140.

[4]) Annales de Physique, 9. série, t. 1, S. 37.

[5]) Proc. of the Roy. Soc., vol. 82, S. 189 (auch in Kaysers Handbuch, Bd. V).

nau gemessen worden. Ich habe auf Anregung des Herrn Sommerfeld die Wellenlängen in Schwingungszahlen umgerechnet und in einem Intervall von je 100 zu 100 Schwingungszahlen die Gesamtintensität der diesem Bereich zugehörigen Linien als Ordinaten aufgetragen. Die Endpunkte wurden durch einen Zug gerader Linien verbunden, diese Geraden zwischen zwei aufeinander folgenden Endpunkten halbiert und die neu gewonnenen Punkte durch einen Kurvenzug miteinander verbunden. Die so entstandene Kurve ist das schematische Bild der Intensitätsverteilung in dem von Watson gemessenen Gebiet und würde etwa direkt dadurch zu erhalten sein, daß man unter Ausschaltung der Wirkung der Balmer-Linien den ganzen Spektralbereich mit größerer Spaltbreite aufnimmt und ausphotometriert. Es ist jedoch zu beachten, daß infolge der unvermeidbaren Willkür, mit der die Mittelung vorgenommen werden mußte, die Maxima und Minima usw. der Kurve um etwa ± 50 Schwingungszahlen maximal verschoben sein können.

In dem langwelligeren Teil liegen sehr wenige Messungen vor. Es scheint leider nicht festgestellt zu sein, wie weit dort die Linien reichen. In einer Arbeit von Croze[1]) fanden wir eine Tabelle von Linien, die er zwischen 8000 und 6850 Å-E. gemessen hat, ferner eine Tabelle, die Linien von 6850 bis zu 6567 Å-E. nach Messungen von Piazzi-Smith enthält und somit die Verbindung zwischen den Messungen von Croze und Watson herstellt. Diese Messungen im Rot scheinen nicht besonders genau zu sein, doch kommt es für unseren jetzigen Zweck nicht darauf an, ebensowenig darauf, ob die Intensitäten in unserer Figur richtig auf denselben Maßstab reduziert sind wie die von Watson. Natürlich ist die Reduktion so gut vorgenommen, wie es nach den Angaben von Croze über das Verhältnis seiner Intensitätsbezeichnung zu der von Watson möglich war.

Wenn man sich nun die Schwingungszahlen der Balmer-Linien $H_\alpha$, $H_\beta$, $H_\gamma$, $H_\delta$, wie sie auf der Ab-

[1]) Ann. de Physique, 9. série, t. 1, p. 61.

szissenachse der Figur aufgetragen sind, auf einen Papierstreifen überträgt und $H_\alpha$ an das erste Hauptmaximum $\alpha$ schiebt, findet man, daß gleichzeitig auch $H_\beta$, $H_\gamma$ und $H_\delta$ auf die besonders hervortretenden Maxima $\beta$, $\gamma$ und $\delta$ fallen. Die Hauptbuckel sind noch von Nebenbuckeln begleitet. Legt man $H_\alpha$ an den Nebenbuckel $\alpha'$ von $\alpha$, so koinzidieren $H_\beta$ und $H_\gamma$ mit $\beta'$ und $\gamma'$. Man könnte vielleicht noch eine dritte Gruppe von Buckeln $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ mit den entsprechenden Abständen der Balmer-Linien feststellen. Ferner sind in der Figur eine Anzahl von Buckeln durch Klammern zu Paaren zusammengefaßt, die ziemlich genau die Schwingungsdifferenz $H_\zeta - H_\varepsilon = N\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2}\right)$ aufweisen, wobei $N = 109675$ die Rydbergsche Zahl bedeutet. Unsere Figur bricht bei $\nu = 27400$ Schwingungszahlen ab. Wo die wirkliche Grenze liegt, ist nicht festgestellt. Die vorliegenden Erfahrungen scheinen der durch unsere Figur nahe gelegten Annahme nicht zu widersprechen, daß die Grenze des Viellinienspektrums in ähnlicher Weise gegenüber der des Balmer-Spektrums nach Violett verschoben ist wie die Intensitätsmaxima gegen die Balmer-Linien; sie liegt dann ungefähr bei $\nu = 28900$. Freilich werden von Watson auch noch einige Linien mit Schwingungszahlen bis zu $\nu = 40000$ gemessen, die aber außer Zusammenhang mit unserer Figur als kleine Einzelerhebungen erscheinen würden und deshalb nicht aufgezeichnet sind. Sie können auch nicht mit Sicherheit dem Wasserstoff zugeschrieben werden. Ames und Dufour[1]) finden keine Linie über $\nu = 27400$.

Nach all dem scheint ein Zusammenhang zwischen dem Balmer- und Viellinienspektrum zu bestehen. Formelmäßig lassen sich vorstehende Gesetzmäßigkeiten durch den Ansatz

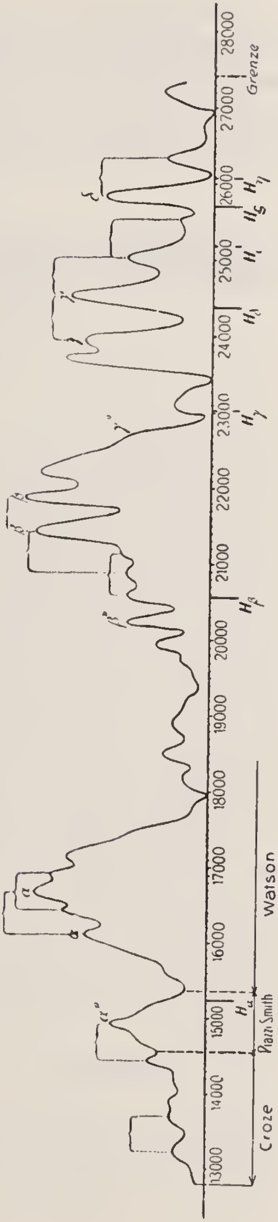
$$\nu = N\left(X - \frac{1}{m^2}\right),$$

wiedergeben. Hierin bedeutet $X$ eine Zahl, die etwa zwischen

[1]) Kaysers Handbuch d. Spektr. V, S. 503.

den Grenzen 0,225 und 0,275 variieren muß, und worin $m = 3$ zu setzen ist, wenn man die Schwingungszahlen der in der ersten Haupterhebung zwischen $\nu = 12500$ und $\nu = 18000$ gelegenen Einzellinien darstellen will. Für $m = 4, 5, 6 \ldots$ würde man die im Bereiche der 2., 3., 4. usw. Haupterhebung befindlichen Linien erhalten. Wenn man $X$ einen festen Wert gibt und $m$ ganzzahlig variiert, kommt man auf verschobene Balmer-Serien. Solche sind aber nicht festgestellt worden. Die Lagen der Hauptmaxima der gemittelten Intensität dagegen gehorchen einer Formel von obigem Typus mit bestimmtem $X$, wobei für die Buckel $\alpha, \beta, \gamma \ldots X = 0{,}263$, für $\alpha', \beta', \gamma'$ $X = 0{,}258$ zu setzen ist.

Im Sinne des Bohrschen Modells würde der Term $N \cdot X$ einem ausgedehnten tieferen Energie-Niveau entsprechen, auf welches das Elektron von den höheren Balmer-Niveaus $N \frac{1}{m^2}$ bei der Emission heruntersinkt. Um eine Erklärung für die Einzellinien zu haben, wird man das Niveau als aus vielen feinen Stufen bestehend ansehen müssen, wobei diese Stufen noch unbekannten, aber quantenhaft möglichen Bahnen um den Kern entsprechen würden.



Schließlich sei noch bemerkt, daß auch die Intensitäten der von Lyman in der Schumann-Region gemessenen $H$-Linien nach dem oben beschriebenen Verfahren aufgezeichnet wurden in der Erwartung, daß die Hauptintensitätsbuckel mit verschobenen ultravioletten Serienlinien von der Schwingungszahl

$$\nu = N\left[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{m^2}\right]$$

zusammenfallen würden. Dies bestätigte sich aber nicht.

# Zur Quantentheorie der Spektrallinien, Ergänzungen und Erweiterungen.

Von A. Sommerfeld.

Vorgetragen in der Sitzung am 4. November 1916.

Ende des vorigen Jahres habe ich der Akademie zwei Arbeiten über die Theorie der Spektrallinien vorgelegt[1]), deren Inhalt in den Annalen der Physik[2]) inzwischen weiter ausgeführt wurde. Im folgenden erlaube ich mir, einige Ergänzungen und Erweiterungen zu demselben Gegenstande zu bringen.

§ 1 handelt von der Form des Quantenansatzes, welcher der Theorie der Spektrallinien und allgemeiner der Behandlung von Systemen mehrerer Freiheitsgrade zu Grunde zu legen ist. Nach Hervorhebung der Verschärfung und Vereinfachung, welche die Arbeiten von Schwarzschild und Epstein gegenüber meiner ursprünglichen Formulierung des Quantenansatzes gebracht haben, gehe ich auf einen Abänderungsvorschlag ein, den Planck aus seiner Strukturtheorie des Phasenraumes gefolgert hat. Nach Ausweis der Messungen an den Balmerschen Linien bewährt sich derselbe wider Erwarten nicht. Den Grund hiefür sehe ich in einer inkonsequenten Handhabung der Relativitätstheorie; da nämlich in den Grenzfällen der Kepler-

---

1) Sitzungsberichte 1915, pag. 425 und 459. Im folgenden als Ak. I und II zitiert.

2) Ann. d. Phys. 51, pag. 1, 1916. Teil I, Theorie der Balmerschen Serie. Teil II, Die Feinstruktur der Wasserstoff- und der Wasserstoffähnlichen Linien. Teil III, Theorie der Röntgen-Spektren. Im folgenden als Ann. I, II und III zitiert.

Bewegung, auf die sich der Plancksche Abänderungsvorschlag stützt, die Masse des Elektrons über alle Grenzen wächst, darf die Masse des Kerns nicht mehr als überwiegend und der Kern nicht mehr als ruhend angesehen werden. Berücksichtigt man dieses, so verflüchtigt sich die scheinbar nicht unterschreitbare untere Grenze für das Impulsmoment und geht der Plancksche Quantenansatz in den meinigen über.

§ 2 knüpft an eine interessante Bemerkung von R. Swinne über das $M$-Dublett der Röntgen-Spektren an und stellt dieses in Parallele zu dem von mir untersuchten $L$-Dublett. Für letzteres werden aus dem Beobachtungsmaterial von Friman weitere Beispiele beigebracht, indem einige in das Serienschema bisher nicht eingeordnete Linien als $\zeta$- und $\vartheta$-Linien erkannt werden. Der Swinnesche Nachweis des $M$-Dubletts veranlaßt mich, meine Nomenklatur der Terme abzuändern; ferne gehe ich auf Anregungen Kossels ein betr. die physikalische Bedeutung der Terme und die Auffassung des Kombinationsprinzips.

§ 3 bildet das Hauptstück der Arbeit. Daß die größere Verwicklung und Reichhaltigkeit der nicht-wasserstoff-ähnlichen Spektren auf die Abweichung des Atomfeldes dieser Elemente von dem Coulombschen Felde zurückzuführen sei, ist schon von Bohr vermutet worden. Da man jetzt die Methoden zur Behandlung des Coulombschen Atomfeldes in der Hand hat, kann man auch mit der Behandlung allgemeinerer Atomfelder Ernst machen. Es wird vorausgesetzt ein innerer Ring von Elektronen, welcher den Kern umgibt und eine Symmetrieebene (Äquatorebene) des Atoms definiert. Durch das Beispiel von *Li* und *He* wird wahrscheinlich gemacht, daß die Bahnen des $p$-, $d$- und $b$-Termes (des Termes der Hauptserie, der I. Nebenserie und der Bergmann-Serie) in der Symmetrieebene des Atoms verlaufen, während die Bahn des $s$-Termes (des Termes der II. Nebenserie) offenbar aus dieser Ebene heraustritt (das Gleiche gilt wahrscheinlich von dem $l$-Term der Röntgen-Spektren). Unter Beschränkung auf die ebenen äquatorialen Bahnen wird das Bewegungsproblem unter folgenden vereinfachenden Annahmen verhältnismäßig leicht und übersichtlich behandelt: die Ladung der inneren Elektronen wird gleichmäßig auf dem als kreisförmig vorausgesetzten inneren Ring verteilt; von der Rückwirkung des äußeren Elektrons auf den inneren Ring wird abgesehen.

Eine vollständige numerische Wiedergabe der Spektren, z. B. von *Li* und *He* wird man unter diesen Umständen nicht erwarten können. Trotzdem liefert die Theorie in qualitativer Hinsicht eine Reihe vielversprechender Ergebnisse. Wir bezeichnen als erste Näherung eine Behandlüng, bei der wir den Radius $a$ des inneren Rings als unendlich klein ansehen gegen den Radius $a_1$ des ersten Bohrschen Kreises beim Wasserstoffatom, bei der wir also alle Potenzen von $\frac{a}{a_1}$ vernachlässigen. Eine zweite Näherung besteht darin, daß wir die niedrigste auftretende Potenz $\frac{a^2}{a_1^2}$ beibehalten, eine dritte darin, daß wir auch noch $\frac{a^4}{a_1^4}$ berücksichtigen. Die aufeinander folgenden Potenzen von $\frac{a}{a_1}$ treten auf, wenn wir in naheliegender Weise das Atomfeld in eine Reihe nach Kugelfunktionen entwickeln. Es zeigt sich nun folgendes:

In erster Näherung ergibt sich die Balmersche Formel zur Darstellung des Serienterms, wie nicht anders zu erwarten war, in zweiter Näherung aber eine Formel vom Rydbergschen Typus, bei der die Ganzzahligkeit des Termnenners durch ein für jede Serie konstantes Korrektionsglied abgeändert wird, in dritter Näherung endlich eine Formel vom Ritzschen Typus, bei der zwei solche Konstanten benutzt wurden. Es ist sehr befriedigend, diese drei Stufen der empirischen Entwickelung nunmehr aus demselben Gesichtspunkt überblicken zu können.

Nach unserer Auffassung ist die ganze Zahl $m$, welche die aufeinander folgenden Glieder einer Serie unterscheidet, ebenso wie beim Wasserstoff, die Summe des azimutalen Quantums $n$ und des radialen Quantums $n'$: $m = n + n'$. Dabei ist $n$ innerhalb einer Serie konstant und wächst $n'$ von 0 bis $\infty$, und zwar ist für den $p$-Term $n = 2$, für den $d$-Term $n = 3$, für den $b$-Term $n = 4$. Diese Auffassung entspricht der fundamentalen Tatsache, daß $m$ in der Hauptserie alle Zahlen von 2 ab, in der I. Nebenserie von 3 ab, in der Bergmann-Serie von 4 ab durchläuft; sie wird in unserer Darstellung durch die einfachere Aussage zusammenfassend wiedergegeben, daß in allen Fällen $n'$ die Zahlen von 0 bis $\infty$ durchläuft.

Die Rydbergschen Korrektionsglieder $p$, $d$, $b$ für die Hauptserie, I. Nebenserie und Bergmann-Serie, sowie die von Ritz hinzugefügten Korrektionsglieder $\pi$, $\delta$, $\beta$ erweisen sich in unserer Darstellung insofern als Konstante, als sie von der veränderlichen Quantenzahl $n'$ unabhängig sind; dagegen hängen sie von der für jede Serie festen Quantenzahl $n$ ab, in dem Sinne, daß sie mit wachsendem $n$ schnell abnehmen. Dieser Umstand steht im Einklang mit der Erfahrungstatsache, daß zumal bei den Elementen von kleinerem Atomgewicht die Zahlen $p$, $\pi$ am größten, $d$, $\delta$ wesentlich kleiner, $b$, $\beta$ fast Null sind, oder, anders ausgedrückt, daß die I. Nebenserie wasserstoff-ähnlicher als die Hauptserie ist und die Bergmann-Serie fast wasserstoffgleich wird. Numerisch ist allerdings die wirkliche Abnahme dieser Zahlen beim Übergang von der Hauptserie zur I. Nebenserie und Bergmann-Serie anders als nach unserer Theorie; außerdem stimmt merkwürdiger Weise das Vorzeichen bei *Li* und *He* im allgemeinen nicht.

Andrerseits wird das Größenverhältnis $\pi : p$, $\delta : d$, $\beta : b$ wieder qualitativ richtig von der Theorie wiedergegeben: die Größen $\pi$, $\delta$, $\beta$ sind nämlich der Theorie nach von der vierten Ordnung in der kleinen Größe $a/a_1$, die Größen $p$, $d$, $b$ nur von der zweiten Ordnung, was der Erfahrung entspricht, daß $\pi$, $\delta$, $\beta$ in der Regel kleiner als $p$, $d$, $b$ ausfallen.

Man hat empirisch gefunden, daß die Konstanten $p$ in der Reihe der Alkalien *Na*, *K*, *Rb*, *Cs* proportional mit dem

Atomvolumen zunehmen. Es ist sehr bemerkenswert, daß unsere Theorie hiervon Rechenschaft gibt, indem $p$ bei uns proportional mit $a^2$ ist; in der Tat kann $a^2$ bei flächenhafter Ausbildung des Atoms als Maß für das Atomvolumen gelten.

Auch die allgemeinen Intensitätsverhältnisse passen zu unserer Auffassung: In jeder Serie nimmt die Intensität mit wachsender Nummer der Linie ab, entsprechend der Anschauung, wonach zunehmende Exzentrizität der Bahn (zunehmendes $n'$) abnehmende Wahrscheinlichkeit bedeutet. Ferner nimmt die Intensität im allgemeinen ab in der Reihenfolge Hauptserie, I. Nebenserie, Bergmann-Serie, entsprechend der weiteren Anschauung, daß zunehmende Größe der Bahn (zunehmendes $n$) gleichfalls mit abnehmender Wahrscheinlichkeit verbunden ist. Auch die Erregungsbedingungen für die einzelnen Serien passen in unser Bild: Der $p$-Term tritt am leichtesten auf — da bei ihm $n = 2$ sein soll, braucht das Elektron hier am wenigsten weit vom Kern entfernt zu werden; der $d$-Term verlangt stärkere Anregung, z. B. höhere Temperaturen — wegen $n = 3$ muß das Elektron weiter entfernt werden; am schwersten wird der $b$-Term verwirklicht — hier muß wegen $n = 4$ der Atomverband am stärksten gestört werden.

Wenn das Ziel unserer Theorie numerisch erreicht wäre, würden sich die 6 Konstanten $p$, $\pi$, $d$, $\delta$, $b$, $\beta$, die Ritz zur Darstellung der drei Serienterme benötigt und die bei ihm als frei verfügbare Parameter gelten, durch die eine Zahl $\frac{a}{a_1}$ universell ausdrücken lassen; aus jeder von ihnen ließen sich die übrigen fünf theoretisch berechnen. Die Formeln unserer Theorie sind einkonstantig, die der Wasserstoffspektren waren sogar nullkonstantig. Indessen erweist sich die Theorie in ihrer gegenwärtigen Fassung noch nicht als numerisch brauchbar.

In § 4 wird die Theorie vervollständigt durch Berücksichtigung des magnetischen Einflusses, den der umlaufende innere Elektronenring auf das äußere Elektron ausübt. Praktisch scheint dieser Einfluß nicht von Belang zu sein. Methodisch ist er insofern interessant, als er Anlaß gibt, Kräfte, die kein Potential haben, der kanonischen Form der Bewegungsgleichungen anzupassen. Hierzu wird eine über den besonderen Zweck hinausgehende, von Herglotz herrührende Methode mitgeteilt.

In § 5 wird versucht, die Theorie der Röntgen-Spektren durch Berücksichtigung des wirklichen Atomfeldes zu vervollständigen. Hierbei kommt der allgemeine Gegensatz zwischen optischen und Röntgen-Spektren — Atomäußeres und Atominneres — zur vollen Geltung. Der Elektronenring (Radius $a$), dessen Atomfeld die Wasserstoff-Ähnlichkeit beeinträchtigt, ist jetzt ein äußerer Ring. Das Atomfeld wird daher jetzt nach absteigenden (früher nach aufsteigenden) Potenzen von $a$ in eine Kugelfunktionenreihe entwickelt. Die Korrektionen, die in den verschiedenen Näherungen an der Spektralformel anzubringen sind, ordnen sich jetzt nach Potenzen von $\frac{a_1}{a}$ (früher nach Potenzen von $\frac{a}{a_1}$). Die Ganzzahligkeit des Termnenners, die bei dem $K$- und $L$-Term erfahrungsgemäß noch vollkommen ist, wird bei den höheren Termen durch das Atomfeld mehr und mehr gestört. Außerdem tritt zu dem Energieausdruck ein Zusatzglied hinzu, welches das Potential des äußeren Ringes in dessen Mittelpunkt bedeutet. Man kann in diesem Zusatzgliede eine Andeutung dafür sehen, daß das Kombinationsprinzip im Gebiete der Röntgen-Spektren (wenigstens in seiner einfachsten, von der Optik her geläufigen Form) tatsächlich nicht gilt, während es im optischen Gebiete, wo ein solches Zusatzglied fehlt, als strenges Naturgesetz zu herrschen scheint. Indessen sind die Betrachtungen dieses letzten Paragraphen weit davon entfernt, endgültige Vorschriften zur numerischen Berechnung der Wasserstoff-unähnlichen Röntgen-Spektren liefern zu wollen.

## § I. Der Quantenansatz für die azimutale Koordinate und die Rolle des Grenzmomentes $p = p_0$.

Der quantentheoretische Grundsatz, auf welchem meine Arbeiten über Spektrallinien beruhen, läßt sich in die Forderung zusammenfassen, daß für alle Freiheitsgrade des Systems das Phasenintegral

$$\int p\,dq = nh \tag{1}$$

sein solle. Hier bedeutet $q$ eine der unabhängigen Koordinaten, $p$ im Sinne der Hamiltonschen Gleichungen die zugehörige Impulskoordinate. Die scheinbare Willkür, welche in der Auswahl der Koordinaten $q$ liegt, wurde von mir ursprünglich stark betont. Sie ist inzwischen (unter der Beschränkung auf „bedingt periodische" Bewegungen) behoben durch Schwarzschild und Epstein: die zu benutzenden Koordinaten $q$ sind diejenigen, nach denen sich die Jacobische partielle Differentialgleichung „separieren" läßt. Auch bezüglich der Integrationsgrenzen, zwischen welchen das Phasenintegral zu erstrecken ist, bestand ursprünglich eine gewisse Unsicherheit, die aber am Schlusse meiner zweiten Akademienote sowie in der Annalenarbeit geklärt wurde: die Integration ist zu erstrecken über denjenigen Bereich der Koordinate $q$, der zur Darstellung aller Phasen (oder Zuständen) des Systems erforderlich ist. Dies bedeutet bei einer Koordinate $q$, die in der bedingt periodischen Bahn zwischen den Werten $q_{\min}$ und $q_{\max}$ hin und her pendelt, die Integration von $q_{\min}$ bis $q_{\max}$ und wieder zurück bis $q_{\min}$; dagegen bei einem beständig zunehmenden Azimute $q = \varphi$ die Integration von 0 bis $2\pi$. Ist im letzteren Falle vermöge des Flächensatzes das zugehörige Impulsmoment $p$ konstant, so entsteht aus (1) einfach:

$$2\pi p = nh. \tag{2}$$

Indessen führen Betrachtungen in der Phasenebene $p$, $q$, von der man in jeder Statistik auszugehen hat, nur unter einer gewissen beschränkenden Voraussetzung auf die Formulierung (1).

Es muß nämlich möglich sein, eine dem Quantum $n = 0$ entsprechende Anfangsbahn mit den Koordinaten $p_0$, $q$ so zu wählen, daß für diese

$$\int p_0 \, dq = 0$$

wird (vgl. Akad. I, p. 429, Ann. I, p. 9). Ist letzteres nicht der Fall, so sollte in (1) $p - p_0$ an die Stelle von $p$ treten; insbesondere ginge dann (2) über in

$$2\pi(p - p_0) = nh. \tag{3}$$

Ein Brief Schwarzschilds vom 21. März 1916 zeigt, daß er diese Verallgemeinerung des Quantenansatzes im Falle der relativistischen Kepler-Ellipse reiflich überlegt hat. Er schrieb mir darüber: „Da die untere Grenze von $p$ nicht Null, sondern $\frac{e^2}{c}$ ist, so scheint mir, daß die quantenhaft ausgezeichneten Werte von $p$ gleich

$$\frac{e^2}{c} + \frac{nh}{2\pi}$$

zu setzen sind. Das ändert die Dubletts nicht, verdirbt aber die Balmersche Formel." In meiner Annalenarbeit II § 6 habe ich bereits ausgeführt, wie treffend der Sachverhalt durch diese kurzen Worte Schwarzschilds gekennzeichnet wird: Die Spektralformel, die aus dem Quantenansatz (3) folgt, liefert dieselbe Feinstruktur wie diejenige, die ich aus dem Ansatz (2) heraus gefolgert hatte; aber sie gibt für die absoluten Wellenzahlen Werte, die nicht nur von der Balmerschen Formel, sondern auch von den neuesten sehr genauen Messungen von Paschen in völlig unzulässiger Weise abweichen.

Der Quantenansatz (3) tritt auch — und zwar in besonders eindringlicher und systematischer Form — in Plancks Strukturtheorie des Phasenraumes[1]) auf. Während Planck im übrigen meine Resultate bezüglich der relativistischen Kepler-Ellipse von seinem Standpunkte aus bestätigt, betont er zum Schluß von § 11 die Abweichung zwischen seiner mit (3) iden-

[1]) Ann. d. Phys. 50, p. 285, 1916.

tischen Gl. (45) von meinem Quantenansatz (2). Da nun nach Ausweis der Messungen im Balmerschen Spektrum jener Quantenansatz (2) zweifellos der richtige ist und da andrerseits sowohl meine statistischen Betrachtungen in der Phasenebene als auch besonders die Plancksche Strukturierung des Phasenraumes auf den Quantenansatz (3) führen, so scheint hier ein Widerspruch in den Grundlagen vorzuliegen.

Der Widerspruch verschwindet indessen, wenn wir dem Ursprung des Grenzmomentes

$$p_0 = \frac{e^2}{c}$$

nachgehen. In meiner Annalenarbeit II § 3 wurde bereits hervorgehoben, daß die Annahme eines unbeweglichen Wasserstoffkerns ($M = \infty$) nicht mehr zulässig ist im Falle der dort untersuchten Spiralbahnen, bei denen sich die Geschwindigkeit des Elektrons dem Grenzwerte $c$ nähert, weil dann auch die Masse des Elektrons über alle Grenzen wächst (Lim $m = \infty$). Dasselbe gilt in jedem Falle, wo das Grenzmoment $p_0$ aufzutreten scheint; dann wird immer die Geschwindigkeit des Elektrons gleich $c$, also seine Masse gleich $\infty$, so daß die Mitbewegung des Kerns $M$ berücksichtigt werden muß. Dann aber erweist sich $p_0$ nicht mehr als unüberschreitbare untere Grenze des Impulsmomentes $p$.

