Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1917. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1917
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über den elastischen Verdrehungswinkel eines Stabs.

Von **A. Föppl.**

Vorgetragen in der Sitzung am 13. Januar 1917.

Die älteste Formel für die Berechnung des Winkels, um den ein gerader Stab von überall gleichem Querschnitt, der aus einem isotropen und dem Hookeschen Elastizitätsgesetze gehorchenden Stoffe besteht, durch ein im Endquerschnitte angreifendes Kräftepaar vom Momente M verdreht wird, geht bis auf Coulomb zurück. Jedenfalls ist der ganze Verdrehungs- oder Drillungswinkel proportional mit der Stablänge. Bezeichnet man den auf die Längeneinheit kommenden Winkel mit ϑ, so kann nach Coulomb

$$\vartheta = \frac{M}{J_p G} \tag{1}$$

gesetzt werden, wenn man unter G den Schubelastizitäts-Modul des Stoffes und unter J_p das polare Trägheitsmoment der Querschnittsfläche versteht, also das Trägheitsmoment für eine durch den Schwerpunkt senkrecht zur Querschnittsebene gezogene Achse. Für einen vollen Kreisquerschnitt, um den es sich hierbei zunächst handelte, kann

$$J_p = \tfrac{1}{2} \pi r^4$$

in die Formel eingesetzt werden und in der Gestalt, die sie damit erlangt, hat sie sich für den kreisförmigen Querschnitt in der Tat als richtig erwiesen.

In allen anderen Fällen gilt dagegen Gl. (1) nicht mehr. Immerhin kann man sie der allgemeinen Form nach auch in den anderen Fällen aufrecht erhalten, wenn man unter J_p nicht mehr das polare Trägheitsmoment versteht, sondern eine andere ebenfalls nur von der Gestalt und den Maßen der Querschnittsfläche abhängige, rein geometrische Größe, die ihrer Dimension nach ebenso wie J_p eine Länge zur vierten Potenz bedeutet. Insofern trifft nämlich Gleichung (1) stets zu, als der Verdrehungswinkel proportional dem verdrehenden Momente M und umgekehrt proportional dem Schubelastizitätsmodul G zu setzen ist, während er im übrigen nur noch von der Gestalt und der Größe des Querschnitts abhängig ist. Man kann diesem Umstande dadurch Ausdruck geben, daß man an Stelle von Gl. (1) allgemeiner

$$\vartheta = \frac{M}{JG} \tag{2}$$

schreibt und unter J die in dem betreffenden Falle einzusetzende Querschnittsfunktion versteht.

Für das Produkt JG gebraucht man häufig die Bezeichnung „Verdrehungssteifigkeit“. Diese ist also sowohl vom Querschnitt als von den elastischen Eigenschaften des Stoffes abhängig. Es ist aber bequem, noch eine andere ähnliche Bezeichnung für die vom Querschnitte allein abhängige Größe J zu haben und ich will sie daher hier den „Drillungswiderstand“ des Querschnitts nennen. Im Falle des kreisförmigen Querschnitts wird demnach der Drillungswiderstand durch das polare Trägheitsmoment angegeben, während er in anderen Fällen erst noch zu ermitteln ist.

Die Bestimmung des Drillungswiderstandes und hiermit auch des Verdrehungswinkels geht nicht nur die Elastizitätstheorie an, sondern sie ist auch für die Technik von erheblicher Bedeutung. Man sollte daher meinen, daß diese Aufgabe wenigstens für alle Fälle, die bei den Anwendungen häufiger vorkommen, entweder eine genaue oder doch wenigstens eine mit genügender Annäherung zutreffende Lösung gefunden haben müßte. Das trifft aber keineswegs zu. Zwar für die einfacheren Querschnittsformen, wie Ellipse, Rechteck, Dreieck, Kreissektor und eine Anzahl anderer hat man genaue

Formeln dafür abgeleitet; aber daneben kommen bei den Anwendungen in der Technik Querschnittsgestalten vor, namentlich bei den Walzeisenträgern, für die es bisher an jeder zuverlässigen Ermittelung des Drillungswiderstandes fehlt. In den technischen Handbüchern findet man zwar Formeln empfohlen, die dafür gelten sollen; aber eine genauere Prüfung lehrt, daß sie keineswegs in allen Fällen, auf die sie angewendet werden sollen, zutreffen, sondern häufig zu ganz falschen Schlüssen führen, wie ich nachher noch nachweisen werde.

