Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1916. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1916
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Neuer Beweis eines Koebe-Bieberbachschen Satzes über konforme Abbildung.

Von Georg Faber.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 4. März 1916.

Herr Koebe hat zuerst folgenden Satz bewiesen und ihn zur Grundlage wichtiger Untersuchungen gemacht:

Wenn durch

(1) $$Z = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \quad (|z| < 1)$$

ein schlichtes Gebiet g der Z-Ebene mit der Begrenzungsmenge c auf das Innere des Einheitskreises k der z-Ebene abgebildet wird, so gibt es eine für alle derartigen Abbildungen unveränderliche Zahl $\varkappa$, der Art, daß für keinen Punkt von c

(2) $$|Z| < \varkappa \text{ ist.}$$

Einen viel schärferen Satz hat Herr Koebe nur vermutet, nämlich:

Die Zahl $\varkappa$ ist $= \frac{1}{4}$ und es gibt auf c nur dann einen Punkt P, für den

(3) $$|Z| = \tfrac{1}{4}$$

ist, wenn c aus dem geradlinigen Schnitte $P\infty$ besteht, dessen Verlängerung durch O geht.

In seiner Schrift über konforme Abbildung[1]) erwähnt Herr Bieberbach, daß es ihm gelungen sei, die Richtigkeit dieser Vermutung zu beweisen: der Beweis wird im 77. Bande der Annalen erscheinen. Durch diese Bemerkung angeregt, suchte

[1]) Sammlung Göschen 1915.

und fand ich selbst einen Beweis jenes verschärften Koebeschen Satzes. Und da Herr Bieberbach, dem ich diesen Beweis mitteilte, ihn als von dem seinigen verschieden und merklich einfacher bezeichnete, so möchte ich mir erlauben, ihn im folgenden auseinander zu setzen.

Ich ersetze in (1) Z durch $\frac{1}{Z}$, z durch $\frac{1}{z}$ und beweise dann folgenden von dem Koebe-Bieberbachschen nur in der Fassung des Wortlautes verschiedenen Satz:

Wenn durch

$$Z = b_1 z + b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \cdots \quad |z| > 1 \tag{4}$$
$$= f(z)$$

das Äußere des Einheitskreises k der z-Ebene auf das Äußere G einer Kurve C in der Z-Ebene abgebildet wird, und wenn es innerhalb oder auf C zwei Punkte P_1, P_2 von der Entfernung 4 gibt, so ist

$$|b_1| > 1; \tag{5}$$

nur in dem Ausnahmefall, wo G aus der längs der Strecke $P_1 P_2$ aufgeschlitzten Ebene besteht, ist $|b_1| = 1$.

Multipliziert man die rechte Seite von (4) mit irgend einer Zahl vom Betrage 1 und verändert man gleichzeitig in beliebiger Weise das Glied b_0, so bedeutet dies für die Abbildung nur die Ersetzung der Kurve C durch eine kongruente. Darnach ist es von vornherein erlaubt, voraus zu setzen, daß die Punkte P_1, P_2 mit ± 2 zusammenfallen. Der Ausnahmefall des Satzes führt dann einfach auf die Funktion

$$f(z) = z \cdot e^{i\alpha} + \frac{1}{z \cdot e^{i\alpha}}$$

mit beliebigem reellen α und kann somit als erledigt gelten. Im allgemeinen Falle gibt es eine P_1, P_2 verbindende, von der Strecke $P_1 P_2$ verschiedene doppelpunktlose Linie l, von der kein Punkt dem Gebiete G angehört. Durch

$$Z = u + \frac{1}{u}, \quad \text{aufgelöst } u = \varphi(Z), \tag{6}$$

wird der Kurve C eine Kurve Γ und der doppelt gezählten Linie l eine Kurve λ in der u-Ebene zugeordnet. λ geht bei der Vertauschung von u mit $\frac{1}{u}$, ebenso wie die Kreislinie $|u| = 1$, in sich über, umschließt daher ein Gebiet $> \pi$; denn bei der Spiegelung am Einheitskreise entspricht jedem Gebiete innerhalb des Kreises ein größeres außerhalb. Um so mehr ist

(7) die von Γ umschlossene Fläche $> \pi\,(1+\varepsilon)^2$

bei hinreichend kleinem positivem ε.