Um dieses zu zeigen, genügt es, eine spezielle Bewegungsform zu betrachten. Wir wählen als solche die Kreisbewegung von verschwindendem Radius Lim $a = 0$ und gehen in drei Schritten vor:

a) Kreisbewegung ohne Relativität. Ist $\omega$ die konstante Winkelgeschwindigkeit auf der Kreisbahn vom Radius $a$, so wird das Impulsmoment

$$p = m a^2 \omega.$$

Es handelt sich um den Grenzwert von $p$ für $a = 0$. Nun wird zwar im Falle $m =$ konst. $\omega = \infty$ für $a = 0$. Aus der dynamischen Gleichung: Zentrifugalkraft des Kerns gleich elektrischer Anziehung durch den Kern:

$$(4) \qquad m a \omega^2 = \frac{e^2}{a^2}$$

folgt indessen

$$a^{3/2} \omega = \sqrt{\frac{e^2}{m}},$$

$\omega$ wächst also mit abnehmendem $a$ nur in solchem Grade an, daß in der Grenze $\operatorname{Lim} p = 0$ gilt.

b) Kreisbewegung mit Relativität bei ruhendem Kern. Wir wollen jetzt berücksichtigen, daß $m$ mit der Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit $\infty$ wird

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{a\omega}{c}$$

zugleich aber so tun, als ob die Kernmasse $M$ trotzdem groß gegen $m$ bliebe, d. h. von der Mitbewegung des Kerns absehen. Dann würde gelten

$$p = \frac{m_0 a^2 \omega}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 c \beta a}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

und wegen des dynamischen Gleichgewichts (vgl. (4)):

$$(4\,a) \qquad \frac{m_0 c \beta a}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e^2}{c\beta}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt allgemein

$$p = \frac{e^2}{c\beta},$$

also im Besonderen für $a = 0$, wo nach (4 a) $\beta = 1$ wird:

$$\operatorname{Lim} p = p_0, \quad p_0 = \frac{e^2}{c}.$$

c) Kreisbewegung mit Relativität und Mitbewegung des Kerns. Wir berücksichtigen jetzt, daß sich in Wirklichkeit Elektron und Kern um den Schwerpunkt bewegen und wollen annehmen, daß sie dabei dauernd einander diametral gegenüber stehen (vgl. hierzu den Schluß dieses Paragraphen).

Den Größen $\beta$, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $a$, $\omega$

beim Elektron mögen die Größen

$$B,\ M = \frac{M_0}{\sqrt{1-B^2}},\ A,\ \Omega = \omega$$

beim Kern entsprechen. Dann ist das ganze Impulsmoment zu definieren durch

$$p = m a^2 \omega + M A^2 \omega. \tag{5}$$

Das dynamische Gleichgewicht erfordert

$$\frac{e^2}{(A+a)^2} = m a \omega^2 = M A \omega^2, \text{ also } m a = M A. \tag{6}$$

Wegen der letzteren Beziehung kann man statt (5) schreiben

$$p = m a^2 \omega \left(1 + \frac{m}{M}\right) = \frac{m_0 c \beta a}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \tag{7}$$

und statt (6)

$$\frac{e^2}{a^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2} = \frac{m_0 \beta^2 c^2}{a\sqrt{1-\beta^2}},\quad \frac{m_0 c \beta a}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e^2}{c\beta}\left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-2}. \tag{8}$$

Hiernach ergibt sich statt (7) allgemein:

$$p = \frac{e^2}{c\beta}\left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-1}. \tag{9}$$

In dieser letzten Gleichung haben wir den Grenzübergang für $\beta = 1$ zu machen. Nun ist

$$\frac{m}{M} = \frac{m_0}{M_0} \frac{\sqrt{1-B^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

andrerseits nach Gl. (6)

$$\frac{m}{M} = \frac{A\omega}{a\omega} = \frac{B}{\beta},$$

also
$$\frac{B}{\sqrt{1-B^2}} = \frac{m_0}{M_0} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Hieraus berechnet man leicht

$$\frac{1}{\sqrt{1-B^2}} = \sqrt{1 + \frac{m_0^2}{M_0^2} \frac{\beta^2}{1-\beta^2}}.$$

Mithin wird in der Grenze für $\beta = 1$:

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1-B^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = m. \tag{10}$$

Das ursprüngliche Überwiegen der Kernmasse $M$ macht also bei der Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit einer völligen Gleichheit von Kern- und Elektronenmasse Platz. Aus (9) folgt nun in der Grenze für $\beta = 1$ (in der natürlich auch $a = 0$, $A = 0$ wird):

$$\operatorname{Lim} p = \frac{1}{2} \frac{e^2}{c} = \frac{p_0}{2}. \tag{11}$$

Das Grenzmoment ist somit auf die Hälfte seines Wertes bei der inkonsequenten Betrachtung b) heruntergesetzt, und die scheinbar unüberschreitbare relativistische Grenze $p_0$ ist durchbrochen.

Dabei ist zu beachten, daß wir in c) eine ganz spezielle Art des Grenzübergangs ausgeführt haben, indem wir uns auf Kreisbahnen beschränkten. Würden wir mit elliptischen oder mit den schon genannten spiraligen Bahnen zur Grenze $\beta = 1$ übergehen, so würden wir vermutlich andere Grenzwerte finden, bei denen der Wert $p_0 = \frac{e^2}{c}$ möglicher Weise noch weiter unterschritten werden würde. Leider lassen sich solche allgemeineren Bahnen in Strenge unter Berücksichtigung der Mitbewegung des Kerns kaum behandeln. Die Schwierigkeit liegt darin, daß für die jeweilige elektrodynamische Kraft nicht die (vom Schwerpunkts-System aus beurteilten) gleichzeitigen Lagen, sondern gewisse um die Latenzzeit retardierte frühere Lagen in Betracht kommen und daß zu dem von der gegenseitigen Lage herrührenden Bestandteil der Kraft noch ein Geschwindigkeits- und Beschleunigungs-Bestandteil hinzukommt.

Sogar die unter c) gegebene Behandlung der einfachen Kreisbewegung kann von diesem Standpunkte aus nicht als exakt bestehen. Nicht nur haben wir die (bei der Annäherung der Massen zunehmende) gegenseitige Masse vernachlässigt, sondern wir haben auch hier die (bei der Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit immer stärker ins Gewicht fallende) Retardierung der Anziehungskraft bei Seite gelassen, der zufolge die unter c) vorausgesetzte, dauernd diametrale Stellung der beiden Massen gar nicht ohne weiteres möglich ist. Hierdurch wird das quantitative Resultat Lim $p = \frac{p_0}{2}$ allerdings erschüttert, nicht aber, wie mir scheint, das qualitative Resultat, auf das es uns allein ankommt: daß die Grenze $p_0 = \frac{e^2}{c}$ unterschritten werden kann und daß daher der Quantenansatz (3) nicht verbindlich ist. Der Quantenansatz (2), der als untere Grenze des Impulsmoments Lim $p = 0$ voraussetzt, kann durch die Messungen an der Balmerschen Serie demgegenüber als experimentell bestätigt gelten.

## § 2. Das *M*-Dublett und die Nomenklatur der Röntgen-Spektren.

Aus meiner Theorie der Feinstruktur wasserstoff-ähnlicher Linien geht hervor, daß der in der Theorie der Röntgen-Spektren auftretende $L$-Term

$$L = N\frac{(Z - l)^2}{2^2}$$

($N$ = Rydberg-Frequenz, $Z$ = Ordnungszahl des Elementes, $l$ = Kernladungs-Charakteristik) doppelt ist, weil sein Nenner 2 auf zweierlei Arten entstehen kann

$$2 = 2 + 0 = 1 + 1.$$

Die vorstehende Formel für den $L$-Term ist nämlich nicht vollständig; es sind zu ihr weitere Glieder, Relativitäts-Korrektionen, hinzuzufügen, die mit $c = \infty$ verschwinden, aber die bei großem $Z$ keineswegs zu vernachlässigem sind. Diese

Glieder nun fallen verschieden aus, je nachdem der Termnenner 2 die Entstehungsweise $2 + 0$ oder $1 + 1$ hat; infolgedessen entspricht den beiden Entstehungsarten nicht ein $L$-Term, sondern ein Paar zusammengehöriger Terme $L$, $L'$, nicht eine einzelne Linie, sondern ein Linienpaar, das „$L$-Dublett". Das $L$-Dublett erscheint bei allen Linien, die mit dem $L$-Term gebildet sind, also zunächst bei allen Linien der eigentlichen $L$-Serie, deren erster (konstanter und positiver) Term der $L$-Term ist, sodann bei der $\alpha$-Linie der $K$-Serie, deren zweiter (negativer) Term gleich $L$ ist. Ich habe früher dieses in der $K$-Serie auftretende Dublett, welches in Schwingungszahlen gemessen dem $L$-Dublett gleich ist und die (durch das negative Vorzeichen des $L$-Terms bedingte) charakteristische Intensitätsumkehr zeigt — in der $K$-Serie liegt der schwächere Begleiter auf der weichen, in der $L$-Serie auf der harten Seite der Hauptlinie — gelegentlich als „$K$-Dublett" bezeichnet. Ich möchte jetzt empfehlen, dieses Dublett in jedem Falle „$L$-Dublett" zu nennen, weil dadurch der wirkliche Ursprung und Grund des Dubletts betont wird, während das Auftreten in der $K$- oder $L$-Serie mehr nebensächlich ist und für die Benennung des Dubletts nicht entscheidend sein sollte.

Es ist nun äußerst befriedigend, daß sich das gleiche Vorkommen im Verhältnis der $L$- und $M$-Serie wiederholt. In der $L$-Serie ist die starke $\alpha$-Linie auf der weichen Seite von einem Satelliten $\alpha'$ begleitet, von dem man aus verschiedenen Gründen (vgl. Ann. III, p. 140 und 141) behaupten kann, daß er seinen Ursprung dem zweiten Term der $L_\alpha$-Linie verdankt. Herr R. Swinne[1]) hat nun die interessante Bemerkung gemacht, daß sich derselbe Linienabstand $\alpha\alpha'$ in der von Siegbahn entdeckten $M$-Serie wiederfindet, zwischen den beiden stärksten Linien $\alpha$ und $\beta$ dieser Serie. Der volle Parallelismus dieses „$M$-Dubletts" mit dem vorher besprochenen $L$-Dublett wird aus der folgenden Zusammenstellung deutlich:

---

[1]) Physikal. Zeitschr. 17, p. 485 unten, 1916.

| $K_\alpha$ | $K_{\alpha'}$ | $L_\alpha$ | $L_\beta$ |
|---|---|---|---|
| Hauptlinie | Begleiter, weicher und schwächer | Stärkste Linie der $L$-Serie | Zweite Dublett-Linie, härter und schwächer |
| $L_\alpha$ | $L_{\alpha'}$ | $M_\alpha$ | $M_\beta$ |
| Hauptlinie | Begleiter, weicher und schwächer | Stärkste Linie der $M$-Serie | Zweite Dublett-Linie, härter und schwächer |

Die Güte der Übereinstimmung zwischen $L(\alpha\alpha')$ und $M(\alpha\beta)$ zeigt die nachstehende Tabelle. In dieser sind aus den Siegbahnschen Messungen von $\lambda$ die Schwingungszahlen (besser gesagt Wellenzahlen) $\nu = \frac{1}{\lambda}$ berechnet und durch die Rydberg-Frequenz $N$ dividiert. Wie schon Anm. III, p. 134 gesagt, empfiehlt sich allgemein $\frac{\nu}{N}$ als unbenannte Zahl von bequemer Größenordnung vor $\nu$ selbst. Die Tabelle enthält nun die Differenzen dieser $\frac{\nu}{N}$-Werte und zwar in der ersten Spalte für die Linien $\beta$ und $\alpha$ der $M$-Serie, in der letzten für die Linien $\alpha$ und $\alpha'$ der $L$-Serie.

| | $M$ | | $L$ |
|---|---|---|---|
| | $\beta - \alpha$ | $\delta - \gamma$ | $\alpha - \alpha'$ |
| 92 *U* | 11,8 | 12,2 | 12,9 |
| 90 *Th* | 11,0 | — | 11,8 |
| 83 *Bi* | 7,7 | — | 6,2 |
| 82 *Pb* | 6,9 | — | 7,2 |
| 81 *Tl* | 7,1 | — | 6,2 |
| 79 *Au* | 5,9 | 6,0 | 6,7 |

Der Parallelismus geht aber noch weiter. In der $L$-Serie tritt derselbe Dublettabstand außer zwischen $\alpha$ und $\beta$ (oder genauer gesagt zwischen $\alpha'$ und $\beta$) auch auf zwischen $\gamma$ und $\delta$, zwischen $\varepsilon$ und $\eta$ sowie zwischen $\zeta$ und $\vartheta$. Hieraus erhellt, daß diese Linienpaare sämtlich mit demselben ersten Term, nämlich $L$ bei $\alpha$, $\gamma$, $\varepsilon$, $\zeta$, $L'$ bei $\beta$, $\delta$, $\eta$, $\vartheta$, gebildet sind, wodurch sie sich als „legitime Glieder derselben $L$-Familie" erweisen. Herr Swinne bemerkt nun, daß in der $M$-Serie der Abstand $\alpha\beta$ noch an einer zweiten Stelle vorkommt, nämlich zwischen den von Siegbahn mit $\gamma_2\,\delta_2$ bezeichneten Linien, die ich nach Analogie mit der $L$-Serie weiterhin als $\gamma\,\delta$ bezeichnen werde. Wenn auch dieses letztere Dublett nur bei zwei Elementen ($U$ und $Au$) gemessen ist, so ist die Übereinstimmung der Schwingungsdifferenzen (vgl. Tabelle) doch ein so charakteristisches Merkmal, daß man daraus unbedenklich allgemeine Schlüsse ziehen darf. Diese Schlüsse sind dieselben wie bei der $L$-Serie, nämlich: Die Linienpaare $\alpha\beta$ und $\gamma\,\delta$ der $M$-Serie sind mit demselben ersten Term gebildet, $\alpha$ und $\gamma$ mit einem $M$-Term, $\beta$ und $\delta$ mit einem zugehörigen $M'$-Term. Diese vier Linien werden dadurch als Glieder der gleichen $M$-Serie legitimiert. In der $L$-Serie tritt $M$ als zweiter Term in der $\alpha$-Linie, $M'$ als zweiter Term in der $\alpha'$-Linie auf nach dem Schema $\alpha = L - M$, $\alpha' = L - M'$. Es bleiben noch drei weitere Linien der $M$-Serie übrig, die Siegbahn mit $\gamma_1$, $\delta_1$, $\varepsilon$ bezeichnet. Um sie mit derselben Sicherheit wie die vorhergehenden in die $M$-Serie einordnen zu können, müßte man nach zugehörigen zweiten Komponenten im Abstande des charakteristischen $M$-Dubletts suchen. Da $\gamma_1$, $\delta_1$, $\varepsilon$ schon schwach sind (im Verhältnis zu $\alpha$, $\beta$ und $\gamma_2$), so würden die zugehörigen zweiten Dublettlinien noch schwächer zu erwarten sein. Es ist daher verständlich, daß sie bisher nicht bemerkt wurden; andrerseits ist ihr Nachweis erleichtert, wenn die Theorie ihre Lage vorher gesagt hat. Die augenblickliche Unvollständigkeit der $M$-Serie-Messungen zeigt sich übrigens auch darin, daß die Linien $\gamma_1\,\gamma_2$, $\delta_1\,\delta_2$, $\varepsilon$ bisher noch bei keinem der sechs von Siegbahn untersuchten Elemente vollständig erhalten wurden.

Noch sei auf die Angabe Siegbahns hingewiesen, daß die $\alpha$-Linie der $M$-Serie selbst eine Triplettstruktur zu besitzen scheine. Auch hierin zeigt sich ein Parallelismus zu der Dublettstruktur der Linien $\alpha\,\alpha'$ der $K$- und $L$-Serie. So wie diese Dublettstruktur von dem zweiten ($L$- bzw. $M$-)Term herrührt, so ist jene Triplettstruktur als Folge des zweiten Terms der $M_\alpha$-Linie, des $N$-Terms, anzusehen. Sollte es möglich sein, nach der weichen Seite des Spektrums fortschreitend zur Aufnahme einer „$N$-Serie" zu gelangen (die ernsteste Schwierigkeit liegt bekanntlich in den Krystallen selbst, da deren Gitterkonstante für so große Wellenlängen zu klein wird), so würde man die Linien dieser Serie als Gruppen von Tripletts (oder vorsichtiger gesagt, von derselben Vielfachheit wie die $M_\alpha$-Linie) mit konstanten Schwingungsdifferenzen finden. Daß die $M_\beta$-Linie nicht gleichzeitig vielfach ist, entspricht wieder völlig dem Verhalten der $L_\beta$-Linie. Trotzdem die letztere mit demselben zweiten Term gebildet ist wie die Linie $L_{\alpha'}$ und sich nur in dem ersten Term ($L'$ statt $L$) von $L_\alpha$ unterscheidet, zeigt sie nicht das $M$-Dublett, besitzt also keinen Satelliten im Abstande $L_\alpha L_{\alpha'}$. Dieses Faktum würde sich, wie ich Ann. III, § 4 auseinander gesetzt habe, aus meiner Theorie der „Quantenungleichungen" erklären, wenn der $M$-Term wasserstoff-ähnlich wäre; da er es nicht ist, muß man auf das genau entsprechende Verhalten der Alkalien in den Rydbergschen vollständigen Dubletts als Analogon verweisen, deren Erklärung durch eine Art Quantenungleichung dadurch in Aussicht gestellt wird.

Aus dem Swinneschen Nachweis der $M$-Dubletts in der $L$- und $M$-Serie ergibt sich die Notwendigkeit, die in den Ann. vorgeschlagene Nomenklatur der Terme abzuändern. Indem ich die zweiten Terme in der $L$-Serie nach der Reihenfolge der zunehmenden Härte zu benennen vorschlug, ordnete ich den Liniengruppen

$$(\varepsilon\,\eta);\;\; (\alpha\,\beta,\;\alpha'\,\beta);\;\; (\gamma\,\delta);\;\; (\zeta\,\vartheta)$$

als zweite Terme zu

$$M\;;\quad N, N'\;;\quad O\;;\quad P.$$

Diese Bezeichnung muß fallen, angesichts des Zusammenhangs des Dubletts $\alpha\alpha'$ mit der $M$-Serie, deren Benennung feststeht, und ist auch bereits im Vorstehenden verlassen worden. Ich schlage daher vor, die Bezeichnung der zweiten Terme folgendermaßen umzuändern:

$$(\varepsilon\,\eta);\ (\alpha,\ \beta,\ \alpha',\ \beta);\ (\gamma\,\delta);\ (\zeta\,\vartheta)$$
$$l\ ;\ \ M\ ,\ \ M'\ ;\ \ N\ ;\ \ O.$$

Die Bezeichnung $l$ schließt an Siegbahns Benennung der weichsten Linie der $L$-Serie als $l$-Linie an; da sich dieselbe bei uns als erste Dublettkomponente zu der Siegbahnschen $\eta$-Linie erwies, mußte sie bei uns systematischer Weise $\varepsilon$ heißen; infolgedessen steht der Buchstabe $l$ für den dieses Dublett charakterisierenden zweiten Term frei. Die weiteren Bezeichnungen $M$, $M'$, $N$, $O$ sind nach den vorstehenden Erörterungen von selbst gegeben.

Ich möchte bei dieser Gelegenheit eine sachliche Bemerkung über den $l$-Term anfügen. Nach der Zusammenstellung in Ann. III, p. 156 hat der Term $l$ (dort mit $M_L$ bezeichnet) den Termnenner 2,50, also nicht ganzzahligen Charakter wie der $K$- und $L$-Term, wohl aber mit großer Genauigkeit halbzahligen. Man wird nicht umhin können, hierbei an die halbzahligen (oder nahezu halbzahligen) Terme der zweiten Nebenserie bei den Alkalien und Erden zu denken. Die quantenmäßige Erklärung dieser Halbzahligkeit steht zur Zeit noch aus und scheint eine große Schwierigkeit zu sein. Man geht aber wohl in der Annahme nicht fehl, daß diese Erklärung, wenn sie gelungen ist, zugleich die Erklärung und modellmäßige Deutung des $l$-Terms der Röntgen-Spektren mit sich bringen wird. Es ist sehr interessant und spricht für die prinzipielle Bedeutung der Halbzahligkeit, daß dieselbe nicht nur bei den sichtbaren Spektren (Bahnen im Äußeren des Atoms), sondern auch bei den Hochfrequenzspektren (Bahnen im Atominneren) auftritt.

Ich möchte ferner das Material über das $\zeta\vartheta$-Dublett bzw. den zu ihm gehörenden $O$-Term, welches bisher etwas dürftig ist, ergänzen. In der Diss. von Friman ist nämlich die $\zeta$-Linie, dort $\beta_5$ genannt, nur recht lückenhaft und unterhalb $Z = 65$ gar nicht angegeben; die $\vartheta$-Linie, dort mit $\gamma_2$ bezeichnet, ist zwar öfter gemessen, aber häufig nicht getrennt von der Linie $\chi$ (in meiner Bezeichnung, in Siegbahnscher $\gamma_3$). Wohl aber sind bei vielen Elementen unbezeichnete Linien angegeben, deren Einordnung in die bekannten Gruppen der $L$-Serie oder Identifizierung mit Linien von Verunreinigungen offen gelassen ist. Unter diesen Linien habe ich zusammen mit Hrn. K. Glitscher eine Nachlese gehalten und dabei an drei Stellen ($Z = 49$, 63, 64) unzweifelhafte $\zeta\,\vartheta$-Dubletts aufgefunden. In der unten stehenden Tabelle sind angegeben: 1. und 2. die von Friman gemessenen Wellenlängen, bereits im Sinne unseres Befundes bezeichnet, 3. und 4. die durch $N$ dividierten Schwingungszahlen, 5. die Dublettdifferenz $\vartheta - \zeta$, 6. zum Vergleich die Dublettdifferenz $\beta - \alpha'$ etc., d. h. das Mittel aus den Schwingungsdifferenzen $\beta - \alpha'$, $\delta - \gamma$, $\eta - \varepsilon$, soweit vorhanden, alles dividiert durch $N$, endlich 7. den abermals durch $N$ dividierten $O$-Term, wie er aus dem bekannten $L$-Term und den beobachteten $\nu_\zeta$ folgt.

| | $\lambda_\zeta$ | $\lambda_\vartheta$ | $\zeta$ | $\vartheta$ | $\vartheta - \zeta$ | $\beta - \alpha'$ etc. | $\frac{O}{N}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 64 *Gd* | 1,748 | 1,592 | 521,4 | 572,4 | 51,0 | 49,4 | 394 |
| 63 *Eu* | 1,815 | 1,657 | 502,2 | 550,1 | 47,9 | 46,2 | 387 |
| 49 *Jn* | 3,354 | 3,142 | 271,8 | 290,1 | 18,3 | 15,2 | 249 |

Trägt man die Quadratwurzel aus $\frac{O}{N}$ in Fig. 6 meiner Annalenarbeit III ein, so fügen sich die Punkte vollkommen in den Verlauf der dort mit $P_L$ bezeichneten (fast geradlinigen) Kurve ein, worin der augenfällige Beweis für die Richtigkeit unserer Deutung der fraglichen Linien liegt. Man erkennt an diesem Beispiel, wie nützlich die Theorie mit ihren mannigfachen Beziehungen und Dublettabständen für die Ordnung des Beobachtungsmaterials werden kann.

Besonderes Interesse gewinnt der Nachweis des $M$-Dubletts im Zusammenhang mit dem Kombinationsprinzip. Aus dem Auftreten des $M$-Dubletts in der $L$- und $M$-Serie folgte unmittelbar, daß der zweite Term von $L_\alpha$ mit dem ersten Term der $M$-Serie identisch ist. Soll die $M$-Serie durch Kombination erzeugt werden können, so muß mit $L_\alpha$ eine härtere Linie kombiniert werden, die mit $L_\alpha$ den ersten Term gemeinsam hat und in der Differenz diesen aufhebt, z. B. die Linie $L_\gamma$. In der Tat ergibt sich aus $\nu_\alpha = L - M$, $\nu_\gamma = L - N$ durch Kombination eine Linie $(L - N) - (L - M) = M - N$, die der Linie $M_\alpha$ nahe liegt. Der Unterschied zwischen der durch Kombination berechneten und der beobachteten Linie liegt aber weit außerhalb der Beobachtungsfehler (vgl. Ann. III, p. 160). Ich habe deshalb l. c. § 8 ausdrückliche Zweifel an der genauen Gültigkeit des Kombinationsprinzips erhoben; dieselben werden unabhängig davon auch von Hrn. Swinne formuliert und werden weiter gestützt durch den Vergleich der zweiten Terme der $K$- und $L$-Serie (l. c. § 7), die wiederum ungefähr, aber nicht genau zusammenfallen. Andrerseits wird man dieses ungefähre Zusammenfallen gewiß nicht als bloßen Zufall ansehen können, zumal, da durch das Auftreten des $M$-Dubletts der Zusammenhang zwischen $L_\alpha$ und der $M$-Serie gesichert ist. Eine Klärung dieser Schwierigkeit dürften die Betrachtungen enthalten, die ich am Schlusse meiner Annalenarbeit über die Absorptionsspektren angestellt habe. Der Unterschied der $K$- und $L$-Absorptionskanten von den $K$- und $L$-Termen wird daselbst auf die periphere Elektronenwolke zurückgeführt, welche bewirkt, daß der Energieunterschied in der $K$- und $L$-Bahn gegen das feldfreie Äußere durch den $K$- und $L$-Term nicht richtig dargestellt wird. Ebenso kann der Energieunterschied zwischen der $M$- und $N$-Bahn abweichen von dem Unterschiede zwischen dem $M$- und $N$-Term, und zwar ebenfalls wegen dazwischen gelagerter Elektronen. Ich stimme also den Ausführungen von Hrn. Kossel[1]) bei, der konsequent zwischen Energie und Term unterscheidet. Das Kombinationsprinzip bezieht sich zweifellos auf die physikalisch gegebenen Energiewerte und kann in diesen exakte Gültigkeit haben; dann wird es, an den Termen gemessen, nur angenähert richtig erscheinen.

[1]) Deutsche physikal. Gesellschaft, 1916, pag. 339.

In der Bezeichnung möchte ich dagegen nicht so weit gehen wie Kossel, der das Wort Term („physikalischer“ oder „energetischer Term“) für den Energiewert selbst in Anspruch nimmt und den rechnerischen Term, der aus der Feinstruktur folgt, als „virtuellen“ oder „idealen Term“ davon unterscheidet. Ich meine vielmehr, daß man nach der Bedeutung des Wortes unter Term einen Rechenausdruck verstehen soll, aus dem sich die Formel für die Spektrallinie irgendwie aufbauen läßt. Wichtiger als diese Bezeichnungsfrage ist natürlich die sachliche Frage, wie sich der Unterschied zwischen Energie und Term quantitativ fassen läßt. Hierzu soll der letzte Paragraph einiges Material liefern.

Ich möchte schließlich noch einiges über den sonstigen Inhalt der interessanten Arbeit des Hrn. Swinne sagen, soweit sie sich auf Röntgen-Spektren bezieht. Herr Swinne geht in dem Vertrauen auf die Wasserstoff-Ähnlichkeit und Ganzzahligkeit der Termnenner viel weiter als ich. Er vertritt für eine Reihe von Linien der $L$-Serie diejenige Auffassung und Entstehungsweise, die zutreffen würde, wenn sich die betreffenden Bahnen genau wasserstoff-ähnlich verhalten würden. Dagegen habe ich (allerdings unter einer Verwendung des Kombinationsprinzips, welche nach obigem nicht strenge richtig zu sein braucht), den Grad der Wasserstoff-Ähnlichkeit empirisch festzustellen und die mangelnde Wasserstoff-Ähnlichkeit für Termnenner oberhalb 2,5 durch die Mitwirkung der peripheren Elektronen zu erklären gesucht. Z. B. gibt Swinne für die mehrfach genannten Linien $\alpha'$, $\alpha$, $\beta$ und eine Linie $v$, die $\beta$ bei den Schwermetallen auf der weichen Seite begleitet, die Darstellung:

$$\begin{array}{ll}
\alpha & (2,0) \longleftarrow (3,0) \\
\alpha' & (2,0) \longleftarrow (2,1) \\
\beta & (1,1) \longleftarrow (2,1) \\
v & (1,1) \longleftarrow (1,2).
\end{array}$$

In Worten: $\alpha$ soll entstehen durch Übergang des Elektrons aus dem dritten Bohrschen Kreise, dem $M$-Kreise (drei azimutale Quanten, kein radiales) in den zweiten Bohrschen Kreis, den

$L$-Kreis (zwei azimutale, kein radiales Quantum). Ebenso $\alpha'$ durch den Übergang aus der ersten $M$-Ellipse (zwei azimutale, ein radiales Quantum) in den zweiten Bohrschen Kreis etc., schließlich $v$ durch den Übergang der zweiten $M$-Ellipse (ein azimutales, zwei radiale Quanten) in die erste $L$-Ellipse (ein azimutales und ein radiales Quantum). Was zunächst die letztere Linie betrifft, so hat sich dieselbe Deutung (vgl. Ann. p. 139) auch mir zunächst aufgedrängt, mußte aber verlassen werden, weil bei den niedrigeren Atomgewichten die $v$-Linie sich der $\beta$-Linie immer mehr nähert und sie schließlich überschneidet, und weil überdies $v$ statt mit $\beta$ mit der Moseleyschen Linie $\varphi$ in einem festen Zusammenhang steht ($\Lambda$-Dublett). Aber auch bei den anderen Linien geht die obige schematische Deutung entschieden zu weit; die $M$-Bahnen finden nach Ausweis der empirischen Termnenner sicher nicht mehr in dem reinen Coulombschen Felde des Kerns statt und können daher sicher nicht mehr als Keplersche Ellipsen oder Kreise beschrieben werden.

Sehr erfreulich ist die Übereinstimmung zwischen den Werten für die Kernladungs-Charakteristiken, die Swinne findet ($K$-Serie 1,6, $L$-Serie 3,6) und die ich Ann. III, p. 148 und 152 angegeben habe ($K$-Serie 1,64, $L$-Serie 3,5). Die Übereinstimmung ist um so erfreulicher, als die Berechnung gerade dieser Größen etwas heikel ist und als die Rechnung bei Swinne anders angeordnet ist als bei mir. Man darf in diesen Zahlen 1,6 und 3,5 wichtige Naturkonstante sehen, die für die Konstitution aller Elemente des natürlichen Systems charakteristisch sind.

### § 3. Die Spektren der einfacheren Elemente, insbesondere von Lithium und Helium, und der allgemeine Typus der Spektralformeln.

Die Spektren von Lithium und Helium weichen in vielen Punkten nur wenig von dem des Wasserstoffs ab. Der $p$-Term (Hauptserien-Term) ist nur wenig von $\frac{1}{2^2}$ und der $d$-Term (I. Nebenserien-Term) noch weniger von $\frac{1}{3^2}$ verschieden. Auch die Feinstruktur des Lithiums ist der des Wasserstoffs sehr ähnlich; das *Li*-Dublett des *p*-Terms ist fast gleich dem Wasserstoffdublett (0,34 $cm^{-1}$ gegen 0,36 $cm^{-1}$) und die Feinstruktur des *Li*-*d*-Terms zeigt sich, genau so wie es bei Wasserstoff sein müßte, in gewissen Defekten der Schwingungsdifferenz der I. Nebenserie (vgl. Ak. II § 7, Ann. II § 11). Bei *He* ist die Dublettgröße von der des Wasserstoffs etwas mehr verschieden als bei *Li*. Als eine ganz neue Erscheinung tritt dagegen der halbzahlige *s*-Term (II. Nebenserien-Term) auf; er hat bei Wasserstoff kein Analogon.

Infolgedessen drängt sich folgende geometrische Deutung auf: die *p*- und *d*-Terme entsprechen ebenen Bahnen in der Symmetrieebene des Atoms, ähnlich den Kepler-Ellipsen; der *s*-Term hat seinen Grund darin, daß die beim Wasserstoff bestehende Punktsymmetrie durch die Atomstruktur von *Li* und *He* aufgehoben ist und daß daher noch andere Bahnen als die in der Symmetrieebene möglich werden. Aus dem Spektrum des ionisierten Heliums (vgl. die Paschenschen Beobachtungen) geht eindeutig hervor, daß der Heliumkern ebenso wie der Wasserstoffkern an sich Punktsymmetrie hat; das Vorhandensein einer bestimmten Symmetrieebene bei *He* und *Li* ist also so aufzufassen, daß die Bewegung des inneren Elektrons resp. der inneren Elektronen diese Ebene erst definiert.

Als Atomstruktur von *He* hat man anzunehmen: Ein inneres Elektron läuft in einer engen, nahezu kreisförmigen Bahn um den doppelt geladenen *He*-Kern, ein zweites äußeres Elektron beschreibt eine jene umschließende Bahn von grösseren Abmessungen. Bei dem *p*- und *d*-Term liegen beide Bahnen in einer Ebene, der Äquatorebene oder Symmetrieebene des Atoms.

Ähnlich ist als Atomstruktur von *Li* zu Grunde zu legen: Ein dreifach geladener *Li*-Kern von Punktsymmetrie, zwei innere Elektronen, welche diesen in engem Abstande umkreisen und die Symmetrieebene des *Li* definieren, ein äußeres Elektron, welches beim *p*- und *d*-Term in dieser Symmetrieebene eine Bahn von größeren Dimensionen durchläuft.

Da das Mehrkörper-Problem zu schwierig ist, müssen wir angenähert vorgehen. Wir nehmen also die Bewegung der inneren Elektronen als zwangläufig gegeben an und behandeln nur ein Problem von zwei Freiheitsgraden, die Bewegung des äußeren Elektrons in dem durch den Kern und die inneren Elektronen bestimmten Atomfelde. Dabei vernachlässigen wir also die Rückwirkung des äußeren Elektrons auf die inneren Elektronen.

Die Lage des äußeren Elektrons in der Symmetrieebene beschreiben wir durch Polarkoordinaten $r$, $\varphi$, die vom Kern aus gezählt werden. Ihnen entsprechen die Impulskoordinaten

$$p_r = m\dot{r}, \qquad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}.$$

Wenn wir ohne Relativität rechnen, was hier ausreichen möge, wird die Energiegleichung:

$$p_r^2 + \frac{1}{r^2}\,p_\varphi^2 = 2m(W - V).$$

$W$ ist die Energiekonstante, $V$ die potentielle Energie des Atomfeldes. Die Jacobische partielle Differentialgleichung für die Wirkungsfunktion

$$S = \int_{r_0}^{r} p_r\,dr + \int_{\varphi_0}^{\varphi} p_\varphi\,d\varphi$$

lautet dementsprechend

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = 2m(W - V). \tag{12}$$

Um die potentielle Energie $V$ in einer Form zu berechnen, die $He$ und $Li$ und andere einfache Elemente umfaßt, bezeichnen wir mit $E$ die Ladung des Kerns, mit $E'$ die Gesamtladung des denselben umkreisenden Elektronenringes. $E'$ ist gleich $E - e$, wenn es außer dem Elektronenringe nur noch das eine „Aufelektron" gibt, welches unsere Spektralbahnen beschreibt, und wenn das Atom im ganzen neutral ist, wie wir annehmen werden. Wir denken uns diese Ladung $E'$ gleichmäßig auf einem Kreise vom Radius $a$ verteilt, nehmen also an, daß es nicht auf die augenblicklichen, sondern nur auf die mittleren Lagen der Elektronen ankommt. Diese Annahme wird erleichtert durch die quantentheoretische Vermutung, daß der Umlauf der inneren Elektronen viel schneller erfolgt als der des äußeren. Von dem magnetischen Felde der inneren Elektronen sehen wir zunächst ab. Dann ergibt sich

$$V = -\frac{eE}{r} + \frac{eE'}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\varphi - \varphi')}}. \tag{13}$$

Das Integral rechts ist ein vollständiges elliptisches erster Gattung; man bringt es durch einfache Substitutionen leicht auf die Legendresche Normalform

$$F(\varkappa) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}}$$

und kann statt (13) schreiben

$$V = -\frac{eE}{r} + \frac{eE'}{r+a} F(\varkappa), \qquad \varkappa^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2}. \tag{14}$$

Wir entwickeln (13) nach Potenzen von $\frac{a}{r}$. Nach Definition der Kugelfunktionen ist für $r > a$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\varphi}} = \sum_0^\infty \frac{a^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\varphi);$$

ferner gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(\cos\varphi)\, d\varphi = P_n^2(0),$$

wo $P_n(0) = 0$ ist, falls $n$ ungerade, und falls $n$ gerade

$$P_n(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots \quad n}.$$

Die Reihenentwickelung von $V$, Gl. (13), lautet also:

$$(15)\quad \begin{cases} V = -\frac{eE}{r} + \frac{eE'}{r}\left(1 + P_2^2(0)\left(\frac{a}{r}\right)^2 + P_4^2(0)\left(\frac{a}{r}\right)^4 + \cdots\right) \\ \quad = -\frac{e^2}{r} + \frac{eE'}{r}\sum_1^\infty a_\varkappa \left(\frac{a}{r}\right)^{2\varkappa}, \quad a_\varkappa = \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2\varkappa-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\ 2\varkappa}\right)^2. \end{cases}$$

Die letzte Darstellung von $V$ entsteht ersichtlich aus der vorhergehenden, wenn man das erste Glied der Kugelfunktionenreihe mit dem Potential des Kerns vereinigt und beachtet, daß für jedes neutrale Atom, wie erwähnt, $E - E' = e$ sein wird. Diese kleine Umsetzung ist sehr charakteristisch. Sie zeigt, daß in erster Näherung Kern + Ring nach außen hin wirken wie ein einfacher Wasserstoffkern; die Abweichung der Spektren anderer Elemente vom Wasserstoff-Charakter liegt also lediglich in dem Hinzutreten der höheren Glieder $r^{-3}$, $r^{-5}$ . . . unserer Potenzreihe.

Tragen wir (15) in (12) ein, so ergibt sich als grundlegende Differentialgleichung unseres Problems:

$$(16)\quad \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = 2m\left(W + \frac{e^2}{r} - \frac{eE'}{r}\sum_1^\infty a_\varkappa \left(\frac{a}{r}\right)^{2\varkappa}\right).$$

$\varphi$ ist eine cyklische Koordinate; es gilt daher der Flächensatz in der Form

$$(17)\quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = p_\varphi = \text{Konst.}$$

Meine Quantenbedingungen (1) schreiben sich in der Wirkungsfunktion $S$ besonders einfach; sie lauten nämlich für $q = \varphi$ und $q = r$

$$(18)\quad \int \frac{\partial S}{\partial \varphi} d\varphi = [S]_\varphi = nh, \qquad \int \frac{\partial S}{\partial r} dr = [S]_r = n'h.$$

$[S]_\varphi$ und $[S]_r$ bedeuten die „Periodizitätsmoduln“ der Wirkungsfunktion, d. h. die Zuwächse, die $S$ annimmt, wenn die Koordinaten $\varphi$ und $r$ ihren vollen Wertebereich durchlaufen, wenn also $\varphi$ von 0 bis $2\pi$, $r$ von $r_{\min}$ bis $r_{\max}$ und zurück zu $r_{\min}$ variiert.

Wegen Gl. (17) folgt

$$[S]_\varphi = 2\pi p_\varphi = 2\pi \cdot \frac{\partial S}{\partial \varphi} = nh. \tag{19}$$

Gl. (16) geht daher über in

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2} + \sum_1^\infty \frac{D_\varkappa}{r^{2\varkappa+1}}, \\ A = 2mW,\ B = me^2,\ C = -\left(\frac{nh}{2\pi}\right)^2,\ D_\varkappa = -2meE'a_\varkappa a^{2\varkappa}, \end{cases} \tag{20}$$

und unsere radiale Quantenbedingung wird

$$n'h = \oint \sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2} + \sum \frac{D_\varkappa}{r^{2\varkappa+1}}}\, dr. \tag{21}$$

Der Kreis am Integralzeichen weist hier auf den geschlossenen Integrationsweg von $r_{\min}$ über $r_{\max}$ bis $r_{\min}$ hin, den man weiterhin durch einen geschlossenen Umgang in der komplexen $r$-Ebene ersetzt denken möge. Unsere Aufgabe besteht darin, die in $A$ enthaltene Energiekonstante $W$ aus Gl. (21) zu berechnen, also $W$ durch $n$ und $n'$ auszudrücken.

Zur Ausführung der Integration entwickeln wir die Quadratwurzel in (21) mit Einführung der Abkürzung

$$P = A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}, \quad \Sigma = \sum \frac{D_\varkappa}{r^{2\varkappa+1}}$$

nach Potenzen der als klein vorausgesetzten Summe $\Sigma$ und erhalten:

$$P^{1/2} + \frac{1}{2}\frac{\Sigma}{P^{1/2}} + \cdots \binom{1/2}{l} \frac{\Sigma^l}{P^{l-1/2}} + \cdots \tag{22}$$

Wir denken uns ferner $\Sigma^l$ nach Potenzen von $\frac{1}{r}$ und $P^{-l+1/2}$ nach Potenzen von $r$ geordnet:

$$\Sigma^l = \sum_\varkappa \frac{D_\varkappa^l}{r^{2\varkappa+l}}, \quad P^{-l+1/2} = \sum_\gamma A_\gamma^l r^{\gamma+2l-1}, \tag{23}$$

wobei also z. B. wird

$$D_\varkappa^1 = D_\varkappa \text{ und } A_0^l = C^{-l+1/2};$$

dann liefert die Methode der komplexen Integration[1]), im Sinne der Gl. (21) angewandt, auf die Reihe (22)

$$(24)\quad n'h = -2\pi i\left(\sqrt{C} - \frac{B}{\sqrt{A}} + \sum^{l}\binom{1/2}{l}\sum^{\varkappa} D^{l}_{\varkappa} A^{l}_{2\varkappa-l}\right).$$

Nach Gl. (20) ist[2])

$$(25)\qquad 2\pi i\sqrt{C} = nh,$$

so daß man statt (24) auch schreiben kann

$$(26)\qquad \frac{B}{\sqrt{A}} = \frac{(n+n')h}{2\pi i} + \sum^{l}\binom{1/2}{l}\sum^{\varkappa} D^{l}_{\varkappa} A^{l}_{2\varkappa-l}.$$

Bei der Entwickelung der Doppelsumme wollen wir bis zu Gliedern mit $a^6$ einschließlich gehen. Dann haben wir zu berücksichtigen

$$\begin{aligned} D^1_1 = D_1,\quad D^1_2 &= D_2,\quad D^1_3 = D_3,\\ D^2_2 &= D^2_1,\quad D^2_3 = 2D_1D_2,\\ &\qquad\quad D^3_3 = D^3_1. \end{aligned}$$

Die untereinander stehenden $D^l_\varkappa$ sind von gleicher Ordnung in $a$, nämlich in der ersten, zweiten, dritten Spalte bzw. von der Ordnung $a^2$, $a^4$, $a^6$. Die zugehörigen Werte der $A$ sind folgende:

$$A^1_1 = -BC^{-3/2},$$

$$A^1_3 = -\frac{1}{2}BC^{-5/2}\left(5\frac{B^2}{C} - 3A\right),\quad A^1_5 = -\frac{1}{8}BC^{-7/2}\left(63\frac{B^4}{C^2} - 70\frac{B^2}{C}A + 15A^2\right),$$

$$A^2_2 = \frac{3}{2}C^{-5/2}\left(5\frac{B^2}{C} - A\right),\quad A^2_4 = \frac{15}{8}C^{-7/2}\left(21\frac{B^4}{C^2} - 14\frac{B^2}{C}A + A^2\right),$$

$$A^3_3 = -\frac{35}{2}BC^{-9/2}\left(3\frac{B^2}{C} - A\right).$$

[1]) Vgl. meine Arbeit über den Zeeman-Effekt in der Physikal. Zeitschrift 17, p. 491, 1916, § 7. Die Rechnung beruht auf dem Residuensatz; die Residuen sind in unserem Falle nur für die Stelle $r = 0$ zu nehmen, während sie für $r = \infty$ sämtlich verschwinden.

[2]) Wegen der Vorzeichenbestimmung von $\sqrt{C}$ vgl. Physikal. Zeitschrift l. c.

Gehen wir dagegen nur bis $a^4$ oder $a^2$, so haben wir nur die beiden ersten oder nur die erste Spalte zu berücksichtigen. Im letzteren Falle ergibt sich aus (26)

$$\frac{B}{\sqrt{A}} = \frac{(n+n')h}{2\pi i} - \frac{1}{2} B D_1 C^{-3/2}$$
$$= \frac{h}{2\pi i}\left(n + n' + \frac{a^2}{4n^3} \frac{E'}{e} \frac{(2\pi e)^4 m^2}{h^4}\right),$$

wenn man die Werte von $B$, $C$, $D_1$ und $a_1$ aus (20), (25) und (15) einsetzt. Hierfür kann man einfacher und in den Dimensionen deutlicher schreiben

$$(27)\quad \frac{B}{\sqrt{A}} = \frac{h}{2\pi i}\left(n + n' + \frac{1}{4n^3} \frac{E'}{e}\left(\frac{a}{a_1}\right)^2\right) = \frac{h}{2\pi i}\left(n + n' + \frac{q}{n^3}\right),$$

wenn man die Abkürzungen benutzt:

$$(28)\qquad a_1 = \frac{h^2}{(2\pi e)^2 m}, \quad q = \frac{1}{4} \frac{E'}{e}\left(\frac{a}{a_1}\right)^2;$$

$a_1$ bedeutet dann den Radius des ersten Bohrschen Kreises im Falle des Wasserstoffatoms, der uns hier den naturgemäßen Vergleichsmaßstab für den Radius $a$ unseres inneren Elektronenringes liefert. Aus (27) folgt nun schließlich

$$(29)\quad A = -\frac{4\pi^2 B^2/h^2}{(n+n'+q/n^3)^2}, \quad W = -\frac{Nh}{(n+n'+q/n^3)^2}.$$

Das Ergebnis ist vielversprechend, trotz der Rohheit unserer Näherung. Wir haben nämlich an Stelle der Balmerschen Formel, die sich hier natürlich in erster Näherung bei Vernachlässigung des Korrektionsgliedes $q/n^3$ ergibt, in zweiter Näherung eine Formel vom Rydbergschen Typus erhalten. Nach Rydberg stellt man nämlich den Term der Hauptserie, der I. Nebenserie und der Bergmann-Serie bekanntlich in der Form dar

$$\text{H. S.}\ \frac{N}{(m+p)^2} \qquad m = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\text{I. N. S.}\ \frac{N}{(m+d)^2} \qquad m = 3, 4, 5, \ldots$$

$$\text{B. S.}\ \frac{N}{(m+b)^2} \qquad m = 4, 5, 6, \ldots$$

Diese Darstellung folgt aber aus unserer Formel für $W$ (bzw. für den durch $-W/h$ gegebenen Term), wenn wir festsetzen:

für die H. S. sei $n = 2,\ n' = 0, 1, 2\ldots,\ p = \frac{q}{8}$

„ „ I. N. S. „ $n = 3,\ n' = 0, 1, 2\ldots,\ d = \frac{q}{27}$

„ „ B. S. „ $n = 4,\ n' = 0, 1, 2\ldots,\ b = \frac{q}{64}$.

Durch unsere Darstellung von $p$, $d$ und $b$ wird gleichzeitig die Tatsache beleuchtet, daß erfahrungsgemäß $p$ am größten, $d$ kleiner, $b$ zumal bei den leichteren Elementen schon außerordentlich klein ist. Ob unsere Darstellung quantitativ richtig ist, ob also die Abnahme der Zahlen $p$, $d$, $b$ durch unsere Nenner 8, 27, 64 genau ausgedrückt wird, läßt sich leider zur Zeit nicht entscheiden. Es liegt dies einmal daran, daß die bisherigen Berechnungen von $p$, $d$ etc. meist mit dem vom Wasserstoff hergenommenen konventionellen Werte $N = 109675$ durchgeführt sind. Wir wissen aber heute, daß $N$ gerade für Wasserstoff eine Abnormität zeigt und daß mit steigendem Atomgewicht $N$ wächst (nach Paschen[1]) bis 109737). Bei der großen Empfindlichkeit der Rechnungen, die zu den Konstanten $p$, $d$ etc. führen, fällt diese Veränderlichkeit von $N$ durchaus ins Gewicht. Sodann sind aber auch, wie mir Herr Paschen mitteilt, die Messungen selbst noch nicht hinreichend genau, da sie nicht auf „internationale Wellenlängen" reduziert sind.

Nach Rydberg und Ritz ist gerade für *He* (Dublettlinien) und *Li* der Wert von $p$ negativ, was unserer Deutung widersprechen würde, nach der $p$, $d$, $b$ ebenso wie $q$ notwendig positiv sein müßte. Indessen ist diesem Widerspruch aus den angegebenen Gründen kein großes Gewicht beizulegen. In der Tat findet W. M. Hicks[2]) bei einer etwas abgeänderten Spektral-

[1]) Ann. d. Phys. 50, p. 936, 1916.

[2]) Phil. Trans. London R. Soc. A, vol. 210, p. 57, vol. 212, p. 32, vol. 213, p. 322.

formel sowohl für *Li* wie für *He* positive Werte von $p$. Für *Parhe* (einfache Linien) ist das Vorzeichen von $p$ auch nach Rydberg und Ritz positiv. Noch unsicherer sind die in der Literatur angegebenen Werte von $d$ wegen der Diffusität der I. N. S.; Ritz verzichtet überhaupt auf deren Berechnung.

Da hiernach die quantitative Prüfung unserer Theorie zurückzustellen ist, müssen wir uns mit qualitativen Anzeichen ihrer Richtigkeit begnügen. Solche betr. Intensität und Erregungsbedingungen werden unten besprochen werden. Hier sei nur auf die Proportionalität der $p$ in der Reihe der Alkalien mit dem Atomvolumen[1]) hingewiesen; sie entspricht der Proportionalität unserer Größe $q$ mit $a^2$. In der Tat wird der Radius $a$ des inneren Ringes in irgend einer Weise die räumliche Ausdehnung des Atoms bestimmen; ist die Ausdehnung in der Äquatorebene des Atoms die maßgebende, so wird das Atomvolumen direkt proportional mit $a^2$ sein.

Wir wollen jetzt den Grad der Annäherung verbessern, behalten also auch die Glieder mit $a^4$ bei. Dann wird die Doppelsumme in (26)

$$\Sigma\Sigma = \frac{1}{2} D_1 A_1^1 + \frac{1}{2} D_2 A_3^1 - \frac{1}{8} D_1^2 A_2^2 =$$

$$-\frac{1}{2} B C^{-3/2}\left(D_1 + \frac{5}{2} D_2 \frac{B^2}{C^2} + \frac{15}{8} D_1^2 \frac{B}{C^2}\right) + \frac{3}{4} A C^{-5/2}\left(D_2 B + \frac{1}{4} D_1^2\right).$$

Setzt man hier für $B$, $C$, $D$ die Werte aus (20), für $A$ die vorige Näherung aus (29) ein und benutzt die Abkürzungen (28), so entsteht

$$\begin{aligned}\Sigma\Sigma = {} & \frac{1}{4}\,\frac{h}{2\pi i n^3}\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \frac{E'}{e}\left(1 + \frac{15}{32}\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \frac{3 - 2E'/e}{n^4}\right) \\ & - \frac{3}{128}\,\frac{h}{2\pi i n^5}\left(\frac{a}{a_1}\right)^4 \frac{E'}{e}\,\frac{9 - 2E'/e}{(n + n' + q/n^3)^2} \\ = {} & \frac{h}{2\pi i}\left\{\frac{q}{n^3} - \frac{15}{8} q^2 \frac{2 - 3e/E'}{n^7} + \frac{3}{8}\,\frac{q^2}{n^5}\,\frac{2 - 9e/E'}{(n + n' + q/n^3)^2}\right\} \\ = {} & \frac{h}{2\pi i}\left\{q_n + \frac{\varkappa_n}{(n + n' + q/n^3)^2}\right\}\end{aligned}$$

[1]) Vgl. z. B. R. T. Birge, Astrophysic. Journ. 32, p. 112, 1910.

mit leicht ersichtlicher Bedeutung der neuen Abkürzungen $q_n$, $\varkappa_n$ (vgl. (30 a)).

Setzen wir in (26) ein, so folgt

$$\frac{B}{\sqrt{A}} = \frac{h}{2\pi i}\left\{n + n' + q_n + \frac{\varkappa_n}{(n + n' + q/n^3)^2}\right\}.$$

Berechnen wir hieraus $A$ und $W$ wie in (29), so finden wir schließlich

$$W = -\frac{Nh}{\left(n + n' + q_n + \frac{\varkappa_n}{(n + n' + q/n^3)^2}\right)^2} \tag{30}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{cases} q_n = \dfrac{q}{n^3} - \dfrac{15}{8} q^2 \dfrac{2 - 3e/E'}{n^7} \\ \varkappa_n = \dfrac{3}{8} q^2 \dfrac{2 - 9e/E'}{n^5}. \end{cases} \tag{30 a}$$

Dies Ergebnis ist nicht weniger vielsagend wie das Ergebnis (29). Wir haben nämlich jetzt an Stelle der Rydbergschen eine Formel vom Ritzschen Typus erhalten. Ritz stellt nämlich mit großem numerischem Erfolge den Term der Hauptserie und der I. Nebenserie (wir fügen auch den Bergmann-Term hinzu, trotzdem bei ihm die Besonderheit der Ritzschen Darstellung praktisch nicht mehr in Betracht kommt) folgendermaßen[1]) dar:

$$\text{H. S.}\quad \frac{N}{\left(m + p + \frac{\pi}{(m + p)^2}\right)^2} \qquad m = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\text{I. N. S.}\quad \frac{N}{\left(m + d + \frac{\delta}{(m + d)^2}\right)^2} \qquad m = 3, 4, 5, \ldots$$

$$\text{B. S.}\quad \frac{N}{\left(m + b + \frac{\beta}{(m + b)^2}\right)^2} \qquad m = 4, 5, 6, \ldots$$

---

[1]) Diss. Göttingen, Ann. d. Phys. 12, p. 246, 1903. Ritz wechselt in der Schreibweise insofern, als er den Nenner von $\pi$ (bzw. $\delta$, $\beta$) teils

Diese Darstellung folgt aber aus unserer Formel (30), wenn wir wieder bestimmen:

für die H. S. sei $n = 2$, $n' = 0, 1, 2, \ldots$ $q_2 = p$, $\varkappa_2 = \pi$
„ „ I. N. S. „ $n = 3$, $n' = 0, 1, 2, \ldots$ $q_3 = d$, $\varkappa_3 = \delta$
„ „ B. S. „ $n = 4$, $n' = 0, 1, 2, \ldots$ $q_4 = b$, $\varkappa_4 = \beta$.

Jedenfalls ist es höchst bemerkenswert und befriedigend, daß diejenigen drei Typen von Spektralformeln, die Balmersche, Rydbergsche und Ritzsche, die in größeren zeitlichen Abständen voneinander allmählich und mühsam aus dem empirischen Material herausgearbeitet sind, hier von selbst und gleichzeitig aus unserer Theorie entspringen, als erste, zweite und dritte Näherung.

Nicht minder befriedigend ist es, daß unsere Deutung dieser Spektralformeln sich zwanglos den Bedingungen fügt, unter denen die Spektren erfahrungsgemäß entstehen. Die Hauptserie tritt am leichtesten auf (bei geringsten Temperaturen oder elektrischen Erregungen, zumal bei den Alkalien), schwerer die I. Nebenserie, die Bergmann-Serie ist am schwierigsten zu erhalten und daher auch am spätesten gefunden. Nach unserer Theorie gehören zu den variabeln Termen (den Anfangsbahnen) dieser drei Serien die Werte $n = 2, 3, 4$, also Flächenkonstanten $\frac{nh}{2\pi}$, die sich wie $2:3:4$ verhalten; die pro Zeiteinheit überstrichenen Flächen und die mittleren Abstände des Elektrons vom Kern bei seiner Anfangsbahn und daher auch die zu ihrer Einleitung erforderlichen Erregungen nehmen also zu in der Reihenfolge Hauptserie, I. Nebenserie, Bergmann-Serie.