Das Äußere von Γ wird durch die Funktion

$$(8)\qquad u = \varphi(f(z)) = c_1 z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots \quad (|z| > 1)$$

auf das Gebiet $|z| > 1$ abgebildet und es ist offenbar

$$(9)\qquad c_1 = b_1.$$

Neben (8) betrachte ich noch die Abbildungen[1])

$$(10)\qquad u = c_1 z^4 + c_0 + \frac{c_{-1}}{z^4} + \frac{c_{-2}}{z^8} + \cdots \text{ und}$$

$$(11)\qquad v = \left(c_1 z^4 + c_0 + \frac{c_{-1}}{z^4} + \frac{c_{-2}}{z^8} + \cdots\right)^{\frac{1}{4}}$$

(mit beliebiger Fortsetzung der vierten Wurzel)

$$= d_1 z + d_0 + \frac{d_{-1}}{z} + \frac{d_{-2}}{z^2} + \frac{d_{-3}}{z^3} + \cdots, \text{ wo}$$

$$(12)\qquad |d_1| = |c_1|^{\frac{1}{4}} \text{ und}$$

$$(13)\qquad d_0 = d_{-1} = d_{-2} = 0.$$

Durch (10) wird das 4fach überdeckte Äußere von Γ mit einem Windungspunkt im Unendlichen auf das einfach überdeckte Gebiet $|z| > 1$ abgebildet. Dagegen wird durch (11)

---

[1]) An sich ist die Einführung dieser Hilfsabbildungen unnötig; denn die oben bewiesene Beziehung (16) für die Bilder der Kreise $|z| = R$ in der v-Ebene gilt, wie man fast eben so leicht einsieht, auch für die Bilder dieser Kreise in der u-Ebene, und der Beweis kann in der u-Ebene genau, wie es oben in der v-Ebene geschieht, zu Ende geführt werden. Diese Bemerkung verdanke ich Herrn Bieberbach.

das schlichte Äußere einer gewissen Kurve Γ_1 der v-Ebene auf $|z|>1$ abgebildet. Die Punkte von Γ_1 ergeben sich zu je vieren aus denen von Γ durch die Beziehung

$$v=\sqrt[4]{u}; \tag{14}$$

ebenso die Punkte einer geschlossenen Linie λ_1 der v-Ebene aus denen von λ in der u-Ebene. Die von λ_1 umschlossene Fläche ist aus dem nämlichen Grunde wie die von λ größer als π; und um so mehr ist wieder bei hinreichend kleinem $\varepsilon>0$:

(15) die von Γ_1 umschlossene Fläche $>\pi\,(1+\varepsilon)^2$.

Allgemeiner möge Γ_R in der v-Ebene das Bild der Kreislinie $|z|=R$ sein; aus (13) folgt sofort, daß

(16) die von Γ_R umschlossene Fläche mit beliebiger Annäherung $=|d_1|^2 R^2\pi$

ist, wenn nur R hinreichend groß ist. Aus (15) und (16) schließt man, daß für kleine Werte von ε und große von R

(17) die von $\Gamma_{1+\varepsilon}$ und Γ_R begrenzte Ringfläche $<|d_1|^2 R^2\pi-(1+\varepsilon)^2\pi$ ist.

Andererseits wird die Fläche dieses Ringgebietes durch folgendes Doppelintegral ausgedrückt,[1]) erstreckt über den Kreisring $1+\varepsilon<|z|<R$:

$$\begin{aligned}\iint\left|\frac{dv}{dz}\right|^2 dw &= 2\pi\int_{1+\varepsilon}^{R}\left(|d_1|^2+\frac{|d_{-1}|^2}{r^2}+\frac{4\,|d_{-2}|^2}{r^3}+\cdots\frac{\nu^2|d_{-\nu}|^2}{r^{\nu+1}}\right)r\,dr\\ &> |d_1|^2R^2\pi-|d_1|^2(1+\varepsilon)^2\pi.\end{aligned} \tag{18}$$

Die Abschätzungen (17) und (18) widersprechen einander nur dann nicht, wenn $|d_1|^2>1$ ist; es muß mithin wegen (12) auch $|c_1|>1$ und wegen (9) $|b_1|>1$ sein, w. z. b. w.

---

[1]) Vgl. Bieberbach, Rend. del Circ. mat. di Palermo, Bd. 38, oder Einführung in die konforme Abbildung. Berlin und Leipzig 1915, S. 95.