Auch die tatsächlichen Intensitätsverhältnisse entsprechen unserer Deutung. Die Intensität der Linien innerhalb jeder Serie nimmt ab, die Hauptserie ist stärker als die I. Nebenserie, diese stärker wie die Bergmann-Serie. Ersteres entspricht

---

gleich $m^2$, teils gleich dem Quadrat des ganzen Nenners von $N$ setzt. Die Schreibweise des Textes steht in der Mitte zwischen beiden und kommt gelegentlich ebenfalls bei Ritz vor (Phys. Zeitschr. 4, p. 406, 1903).

dem Umstande, daß wir „Ellipsen" mit größerer Exzentrizität (größerem $n'$) für unwahrscheinlicher ansehen als solche mit kleinerer oder als Kreise[1]); letzteres findet seine Erklärung darin, daß sich das Elektron in der Nähe des Kerns am stabilsten befindet, daß also zunehmender Abstand vom Kern zunehmende Unwahrscheinlichkeit bedeutet. Natürlich ist dabei das Wort „Ellipse" in übertragenem Sinne gemeint. In unserem allgemeinerem Atomfeld sind die Bahnen nicht, wie im Keplerschen Problem, strenge Ellipsen; wohl aber sind aus Symmetriegründen die Bahnen $n' = 0$ strenge Kreise; dementsprechend werden bei zunehmendem $n'$ die Bahnen mehr und mehr exzentrisch gestaltet sein. (Daß wir diese Bahnen im einzelnen nicht zu kennen brauchen, ist ein Vorteil der hier befolgten allgemeinen analytischen Methode, welche das Ziel der Energieberechnung mit geringstem Rechenaufwand erreicht; bei meiner ursprünglichen spezielleren Methode wäre man Gefahr gelaufen, dieses Ziel über den geometrischen Einzelheiten der Bahn aus dem Auge zu verlieren.)

In numerischer Hinsicht wäre zu bemerken, daß die Koeffizienten $\pi$, wenigstens für die Alkalien, bei Ritz kleiner sind als die $p$ ($d$, $\delta$ und $\beta$ kommen, wie erwähnt, bei Ritz nicht vor). Dem entspricht in unserer Darstellung, daß $\varkappa_n$ von zweiter Ordnung[2]), $q_n$ von erster Ordnung in $a^2$ ist. Im übrigen ist, wie oben betont, unsere Darstellung der $p$, $\pi$ etc. vorläufig numerisch noch unsicher.

In einer Hinsicht weicht unser Standpunkt wesentlich von dem Ritzschen und Rydbergschen ab. Bei Rydberg gibt es für die drei hier betrachteten Serien drei empirische Konstante, $p$, $d$, $b$, bei Ritz deren sechs, $p$, $\pi$, $d$, $\delta$, $b$, $\beta$. Dagegen behauptet unsere Theorie mit einer einzigen Konstanten, dem

[1]) Eine statistische Begründung hierfür ist inzwischen von K. Herzfeld gegeben worden, Ann. d. Phys. 51, p. 261, 1916.

[2]) Hieraus würde folgen, daß bei den Alkalien $\pi$ proportional mit dem Quadrat des Atomvolumens sein müßte. Die bisherigen Berechnungen geben dagegen für $\pi$, ebenso wie für $p$, Proportionalität mit der ersten Potenz des Atomvolumens.

Radius $a$ des inneren Elektronenringes oder den daraus berechneten unbenannten Größen $q$, $q_n$, $\varkappa_n$ auszukommen und jene Konstanten durch diese eine Größe in universeller Form mittels der Quantenzahl $n$, der Kernladung $E$ bzw. der Ladung $E'$ des inneren Elektronenringes darzustellen. Eine Bestätigung unserer Theorie wird erst dann erreicht sein, wenn es gelingt, für jedes Element diese eine Konstante so zu wählen, daß durch sie die empirischen Konstanten der betreffenden Spektralformeln wiedergegeben werden.

Ich habe früher stark betont, daß meine Formeln zur Darstellung der wasserstoff-ähnlichen Feinstrukturen, deren Mannigfaltigkeit durch die Paschen'schen Messungen bekannt geworden ist, nullkonstantige Formeln waren. Dementsprechend ist jetzt zu betonen, daß der weitere Ausbau der Theorie für Elemente mit einem inneren Elektronenring einkonstantige Formeln geliefert hat, welche den Anspruch erheben, sämtliche Spektrallinien dieser Elemente mit vorläufigem Ausschluß der II. Nebenserie darzustellen. Wenn es möglich ist, diese eine Konstante selbst wieder modellmäßig zu erklären und durch die Kernladung zu berechnen (wie im nächsten Paragraphen bei Gl. (39 b) versucht werden wird), würden sich diese einkonstantigen Formeln sogar wieder auf nullkonstantige reduzieren.

Übrigens scheint die Einschränkung auf die einfacheren, leichten Elemente nicht einmal wesentlich zu sein. Freilich ist man nur bei diesen Elementen sicher, daß die inneren Elektronen auf einem einzelnen Ringe angeordnet sind, wie unsere Theorie voraussetzt. Andrerseits scheint aber der Ritzsche Typus der Spektralformeln, auf den unsere Theorie führte, im wesentlichen auch für schwere Elemente zu gelten[1]. Wir dürfen daraus wohl folgern, daß auch bei komplizierterer Anordnung der inneren Elektronen die Vorstellung eines einzelnen Elektronenringes für die Berechnung der optischen Spektren zulässig ist.

Es ist aber auch durchaus möglich, daß unsere Rechnungen noch nicht weit genug geführt sind, daß man z. B. die Rück-

[1]) Birge bestätigt ihn l. c. in der Reihe der Alkalien bis zu Rubidium und findet erst bei Cäsium merkliche Abweichungen.

wirkung des äußeren Elektrons auf den inneren Elektronenring berücksichtigen sollte. Bevor man aber die Rechnungen in dieser Hinsicht vervollständigt, wird man an möglichst genauen und möglichst genau berechneten Beobachtungen feststellen müssen, ob und in welchen Punkten die Theorie versagt. Wenn sich z. B. zeigen sollte, daß Unstimmigkeiten besonders in der H. S. auftreten, so wird man daraus schließen dürfen, daß der Fehler in der Vernachlässigung der Rückwirkung liegt, die sich bei $n = 2$ stärker als bei $n = 3$ oder $n = 4$ bemerklich machen müßte.

## § 4. Der magnetische Einfluss des inneren Ringes auf die Spektralformel.

Im Interesse der Einfachheit wurden bisher folgende Punkte vernachlässigt: Die Rückwirkung des äußeren Elektrons auf den inneren Ring, der magnetische Einfluß des inneren Ringes auf das äußere Elektron, der zeitliche Wechsel des elektrischen Atomfeldes, herrührend von der jeweiligen individuellen Lage der umlaufenden inneren Elektronen. Von diesen Vernachlässigungen wollen wir hier nur die des magnetischen Einflusses beseitigen. Den inneren Ring setzen wir dabei nach wie vor als kreisförmig vom Radius $a$ und gleichförmig mit der Ladung $E'$ belegt voraus.

Der Umlauf des inneren Ringes mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ ist äquivalent einem magnetischen Dipol vom Momente

$$\mu = J\pi a^2, \quad J = -\frac{E'\omega}{2\pi c}. \tag{31}$$

Das magnetische Potential dieses Dipols ist

$$\Phi = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mu}{R}$$

und das magnetische Feld desselben

$$\mathfrak{H}_x = -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\frac{\mu}{R}, \quad \mathfrak{H}_y = -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\frac{\mu}{R}, \quad \mathfrak{H}_z = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\mu}{R}.$$

$R$ bedeutet den räumlichen Abstand des Aufpunktes vom Kern, $z$ die Richtung senkrecht zum inneren Ringe oder die Achse des Dipoles.. Auf ein mit der Geschwindigkeit $\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}$ bewegtes Elektron (Ladung $-e$) übt das Feld die Kraft aus

$$(32)\quad \begin{cases} \mathfrak{F}_x = \dfrac{e}{c}\left(\dot{y}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} - \dot{z}\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\right)\dfrac{\mu}{R} = -\dfrac{e\mu}{c}\dfrac{\dot{y}}{r^3} \\ \mathfrak{F}_y = \dfrac{e}{c}\left(\dot{z}\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial z} - \dot{x}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\dfrac{\mu}{R} = +\dfrac{e\mu}{c}\dfrac{\dot{x}}{r^3} \\ \mathfrak{F}_z = \dfrac{e}{c}\left(\dot{x}\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial z} - \dot{y}\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\right)\dfrac{\mu}{R} = 0. \end{cases}$$

Die Werte in der letzten Spalte gelten für eine Bewegung in der Äquatorebene ($z = \dot{z} = 0$, $R = r$). Die Bewegungsgleichungen lauten also

$$(33)\quad \begin{cases} m\ddot{x} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{f\dot{y}}{r^3}, \\ m\ddot{y} = -\dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{f\dot{x}}{r^3}. \end{cases} \qquad f = \frac{e\mu}{c}$$

Es kommt darauf an, dieselben in kanonische Form umzuschreiben.

Als Momentengleichung erhält man, unter $p_\varphi$ das elementare Impulsmoment

$$(34)\qquad p_\varphi = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\dot{\varphi}$$

verstanden,

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = f\,\frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r^3} = -\frac{d}{dt}\,\frac{f}{r},$$

also

$$(35)\qquad p_\varphi + \frac{f}{r} = p = \text{Konst.}$$

$p$ bedeutet eine Integrationskonstante und zugleich, wie wir zeigen werden, das zum Winkel $\varphi$ kanonisch zugehörige Impulsmoment.

Andrerseits folgt durch Multiplikation von (33) mit $x$, $y$, wenn $V$ wie früher nur von $r$ abhängt:

$$m(x\ddot{x} + y\ddot{y}) = -r\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{f}{m}\frac{p_\varphi}{r^3}.$$

Es ist aber

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} = r\ddot{r} - r^2\dot{\varphi}^2 = r\ddot{r} - \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^2},$$

also

$$m\left(r\ddot{r} - \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^2}\right) = -r\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{f}{m}\frac{p_\varphi}{r^3},$$

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{f}{m}\frac{p_\varphi}{r^4} + \frac{p_\varphi^2}{m r^3}.$$

Wir schreiben hierfür mit Rücksicht auf (35)

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{f}{mr^4}\left(p - \frac{f}{r}\right) + \frac{1}{mr^3}\left(p - \frac{f}{r}\right)^2$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r}\left(V - \frac{fp}{mr^3} + \frac{p^2}{2mr^2} + \frac{f^2}{2mr^4}\right).$$

Damit ist unser Ziel, die Gleichungen zu kanonisieren, erreicht. Führen wir nämlich eine Hamiltonsche Funktion

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2}\left(p - \frac{f}{r}\right)^2 + V \tag{36}$$

ein, so gilt für die Koordinate $q = r$:

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}.$$

In derselben Weise wie $r$ und $p_r$ gehören aber auch $\varphi$ und $p$ kanonisch zusammen. Bilden wir nämlich

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{mr^2}\left(p - \frac{f}{r}\right),$$

so erweist sich diese Ableitung von $H$ nach (35) und (34) als identisch mit $\frac{d\varphi}{dt}$, während andrerseits auch gilt

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0,$$

da $\varphi$ in $H$ nicht vorkommt. $p$ ist also in der Tat das im Sinne der kanonischen Gleichungen zu $\varphi$ gehörende Impulsmoment.

Der Energiesatz lautet jetzt

$$H = W = \text{Konst.}$$

und die Jacobische partielle Differentialgleichung erhält man, wenn man hier

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad p = \frac{\partial S}{\partial \varphi}$$

einträgt, unter $S$ die Jacobische Wirkungsfunktion

$$S = \int_{r_0}^{r} p_r \, d^r + \int_{\varphi_0}^{\varphi} p \, d\varphi$$

verstanden:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} - \frac{f}{r}\right)^2 = 2m(W - V). \tag{37}$$

Mit dieser Gleichung haben wir ebenso zu verfahren wie mit der analogen Gl. (16) des vorigen Paragraphen. Wir machen also wegen der azimutalen Quantenbedingung (19)

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{nh}{2\pi}$$

und erhalten statt (20) mit der dort angegebenen Bedeutung von $A$, $B$, $C$, $D_\varkappa$:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2} + \frac{D}{r^3} + \frac{E}{r^4} + \sum_1^\infty \frac{D_\varkappa}{r^{2\varkappa+1}} \tag{38}$$

und mit den neuen Abkürzungen

$$D = 2f\frac{nh}{2\pi}, \quad E = -f^2. \tag{38 a}$$

Vernachlässigen wir aber das Quadrat des magnetischen Momentes, so fällt das Glied mit $r^{-4}$ fort und Gl. (38) nimmt genau die Form von Gl. (20) an, wobei an die Stelle des früheren

$$D_1 = -2me^2\frac{E'}{e}\frac{a^2}{4}$$

jetzt tritt

$$D_1 + D = -2me^2\left(\frac{1}{4}\frac{E'}{e}a^2 - \frac{nh}{2\pi}\frac{f}{me^2}\right).$$

Infolgedessen wird auch die Ausrechnung der radialen Quantenbedingung genau so verlaufen wie im vorigen Paragraphen bei entsprechender Hinzufügung von $D$. Man erhält z. B. statt Gl. (27) ersichtlich

$$\frac{B}{\sqrt{A}} = \frac{h}{2\pi i}\left(n + n' + \frac{1}{4n^3}\frac{E'}{e}\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 - \frac{h}{2\pi n^2}\frac{f}{me^2a_1^2}\right)$$
$$= \frac{h}{2\pi i}\left(n + n' + \frac{q}{n^3} + \frac{q'}{n^2}\right).$$

Hier hat $q$ dieselbe Bedeutung wie früher in Gl. (28); $q'$ dagegen bedeutet mit Rücksicht auf (33) und (31)

$$(39) \qquad q' = -\frac{h}{2\pi}\frac{f}{me^2a_1^2} = -\frac{h}{2\pi}\frac{\mu}{meca_1^2} = \frac{1}{2}\frac{E'}{e}\frac{h}{2\pi}\frac{\omega a^2}{mc^2a_1^2}.$$

Schließlich ergibt sich wieder eine Spektralformel vom Rydbergschen Typus, nämlich

$$(40) \qquad W = -\frac{Nh}{(n + n' + qn^{-3} + q'n^{-2})^2}.$$

Ihre Anpassung an die Hauptserie, die I. Nebenserie und die Bergmann-Serie geschieht ebenso wie pag. 160, wobei man jetzt zu setzen hat

$$(41) \qquad p = \frac{q}{8} + \frac{q'}{4}, \quad d = \frac{q}{27} + \frac{q'}{9}, \quad b = \frac{q}{64} + \frac{q'}{16}.$$

Man könnte durch weitere Annäherung fortschreiten zu einer Spektralformel vom Ritzschen Typus. Doch hat dies wegen der geringen Größe des magnetischen Einflusses vermutlich keinen Wert. Um uns davon zu überzeugen, wollen wir annehmen, daß sich der Umlauf im inneren Ringe durch eine Quantenbedingung der Form

$$ma^2\omega = \frac{\varkappa h}{2\pi}$$

regelt (die einfachste, aber vielleicht zu spezielle Annahme wäre $\varkappa = 1$). Dann geht Gl. (39) über in

$$(39\text{a}) \qquad q' = \frac{\varkappa}{2}\frac{E'}{e}\left(\frac{h}{2\pi mca_1}\right)^2 = \frac{\varkappa}{2}\frac{E'}{e}\left(\frac{2\pi e^2}{ch}\right)^2 = \frac{\varkappa}{2}\frac{E'}{e}a^2.$$

Hierbei wurde der Wert von $a_1$ aus Gl. (28) und die Bezeichnung $\alpha$ für die universelle Konstante $\frac{2\pi e^2}{ch}$ benutzt ($\alpha^2 = 5.10^{-5}$ vgl. Ann. II, pag. 57). Unter der gleichen Annahme über die quantenmäßige Bestimmtheit des inneren Ringes ergibt sich für den Radius $a$ desselben analog zu Gl. (28), wo $\varkappa h$ an Stelle von $h$ und die Kernladung $E$ an Stelle von $e$ zu setzen ist

$$a = \frac{\varkappa^2 h^2}{4\pi^2 e E m}, \quad \text{also} \quad \frac{a}{a_1} = \left(\frac{\varkappa^2 e}{E}\right)$$

und

(39 b) $$q = \frac{k^2}{4} \frac{E'}{E}.$$

Nach den Gl. (39 a, b) wird z. B. für $He$ ($E' = e$, $E = 2e$)

$$q' = \frac{\varkappa}{2} 5.10^{-5}, \quad q = \frac{\varkappa^2}{8}$$

und für $Li$ ($E' = 2e$, $E = 3e$)

$$q' = \varkappa \cdot 5.10^{-5}, \quad q = \frac{\varkappa^2}{6}.$$

Soll also $q'$ neben $q$ zur Geltung kommen, so müßte $\varkappa$ ein sehr kleiner echter Bruch sein. Da letzteres unwahrscheinlich ist und da $q$ den elektrischen, $q'$ den magnetischen Einfluß des inneren Ringes mißt, so müssen wir schließen, daß der magnetische Einfluß gegen den elektrischen zu vernachlässigen ist.

Das zu Anfang dieses Paragraphen behandelte und für den vorliegenden Zweck ausreichend gelöste Problem der Kanonisierung der Bewegungsgleichungen ist einer eleganten allgemeineren Lösung fähig, die ich Hrn. G. Herglotz verdanke. Der Fortschritt dieser Lösung gegenüber der unserigen besteht hauptsächlich darin, daß sie die Differentialgleichungen im Raume betrachtet, während wir uns auf die Äquatorebene beschränkten. Daneben wird auch das magnetische Feld verallgemeinert, nämlich statt unseres Potentials

$$\Phi = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu}{R}$$

das Potential $$\Phi = \frac{\partial}{\partial z} P$$

zu Grunde gelegt, wo $P$ eine beliebige Funktion der Koordinaten $x\,y\,z$ ist, die nur der Bedingung

$$\varDelta P = 0$$

zu genügen hat. Die Kraft auf das bewegte Elektron ist dann immer noch durch die Gl. (32) gegeben, wenn man darin $\mu/R$ durch $P$ ersetzt, und die Bewegungsgleichungen werden

$$(42)\qquad \begin{cases} m\ddot{x} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} + \dfrac{e}{c}\left(\dot{y}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} - \dot{z}\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial z}\right) P \\ m\ddot{y} = -\dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{e}{c}\left(\dot{z}\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \dot{x}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) P \\ m\ddot{z} = -\dfrac{\partial V}{\partial z} + \dfrac{e}{c}\left(\dot{x}\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \dot{y}\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z}\right) P. \end{cases}$$

Die Gleichungen ohne Magnetfeld erhält man bekanntlich aus der Lagrangeschen Funktion

$$(43\,\text{a})\qquad L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V$$

nach dem Schema der Variationsrechnung in der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \text{etc.}$$

Herglotz bemerkt nun, daß man nur nötig hat, zu $L$ die Größe

$$(43\,\text{b})\qquad \varLambda = \frac{e}{c}\left(\dot{x}\frac{\partial P}{\partial y} - \dot{y}\frac{\partial P}{\partial x}\right)$$

hinzuzufügen, um nach demselben Schema auch die Gleichungen mit Magnetfeld zu erhalten. In der Tat wird

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \varLambda}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \varLambda}{\partial x} &= \frac{e}{c}\left(\dot{z}\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \dot{y}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) P + \frac{e}{c}\dot{y}\varDelta P \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \varLambda}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \varLambda}{\partial y} &= \frac{e}{c}\left(\dot{x}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \dot{z}\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\right) P - \frac{e}{c}\dot{x}\varDelta P \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \varLambda}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \varLambda}{\partial z} &= \frac{e}{c}\left(\dot{y}\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \dot{x}\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\right) P. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke stimmen mit Rücksicht auf $\Delta P = 0$ bis auf das Vorzeichen überein mit den Komponenten der magnetischen Kraft in den Gl. (42); bildet man also die Variationsgleichungen zu der Lagrangeschen Funktion $L + \Lambda$ und setzt die Beiträge von $\Lambda$ auf die rechten Seiten hinüber, so erhält man genau die Gl. (42).

Aus der Lagrangeschen Funktion ergibt sich aber die Hamiltonsche Funktion der kanonischen Differentialgleichungen nach der allgemeinen Regel der analytischen Mechanik

$$H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - (L + \Lambda),$$

wo

$$(44) \qquad p_x = \frac{\partial (L + \Lambda)}{\partial \dot{x}}, \quad p_y = \frac{\partial (L + \Lambda)}{\partial \dot{y}}, \quad p_z = \frac{\partial (L + \Lambda)}{\partial \dot{z}}$$

ist und wo, den obigen Bezeichnungen entsprechend, die Lagrangesche Funktion mit $L + \Lambda$ bezeichnet ist. Für $H$ folgt auf diese Weise

$$(45) \qquad H = \frac{1}{2m}\left\{\left(p_x - \frac{e}{c}\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(p_y + \frac{e}{c}\frac{\partial P}{\partial x}\right) + p_z^2\right\} + V.$$

Setzt man nun, um auf die besonderen Verhältnisse vom Anfang dieses Paragraphen einzugehen,

$$P = \frac{\mu}{r}, \quad \frac{e}{c} P = \frac{f}{r},$$

beschränkt man sich ferner auf die Ebene $z = 0$, führt in dieser Polarkoordinaten $r \varphi$ ein und nennt die zugehörigen kanonischen Impulskoordinaten $p_r$ und $p$, so wird nach (43 a, b), (44) und (45)

$$L + \Lambda = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + f \frac{\dot{\varphi}}{r},$$

$$p_r = \frac{\partial (L + \Lambda)}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad p = \frac{\partial (L + \Lambda)}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} + \frac{f}{r},$$

$$H = p_r \dot{r} + p \dot{\varphi} - (L + \Lambda) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2 m r^2}\left(p - \frac{f}{r}\right)^2 + V.$$

Dies Resultat stimmt natürlich genau mit (36) überein auch jetzt wird $p$ konstant, sofern $\varphi$ cyklisch ist (in $V$ nicht vorkommt). Wir merken dabei an, daß man im allgemeinen zu unterscheiden hat zwischen der zu einer Koordinate ($\varphi$) gehörigen kanonischen Impulskoordinate ($p$) und der uns sonst geläufigen elementaren Impulskoordinate ($p_\varphi$, in unserem Falle nicht konstant). Wir merken ferner die ebenso zu gewinnende Form der Hamiltonschen Funktion in räumlichen Polarkoordinaten $r\,\Theta\,\varphi$ an:

$$H = \frac{p_r^2}{2\,m} + \frac{p_\Theta^2}{2\,m\,r^2} + \frac{1}{2\,m\,r^2 \sin^2\Theta}\left(p - \frac{f \sin^2\Theta}{r}\right)^2 + V.$$

Das allgemeine Problem, Herstellung des kinetischen Potentials $H$ in Fällen, wo die wirkenden Kräfte kein Potential haben, ist in dem Werke von L. Königsberger, die Prinzipien der Mechanik, Leipzig 1901 behandelt. Den Zusammenhang des Quantenansatzes mit der Variationsrechnung, deren Formeln wir hier im Anschlusse an Herglotz benutzt haben, hebt auch Debye[1]) beim Problem des Zeeman-Effekts hervor.

## § 5. Theorie der Röntgen-Spektren unter Berücksichtigung der äusseren Elektronen.

Die Erörterungen dieses Paragraphen laufen parallel zu denen des § 3, aber sozusagen mit Vertauschung des Atominneren und -äußeren. Es besteht nämlich der folgende durchgehende Unterschied zwischen den sichtbaren Spektren und den Röntgen-Spektren (vgl. auch den Schluß meiner Annalenarbeit): Die sichtbaren Spektren entstehen außerhalb des Atoms, sie sind um so einfacher (wasserstoff-ähnlicher), je weiter außerhalb sie entstehen und je höher daher die Seriennummer des betreffenden Terms ist; die Komplikation der sichtbaren Spektren rührt von Elektronen her, die sich sämtlich im Innern der betrachteten Elektronenbahn, nämlich im Innern der eigentlichen Atomsphäre befinden. Dagegen entstehen die Röntgen-

[1]) Göttinger Nachr., 3. Juni 1916, § 3 Schluß.

Spektren im Innersten des Atoms; sie sind um so einfacher (wasserstoff-ähnlicher), je näher ihr Entstehungsort dem Kern liegt, der $K$-Term ist einfacher wie der $L$-Term, dieser einfacher wie der $M$-Term etc.; die Komplikation der Röntgen-Spektren und ihre Abweichung von der Ganzzahligkeit der Termnenner rührt von der peripheren Anordnung der zum Atom gehörenden sonstigen Elektronen her, die sich also sämtlich oder zum größeren Teil außerhalb der betrachteten Elektronenbahn befinden.

Um den Anschluß an § 3 zu gewinnen, wollen wir uns auch jetzt auf Bewegungen in einer Symmetrieebene des Atoms (der „Äquatorebene") beschränken, womit wir den interessanten halbzahligen $l$-Term (vgl. § 2) von der Betrachtung ausschließen. In der Äquatorebene benutzen wir Koordinaten $r\varphi$. Ferner wollen wir annehmen, daß die äußeren Elektronen (Ladung $E'$) auf einem Kreisring vom Radius $a$ in der Äquatorebene angeordnet sind und durch eine gleichmäßige Ladungsverteilung ersetzt werden können. Diese Annahme ist allerdings sicher zu speziell; die Elektronen werden auch außerhalb der Äquatorebene und nicht auf einem, sondern auf mehreren Ringen liegen, zumal bei den Schwermetallen. Trotzdem mag unser Bild als vorläufiges Beispiel genügen.

Rechnerisch kommt der Gegensatz zwischen optischen und Röntgen-Spektren darauf hinaus, daß bei jenen $r > a$ war, bei diesen $r < a$ sein wird. Allerdings sind Fälle, wo das „Aufelektron" den oder die äußeren Elektronenringe schneidet, bei den höheren Serientermen nicht aus dem Auge zu verlieren; die scheinbaren Abweichungen vom Kombinationsprinzip dürften gerade in diesem Vorkommnis ihren Grund haben. Wir wollen aber die Formeln hier nur für $r < a$ entwickeln.

Das Potential $V$ von Kern und äußerem Elektronenring wird dann statt wie früher nach Potenzen von $a/r$ jetzt nach Potenzen von $r/a$ zu entwickeln sein; an Stelle von (15) ergibt sich daher

$$V = -\frac{eE}{r} + \frac{eE'}{a}\left(1 + \sum_{1}^{\infty} a_\varkappa \left(\frac{r}{a}\right)^{2\varkappa}\right), \quad a_\varkappa = \left(\frac{1.3..2\varkappa - 1}{2.4..2\varkappa}\right)^2.$$

An Stelle des Gliedes $\frac{eE'}{r}$, welches früher das Potential der Kernladung $E$ kompensierte, tritt also jetzt das konstante Glied $\frac{eE'}{a}$; von einer Abschirmung der Kernladung $E$ durch die Ringladung $E'$ ist jetzt keine Rede mehr. So trivial diese Aussage erscheint, so bedeutungsvoll ist sie in ihren Folgen. Liegt doch hierin der Grund, weshalb in den Röntgen-Spektren die mit der Kernladung $E$ proportionale Ordnungszahl $Z$ jedes Elementes zum klaren Ausdruck kommt, während sie sich in den optischen Spektren hinter der neutralisierenden Ladung $E'$ versteckt.

Die Jacobische Differentialgleichung für das Problem der Röntgenspektren lautet jetzt an Stelle von (16)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = 2m\left(W - \frac{eE'}{a} + \frac{eE}{r} - \frac{eE'}{a}\sum_1^\infty a_\varkappa \left(\frac{r}{a}\right)^{2\varkappa}\right).$$

Durch Benutzung der azimutalen Quantenbedingung (19) wird die Gleichung übergeführt in

$$(46)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2} + \sum_1^\infty D_\varkappa r^{2\varkappa}, \\ A = 2m\left(W - \frac{eE'}{a}\right),\ B = meE,\ C = -\left(\frac{nh}{2\pi}\right)^2,\ D_\varkappa = -\frac{2meE'a_\varkappa}{a^{2\varkappa+1}}. \end{cases}$$

Von hier aus gestaltet sich die Berechnung der azimutalen Quantenbedingung

$$n'h = \oint \sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2} + \sum D_\varkappa r^{2\varkappa}}\, dr = \oint \sqrt{P + \sum}\, dr$$

ähnlich wie die frühere Bedingung (21), bis auf diejenigen Unterschiede, die durch die abgeänderte Form der Reihenentwickelung in $\Sigma$ gegeben werden. Während nämlich früher $\Sigma$ nach negativen Potenzen von $r$ geordnet war und wir daher, um die Residuen nach der Methode der komplexen Integration zu finden, die Größe $P^{-l+1/2}$, Gl. (23), nach positiven Potenzen von $r$ entwickeln mußten, ist $\Sigma$ jetzt nach positiven Potenzen von $r$ geordnet und muß daher $P^{-l+1/2}$ nach negativen Potenzen von $r$ entwickelt werden; die Residuen sind jetzt nicht für $r=0$, sondern für $r=\infty$ zu bilden. Es sei

$$(\Sigma)^l = \Sigma^\varkappa D^l_\varkappa r^{2\varkappa}, \quad P^{-l+1/2} = \Sigma^\gamma \frac{A^l_\gamma}{r^\gamma}.$$

Dann erhält man an Stelle der Gl. (24) und (26)

$$n'h = -2\pi i\left(\sqrt{C} - \frac{B}{\sqrt{A}} - \Sigma^l \binom{1/2}{l} \Sigma^\varkappa D^l_\varkappa A^l_{2\varkappa+1}\right),$$

$$(47) \qquad \frac{B}{\sqrt{A}} = \frac{(n+n')h}{2\pi i} - \Sigma^l \binom{1/2}{l} \Sigma^\varkappa D^l_\varkappa A^l_{2\varkappa+1}.$$

Die neuen Koeffizienten $A^l_\gamma$ hängen mit den früheren in einfacher Weise zusammen. Man braucht im wesentlichen nur $A$ und $C$ miteinander zu vertauschen, entsprechend dem Umstande, daß jetzt nach Potenzen von $\frac{1}{r}$, früher nach Potenzen von $r$ entwickelt wurde. Auf diese Weise findet man jetzt als zusammengehörig

$$D^1_1 = D_1, \quad A^1_3 = -\frac{1}{2} B A^{-5/2}\left(5\frac{B^2}{A} - C\right),$$

$$D^1_2 = D_2, \quad A^1_5 = -\frac{1}{8} B A^{-7/2}\left(63\frac{B^4}{A^2} - 70\frac{B^2}{A}C + 15C^2\right).$$

$D_1$ ist von der Ordnung $a^{-3}$, $D_2$ von der Ordnung $a^{-5}$, vgl. Gl. (46); der nächste Koeffizient $D^2_2 = D^2_1$ würde schon von der Ordnung $a^{-6}$ sein. Geht man nur bis zu Gliedern mit $a^{-3}$ bzw. $a^{-5}$ einschließlich, so ergibt sich aus (47)

$$(48) \qquad \frac{B}{\sqrt{A}} = \frac{(n+n')h}{2\pi i} - \frac{1}{4} B D_1 A^{-5/2}\left(5\frac{B^2}{A} - C\right)$$

bzw.

$$(49) \qquad \frac{B}{\sqrt{A}} = \frac{(n+n')h}{2\pi i} - \frac{1}{4} B D_1 A^{-5/2}\left(5\frac{B^2}{A} - C\right)$$
$$+ \frac{1}{64} B D_2 A^{-7/2}\left(63\frac{B^4}{A^2} - 70\frac{B^2}{A}C + 15C^2\right).$$

Die Vorzeichenwahl ist so getroffen, daß $\sqrt{A}$ als positiv imaginäre Größe zu rechnen ist; und zwar wird in erster Näherung (für $a = 0$) nach (48)

$$\sqrt{A} = \frac{2\pi i B/h}{n + n'}.$$

Setzen wir diese erste Näherung und die Werte von $B$, $C$, $D_1$ aus (46) in (48) rechts ein, so folgt als zweite Näherung

$$\begin{aligned}\frac{B}{\sqrt{A}} &= \frac{(n+n')h}{2\pi i}\left(1 - \frac{5}{8}\,\frac{E'/e}{a^3}\,\frac{(n+n')^6 h^6}{(4\pi^2 meE)^3}\,\frac{(n+n')^2 - {}^1/_5\, n^2}{(n+n')^2}\right)\\ &= \frac{(n+n')h}{2\pi i}\left(1 - \frac{5}{8}\,\frac{E'}{e}\left(\frac{a_1}{a}\right)^3 [n, n']\right) \qquad (50)\\ &= \frac{(n+n')h}{2\pi i}\left(1 - q\,[n, n']\right)\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$(51)\qquad \begin{cases} a_1 = \dfrac{h^2}{4\pi^2 meE}, \quad q = \dfrac{5}{8}\,\dfrac{E'}{e}\left(\dfrac{a_1}{a}\right)^3, \\ [n, n'] = (n+n')^6\left(1 - \dfrac{1}{5}\,\dfrac{n^2}{(n+n')^2}\right). \end{cases}$$

Die Abkürzung $a_1$ ist analog zu der früheren Bezeichnung (28) gewählt und bedeutet den ersten Bohrschen Kreis ($K$-Ring), wie er sich unter dem Einfluß der Kernladung $E$ ausbilden würde.

Aus (50) folgt nun mit Rücksicht auf (46)

$$(52)\qquad \begin{aligned} A &= -\frac{4\pi^2 B^2/h^2}{(n+n')^2(1 - q[n, n'])^2},\\ W &= -\frac{Nh(E/e)^2}{(n+n')^2(1 - q[n, n'])^2} + \frac{eE'}{a}.\end{aligned}$$

Durch den äußeren Ring wird also zunächst die Ganzzahligkeit des Termnenners gestört, ähnlich wie bei den sichtbaren Spektren, wo durch den inneren Ring die Balmersche Formel in eine Formel vom Rydbergschen Typus umgewandelt wird. Außerdem tritt das Potential des äußeren Ringes, für seinen Mittelpunkt berechnet, additiv hinzu.

Man kann zu einer weiteren Näherung fortschreiten, die dann in gewisser Hinsicht dem Ritzschen Typus der sichtbaren Spektralformel entspricht, indem man von (49) ausgeht und daselbst konsequenter Weise im ersten Korrektionsgliede rechts unsere zweite Näherung für $A$, im zweiten Korrektionsgliede unsere erste Näherung benutzt. Man erhält so

$$\frac{B}{\sqrt{A}} = \frac{(n+n')h}{2\pi i}(1 - q_1[n, n']_1 + q_2[n, n']_2)$$

mit den Abkürzungen (unter $q$ und $[n, n']$ die in (51) erklärten Größen verstanden):

$$(53)\quad \begin{cases} q_1 = q(1 - q[n, n'])^5, \quad q_2 = \dfrac{3.63}{32.64} \dfrac{E'}{e} \left(\dfrac{a_1}{a}\right)^5 \\ [n, n']_1 = (n+n')^6 \left\{(1 - q[n, n'])^2 - \dfrac{1}{5} \dfrac{n^2}{(n+n')^2}\right\} \\ [n, n']_2 = (n+n')^{10} \left\{1 - \dfrac{10}{9} \dfrac{n^2}{(n+n')^2} + \dfrac{5}{21} \dfrac{n^4}{(n+n')^4}\right\}. \end{cases}$$

Schließlich ergibt sich in dritter Näherung

$$(54)\quad W = -\frac{Nh(E/e)^2}{(n+n')^2(1 - q_1[n, n']_1 + q_2[n, n']_2)^2} + \frac{eE'}{a}.$$

Das Resultat, zu dem wir so gelangen, ist in mehrfacher Hinsicht unbefriedigend. Bei der hier begonnenen genaueren, über die Wasserstoff-Ähnlichkeit hinausgehenden Analyse der Röntgen-Spektren werden einem nämlich vor allem die folgenden Ziele vorschweben: 1. Erklärung der im § 2 berührten scheinbaren Abweichungen vom Kombinationsprinzip; 2. Erklärung der Kernladungs-Charakteristiken, insbesondere der am Schluß von § 2 genannten Zahlen 1,6 und 3,5 für den $K$- und $L$-Term; 3. Erklärung der nicht ganzzahligen Nenner in den höheren Termen $M$, $N$ etc.

Von diesen Zielen ist das zweite ganz und gar nicht erreicht. Im Zähler unserer Ausdrücke (52) und (54) steht nämlich die Kernladung $E$ genau so, wie bei einem wasserstoffähnlichen Spektrum, bei dem der äußere Ring ganz fehlt. Durch die Ordnungszahl $Z$ des Elementes ausgedrückt, lautet unser theoretischer Termzähler $NhZ^2$, während die empirische Berechnung ergibt $Nh(Z-\Delta)^2$, $\Delta = 1{,}6$ für den $K$-Term, $\Delta = 3{,}5$ für den $L$-Term. Der äußere Elektronenring ruft also keine Spur eines solchen $\Delta$ hervor. Es wird also nötig sein, Ladungen anzuordnen, die entweder in der Äquatorebene innerhalb unserer Bahn oder räumlich in der Nähe des Kerns oberhalb und unterhalb der Äquatorebene liegen müßten. Von diesen beiden Möglichkeiten hat die zweite viel für sich. Die erste würde nämlich nach den Erfahrungen des § 3 die Kernladung $E$ um den vollen Betrag der inneren Elektronenladung abschirmen, und daher zu einer notwendig ganzzahligen Kernladungs-Charakteristik führen. Dagegen könnte die zweite Möglichkeit gut die tatsächlichen gebrochenen Werte von $\Delta$ erklären. Bei der weiteren Verfolgung dieser Möglichkeit würden wir also ohne zu große Willkür und in engem Anschluß an die Beobachtungen von der Planimetrie zur Stereometrie des Atominnern schreiten.

Auch unser erstes Ziel ist nicht eigentlich erreicht. Wir haben zwar in (52) und (54) ein Zusatzglied $\frac{eE'}{a}$ gefunden, durch welches eine Verschiedenheit von Energiewert und Term (von energetischem und rechnerischem Term) hervorgerufen wird, wie wir sie in § 2 bei unseren Bemerkungen über das Kombinationsprinzip annehmen mußten. Dieses Zusatzglied ist aber konstant für alle Bahnen, welche den äußeren Ring nicht schneiden, hebt sich also bei der Berechnung der Schwingungszahlen $\nu$ in der Energiedifferenz zwischen derartigen Anfangs- und Endbahnen heraus. Bei einer den äußeren Ring schneidenden Bahn wird das mutmaßlich anders werden, ebenso bei der vorgeschlagenen Anordnung innerer Ladungen. Man kann daher vielleicht sagen, daß wenigstens in qualitativer Hinsicht der Weg zur Erklärung der scheinbaren Abweichungen vom Kombinationsprinzip gewiesen ist.

Was unser drittes Ziel betrifft, so zeigt bereits die einfachere Formel (52), daß die Ganzzahligkeit des Termnenners durch den äußeren Ring beeinflußt wird und zwar, wie es sein soll, im Sinne einer Verkleinerung dieses Nenners. Man kann also die nicht ganzzahligen Nenner der $M$-, $N$-Terme etc. ungezwungen auf diesen Einfluß zurückführen. Die Schwierigkeit besteht hier aber darin, die tatsächliche Ganzzahligkeit der Nenner des $K$- und $L$-Terms trotz dieses Einflusses aufrecht zu halten. Wir machen in dieser Hinsicht einen Überschlag.

Als Ordnungszahl $x$ für den Radius der äußeren Elektronenwolke ergab sich aus der Betrachtung der Absorptionskanten Ann. III, pag. 164 ein Wert zwischen 2,7 und 3,2. Wir wollen mit $x = 3$ rechnen und den Radius $a$ unseres jetzt betrachteten äußeren Elektronenringes gleich dem Radius jener Elektronenwolke setzen. Dann ergibt sich nach der früheren Definition von $x$ als Ordnung eines Bohrschen Kreises $a = a_1 x^2$, also $\frac{a_1}{a} = \frac{1}{9}$ und nach (51)

$$q = \frac{5}{8} \frac{E'}{e} \left(\frac{1}{9}\right)^3.$$

Ferner wird nach (51) für den $K$-Term $(n + n' = n = 1)$

$$[n, n'] = \frac{4}{5}, \quad q\,[n, n'] = \frac{1}{2} \frac{E'}{e} \left(\frac{1}{9}\right)^3.$$

Die Ladung $E'$ des äußeren Elektronenringes dürfen wir hier nicht wie in § 3 gleich $E - e$ nehmen, vielmehr wird die die Kernladung $E$ neutralisierende Ladung auf mehreren Ringen angeordnet sein, von denen für uns nur der mit kleinstem Radius $a$ in Betracht kommt. Am nächsten liegt es, $E' = 8$ als Beispiel zu wählen (vollbesetzter Ring im Sinne Kossels). Dann ergibt sich für den $K$-Term: $q\,[n, n'] = 0{,}0055$.

Diese Abweichung von dem Termnenner 1 ist mit dem tatsächlichen Verhalten des $K$-Terms gerade noch verträglich. Anders bei dem $L$-Term. Hier kommt wegen der Bedeutung von $[n, n']$ in Gl. (51) der Faktor $2^6 = 64$ hinzu (für den eigentlichen $L$-Term $n + n' = n = 2$; für den $L'$-Term $n + n' = 2$, $n = 1$ ein nur wenig verschiedener Faktor). Infolgedessen ergibt sich für den $L$-Term: $q\,[n, n'] = 0{,}35$. Diese Abweichung von dem Termnenner 2 ist völlig unzulässig.

Die Schwierigkeit läßt sich natürlich heben, wenn man für $x$ einen größeren Wert als 3 annimmt. Z. B. würde $x = 5$ als Abweichung im $L$-Term statt 0,35 nur mehr 0,016 ergeben (und eine entsprechend kleinere Abweichung im $K$-Term), was den Einklang mit den Beobachtungen herstellen würde. Mit dieser Annahme würden wir uns aber andrerseits in einen gewissen Gegensatz zu den Absorptionskanten setzen.

Die Berechnung der weitergehenden Näherung (54) oder der höheren Terme $M$, $N$ etc. kann unter diesen Umständen als nutzlos unterbleiben, um so mehr, als die bei unseren bisherigen Entwickelungen gemachte Voraussetzung $r < a$ für diese Terme vielleicht nicht mehr zutrifft und unsere Entwickelungen daher vielleicht divergent werden würden. Daß die letzten reichlich unvollständigen und unbefriedigenden Betrachtungen hier überhaupt vorgetragen wurden, geschah in dem Wunsche, einerseits auf den schönen Parallelismus zwischen optischen und Röntgen-Spektren, andrerseits auf die Notwendigkeit einer weiteren modellmäßigen Ausgestaltung der Theorie der Röntgen-Spektren hinzuweisen.

**Nachschrift bei der Korrektur, 14. Dezember 1916.** Die Resultate des § 3 (oder des § 5) gestatten die folgende etwas allgemeinere und befriedigendere Auffassung: Man lasse die spezielle Vorstellung des inneren (oder äußeren) Elektronenringes fallen und beschreibe das Atomfeld durch eine Reihe nach Kugelfunktionen mit willkürlichen Koeffizienten. Für den Fall, daß das Atomfeld Symmetrie gegen eine Äquatorebene und Rotations-Symmetrie um die zu ihr senkrechte Achse besitzt, behalten unsere Rechnungen ungeänderte Gültigkeit. Nur hat man dann die $a_\varkappa$, Gl. (15), als Unbekannte anzusehen und hat sie nachträglich durch Vergleich mit den Spektralbeobachtungen zu bestimmen — ähnlich wie man in der Theorie des Erdmagnetismus die Koeffizienten der Kugelfunktionenreihe zunächst als Unbekannte einführt und sie nachträglich aus den Messungen der Horizontalintensität auf der Erdoberfläche entnimmt.

# Der allgemeine Malussche Satz und der Brunssche Abbildungssatz.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 4. November 1916.

Bekanntlich hat H. Bruns[1]) im Jahre 1895 den Satz bewiesen, daß vollkommene (anastigmatische) Abbildung durch Strahlen, die ein System von homogenen isotropen Medien durchlaufen, nur geometrische Ähnlichkeit bzw. Symmetrie sein kann. Er gab dem Satz die Fassung:

*Der Malussche Satz läßt anastigmatische Körper nur in dem Falle zu, wo die punktweise Abbildung die Form*

$$X = \pm \mu x, \quad Y = \pm \mu y, \quad Z = \pm \mu z$$

*besitzt, also eine geometrisch ähnliche ist.*

F. Klein[2]) hat kurze Zeit darauf durch Einbeziehung der imaginären „Minimalstrahlen“ einen überraschend einfachen Beweis desselben Satzes erbracht.

Im folgenden wird dieser Beweis durch einen andern ersetzt, der das Gebiet des Reellen nicht verläßt. Außerdem aber wird von der Annahme isotroper homogener Zwischenmedien abgesehen, da diese optische Beschaffenheit nur für den Objektraum und den Bildraum erforderlich ist.

Für diese unsere Zwecke bedarf es einer von Lie ausgesprochenen Verallgemeinerung des Malusschen Satzes, die

---

[1]) H. Bruns, Das Eikonal. Leipzig, Abhandl. 21 (1895), 323—435. Vgl. S. 371.

[2]) F. Klein, Räumliche Kollineation bei optischen Instrumenten. Zeitschr. f. Math. und Phys. 46 (1901), 376—382.

hier zunächst in seiner Fassung angegeben werden mag. Auf die Bedeutung der darin vorkommenden Fachausdrücke kommen wir weiter unten zurück.

Lie[1]) sagt:

„Lichtstrahlen, die ein Pseudonormalensystem bilden, gehen bei jeder Reflexion und Refraktion in ein Pseudonormalensystem über. Sind bei einer solchen Refraktion die beiden in Betracht kommenden Pseudokugeln (d. h. Wellenflächen) wesentlich verschieden, so bezieht sich jedes Pseudonormalensystem auf den betreffenden Raum.“

Die folgende Entwickelung wird sich so aufbauen, daß wir uns zuerst (§ 1) eine Verallgemeinerung des bekannten Gaußschen Satzes über geodätische Parallelkurven vor Augen stellen, sodann den von Lie ausgesprochenen allgemeinen Malusschen Satz beweisen (§ 2) und endlich den Brunsschen Satz in der angegebenen Verallgemeinerung und ohne Verlassen des reellen Gebietes erhalten (§ 3).

## § 1. Der allgemeine Gaussche Satz.

Es handelt sich darum, die Eigenschaft der geodätischen Linien, daß die Orthogonalkurven einer eingliedrigen Schar von geodätischen Linien auf ihnen gleiche Stücke abschneiden, auf Lagrangesche Variationsprobleme zu erweitern in sachgemäßer Form.

Die Aufgabe, die Extremalen des Variationsproblems

$$\text{(A)} \quad J = \int_{P_0}^{P} f(x, y, z, y', z')\, dx = \text{Min} \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx},\ z' = \frac{dz}{dx}\right)$$

[1]) S. Lie, Die infinitisimalen Berührungstransformationen der Optik. Leipz. Ber. 48 (1896), 131—133. Daselbst steht kein Beweis, nur ein Rückverweis auf Leipz. Ber. 47 (1895), S. 499 Anm. — Es darf wohl angenommen werden, daß die folgenden Ausführungen sich im Rahmen der von Lie ersonnenen, aber a. a. O. nicht einmal angedeuteten Gedankengänge bewegen, mit dem Unterschied freilich, daß Lie sehr selten die hier in den Mittelpunkt tretende Beziehung zwischen Variationsrechnung und Berührungstransformationen in den Kreis seiner Betrachtungen zu ziehen pflegte.

bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt ($P_0$, $P$) zu bestimmen, wobei $dJ$ auch als Zeitelement ($dt$) bei einer stationären, mit der von der Richtung

$$dx : dy : dz = 1 : y' : z'$$

des Linienelementes abhängigen Geschwindigkeit

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}}{f(x, y, z, y', z')}$$

vor sich gehenden *Strahlung* aufgefaßt werden kann, und $f\,dx$ in der Literatur auch als *reduzierte Länge* des Bogenelementes bezeichnet wird, führt auf die bekannten Gleichungen:

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) = 0.$$

Wenn nur der Anfangspunkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ festgehalten wird, während der Endpunkt $P(x, y, z)$ sich auf der Gleitkurve (*Transversale*)

$$y = \bar{y}(x), \quad z = \bar{z}(x)$$

frei bewegen kann, so tritt für die Lösung dieser neuen Aufgabe noch die *Transversalitätsbedingung*

$$(\bar{y}' - y')\frac{\partial f}{\partial y'} + (\bar{z}' - z')\frac{\partial f}{\partial z'} + f(x, y, z, y', z') = 0$$

hinzu, welche die Lage von $P$ auf der Gleitkurve bestimmt.[1]) Sie kann durch geometrische Betrachtung leicht gewonnen werden und geht, wenn $f$ die Gestalt hat

$$f = g(x, y, z)\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}$$

(Problem der Strahlung im isotropen inhomogenen Medium) einfach in die Forderung über, daß die Extremale in $P$ senkrecht auf der Transversale stehen soll.

---

[1]) Die Transversalitätsbedingungen für sehr allgemeine Variationsprobleme sind bereits in Moigno-Lindelöf, Calcul des variations, Paris 1861 zu finden. Man gelangt zu ihnen durch einfache infinitisimalgeometrische Betrachtungen, wie sie weiter unten auch hier gebraucht werden.

Die Gesamtheit der Linienelemente $(\bar{y}', \bar{z}')$, die in einem Punkt $P(x, y, z)$ der Extremale zu ihrem Linienelement $(y' = u, z' = v)$ transversal gerichtet sind, erfüllt dann ein Flächenelement $x, y, z, p, q$ und zwar findet man zur Festlegung des Flächenelementes, indem man

$$\bar{z}' = p + q\bar{y}'$$

in die obige Gleichung einsetzt und fordert, daß sie identisch für jeden Wert von $\bar{y}'$ bestehen soll, die Gleichungen

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial u} + q\frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

$$f - u\frac{\partial f}{\partial u} + (p - v)\frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

aus denen noch folgt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(v - p - qu) = f.$$

Durch $u$ und $v$ sind also $p$ und $q$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt aber brauchen $p$ und $q$ die Größen $u$ und $v$ nicht eindeutig zu bestimmen (z. B. im Fall der Doppelbrechung).

Liegt sodann irgend eine Fläche

$$z = z(x, y) \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

vor, so geht von jedem ihrer Flächenelemente eine (bzw. mehrere) Extremale aus, deren Richtung (bzw. deren Richtungen)

$$dx : dy : dz = 1 : u : v$$

im Ausgangspunkt durch Auflösung der Gleichungen (2) nach $u$ und $v$ sich berechnet. Diese Extremalen wollen wir die *Pseudonormalen*[1]) der Fläche *hinsichtlich des Variationsproblems* A

---

[1]) Eine so definierte Liesche Pseudonormalenschar ist also identisch mit dem Gebilde, das O. Bolza (Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig 1909, S. 639—646) ein „Mayersches Transversalenfeld" nennt; der hier bewiesene allgemeine Gaußsche Satz wird von Bolza als „verallgemeinerter Kneserscher Transversalensatz" bezeichnet. Vor Bolza hat übrigens schon Vessiot diesen Satz bewiesen in seiner

nennen, auch wohl das Linienelement $(x, y, z, u, v)$ und das Flächenelement $(x, y, z, p, q)$ kurzweg als *konjugiert zueinander* bezeichnen.

Wir werden jetzt mit Anwendung der für diesen Zweck ganz besonders geeigneten Lehre von den Berührungstransformationen die folgende Verallgemeinerung des angeführten Satzes von Gauß beweisen, in der selbstverständlich eine bestimmte Schar von Pseudonormalen herausgegriffen ist:

*Trägt man auf den Pseudonormalen einer Fläche (F) gleiche reduzierte Längen (t) ab, d. h. bestimmt man auf jeder dieser Pseudonormalen den Punkt $P_1$ aus der Forderung, daß das längs der Pseudonormale vom Ausgangspunkt P auf F bis zum Punkt $P_1$ genommene Integral*

$$\int_P^{P_1} f(x, y, z, y', z')\, dx = t = \text{konst.}$$

*wird, so fallen die Pseudonormalen der von den $P_1$ gebildeten Fläche $F_1$ mit denen von F zusammen.*

Eine infinitesimale Berührungstransformation (B. T.)

$$x_1 = x + \xi\,\delta t,\ \ y_1 = y + \eta\,\delta t,\ \ z_1 = z + \zeta\,\delta t,\ \ p_1 = p + \varphi\,\delta t,\ \ q_1 = q + \chi\,\delta t$$

ist gegeben, wenn man von den fünf darin auftretenden Koeffizienten z. B. die drei ersten, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ kennt. Auch diese können nicht ganz frei gewählt werden, vielmehr erhält man die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen[1]), außerdem aber die Funktionen $\varphi$ und $\psi$, wenn man in

---

Arbeit „Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales" (S. M. Fr. Bulletin 34, 1906, S. 230—269). Auf Seite 260 ist zu lesen: „Wenn $\infty^2$ Trajektorien einer Fläche konjugiert sind, so sind sie $\infty^1$ Flächen konjugiert, und die zwischen zwei solchen Flächen enthaltenen Bögen entsprechen gleichen Zeiten". Später hat H. Weber eine Arbeit veröffentlicht (Über den Satz von Malus für krummlinige Strahlen, Palermo Rend. 29, 1910, S. 396—406), die aber, wie auch einige anschließende Untersuchungen, nicht den allgemeinen Malusschen Satz, sondern den Gauß-Kneserschen zum Gegenstand hat mit Beschränknng auf isotrope Medien.

[1]) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen II, S. 521.

$$(3)\quad d\zeta - p\,d\xi - q\,d\eta - \varphi\,dx - \chi\,dy \equiv \sigma(dz - p\,dx - q\,dy)$$

die Koeffizienten der fünf unabhängigen Differentiale $dx$, $dy$, $dz$, $dp$, $dq$ auf beiden Seiten einander entsprechend gleich setzt.

Wir werden alsbald feststellen, daß es eine infinitisimale B. T. gibt, bei der der Vektor $PP_1$, welcher den Träger $P(x, y, z)$ eines Flächenelementes mit dem Träger $P_1$ des jeweils zugeordneten unendlich benachbarten Elementes verbindet, die Richtung

$$\xi : \eta : \zeta = \delta x : \delta y : \delta z = 1 : u : v$$

und die reduzierte Länge $\delta t$ hat. Man setzt zu diesem Zweck

$$(4)\qquad \xi = \frac{1}{f},\quad \eta = \frac{u}{f},\quad \zeta = \frac{v}{f},$$

wobei $u$ und $v$ mit $p$ und $q$ durch die Gleichungen (2) verbunden sind. In (3) hat man sich dann nur an Stelle von $p$ und $q$ die $u$ und $v$ eingeführt zu denken und muß zeigen, daß die Gleichungen

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u} - p\frac{\partial \xi}{\partial u} - q\frac{\partial \eta}{\partial u} = 0,\quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} - p\frac{\partial \xi}{\partial v} - q\frac{\partial \eta}{\partial v} = 0$$

erfüllt sind. In der Tat erhält man durch Einsetzen der Werte (4)

$$-v\frac{\partial f}{\partial u} + p\frac{\partial f}{\partial u} - q\left(f - u\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0,$$

$$f - v\frac{\partial f}{\partial v} + p\frac{\partial f}{\partial v} + qu\frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

und diese Gleichungen stimmen mit den zur Einführung von $p$ und $q$ an Stelle von $u$ und $v$ dienenden Gleichungen (2) überein.

Wir bestimmen sodann die Bahnen der aus der infinitisimalen Transformation entstehenden eingliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen und weisen nach, daß sie die Extremalen des Problems (A) sind. Man erhält die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}\left(= \frac{dp}{\varphi} = \frac{dq}{\chi}\right) = dt.$$

Setzt man die Werte von $\xi$, $\eta$ und $\zeta$ ein, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = u, \quad \frac{dz}{dx} = v$$

und weiter[1]) mit Rücksicht auf (3) und (2)

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\varphi}{\xi} = f\left(\frac{d\zeta}{dx} - p\frac{d\xi}{dx} - q\frac{d\eta}{dx}\right) = -\frac{(v - p - qu)}{f}\frac{df}{dx}$$

$$= -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial v}}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dp}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

und ebenso

$$\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dq}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Transformiert man anderseits die Gleichungen (1) mit Rücksicht auf $y' = u$, $z' = v$ und (2), so erhält man dieselben Gleichungen. Dies erkennt man am einfachsten durch Differentiation. Die erste Gleichung (2) gibt

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{dq}{dx}\frac{\partial f}{\partial v} + q\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0$$

oder mit Rücksicht auf (1)

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dq}{dx}\frac{\partial f}{\partial v} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

und ebenso führt die zweite nach kurzer Umrechnung auf

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dp}{dx}\frac{\partial f}{\partial u} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Damit ist die Identität der von einem Elemente $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ ausstrahlenden (zu ihm *konjugierten*) Extremale mit der Bahnkurve, welche der Träger des Elementes bei der ein-

---

[1]) $\frac{df}{dx}$ hat hier die Bedeutung $\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}$.

gliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen beschreibt, nachgewiesen, indem nämlich die Differentialgleichungen auf dieselbe Form gebracht sind, eine Übereinstimmung übrigens, die schon bei infinitisimal-geometrischer Betrachtung durchaus selbstverständlich erscheint.[1])

Die endliche Transformation also (mit beliebigem Parameter $t$) verwandelt jede Fläche $F$, indem ihre Flächenelemente dauernd transversal zu den von $F$ ausstrahlenden Pseudonormalen bleiben und alle längs der Pseudonormale um das gleiche Stück von der reduzierten Länge ($t$) wandern, in eine neue Fläche (mit denselben Pseudonormalen), und damit ist der verallgemeinerte Gaußsche Satz bewiesen.

## § 2. Der allgemeine Malussche Satz.

Die bisherigen Betrachtungen sollten den verallgemeinerten Malusschen Satz vorbereiten und einleiten. Um zu einem deutlichen Bild der angestrebten Verallgemeinerung zu gelangen, gehen wir von dem folgenden *Variationsproblem mit Trennungsfläche* aus.

*Es sollen diejenigen Kurven bestimmt werden, welche die Summe*

$$\text{(C)} \qquad J = \int_{P_0}^{Q} f(x, y, z, y', z')\, dx + \int_{Q}^{P_1} f_1(x_1, y_1, z_1, y_1', z_1')\, dx_1 = J + J_1$$

*zu einem Minimum machen.*

Dabei ist angenommen, daß $P_0$ und $P_1$ zwei im Raumteil $R(x, y, z)$ bzw. $R_1(x_1, y_1, z_1)$ festgegebene Punkte sind, während $Q$ auf der Scheidewand

$$\bar{z} = g(x, y), \quad \left(\bar{p} = \frac{\partial g}{\partial x}, \ \bar{q} = \frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

[1]) Die Betrachtung setzt voraus, daß man aus den Transversalitätsbedingungen (2) wirklich $p$ und $q$ als Funktionen von $u$ und $v$ berechnen kann. Dafür ist die Bedingung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v}\right)^2 \neq 0$$

notwendig und hinreichend.

frei beweglich ist. Damit dann $J$ ein Minimum wird, muß der in $R$ verlaufende Teil der Kurve eine Extremale des Problems

$$\text{(A)} \qquad \int f(x, y, z, u, v)\, dx = \text{Min.} \quad \left(u = \frac{dy}{dx},\ v = \frac{dz}{dx}\right)$$

sein, und der in $R_1$ verlaufende Teil eine Extremale des Problems

$$\text{(B)} \quad \int f_1(x_1, y_1, z_1, u_1, v_1)\, dx_1 = \text{Min.} \quad \left(u_1 = \frac{dy_1}{dx_1},\ v_1 = \frac{dz_1}{dx_1}\right)$$

sein, und man hat nur noch das Verhalten an der Übergangsstelle ($Q$), also die an der Scheidewand eintretende *Brechung* zu untersuchen. Ersetzt man $Q$ durch einen unendlich benachbarten auf der Scheidewand gelegenen Punkt

$$x + \varepsilon,\ \ y + \varepsilon\bar{y}',\ \ z + \varepsilon\bar{z}' \ \ (\bar{z}' = \bar{p} + \bar{q}\,\bar{y}'),$$

so erhält man die weitere Forderung

$$\delta\bar{J} = \delta J + \delta J_1 = \varepsilon\Big\{(\bar{y}' - u)\frac{\partial f}{\partial u} + (\bar{z}' - v)\frac{\partial f}{\partial v} + f(x, y, z, u, v)$$
$$- (\bar{y}' - u_1)\frac{\partial f_1}{\partial u_1} - (\bar{z}' - v_1)\frac{\partial f_1}{\partial v_1} - f_1(x, y, z, u_1, v_1)\Big\} = 0$$

und hieraus, wenn man erwägt, daß $\bar{z}' = \bar{p} + \bar{q}\,\bar{y}$ und die Beziehung für jeden Wert von $\bar{y}'$ und $z'$ besteht, die beiden Gleichungen

$$\text{(2'')} \qquad \begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial u} + \bar{q}\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \bar{q}\frac{\partial f}{\partial v_1}, \\ f - u\frac{\partial f}{\partial u} + (\bar{p} - v)\frac{\partial f}{\partial u} = f_1 - u_1\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + (\bar{p} - v_1)\frac{\partial f_1}{\partial v_1}. \end{gathered}$$

Trifft eine Extremale des Raumes $R$ die Scheidewand im Punkt $Q(x, y, z)$, so hat man hieraus, da $u$, $v$ und $\bar{p}$, $\bar{q}$ bekannt sind, die Richtung

$$dx_1 : dy_1 : dz_1 = 1 : u_1 : v_1$$

ihrer Fortsetzung (des *gebrochenen Strahles* oder der *gebrochenen Extremale*) zu bestimmen, wobei sich selbstverständlich mehrere Richtungen ergeben können.

Unser Ziel ist jetzt der Beweis des folgenden *allgemeinen Satzes über gebrochene Extremalen:*

*Trägt man auf den Pseudonormalen einer Fläche F des Gebietes R, die nach der Brechung gemäß (2'') als Extremalen des Variationsproblems (B) fortzusetzen sind, gleiche reduzierte Längen ab, wobei die reduzierte Länge in R durch*

$$\int f(x, y, z, u, v)\, dx \quad \left(u = \frac{dy}{dx},\ v = \frac{dz}{dx}\right)$$

*und in* $R_1$ *durch*

$$\int f_1(x_1, y_1, z_1, u_1, v_1)\, dx_1 \left(u_1 = \frac{dy_1}{dx_1},\ v_1 = \frac{dz_1}{dx_1}\right)$$

*zu messen ist, so ist der Ort der Endpunkte wieder transversal zu den gebrochenen Extremalen, d. h. es ist, wenn*

$$z_1 = z_1(x_1, y_1) \quad \left(p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x_1},\ q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right)$$

*die Gleichung dieses Ortes ist,*

$$(2') \qquad \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + q_1 \frac{\partial f_1}{\partial v_1} = 0.$$

$$f_1 - u_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + (p_1 - v_1) \frac{\partial f_1}{\partial v_1} = 0.$$

Diese Verallgemeinerung des Gaußschen Satzes ist zu erweisen; sie enthält insbesondere auch den allgemeinen Malusschen Satz:

*Jedes System von Pseudonormalen des Problems (A) geht nach der durch (2'') bestimmten Brechung an der Scheidewand in ein System von Pseudonormalen des Problems (B) über.*

Für die Entwickelungen des § 3 ist übrigens die genauere erste Fassung wichtig; den Malusschen Satz, der darin mit enthalten ist, haben wir nur der Vollständigkeit halber ausgesprochen.

Da sowohl im Raum $R$ wie im Raum $R_1$ der Gaußsche Satz des § 1 gilt, so ist nur noch die Brechung zu untersuchen, und zwar ist zu zeigen, daß je zwei benachbarte Elemente vereinigter Lage (oder vereinigte, zu zwei unendlich benachbarten Extremalen von A transversale Elemente) des Raumes $R$ in zwei unendlich benachbarte Elemente vereinigter Lage von $R_1$ übergehen. Diesen Vorgang wollen wir jetzt an der Hand der Formeln (2), (2'), (2'') im einzelnen verfolgen.

Wir betrachten ein Element $x, y, z, p, q$, dessen Träger $Q$ ein Punkt der Trennungsfläche ist, die daselbst das Element $x, y, z, \bar{p}, \dot{q}$ hat. Das erste, dem Raume $R$ angehörige Element wird dann *augenblicklich gedreht* und geht in ein Element $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ des Raumes $R_1$ über. Dabei sind $p_1$ und $q_1$ aus $p, q, p$ und $q$ zu berechnen, wozu die sechs Gleichungen (2), (2'), (2'') dienen, aus denen $u, v, u_1$ und $v_1$ zu eliminieren sind.

Nach der Zeit $\delta t$ ist dann dieses Element in ein neues des Raumes $R_1$ übergegangen mit den Koordinaten

$$(5) \quad x + \xi_1 \delta t, \; y + \eta_1 \delta t, \; z + \zeta_1 \delta t, \; p_1 + \varphi_1 \delta t, \; q_1 + \chi_1 \delta t,$$

von denen die drei ersten den Träger $P_1$ bestimmen. Dabei ist nach § 1 zu setzen

$$(4') \qquad \xi_1 = \frac{1}{f_1}, \quad \eta_1 = \frac{u_1}{f_1}, \quad \zeta_1 = \frac{v_1}{f_1}$$

und $\varphi_1$ und $\chi_1$ sind durch

$$(3') \qquad d\zeta_1 - p_1 d\xi_1 - q_1 d\eta_1 - \varphi_1 dx_1 - \chi_1 dy_1 \equiv \sigma_1 (dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1)$$

bestimmt.

Ferner sei

$$x - \delta x, \; y - \delta y, \; z - \delta z, \; (p - \delta p, \; q - \delta q)$$

*irgend ein zu $x, y, z, p, q$ unendlich benachbartes und mit ihm vereinigt liegendes Element des Raumes $R$*, dessen Koordinaten also die Forderung

$$\delta z - p \delta x - q \delta y = 0$$

erfüllen.

Wir wollen sodann den oben noch willkürlich gelassenen Faktor $\delta t$ so bestimmen, daß der Träger $P$ des *zweiten* Elementes gerade nach der Zeit $\delta t$ in der Trennungsfläche liegt, daß also seine Koordinaten

$$(Q_1)\quad x - \delta x + \xi \delta t,\ y - \delta y + \eta \delta t,\ z - p\delta x - q\delta y + \zeta \delta t$$

die Gleichung

$$z = \bar{z}(x, y) \quad \left(\bar{p} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x},\ \bar{q} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\right)$$

erfüllen. Dies führt auf die Forderung

$$(6)\qquad \delta t(\zeta - \bar{p}\xi - \bar{q}\eta) = (p - \bar{p})\delta x + (q - q)\delta y,$$

welche $\delta t$ bestimmt.

Wir wollen jetzt zeigen, daß das Element (5) und das aus dem zweiten durch Wanderung seines Trägers nach $Q_1$ und Drehung in $R_1$ (wie sie oben beschrieben worden ist) hervorgehende Element wieder zwei unendlich benachbarte Elemente vereinigter Lage, nunmehr selbstverständlich in $R_1$, bilden. Dabei ist von vorneherein zu beachten, daß die beiden letzten Elementkoordinaten, die man vielleicht im Gegensatz zu den *Trägerkoordinaten* als *Richtungskoordinaten* bezeichnen kann, sich für die betrachten Elemente voneinander und von $p_1$ und $q_1$ nur um Größen von der Ordnung $\delta t$ unterscheiden. Man hat also nur nachzuweisen, daß die Komponenten des Vektors $P_1 Q_1$:

$$\delta x_1 = (\xi_1 - \xi)\delta t + \delta x,\ \delta y_1 = (\eta_1 - \eta)\delta t + \delta y,$$
$$\delta z_1 = (\zeta_1 - \zeta)\delta t + p\delta x + q\delta y$$

die Bedingung

$$\delta z_1 = p_1 \delta x_1 + q_1 \delta y_1$$

erfüllen, so daß die Aufgabe entsteht, die Gleichung

$$(7)\qquad \delta t\{(\zeta_1 - \zeta) - p_1(\xi_1 - \xi) - q_1(\eta_1 - \eta)\} = \delta x(p_1 - p) + \delta y(q_1 - q)$$

unter Annahme von (6) fürwillkürliches $\delta x$ und $\delta y$ zu erweisen.

Statt mit (6) und (7) rechnet man bequemer mit (6) und der aus (6) und (7) entstehenden Gleichung

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\delta t\{\zeta_1 - p_1\xi_1 - q_1\eta_1 + \xi(p_1 - \bar{p}) + \eta(q_1 - \bar{q})\} \\ &\qquad = \delta x(p_1 - \bar{p}) + \delta y(q_1 - q), \end{aligned}$$

und unsere Aufgabe ist gelöst, wenn wir erkannt haben, daß vermöge der Gleichungen (2), (2′) und (2″) die Koeffizienten der entsprechenden Glieder in (6) und (8) einander proportional sind. Die genannten Gleichungen geben sofort

$$(p-\bar{p})\frac{\partial f}{\partial v}=(p_1-\bar{p}_1)\frac{\partial f_1}{\partial v_1},$$

$$(q-\bar{q})\frac{\partial f}{\partial v}=(q_1-\bar{q}_1)\frac{\partial f_1}{\partial v_1}.$$

Außerdem ist nach (4)

$$\zeta-\bar{p}\xi-\bar{q}\eta=\frac{v-\bar{p}-\bar{q}u}{f},$$

und nach (4′) und (2′)

$$\zeta_1-p_1\xi_1-q_1\eta_1+\xi(p_1-\bar{p})+\eta(q_1-\bar{q})$$

$$=\frac{v_1-p_1-q_1u_1}{f_1}+\frac{p_1-\bar{p}+u(q_1-\bar{q})}{f}=\frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial v_1}}+\frac{p_1-\bar{p}+u(q_1-\bar{q})}{f}.$$

Man hat also zum Nachweis der Proportionalität nur noch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial v}(v-\bar{p}-\bar{q}u)=f+\frac{\partial f_1}{\partial v_1}(p_1-\bar{p}+u(q_1-\bar{q})),$$

d. i. nach (2′) und (2″)

$$=f+\frac{\partial f}{\partial v}(p-\bar{p}+u(q-\bar{q}))$$

oder endlich

$$v\frac{\partial f}{\partial v}=f+p\frac{\partial f}{\partial v}+uq\frac{\partial f}{\partial v}=u\frac{\partial f}{\partial u}+(v-p)\frac{\partial f}{\partial v}-u\frac{\partial f}{\partial u}=v\frac{\partial f}{\partial v}$$

zu beweisen, und damit ist sie bestätigt.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen:

Zwei unendlich benachbarte Elemente vereinigter Lage des Raumes $R$ $(x, y, z)$ gehen unter der Annahme, daß der Träger $Q$ $(x, y, z)$ des ersten im Zeitpunkt $t$ gerade die Trennungsfläche der beiden Räume erreicht hat, während der Träger $P$ $(x-\delta x,\ y-\delta y,\ z-p\delta x-q\delta y)$ des zweiten noch innerhalb von $R$ liegt, nach Verlauf der durch (6) bestimmten Zeit $\delta t$

in zwei unendlich benachbarte Elemente vereinigter Lage des Raumes $R_1(x_1, y_1, z_1)$ über mit den Trägern $P_1$ (innerhalb von $R_1$) und $Q_1$ auf der Trennungsfläche. Dabei sind die reduzierten Längen der Vektoren $QP_1$ und $PQ_1$ alle beide gleich $\delta t$.

Betrachtet man im Anschluß hieran die Wanderung *aller* Flächenelemente einer Fläche $F$ des Raumes $R$, wie sie durch die Strahlung gegeben ist, dann die Brechung der Pseudonormalen und Drehung der Flächenelemente an der Scheidewand, endlich die Strahlung im Raum $R_1$, wobei jene Flächenelemente in Transversalstellung zu den gebrochenen Extremalen bleiben und wieder einen Verein von $\infty^2$ Flächenelementen bilden, so sieht man die Gültigkeit des Gaußschen Satzes für gebrochene Extremalen.

## § 3. Der Brunssche Satz in allgemeiner Form.

Gegeben sei ein optisches System von folgender sehr allgemeiner Beschaffenheit: Es besteht aus einem Objektraum, der von homogenem isotropem Medium erfüllt ist, einer Folge von inhomogenen anisotropen Zwischenmedien und einem Bildraum, den wieder ein homogenes isotropes Medium erfüllt.

Die Lichtgeschwindigkeiten seien ferner

im Objektraum $c$
im Bildraum $c_1$

und im $k$-ten Zwischenmedium

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dx f_k\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)},$$

also von Ort und Richtung abhängig.

Dann sind die Lichtwege oder *Strahlbahnen* durch die Forderung bestimmt, daß das längs einer Strahlbahn genommene Integral

$$c\int_P^{Q_1} ds + \int_{Q_1}^{Q_2} f_1(x, y, z, y', z')\,dx + \cdots + \int_{Q_n}^{Q_{n+1}} f_n(x, y, z, y', z')\,dx + c_1\int_{Q_{n+1}}^{P_1} ds$$

ein Minimum wird. Hierin bedeutet $P$ den Ausgangspunkt, $Q_k$ den Schnittpunkt der Strahlbahn mit der Trennungsfläche des $(k-1)$-ten und des $k$-ten Zwischenmediums, $P_1$ den Endpunkt im Objektraum.

Das erste Stück $PQ_1$ und das letzte $Q_{n+1}P_1$ der Strahlbahn ist geradlinig, die weiteren Stücke sind Extremalen der Variationsprobleme

$$\int f_k(x, y, z, y', z')\, dx = \text{Min.}$$

und die Brechungen an den Trennungsflächen sind nach § 2 bestimmt.

Wir wollen übrigens nicht alle Strahlbahnen betrachten, sondern nur eine ausgewählte Schar von $\infty^4$, die wirklich alle Zwischenmedien durchdringen. Demnach haben nicht alle Linienelemente eines Trägers $P$ als Anfangselemente von Strahlbahnen zu gelten, sondern nur ein gewisser Ausschnitt, dessen Begrenzung durch den Mantel eines Kegels veranschaulicht werden kann, der $P$ mit dem Rand der Öffnung einer geeignet gewählten Blende verbindet.

Beim Strahlungsvorgang hat man sich von $P$ Kugelwellen ausgehend zu denken. Die Flächenelemente einer Kugelwelle wandern zunächst mit konstanter Geschwindigkeit $c$ im Objektraum, in senkrechter Stellung zu den geradlinigen Strahlbahnen, dann in den Zwischenmedien, so daß die Träger auf einer Extremale bleiben, die Elemente die Transversalstellung einhalten; im Objektraum wird die Transversalstellung wieder einfach Orthogonalität, die Geschwindigkeit konstant gleich $c_1$.

Wenn nun $P$ *optisch vollkommen* oder *anastigmatisch* abgebildet wird, d. h. wenn die von $P$ ausgehenden Strahlbahnen sich in $P_1$ vereinigen, so bilden nach dem Satze des § 2 die *gleichzeitig* von $P$ ausgehenden Elemente $E$ im Objektraum einen Verein von Flächenelementen $(E')$, die zu den Strahlen, die sich in $P_1$ vereinigen, senkrecht stehen, sie erfüllen also (für einen Wert von $t$, der innerhalb gewisser Grenzen zu wählen ist) eine Kugel mit dem Mittelpunkt $P_1$; außerdem sind alle *reduzierten Längen* $(EE')$ einander gleich, eben gleich $t$. Insbesondere kann man $t$ so wählen, daß die Elemente $E'$ den Punkt $P_1$ zum Träger haben. Es sind also die Durchlaufszeiten *aller* von $P$ ausgehenden und in $P_1$ sich wieder vereinigenden Strahlbahnen *einander gleich*; dieser Wert von $t$ möge als der *optische Abstand* $(PP_1)$ bezeichnet werden.

Ist die Abbildung eines Teiles des Objektraums optisch vollkommen, so ist sie nach Abbé bekanntlich eine *Kollineation*, und wir können jetzt den in der Einleitung ausgesprochenen Ähnlichkeitssatz leicht beweisen. Er läßt sich so aussprechen:

*Die durch eine Reihe ganz allgemeiner Zwischenmedien vermittelte, optisch vollkommene Abbildung eines homogenen isotropen Objektraums auf einen ebenfalls homogenen isotropen Bildraum ist notwendig ähnliche Abbildung.*

Wir wählen im Objektraum vier in *einer Ebene gelegene* Punkte $ABCD$ so aus, daß $AB$, $BC$, $AD$ und $DC$ als Strecken von Strahlbahnen betrachtet werden können (wodurch die Richtungen gewissen Beschränkungen unterliegen, denn die Fortsetzungen der Strecken müssen durch die Blendenöffnung gehen), und daß überdies

$$AB + DC = AD + BC$$

ist, also $ABCD$ ein Tangentenviereck eines Kreises bildet. Wegen der vorausgesetzten Beziehung zwischen den Längen der vier Seiten kann man dann vier Flächenelemente $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$ angeben, deren Träger $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$ auf $AB$, $BC$, $DC$ und $AD$ liegen, während die Elemente auf den Strahlbahnen senkrecht stehen und

$$AQ_1 = AQ_4, \quad Q_1B = BQ_2, \quad Q_2C = Q_3C, \quad Q_4D = DQ_3$$

ist, $Q_1$ kann beliebig gewählt werden, die drei andern Punkte sind dadurch bestimmt.

Die Elemente $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$ gehen nach Verlauf eines innerhalb gewisser Grenzen beliebig wählbaren Zeitabschnittes $t$ in vier Elemente $E_1'$, $E_2'$, $E_3'$, $E_4'$ über, die im Bildraum liegen, senkrecht zu den Strecken $A_1B_1$, $B_1C_1$, $D_1C_1$ und $A_1D_1$ stehen und als Träger vier Punkte haben, die auf diesen Strecken liegen, den Fortsetzungen der Strahlbahnen $AB$, $BC$,

$DC$ und $AD$ oder, was dasselbe ist, den Verbindungslinien der Bildpunkte $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$.

Für die reduzierten Längen findet man auf Grund unserer Entwickelungen

$$(A_1 E'_1) = (A E_1) + (E_1 E'_1) - (A A_1)$$
$$(A_1 E'_4) = (A E_4) + (E_4 E'_4) - (A A_1),$$

und hieraus wegen $(E_1 E'_1) = (E_4 E'_4) = t$

und $$(A E_1) = \frac{A Q_1}{c} = \frac{A Q_4}{c} = (A E_4)$$

$$(A_1 E'_4) = (A_1 E'_1), \quad \text{also} \quad A_1 Q'_4 = A_1 Q'_1.$$

Ebenso lassen sich die übrigen Gleichheiten

$$Q'_1 B_1 = B_1 Q'_2, \quad Q'_2 C_1 = Q'_3 C_1, \quad Q'_4 D_1 = D_1 Q'_3$$

beweisen, und man erhält

$$A_1 B_1 + D_1 C_1 = B_1 C_1 + A_1 D_1$$

Durch die optische vollkommene Abbildung hat sich also das Tangentenviereck $ABCD$ wieder in ein Tangentenviereck eines Kreises verwandelt.

Läßt man jetzt $X$ auf $AD$ und $Y$ auf $BC$ sich so bewegen, daß $XY$ beständig Anfangsstrecke einer Strahlbahn ist und den dem Viereck $ABCD$ einbeschriebenen Kreis berührt, so berührt auch $X_1 Y_1$ immer einen und denselben Kreis im Bildraum. Hieraus folgt zunächst, daß die Kollineation $\infty^6$ zwar in ihrer Auswahl und Begrenzung durch die Forderung, daß die Tangenten $XY$ Stücke von Strahlbahnen sein sollen — nicht aber in der Dimension ihrer Mannigfaltigkeit beschränkte Kreisbögen wieder in Kreisbögen überführt. Also ist die Kollineation *Ähnlichkeit*, wozu im Falle der Spiegelung noch Symmetrie treten kann.

Schließlich ist leicht zu zeigen, daß *alle* optischen Abstände $(PP_1)$ einander gleich sind.[1])

---

[1]) Die folgende Betrachtung unterscheidet sich kaum von der entsprechenden bei Klein, a. a. O. S. 379.

Betrachtet man zu diesem Zweck ein gleichschenkliges Dreieck mit den Seiten

$$BA = AC = c\tau_1, \quad BC = c\tau_2$$

und das ihm ähnliche Dreieck der Bildpunkte mit den Seiten

$$B_1 A_1 = A_1 C_1 = c_1 \tau_1', \quad B_1 C_1 = c_1 \tau_2',$$

so findet man

$$(CC_1) = (AA_1) + \tau_1' - \tau_1$$
$$(CC_1) = (BB_1) + \tau_2' - \tau_2$$
$$(BB_1) = (AA_1) + \tau_1 - \tau_1',$$

also $\tau_1 - \tau_1' = (BB_1) - (AA_1) = \tau_2 - \tau_2' - \tau_1 + \tau_1'$

oder $$2(\tau_1 - \tau_1') = \tau_2 - \tau_2'.$$

Da aber das Verhältnis $\tau_1 : \tau_1'$ wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gleich $\tau_2 : \tau_2'$ ist, so folgt

$$\tau_1 = \tau_1', \quad \tau_2 = \tau_2' \quad \text{und} \quad (AA_1) = (BB_1) = (CC_1)$$

oder allgemein:

$(PP_1)$ ist von der Wahl von $P$ unabhängig; auch wird

$$\frac{PQ}{c} = (PQ) = (P_1 Q_1) = \frac{P_1 Q_1}{c_1};$$

d. h.: *Entsprechende Strecken verhalten sich wie die Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Räumen.*

# Gewundene reelle Kurvenzüge beliebig hoher Ordnung ohne reelle Singularität.

Von **Hans Mohrmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 4. November 1916.

## I. Vorbemerkungen.

Der in gestaltlicher Hinsicht einfachste Zug einer (stetig) gekrümmten Kurve der projektiven Ebene ist die (algebraische oder nicht-algebraische) Kurve 2. Ordnung. Sie ist paar und besitzt keine singuläre Tangente. Der einfachste Zug einer (stetig) gewundenen Kurve im projektiven Raum ist die Kurve 3. Ordnung. Sie ist unpaar und besitzt keine singuläre Schmiegungsebene. Der einfachste unpaare Zug einer ebenen Kurve ist von der 3. Ordnung und besitzt, wenn die Kurve von Doppelpunkten und Ecken frei ist, nach einem von Möbius (Werke, Bd. II) aufgestellten Satze notwendig drei reelle stationäre Tangenten (Wendepunkte)[1]. Man ist geneigt, in Analogie zu vermuten, der paare Zug — von der 4. Ordnung — einer gewundenen Kurve ohne singulären Punkt besitze vier reelle stationäre Schmiegungsebenen. In der Tat gibt es auch, wie bekannt, Ovale dieser Beschaffenheit. Allein es handelt sich dabei um eine nicht einmal für ganz im Endlichen gelegene Ovale notwendige Eigenschaft. Es gibt nämlich solche allerdings mit reellen Trisecanten behaftete Ovale unter den unicursalen Kurven 4. Ordnung 2. Art, die keine reellen sta-

[1]) Nach einem von Herrn Kneser (Mathem. Ann., Bd. 41, S. 376) bewiesenen Satze kann eine Kurve 3. Ordnung auch nicht mehr als 3 Wendepunkte besitzen.

tionären Schmiegungsebenen aufweisen. Es sind dies die Kurven 4. Ordnung mit 4 reellen die Kurve in einem weiteren Punkte treffenden Tangenten. Überdies lehrt das Beispiel der von Herrn Rohn behandelten und modellierten[1]) Kurve 4. Ordnung 2. Art ohne reelle stationäre Ebene und ohne reelle, die Kurve in einem weiteren Punkte treffende Tangente die Möglichkeit von unicursalen (rationalen) Kurven 4. Ordnung ohne singulären Punkt, die auf keine Weise durch reelle Kollineationen ganz ins Endliche gelegt werden können. Solche Kurven 4. Ordnung sind vom (Maximal-)Index 2, wenn man als Index einer Kurve bzw. eines Kurvenzuges $n$. Ordnung die geringste Anzahl reeller Punkte bezeichnet, in denen sie von einer reellen Ebene geschnitten werden kann.

Offenbar gilt hier allgemein für beliebiges $n$ der

**Satz I.** Eine algebraische oder nicht-algebraische gewundene Kurve $n$. Ordnung vom Maximalindex $n-2$ (welche also von keiner reellen Ebene ihres Normalraumes in mehr als $n$ und weniger als $n-2$ reellen Punkten geschnitten wird) kann weder eine reelle stationäre Ebene, noch eine reelle 2-fach berührende Ebene, noch auch (folglich) eine reelle stationäre Tangente oder eine die Kurve in einem weiteren Punkte treffende reelle Tangente besitzen.

Die Existenz algebraischer gewundener Kurven vom Maximalindex folgt aus einem Satze von Hrn. J. v. Sz. Nagy[2]). Die Kurven $n$. Ordnung vom Maximalindex mit der Maximalzahl $n-2$ reeller Züge sind, wie ich dann und zwar für algebraische und nicht-algebraische Kurven (ohne Ecken) gezeigt habe[3]), notwendig frei von Doppel- oder mehrfachen Punkten. Die unicursalen Kurven vom Maximalindex (mit der Maximalzahl reeller Züge) hingegen, welche ich bei meinem (neuen) Beweise des Nagyschen Satzes hergestellt habe, besitzen $n-3$ Doppelpunkte.

[1]) (Brill-)Schillings Katalog mathematischer Modelle, 7. Aufl. (1911), Serie XXI, Nr. 3.

[2]) Mathematische Annalen, Bd. 77, S. 429.

[3]) Mathematische Annalen, Bd. 78.

Ich will nun im folgenden zeigen, daß diese Eigenschaft keineswegs notwendig ist, daß vielmehr auch unicursale Kurven vom Maximalindex ohne irgend einen singulären Punkt existieren, womit zugleich die Existenz von Kurvenzügen beliebig hoher Ordnung ohne irgend eine reelle Punkt-, Tangenten- und Tangentialebenen-Singularität erwiesen sein wird.

## II. Existenzbeweis.

Ein auf einem einschaligen Hyperboloid $H$ liegender (reeller) Kegelschnitt $k$ und eine Erzeugende $e_1$ des Hyperboloids können in ihrer Gesamtheit als (reducible) Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt aufgefaßt werden. Man kann den Doppelpunkt $P_1$ dieser Kurve in zweifacher Weise auflösen, so daß man eine irreducible gewundene Kurve 3. Ordnung $C^3$ erhält, welche die Erzeugenden $e$ des Hyperboloids, die mit $e_1$ einer und derselben Schar angehören, in einem (stets reellen), und die Erzeugenden $f$ der zweiten Schar in zwei reellen oder konjugiert-komplexen Punkten schneidet. Wir wollen den Doppelpunkt $P_1$ so auflösen, daß die entstehende irreducible $C^3$ (1, 2) auch von jeder Erzeugenden $f$ in (zwei) reellen Punkten geschnitten wird.

Betrachtet man zwei Wertsysteme

$$(1)\qquad \begin{cases} u_1, & u_2; & v_1, & v_2 \\ \varrho u_1, & \varrho u_2; & \sigma v_1, & \sigma v_2 \end{cases} \qquad \varrho \neq 0, \quad \sigma \neq 0),$$

wo $\varrho$ und $\sigma$ voneinander unabhängige Proportionalitätsfaktoren bedeuten, als äquivalent, so kann das Hyperboloid $H$ bei passender Wahl des Koordinatensystems durch Gleichungen der folgenden Form dargestellt werden:

$$(2)\qquad \begin{cases} x_0 = v_1 u_1 \\ x_1 = v_1 u_2 \\ x_2 = v_2 u_1 \\ x_3 = v_2 u_2 . \end{cases}$$

Schließen wir diejenigen Wertsysteme aus, für die gleichzeitig $u_1$ und $u_2$ oder $v_1$ und $v_2$ verschwinden, so sind die Punkte des Hyperboloids durchaus eindeutig umkehrbar auf die Wertsysteme $u$, $v$ bezogen. Die Parameter $u$ und $v$ sind daher (Normal-)Koordinaten für das ganze von dem Hyperboloid getragene doppelt-binäre Gebiet.

Jede irreducible algebraische Kurve auf dem Hyperboloid kann durch eine bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte, gleich Null gesetzte ganze rationale und in dem erklärten Sinne homogene Funktion der Koordinaten $u$, $v$ rein dargestellt werden[1]).

Ist in diesen Koordinaten

$$(1,1) \equiv a_{11}u_1v_1 + a_{12}u_1v_2 + a_{21}u_2v_1 + a_{22}u_2v_2 = 0 \tag{3}$$

die Gleichung des Kegelschnitts $k$,

$$(0,1)_1 \equiv a_1u_1 + a_2u_2 = 0 \tag{4}$$

diejenige der Erzeugenden $e_1$, so wird die gewünschte gewundene Kurve 3. Ordnung $C^3$ durch die folgende Gleichung dargestellt:

$$(1,2) \equiv (1,1)\cdot(0,1)_1 + \varepsilon_1 u_2^2 v_2 = 0, \tag{5}$$

wo $\varepsilon_1$ eine ihrem absoluten Betrage nach hinreichend kleine Zahl bedeutet und das Vorzeichen von $\varepsilon_1$ so zu wählen ist, daß die durch den (reellen) Schnittpunkt $P_1$ von (3) und (4) hindurchgehende Erzeugende $f_1$ die entstehende Kurve (5) in der Nähe des Punktes $P_1$ in (zwei) reellen Punkten schneidet.

Ist nun

$$\cdot\ (0,1)_2 \equiv b_1u_1 + b_2u_2 = 0 \tag{6}$$

die Gleichung einer weiteren, dem System der $e$ angehörenden Erzeugenden $e_2$ des Hyperboloids (2), welche also die $C^3$ (5) in einem (reellen) Punkte $P_2$ schneidet, so stellt die Gleichung

$$(1,3) \equiv (1,2)\cdot(0,1)_2 \pm \varepsilon_2 u_2^3 v_2 = 0 \tag{7}$$

---

[1]) Vgl. Mohrmann, Bestimmung aller Normalflächen mit transitiven automorphen Gruppen von projektiven Transformationen, Rend. Circ. mat. d. Palermo XXXII (1911), S. 180 ff.

bei passender Wahl von $\varepsilon_2$ eine irreducible Kurve 4. Ordnung dar, welche, wenn das Vorzeichen von $\varepsilon_2$ so gewählt wird, daß die durch $P_2$ hindurchgehende Erzeugende $f_2$ die Kurve (7) in der Nähe des Punktes $P_2$ in (zwei) reellen Punkten schneidet, von jeder Erzeugenden $e$ in einem, und von jeder Erzeugenden $f$ in drei reellen Punkten geschnitten wird usw.

Durch beliebig häufige Wiederholung des gleichen Prozesses gelangt man so zu dem folgenden

**Satz 2.** Auf einem Hyperboloid gibt es irreducible algebraische Kurven $(1, n-1)$ beliebig hoher Ordnung $n$, welche von jeder Erzeugenden $e$ der einen Schar in einem, und von jeder Erzeugenden $f$ der anderen Schar in $n-1$ reellen Punkten geschnitten werden.

## III. Das stereographische Bild.

Nun wird behauptet, daß diese Kurven (des 2. Satzes) die gesuchten unicursalen Kurven vom Maximalindex $n-2$ sind. Daß die Kurven unicursal sind, ergibt sich unmittelbar aus ihrer Erzeugung (kann aber auch leicht durch Abzählung ihrer scheinbaren Doppelpunkte auf Grund der Plueckerschen Formeln erschlossen werden). Es bleibt also nur noch übrig, zu zeigen, daß sie von keiner reellen Ebene des Raumes, in dem sie liegen, in weniger als $n-2$ reellen Punkten geschnitten werden.

Zu diesem Zwecke projizieren wir das Hyperboloid samt den auf ihm liegenden Kurven aus einem seiner Punkte $O$ in allgemeiner Lage auf eine nicht durch $O$ hindurchgehende Ebene (stereographisch). Die Bildpunkte der durch $O$ hindurchgehenden Erzeugenden $e$ und $f$, die Fundamentalpunkte der Abbildung, seien $E$ und $F$. Alsdann sind die Bildkurven der Kurven $C^n(1, n-1)$ des Hyperboloids ebene Kurven $c^n$, welche $E$ einfach und $F$ als $(n-1)$-fachen Punkt mit $n-1$ (notwendig) getrennten reellen Ästen enthalten (und keinen weiteren singulären Punkt besitzen). Die Erzeugenden $e$ bilden sich auf das Strahlenbüschel $(F)$ mit $F$ als Mittelpunkt, und die Erzeugenden $f$ auf das Büschel $(E)$ mit $E$ als Scheitel ab.

Zerschneidet man die Bildkurve $c^n$ in ihrem $(n-1)$-fachen Punkte $F$ (durch einen Kreis mit verschwindendem Radius und $F$ als Mittelpunkt), so zerfällt $c^n$ in $n-1$ Züge (mit Ecken im Zerschneidungspunkte $F$). Da jeder Strahl des Büschels $(E)$ die $c^n$ außer in $E$ in $n-1$ weiteren reellen Punkten schneidet, so kann höchstens einer jener Züge paar sein. Andererseits muß aber, da der Maximalindex einer (ebenen) Kurve $n$. Ordnung $n-2$ beträgt, auch mindestens einer der $n-1$ Züge der in $F$ zerschnittenen $c^n$ paar sein. Es ist daher notwendig genau ein Zug paar und zwar von der zweiten Ordnung.

Da ferner jede Gerade durch $E$ die Bildkurve $c^n$ in $n-1$ weiteren reellen Punkten schneidet, so muß $E$ notwendig gerade auf jenem paaren Zuge der in $F$ zerschnittenen $c^n$ liegen. Das gibt den

**Satz 3.** Projiziert man eine auf einem Hyperboloid gelegene irreducible (algebraische oder nicht-algebraische) Kurve $(1, n-1)$ der $n$. Ordnung, welche jede Erzeugende der einen Schar in einem, und jede Erzeugende der anderen Schar in $n-1$ reellen Punkten schneidet, aus einem Punkte allgemeiner Lage des Hyperboloids auf eine nicht durch das Projektionszentrum hindurchgehende Ebene (stereographisch), so erhält man eine ebene Kurve $c^n$ von der $n$. Ordnung mit einem $(n-1)$-fachen Punkte $F$ mit $n-1$ getrennten reellen Ästen, die, in diesem Punkte $F$ zerschnitten, in $n-2$ unpaare und einen paaren reellen Kurvenzug (mit Ecken im Zerschneidungspunkte $F$) zerfällt. Von den Fundamentalpunkten der Abbildung liegt der eine in $F$, während der andere $E$ notwendig auf dem paaren Zuge (von der Ordnung 2) der in $F$ zerschnittenen Bildkurve $c^n$ liegt.

## IV. Beweis des Hauptsatzes.

Auf Grund des soeben formulierten 3. Satzes ist es nun nicht schwer, die aufgestellte Behauptung, daß die Kurven $(1, n-1)$ des ersten Satzes vom Maximalindex $n-2$ sind, zu beweisen, d. h. zu zeigen, daß jede reelle Ebene des Raumes mit jenen Kurven mindestens $n-2$ reelle Punkte gemein hat.

Für die Tangentialebenen des Hyperboloids, auf dem die Kurven liegen, folgt die Behauptung unmittelbar aus der Voraussetzung. — Die Ebenen allgemeiner Lage schneiden irreducible Kegelschnitte aus dem Hyperboloid aus, deren Bilder die Kegelschnitte der $\infty^3$-Schar sind, welche die Punkte $E$ und $F$, die Fundamentalpunkte der Abbildung, zu Basispunkten hat. Aus der Tatsache (des 3. Satzes) nun, daß $E$ auf dem paaren Zuge der in $F$ zerschnittenen Bildkurve $c^n$ liegt (III), folgt aber unschwer, daß jeder irreducible Kegelschnitt der eben genannten $\infty^3$-Schar jene Bildkurve außer in $E$ und $F$, wie es sein muß, in mindestens $n-2$ reellen Punkten schneidet (von denen [höchstens] drei an $F$ heranrücken können).

Da nämlich der Punkt $F$ für die Bildkurve $c^n$ $(n-1)$-fach mit $n$ getrennten reellen Ästen ist, so gehen von $F$ immer genau $n-1$ Zweige der Kurve aus, die in der Nähe von $F$ auf einer und derselben Seite einer beliebigen Geraden $g$ durch $F$ verlaufen. Ist die Gerade $g$ also Tangente eines durch $E$ und $F$ hindurchgehenden Kegelschnitts, so sind demnach nur zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder verläuft $g$ ganz außerhalb des paaren Zuges (2. Ordnung) der in $F$ zerschnittenen Bildkurve $c^n$: dann brauchen zwar nur $(n-1)-2=n-3$ der $n-2$ unpaaren Züge von dem Kegelschnitt geschnitten zu werden. Allein dann wird notwendig der paare Zug außer in $E$ (und $F$) noch in einem weiteren reellen Punkte geschnitten, da der Kegelschnitt nach Voraussetzung bei $F$ ganz außerhalb des paaren Zuges verläuft. Oder die Tangente $g$ des Kegelschnitts (in $F$) dringt bei $F$ in das Innere des paaren Zuges ein: dann werden notwendig sämtliche $n-2$ unpaaren Züge (außer in $F$) in wenigstens einem weiteren reellen Punkte geschnitten; denn ein unpaarer Kurvenzug, der einen Punkt im Inneren eines paaren Zuges enthält (es dringen bei $F$ $n-2$ Zweige unpaarer Züge in das Innere des Kegelschnitts ein), hat mindestens 2 reelle Punkte mit dem paaren Zuge gemein (jeder der $n-2$ Zweige außer $F$ also mindestens noch einen). In jedem Falle hat demnach ein Kegelschnitt, der durch $E$ und $F$ hindurchgeht, mit der Bildkurve $c^n$ außer $E$ und $F$ noch mindestens $n-2$ reelle Punkte gemein.

Da nun aber, wie schon gesagt, die Kegelschnitts-$\infty^3$-Schar durch $E$ und $F$ das Bild des ebenen Schnittsystems des Hyperboloids ist, auf dem die Original-$C^n$ $(1, n-1)$ liegt, so folgt[1]) endlich der

**Satz 4.** Eine auf einem Hyperboloid gelegene Kurve $n$. Ordnung $(1, n-1)$, welche jede Erzeugende der einen Schar in 1, und jede Erzeugende der anderen Schar in $n-1$ (stets) reellen Punkten schneidet, hat mit jeder Ebene des Raumes (in dem sie liegt) mindestens $n-2$ reelle Punkte gemein: sie ist vom Maximalindex, womit auf Grund von Satz 1 die Existenz unicursaler Kurven beliebig hoher Ordnung $n$ ohne reelle singuläre Punkte, Tangenten und Tangentialebenen erwiesen ist.

## V. Unabhängigkeit vom algebraischen Charakter.

Zum Schluß sei noch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß zum Beweise der vorstehenden Sätze, abgesehen von dem Existenzbeweise algebraischer auf dem Hyperboloid gelegener Kurven $(1, n-1)$, welche jede Erzeugende der einen Schar in einem und jede Erzeugende der anderen Schar in $n-1$ reellen Punkten schneiden, von algebraischen Hilfsmitteln keinerlei Gebrauch gemacht ist. Die in dieser Arbeit behandelten gestaltlichen Fragen sind daher von der algebraischen Natur der betrachteten Kurven durchaus unabhängig.

---

[1]) Ein zweiter Beweis ergibt sich auf Grund von Satz 3, wenn man beachtet, daß das Projektionszentrum ein beliebiger Punkt allgemeiner Lage auf dem Hyperboloid ist, aus der Tatsache, daß den $\infty^2$ Kegelschnitten auf dem Hyperboloid, welche durch das Projektionszentrum hindurchgehen, die $\infty^2$ geraden Linien der Bildebene entsprechen.

# Über die Äquivalenz der sogenannten Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte und die Verallgemeinerung eines beim Beweise benützten Grenzwertsatzes.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 2. Dezember 1916.

Der von Herrn J. Schur[1]) herrührende schöne Beweis für die Äquivalenz der sogenannten Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte — welche im folgenden mit $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{M}_{\varkappa}(s_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(\varkappa)}$ bezeichnet werden sollen (s. weiter unten Gl. (I), (3) und (II), (8), (9)) — beruht zum Teil auf der Feststellung, daß die „reguläre Operation":

$$y_n = aE(x_n) + (1-a)\mathfrak{M}_1(x_n) \quad (\text{wo: } E(x_n) \equiv x_n)$$

für $\mathfrak{R}(a) > 0$ „reversibel" ist (a. a. O., S. 453), mit anderen Worten, daß nicht nur aus der Existenz eines endlichen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ diejenige eines damit gleichwertigen $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ folgt, sondern daß auch das umgekehrte gilt. Es ist mir neuerdings gelungen, den sehr sinnreichen, immerhin auf verhältnismäßig schwierigen Sonderbetrachtungen beruhenden Schurschen Beweis[2]) dieses

[1]) Math. Ann. 74 (1913), S. 447. Zu der daselbst S. 448 angeführten Literatur ist inzwischen noch ein Beweis des fraglichen Satzes von Herrn Georg Faber gekommen, welcher ungefähr gleichzeitig mit dem Schurschen Beweise und zwar im Jahrgange 1913 dieser Berichte (S. 519) erschienen ist.

[2]) Herr Schur erwähnt (a. a. O. S. 453, Fußnote) noch einen Beweis des obigen Satzes für reelle $a$ von Herrn J. Mercer (Proc. Lond. Math. Soc. (2), 5, p. 206) und für beliebige $a$ von Herrn G. H. Hardy

merkwürdigen Sates, der offenbar eine wichtige Ergänzung zu einem bekannten Cauchyschen Grenzwertsatze liefert, durch einen überaus einfachen und völlig elementaren zu ersetzen, welcher sich in Nr. 4 der folgenden Mitteilung findet.

Für den zunächst vorliegenden Zweck, den oben genannten Äquivalenzbeweis, kommt lediglich ein besonderer Fall dieses allgemeinen Grenzwertsatzes zur Anwendung, nämlich der Fall $a = \frac{1}{k}$, wo $k$ eine natürliche Zahl bedeutet. Herr Edmund Landau, der in seiner kürzlich veröffentlichten lehrreichen und dankenswerten Schrift über einige neuere Ergebnisse der Funktionentheorie[1]) u. a. auch eine abgekürzte Darstellung jenes Schurschen Äquivalenzbeweises gibt, behandelt diesen Spezialfall in Gestalt von zwei Hilfssätzen, die er seiner Darstellung voranschickt (a. a. S. S. 30). Aber auch der von ihm gegebene, von den allgemeinen Schurschen Betrachtungen unabhängige Beweis läßt sich durch einen wesentlich natürlicheren und einfacheren ersetzen (s. Nr. 3 am Ende). Im übrigen bedient sich leider Herr Landau in der erwähnten Schrift, wie seit einigen Jahren in allen seinen Arbeiten, zur Kennzeichnung von Grenzwertbeziehungen und der damit vorzunehmenden Operationen gewisser teils von englischen Mathematikern übernommener, teils wohl frei erfundener Bezeichnungen und eines daran anknüpfenden Algorithmus, welche für den nicht vollständig daran gewöhnten die Nachprüfung der einzelnen Schlußfolgerungen zu einer recht zeitraubenden Beschäftigung machen. Es mag sein, daß diese Bezeichnungen für heuristische Zwecke sich als besonders geeignet erweisen und daß sie gewisse Vorzüge besitzen, wenn es sich nicht um bloße Grenzwerth-Beziehungen, sondern um asymptotische Ab-

---

(Quart. Journ. 43, p. 143). Beide Beweise sind mir unbekannt und zur Zeit nicht erreichbar. Über einen lediglich auf reelle $a$ bezüglichen, im Anschlusse an die Schursche Arbeit erschienenen Beweis des Herrn K. Knopp vgl. die Fußnote 2 auf S. 221 dieser Mitteilung.

[1]) Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Berlin 1916.

schätzungen handelt, bei denen die Größenordnung der vernachlässigten Bestandteile eine maßgebende Rolle spielt. Aber ich kann darin keinen ausreichenden Grund erblicken, um auch überall da, wo es nicht den geringsten Vorteil mit sich bringt, altbewährte und jedermann geläufige Bezeichnungen mit einer Konsequenz, die einer besseren Sache würdig wäre, auszumerzen und durch neue (nach meinem Dafürhalten recht wenig charakteristische) zu ersetzen. Und ich würde es aufrichtig bedauern, wenn jüngere Mathematiker, die ja erfahrungsgemäß nicht selten eine etwas übertriebene Neigung zeigen, sich der neuesten „Errungenschaften" zu bemächtigen, in ähnlichem Sinne fortfahren sollten, das gewohnte Bild funktionentheoretischer Untersuchungen in wenig erfreulicher Weise zu verändern.

Da ich annehmen möchte, daß die vollkommene Gewöhnung an die Landauschen Bezeichnungen auch einigen anderen Mathematikern nicht ganz leicht fällt und daß es unter diesen sogar solche gibt, welche den dazu erforderlichen Zeitaufwand bisher gescheut haben, so glaubte ich den letzteren einen kleinen Dienst zu erweisen, wenn ich mich nicht damit begnüge, an dieser Stelle die oben angekündigten Beweisvereinfachungen mitzuteilen, sondern diese Gelegenheit benütze, um den ganzen Schur-Landauschen Äquivalenzbeweis mit den mir zweckdienlich erscheinenden Vorbereitungen in möglichst einfacher Form darzustellen.

---

1. Das arithmetische Mittel von $n$ als beliebig komplex zu denkenden Zahlen $x_0, x_1 \ldots x_n$ möge mit $\mathfrak{M}(x_n)$ bezeichnet werden, also:

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \mathfrak{M}(x_n) = \frac{1}{n+1}(x_0 + x_1 + \cdots + x_n),$$

das arithmetische Mittel von $\mathfrak{M}(x_0), \mathfrak{M}(x_1) \ldots \mathfrak{M}(x_n)$ mit $\mathfrak{M}_2(x_n)$, also:

$$(\mathrm{I}_2) \qquad \mathfrak{M}_2(x_n) = \frac{1}{n+1}(\mathfrak{M}(x_0) + \mathfrak{M}(x_1) + \cdots + \mathfrak{M}(x_n)),$$

und allgemein werde gesetzt:

$$\text{(I)}\quad \mathfrak{M}_\varkappa(x_n) = \frac{1}{n+1}\left(\mathfrak{M}_{\varkappa-1}(x_0) + \mathfrak{M}_{\varkappa-1}(x_1) + \cdots + \mathfrak{M}_{\varkappa-1}(x_n)\right).$$

Diese letzte, zunächst nur für $\varkappa \geqq 3$ einen Sinn habende Beziehung gilt auch noch für $\varkappa = 2$ bzw. $\varkappa = 1$, wenn man $\mathfrak{M}_1(x_\nu)$ mit $\mathfrak{M}(x_\nu)$ bzw. $\mathfrak{M}_0(x_\nu)$ mit $x_\nu$ identifiziert[1]).

Ist sodann $\sum a_\nu$ eine unendliche Reihe mit komplexen Gliedern und im Falle ihrer Konvergenz:

$$\text{(1)}\qquad \lim_{n\to\infty} s_n \equiv \lim_{n\to\infty}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = s,$$

so hat man auf Grund eines bekannten Cauchyschen Grenzwertsatzes auch:

$$\text{(2)}\qquad \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_1(s_n) = s$$

und durch sukzessive Anwendung des nämlichen Satzes allgemein:

$$\text{(3)}\qquad \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_\varkappa(s_n) = s \qquad (\varkappa \geqq 1).$$

Dagegen zieht die Existenz von Gl. (2) nicht umgekehrt diejenige von Gl. (1) nach sich und ebensowenig folgt aus der Existenz von Gl. (3) für irgend ein bestimmtes $\varkappa = k > 1$ diejenige für irgend ein $\varkappa < k$, insbesondere nicht die Konvergenz der Reihe $\sum a_\nu$. Es liegt nahe, einen solchen Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{M}_\varkappa(s_n) = s$, da er ja im Falle der Konvergenz mit der Summe der Reihe übereinstimmen würde, im Falle der Divergenz[2]) bei passender Gelegenheit als eine Art Ersatz

---

[1]) Analog wie man z. B. beim Gebrauche der logarithmischen Infinitärtypen zu setzen pflegt:

$$\lg_1 x \equiv \lg x, \quad \lg_0 x \equiv x.$$

[2]) Selbstverständlich kann die fragliche Eventualität nur im Falle uneigentlicher Divergenz eintreten, d. h. wenn von den beiden Reihen

$$\sum \alpha_\nu,\ \sum \beta_\nu \quad (\text{wo: } \alpha_\nu + \beta_\nu i = a_\nu)$$

keine nach $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert. Im entgegengesetzten Falle ist, wie jener Cauchysche Satz lehrt, für jedes $\varkappa$ auch:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_\varkappa(s_n) = \infty.$$

für die fehlende Summe zu betrachten, ohne deshalb die wenig empfehlenswerte Mode mitzumachen, die betreffende Reihe schlechthin als summabel („lucus a non lucendo") zu bezeichnen. Wir wollen etwa, wenn $\varkappa = k \geq 1$ der kleinste Index der fraglichen Art ist, uns des Ausdruckes bedienen, die betreffende Reihe sei durch $k$fache Mittelbildung reducibel und $s$ der ihr zugeordnete Grenzwert.

2. Das Bildungsgesetz der iterierten Mittelwerte $\mathfrak{M}_\varkappa(s_n)$ gestaltet sich bei wachsendem $\varkappa$ infolge des bei jedem einzelnen Mittelwerthe auftretenden Nenners äußerst verwickelt. Es erscheint daher für die Berechnung des einer reduciblen divergenten Reihe zugeordneten Grenzwertes nützlich, daß die Grenzwerte der iterierten Mittelbildungen sich durch diejenigen wesentlich einfacher gearteter Iterationen ersetzen lassen.

Es werde gesetzt:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} s_n^{(1)} = s_0 + s_1 + \cdots + s_n \\ s_n^{(2)} = s_0^{(1)} + s_1^{(1)} + \cdots + s_n^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_n^{(\varkappa)} = s_0^{(\varkappa-1)} + s_1^{(\varkappa-1)} + \cdots + s_n^{(\varkappa-1)}. \end{cases}$$

Dabei umfaßt die letzte zunächst nur für $\varkappa \geq 2$ gültige Beziehung auch den Fall $\varkappa = 1$, wenn man $s_\nu^{(0)}$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$ die Bedeutung von $s_\nu$ beilegt. Ferner hat man:

$$\text{(4)} \qquad \frac{s_n^{(1)}}{n+1} = \mathfrak{M}_1(s_n).$$

Fährt man nun hiervon ausgehend in der Weise fort, daß man die nächste Mittelbildung nicht auf die Ausdrücke $\dfrac{s_\nu^{(1)}}{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1 \ldots n)$, sondern lediglich auf die $s_\nu$ ausübt, so resultiert:

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{s_0^{(1)} + s_1^{(1)} + \cdots + s_n^{(1)}}{n+1} = \frac{s_n^{(2)}}{(n+1)^2}$$

und bei weiterer Fortsetzung dieses Prozesses eine Folge von Ausdrücken von der Form:

$$\frac{s_n^{(\varkappa)}}{(n+1)^\varkappa} \qquad (\varkappa = 2, 3 \ldots).$$

Auf Grund der Stolzschen Verallgemeinerung[1]) des bereits oben erwähnten Cauchyschen Grenzwertsatzes findet man sodann für $k \geqq 1$:

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{s_n^{(\varkappa)}}{(n+1)^\varkappa} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n^{(\varkappa)} - s_{n-1}^{(\varkappa)}}{(n+1)^\varkappa - n^\varkappa},$$

falls der rechts auftretende Grenzwert existiert. Nun ist aber:

$$s_n^{(\varkappa)} - s_{n-1}^{(\varkappa)} = \sum_0^n{}_\nu\, s_\nu^{(\varkappa-1)} - \sum_0^{n-1}{}_\nu\, s_\nu^{(\varkappa-1)} = s_n^{(\varkappa-1)}$$

$$(n+1)^\varkappa - n^\varkappa = n^\varkappa \left(\frac{\varkappa}{n} - \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^\varkappa}\right)$$
$$\cong \varkappa \cdot n^{\varkappa-1} \cong \varkappa\,(n+1)^{\varkappa-1}\,{}^{2}),$$

so daß die Gleichung (5) durch die folgende ersetzt werden kann:

$$(6) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{s_n^{(\varkappa)}}{(n+1)^\varkappa} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n^{(\varkappa-1)}}{\varkappa\,(n+1)^{\varkappa-1}},$$

immer unter der Voraussetzung, daß der rechts stehende Grenzwert existiert.

Ist nun die Reihe $\sum a_\nu$ konvergent und $s$ ihre Summe, also:

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{(0)} = s,$$

so folgt aus Gl. (6) sukzessive:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n^{(1)}}{n+1} = s,\ \lim_{n\to\infty} \frac{s_n^{(2)}}{(n+1)^2} = \tfrac{1}{2} s,\ \lim_{n\to\infty} \frac{s_n^{(3)}}{(n+1)^3} = \frac{1}{2\cdot 3} s, \ldots$$

und daher allgemein:

---

[1]) Math. Ann. 14 (1879), S. 234: Stolz-Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie, Abt. I (1904), S. 31.

[2]) Eine Beziehung von der Form:

$$a_n \cong b_n$$

hat die Bedeutung von:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

$$(7) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\varkappa!\, s_n^{(\varkappa)}}{(n+1)^\varkappa} = s \qquad (\varkappa = 1, 2, 3 \ldots).$$

Wenn dagegen $\sum a_\nu$ (uneigentlich) divergiert und für irgend ein $\varkappa = k \geqq 2$[1]) eine Beziehung von der Form (7) besteht, so kann man diesen Grenzwert mit demselben Maße von Berechtigung, wie zuvor im analogen Falle den Grenzwert $\lim\limits_{k \to \infty} \mathfrak{M}_\varkappa(x_n)$, als Ersatz für die fehlende Summe der Reihe $\sum a_\nu$ ansehen. Dabei steht es offenbar noch frei, den Faktor $\frac{\varkappa!}{(n+1)^\varkappa}$ für jedes $\varkappa$ durch einen ihm infinitär gleichen zu ersetzen, der sich für die weiteren Betrachtungen als zweckmäßiger erweist, nämlich durch den reciproken Wert des Binomial-Koeffizienten $(n+\varkappa)_\varkappa$, wegen:

$$\frac{(n+1)^\varkappa}{\varkappa!} \cong \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+\varkappa)}{1 \cdot 2 \cdots \varkappa} = (n+\varkappa)_\varkappa.$$

Setzt man hiernach für $\varkappa = 1, 2, 3 \ldots$:

$$(8) \qquad S_n^{(\varkappa)} = \frac{s_n^{(\varkappa)}}{(n+\varkappa)^\varkappa} \left(\text{also speziell: } S_n^{(1)} = \frac{s_n^{(1)}}{n+1} = \mathfrak{M}_1(s_n)\right),$$

so besteht gleichzeitig mit jeder einzelnen der Beziehungen (7) ($\varkappa = 1, 2, 3 \ldots$) die entsprechende folgende:

$$(9) \qquad \lim_{n \to \infty} S_n^{(\varkappa)} = s$$

und umgekehrt.

Da die Bildung der $S_n^{(\varkappa)}$ im wesentlichen (d. h. lediglich abgesehen von der Hinzufügung des Konvergenzfaktors $\frac{1}{(n+\varkappa)_\varkappa}$) auf einer iterierten Summation beruht, so wollen wir, falls eine Beziehung von der Form (9) für einen gewissen kleinsten Index $\varkappa = k \geqq 2$ (und sodann nach Gl. (6) für jedes $\varkappa > k$) besteht, sagen, die betreffende Reihe sei durch $k$fach iterierte Summation reducibel und $s$ der ihr zugeordnete Grenzwert.

Es erscheint nun wichtig, festzustellen, daß die beiden im vorstehenden besprochenen Reduktions-Möglichkeiten stets dasselbe Resultat liefern bzw. auch gleichzeitig versagen, mit anderen Worten, daß aus der für irgend ein bestimmtes $k \geqq 2$[1]) gemachten Annahme:

$$\lim_{n \to \infty} S_n^{(k)} = s \quad (\text{„Cesàroscher" Grenzwert})$$

allemal folgt:

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_k(s_n) = s \quad (\text{„Hölderscher" Grenzwert})$$

und umgekehrt. Ist dieser Nachweis geführt, so wird man eine divergente Reihe schlechthin als reducibel von der Ordnung $k$ mit dem Grenzwert $s$ bezeichnen können, unabhängig davon, ob zunächst nur die Existenz von

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_k(s_n) = s$$

oder von $$\lim_{n \to \infty} S_n^{(k)} = s \quad \text{feststeht.}$$

3. Die Grundlage des fraglichen Nachweises bildet eine Rekursionsformel, welche eine einfache Beziehung zwischen $S_n^{(\varkappa-1)}$, $S_n^{(\varkappa)}$ und $\mathfrak{M}(S_n^{(\varkappa)})$ herstellt.

Aus (II) folgt für $\varkappa \geqq 1$:

$$s_n^{(\varkappa-1)} = s_n^{(\varkappa)} - s_{n-1}^{(\varkappa)},$$

also:

$$\begin{aligned} S_n^{(\varkappa-1)} \equiv \frac{s_n^{(\varkappa-1)}}{(n+\varkappa-1)_{\varkappa-1}} &= \frac{s_n^{(\varkappa)}}{(n+\varkappa-1)_{\varkappa-1}} - \frac{s_{n-1}^{(\varkappa)}}{(n+\varkappa-1)_{\varkappa-1}} \\ &= \frac{n+\varkappa}{\varkappa} \cdot \frac{s_n^{(\varkappa)}}{(n+\varkappa)_\varkappa} - \frac{n}{\varkappa} \cdot \frac{s_{n-1}^{(\varkappa)}}{(n-1+\varkappa)_\varkappa} \\ &= \frac{n+\varkappa}{\varkappa} \cdot S_n^{(\varkappa)} - \frac{n}{\varkappa} \cdot S_{n-1}^{(\varkappa)} \\ &= \frac{1}{\varkappa}\left((n+1)\, S_n^{(\varkappa)} - n\, S_{n-1}^{(\varkappa)}\right) + \frac{\varkappa-1}{\varkappa} \cdot S_n^{(\varkappa)}. \end{aligned}$$

[1]) Der Fall $k = 1$ würde ja nur auf die bereits erledigte Mittelbildung $\mathfrak{M}_1(s_n)$ führen (s. Gl. (4)).

Ersetzt man $n$ sukzessive durch $n-1$, $n-2\ldots 1$, addiert die resultierenden Gleichungen zu der vorstehenden und dazu noch die Identität:

$$S_0^{(\varkappa-1)} = \frac{1}{\varkappa}\cdot S_0^{(\varkappa)} + \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\cdot S_0^{(\varkappa)} \quad (\text{wegen: } S_0^{(\varkappa)} = S_0^{(\varkappa-1)} = s_0),$$

so ergibt sich:

$$\sum_0^n{}^\nu S_\nu^{(\varkappa-1)} = \frac{1}{\varkappa}(n+1)S_n^{(\varkappa)} + \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\sum_0^n{}^\nu S_\nu^{(\varkappa)}$$

und durch Division mit $(n+1)$:

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned}\mathfrak{M}(S_n^{(\varkappa-1)}) &= \frac{1}{\varkappa}\cdot S_n^{(\varkappa)} + \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\mathfrak{M}(S_n^{(\varkappa)})\\ &= \mathfrak{T}_\varkappa(S_n^{(\varkappa)}),\end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\text{(11)} \qquad \mathfrak{T}_\varkappa(x_n) = \frac{1}{\varkappa}x_n + \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\mathfrak{M}(x_n).$$

Wird jetzt aus $\mathfrak{T}_\varkappa(x_0)$, $\mathfrak{T}_\varkappa(x_1)\ldots\mathfrak{T}_\varkappa(x_n)$ das arithmetische Mittel gebildet, so ergibt sich, wenn man beachtet, daß offenbar allgemein:

$$\mathfrak{M}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha\mathfrak{M}(x_n) + \beta\mathfrak{M}(y_n),$$

aus Gl. (11):

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{T}_\varkappa(x_n)) = \frac{1}{\varkappa}\mathfrak{M}(x_n) + \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\mathfrak{M}_2(x_n) = \mathfrak{T}_\varkappa(\mathfrak{M}(x_n)),$$

wofür wir mit Weglassung der äußeren Klammer schreiben wollen:

$$\text{(12)} \qquad \mathfrak{M}\mathfrak{T}_\varkappa(x_n) = \mathfrak{T}_\varkappa\mathfrak{M}(x_n).$$

Ersetzt man ferner $x_n$ in dem Ausdrucke $\mathfrak{T}_\varkappa(x_n)$ durch $\mathfrak{T}_\lambda(x_n)$ und schreibt wieder: $\mathfrak{T}_\varkappa\mathfrak{T}_\lambda(x_n)$ statt: $\mathfrak{T}_\varkappa(\mathfrak{T}_\lambda(x_n))$ bzw. $\mathfrak{M}\mathfrak{T}_\lambda(x_n)$ statt: $\mathfrak{M}(\mathfrak{T}_\lambda(x_n))$, so folgt aus Gl. (12):

$$\text{(13)} \qquad \mathfrak{M}\mathfrak{T}_\varkappa\mathfrak{T}_\lambda(x_n) = \mathfrak{T}_\varkappa\mathfrak{M}\mathfrak{T}_\lambda(x_n) = \mathfrak{T}_\varkappa\mathfrak{T}_\lambda\mathfrak{M}(x_n)$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Schlußweise allgemein:

$$\mathfrak{M}\,\mathfrak{T}_{\varkappa_1}\mathfrak{T}_{\varkappa_2}\ldots\mathfrak{T}_{\varkappa_m}(x_n)=\mathfrak{T}_{\varkappa_1}\mathfrak{T}_{\varkappa_2}\ldots\mathfrak{T}_{\varkappa_m}\mathfrak{M}(x_n). \tag{14}$$

Mit Benützung dieses Ergebnisses folgt aus Gl. (10) durch Bildung des arithmetischen Mittels von $\mathfrak{M}(S_0^{(\varkappa-1)})$, $\mathfrak{M}(S_1^{(\varkappa-1)})\ldots$ $\mathfrak{M}(S_n^{(\varkappa-1)})$:

$$\mathfrak{M}_2(S_n^{(\varkappa-1)})=\mathfrak{M}\,\mathfrak{T}_\varkappa(S_n^{(\varkappa)})=\mathfrak{T}_\varkappa\mathfrak{M}(S_n^{(\varkappa)}),$$

also durch nochmalige Benützung der Rekursionsformel (10), wenn man daselbst $\varkappa$ durch $\varkappa+1$ ersetzt:

$$\mathfrak{M}_2(S_n^{(\varkappa-1)})=\mathfrak{T}_\varkappa\mathfrak{T}_{\varkappa+1}(S_n^{(\varkappa+1)}). \tag{15}$$

Ebenso findet man durch nochmalige Mittelbildung aus Gl. (15)

$$\mathfrak{M}_3(S_n^{(\varkappa-1)})=\mathfrak{T}_\varkappa\mathfrak{T}_{\varkappa+1}\mathfrak{M}(S_n^{(\varkappa+1)})=\mathfrak{T}_\varkappa\mathfrak{T}_{\varkappa+1}\mathfrak{T}_{\varkappa+2}(S_n^{(\varkappa+2)})$$

und durch Fortsetzung dieser Schlußweise:

$$\mathfrak{M}_{k-1}(S_n^{(\varkappa-1)})=\mathfrak{T}_\varkappa\mathfrak{T}_{\varkappa+1}\ldots\mathfrak{T}_{\varkappa+k-2}(S_n^{\varkappa+k-2)}), \tag{16}$$

also für $\varkappa=2$, wenn man noch beachtet, daß $S_n^{(1)}=\dfrac{s_n^{(1)}}{n+1}$ $=\mathfrak{M}_1(s_n)$ (s. Gl. (4)):

$$\mathfrak{M}_k(s_n)=\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3\ldots\mathfrak{T}_k(S_n^{(k)}), \tag{17}$$

eine Formel, welche also eine explicite Darstellung von $\mathfrak{M}_k(s_n)$ durch $S_n^{(k)}$ liefert.

Nun folgt aus der Definitionsgleichung (11), da nach dem erwähnten Cauchyschen Satze gleichzeitig mit $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=s$ auch $\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{M}(x_n)=s$, ohne weiteres, daß:

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{T}_\varkappa(x_n)=s,\quad\text{wenn: }\lim_{n\to\infty}x_n=s. \tag{18}$$

Wird also zunächst angenommen, daß

$$\lim_{n\to\infty}S_n^{(k)}=s, \tag{19}$$

so findet man sukzessive:

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{T}_k(S_n^{(k)}) = s$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{T}_{k-1}\mathfrak{T}_k(S_n^{(k)}) = s$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3 \ldots \mathfrak{T}_k(S_n^{(k)}) = s$$

d. h. mit Benützung von Gl. (17):

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_k(x_n) = s. \tag{20}$$

Kann noch nachgewiesen werden, daß die Beziehungen (18) umkehrbar sind, daß also:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = s, \quad \text{wenn: } \lim \mathfrak{T}_\varkappa(x_n) = s\text{[1]}, \tag{21}$$

so würde aus der zur Voraussetzung gemachten Gleichung (20), also mit Benützung von Gl. (17) aus der Voraussetzung:

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3 \ldots \mathfrak{T}_k(S_n^{(k)}) = s$$

sukzessive folgen:

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{T}_3\mathfrak{T}_4 \ldots \mathfrak{T}_k(S_n^{(k)}) = s$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{T}_4 \ldots \mathfrak{T}_k(S_n^{(k)}) = s$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{T}_k(S_n^{(k)}) = s$$

und schließlich:

$$\lim_{n \to \infty} S_n^{(k)} = s,$$

womit dann die in Frage stehende Äquivalenz der beiden Kategorien von Grenzwerten vollständig bewiesen wäre.

Der noch fehlende Nachweis für die Richtigkeit der in den Gleichungen (21) enthaltenen Behauptung läßt sich folgender-

---

[1] D. h. für irgend ein $\varkappa \geqq 2$ (für $\varkappa = 1$ hätte man ja nach Gl. (11) geradezu: $x_n \equiv \mathfrak{T}_1(x_n)$, also auch $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \equiv \lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{T}_1(x_n) = s$).

maßen bewerkstelligen. Angenommen man habe für irgend ein bestimmtes $\varkappa \geqq 2$:

$$(22) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathfrak{T}_\varkappa(x_n) \equiv \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\varkappa}\cdot x_n + \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\mathfrak{M}(x_n)\right) = s.$$

Aus der Definitionsgleichung ($I_1$) folgt, daß:

$$x_n = (n+1)\,\mathfrak{M}(x_n) - n\,\mathfrak{M}(x_{n-1})$$

und daher:

$$\mathfrak{T}_\varkappa(x_n) = \frac{(n+\varkappa)\,\mathfrak{M}(x_n) - n\,\mathfrak{M}(x_{n-1})}{\varkappa}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner dieses Ausdrucks mit dem Faktor

$$(n+\varkappa-1)\,(n+\varkappa-2)\ldots(n+1)$$

und benützt für das im Nenner stehende $\varkappa$ die Identität:

$$\varkappa = (n+\varkappa) - n,$$

so nimmt die Voraussetzung (22) die Form an:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+\varkappa)(n+\varkappa-1)\ldots(n+1)\,\mathfrak{M}(x_n) - (n+\varkappa-1)(n+\varkappa-2)\ldots n\,\mathfrak{M}(x_{n-1})}{(n+\varkappa)(n+\varkappa-1)\ldots(n+1) \qquad - (n+\varkappa-1)(n+\varkappa-2)\ldots n} = s,$$

und man findet daher mit Benützung des bereits oben erwähnten Stolzschen Grenzwertsatzes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+\varkappa)(n+\varkappa-1)\ldots(n+1)}{(n+\varkappa)(n+\varkappa-1)\ldots(n+1)}\,\mathfrak{M}(x_n) \equiv \lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}(x_n) = s.$$

Durch Einsetzen dieses Grenzwertes in die Voraussetzung (22) folgt sodann, wie behauptet:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = s.$$

4. Der letzte Teil des vorhergehenden Beweises ist als Spezialfall in dem folgenden allgemeineren Grenzwertsatze enthalten:

Sind $a$, $b$ beliebige komplexe Zahlen, welche nur der Beschränkung

$$\Re\left(\frac{a}{a+b}\right) > 0 \tag{23}$$

unterworfen sind[1]), so hat man:

$$(a+b)\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(a x_n + b\,\mathfrak{M}(x_n)), \tag{24}$$

sobald nur feststeht, daß *einer* dieser beiden Grenzwerte eine bestimmte Zahl vorstellt[2]).

Beweis. Wird zunächst die Existenz eines endlichen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ vorausgesetzt, so lehrt der Cauchysche Grenzwertsatz, daß auch $\lim\limits_{n\to\infty}\mathfrak{M}(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, woraus dann die Richtigkeit der Beziehung (24) unmittelbar hervorgeht. Dieser Teil der ausgesprochenen Behauptung enthält also nichts neues und wurde nur der Vollständigkeit halber in die Fassung des Satzes aufgenommen.

Es werde nun zweitens vorausgesetzt, daß der Grenzwert auf der rechten Seite von Gl. (24) (im engeren Sinne) existiere, und zwar möge er mit $(a+b)s$ bezeichnet werden, so daß also:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{a+b}\cdot x_n + \frac{b}{a+b}\cdot\mathfrak{M}(x_n)\right) = s \tag{25}$$

oder auch:

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{T}(x_n) \equiv \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{c}\cdot x_n + \left(1-\frac{1}{c}\right)\mathfrak{M}(x_n)\right) = s, \tag{26}$$

wenn gesetzt wird:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{c},\ \text{also:}\ \frac{b}{a+b} = 1-\frac{1}{c},\ \text{wo jetzt:}\ \Re(c) > 0. \tag{27}$$

---

[1]) Damit ist also schon implicite gesagt, daß nicht nur $|a| > 0$, sondern auch $|a+b| > 0$, da ja andernfalls $\frac{a}{a+b}$ sinnlos wäre.

[2]) Für reelle $x_\nu$ und $a$, $b$ bzw. reelles $c$ (s. Gl. (26)) wurde der Satz von Herrn Knopp (Math. Ann. 74, S. 459) durch Untersuchung der vorhandenen Grenzmöglichkeiten indirekt bewiesen. Das betreffende Ergebnis läßt sich dann leicht auf den Fall übertragen, daß die $x_\nu$ oder $a$, $b$ komplex sind. Es versagt aber vollständig, wenn die $x_\nu$ und $a$, $b$ als komplex angenommen werden.

Führt man wiederum (s. oben hinten Gl. (22)) die Beziehung ein:

$$x_n = (n+1)\mathfrak{M}(x_n) - n\,\mathfrak{M}(x_{n-1}),$$

so ergibt sich:

$$\mathfrak{T}(x_n) = \frac{(c+n)\,\mathfrak{M}(x_n) - n\,\mathfrak{M}_{n-1}(x_{n-1})}{c}$$

oder auch, wenn man Zähler und Nenner dieses Bruches mit dem Faktor

$$\frac{(c+n-1)(c+n-2)\ldots(c+1)}{1\cdot 2 \qquad\qquad \ldots (n-1)}\cdot\frac{1}{n}$$

multipliziert:

$$\mathfrak{T}(x_n) = \frac{(c+n)_n\,\mathfrak{M}(x_n) - (c+n-1)_{n-1}\,\mathfrak{M}(x_{n-1})}{(c+n-1)_n}.$$

Mit Benützung der bekannten Rekursionsformel:

$$(c+n)_n = (c+n-1)_{n-1} + (c+n-1)_n$$

läßt sich dann die Voraussetzung (26) in die folgende Form setzen:

$$(28) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(c+n)_n\,\mathfrak{M}(x_n) - (c+n-1)_{n-1}\,\mathfrak{M}(x_{n-1})}{(c+n)_n - (c+n-1)_{n-1}} = s.$$

Ist $c$ reell und zwar (in Folge der Beschränkung $\mathfrak{R}(c) > 0$) wesentlich positiv, so würde aus dieser Beziehung gerade so, wie in Nr. 3 für den besonderen Fall $c = k$ (d. h. ganzzahlig) auf Grund des dort benützten Stolzschen Grenzwertsatzes sich folgern lassen, daß:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(c+n)_n\,\mathfrak{M}(x_n)}{(c+n)_n} \equiv \lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}(x_n) = s.$$

Das gleiche ergibt sich aber auch für komplexes $c$ mit Hülfe einer von Herrn Jensen[1]) herrührenden Verallgemeinerung des Stolzschen Satzes, welche folgendermaßen ausge-

---

[1]) Par. C. R. 106 (1888), p. 834; s. auch: O. Stolz, Math. Ann. 33 (1889), S. 239 oder meine Vorlesungen über Zahlenlehre (Leipzig 1916), S. 231. (Der dort zunächst für reelle $a_\nu$, $b$ gegebene Beweis gilt unverändert auch für komplexe $a_\nu$, $b_\nu$).

sprochen werden kann: „Versteht man unter $a_\nu$, $b_\nu$ ($\nu = 0, 1, 2 \ldots$) irgend welche reelle oder komplexe Zahlenfolgen, ist ferner $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{b_n}\right| \cdot \sum_1^n {}^\nu |b_\nu - b_{\nu-1}|$ endlich, so hat man:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, \tag{29}$$

falls der rechts stehende Grenzwert endlich ausfällt".

In der Tat sind die den Zahlen $b_\nu$ auferlegten Bedingungen erfüllt, wenn gesetzt wird: $b_\nu = (c+\nu)_\nu$. Man hat nämlich:

$$|(c+n)_n| = \frac{|c+1|}{1} \cdot \frac{|c+2|}{2} \cdots \frac{|c+n|}{n},$$

und, da $|c+n| > n$ (wegen: $\Re(c) > 0$), so findet man zunächst, daß $|(c+n)_n|$ gleichzeitig mit $n$ monoton zunimmt. Da überdies, wenn $c = \gamma + \delta i$ (wo: $\gamma > 0$) gesetzt wird, sich ergibt:

$$|(c+n)_n| > \left(1+\frac{\gamma}{1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{2}\right) \cdots \left(1+\frac{\gamma}{n}\right)^{1)}$$

und das rechts stehende Produkt für $n \to \infty$ nach $+\infty$ divergiert, so folgt, wie behauptet:

$$\lim_{n\to\infty} |(c+n)_n| = +\infty. \tag{30}$$

Ferner ergibt sich:

$$\left|\frac{1}{(c+n)_n}\right| \cdot \sum_1^n {}^\nu \left|(c+\nu)_\nu - (c+\nu-1)_{\nu-1}\right| = \frac{1}{|(c+n)_n|} \cdot \sum_1^n {}^\nu \left|(c+\nu-1)_\nu\right|,$$

also, da $|(c+n)_n|$ mit $n$ monoton ins Unendliche wächst, wiederum mit Benützung des Stolzschen Grenzwertsatzes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|(c+n)_n|} \cdot \sum_1^n {}^\nu |(c+\nu-1)_\nu| = \lim_{n\to\infty} \frac{|(c+n-1)_n|}{|(c+n)_n| - |(c+n-1)_{n-1}|},$$

---

[1]) Will man den oben bereits erledigten Fall eines reellen $c$, also den Fall $c = \gamma$ mit einschließen, so wäre das Ungleichheitszeichen lediglich durch das Zeichen $\geqq$ zu ersetzen, wodurch die weiteren Schlüsse keinerlei Änderung erleiden.

falls der rechts stehende Grenzwert existiert. Man findet aber, wenn man zunächst Zähler und Nenner mit $n!$ multipliziert:

$$\frac{|(c+n-1)_n|}{|(c+n)_n| - |(c+n-1)_{n-1}|} = \frac{|c+n-1|\cdots|c+1|\cdot|c|}{|c+n|\cdot|c+n-1|\cdots|c+1| - |c+n-1|\cdots|c+1|\cdot n}$$

$$= \frac{|c|}{|c+n| - n}$$

$$= |c| \cdot \frac{|c+n|+n}{|c+n|^2 - n^2}$$

$$= |c| \cdot \frac{|c+n|+n}{2\gamma n + \gamma^2 + \delta^2},$$

also:

$$(31) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|(c+n)_n|} \cdot \sum_1^n \nu\,|(c+\nu-1)_\nu| = \frac{|c|}{\gamma}.$$

Da somit die Voraussetzungen des obigen Jensenschen Satzes für den Grenzwert (28) erfüllt sind, so ergibt sich mit Benützung von Gl. (29):

$$(32) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(c+n)_n\,\mathfrak{M}(x_n)}{(c+n)_n} \equiv \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}(x_n) = s$$

und daher nach Gl. (25):

$$(33) \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = s$$

oder auch in Übereinstimmung mit der Behauptung (24):

$$(a+b) \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (a x_n + b\,\mathfrak{M}(x_n)),$$

falls der rechts stehende Grenzwert eine bestimmte Zahl (nämlich die mit $(a+b)s$ bezeichnete) vorstellt.

# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Klasse

der

## K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1916. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1916
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

# Inhalt.



Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Klasse

der

## K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1916. Heft II

November- und Dezembersitzung

München 1916

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

# Inhalt.



Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.