Eine praktische Anwendung finden diese Formeln für den Verdrehungswinkel sehr häufig bei den Walzeisen, weil man aus diesen die großen Tragkonstruktionen im Hochbau oder im Aufbau von Krangerüsten und ähnlichen Bauten zusammensetzt. Unter den Walzeisen treten wieder am häufigsten die I-Eisen hervor, weshalb sie bei den folgenden Betrachtungen als Hauptbeispiel ins Auge gefaßt werden sollen.

Bei den Bauten, von denen ich sprach, werden freilich die Walzeisenträger gewöhnlich so angeordnet, daß sie weniger auf Verdrehen als auf Biegen beansprucht werden. Aber nebenher tritt doch noch leicht eine Beanspruchung auf Verdrehen hinzu, die dann stets wegen der geringen Widerstandsfähigkeit der Träger gegen Verdrehen eine sorgfältige Beachtung erfordert. So werden z. B. die gekrümmten Träger, die man zur Unterstützung von vorspringenden Bauteilen wie Balkonen u. dgl. verwendet, stets sowohl auf Biegen als auf Verdrehen beansprucht. Jede eingehendere Berechnung von Trägern dieser Art muß sich daher auf eine Formel für den Verdrehungswinkel stützen.

Für die Berechnung der Walzeisen auf Biegung ist von vornherein gut vorgesorgt. In den Verzeichnissen, die von den Walzwerken über die Querschnitte der von ihnen hergestellten Träger herausgegeben werden, den sogenannten „Profil-Tabellen“, findet man bei jedem Querschnitt, so weit nötig, eine Angabe über die Richtungen der Querschnittshauptachsen und über die auf diese Hauptachsen bezogenen Trägheitsmomente. Die Berechnung auf Biegung gestaltet sich auf dieser Grundlage sehr einfach. Dagegen fehlt bis jetzt jede Angabe, die sich für die Berechnung des Verdrehungswinkels verwenden ließe. Wenn bei jedem Querschnitt außer den Trägheitsmomenten auch der Drillungswiderstand verzeichnet wäre, was sich ohne große Schwierigkeiten durchführen ließe, wäre den Benutzern dieser Tabellen in vielen Fällen sehr gedient. Aber offenbar haben die Ausschüsse, die von den Hüttenleuten und von den Eisenverbrauchern zur Bearbeitung der Profil-Tabellen bei neuen Ausgaben immer wieder eingesetzt wurden, bisher nicht recht gewagt, solche Angaben beizufügen, weil sie sich selbst nicht recht darüber klar waren, wie man den Wert für den Drillungswiderstand ermitteln sollte. In dieser Lücke ist der beste Beweis dafür zu erblicken, daß es recht nötig ist, diese Frage einmal etwas genauer zu behandeln.

Navier, der in der Mitte des vorigen Jahrhunderts eine führende Rolle in der technischen Mechanik spielte, glaubte Gl. (1) mit der Deutung von J_p als polares Trägheitsmoment für beliebige Querschnitte allgemein aufrecht erhalten zu können. Er kam zu diesem Schlusse, daß der Drillungswiderstand stets gleich dem polaren Trägheitsmomente zu setzen sei, indem er von der Annahme ausging, daß die Querschnittsflächen bei der elastischen Formänderung durch Verdrehen stets eben blieben. Aber diese Annahme, die sich bei der Untersuchung der Biegung sehr wohl bewährt hatte, ist bei der Drillung im allgemeinen ganz unrichtig; nur beim kreisförmigen Querschnitt trifft sie tatsächlich zu. Freilich spukt die Formel (1) im Sinne von Navier selbst jetzt noch vereinzelt in technischen Kreisen herum, obschon sie bei der Mehrzahl der Techniker schon vor einem Menschenalter als unrichtig erkannt war.

Den Nachweis für die Fehlerhaftigkeit der Navierschen Theorie der Verdrehung erbrachte de Saint-Venant. Er zeigte, daß sich die Querschnittsflächen bei der Verdrehung im allgemeinen krümmen; er stellte die Differentialgleichung auf, der die gekrümmte Fläche genügen muß, mit der dazu gehörigen Randbedingung, die es bewirkt, daß zu verschiedenen Querschnittsgestalten ganz verschiedene Lösungen gehören und gab für eine größere Zahl von Querschnittsformen die strengen Lösungen des in dieser Weise gefaßten mathematischen Problems an. Daraus folgten auch genaue Formeln für den Verdrehungswinkel ϑ oder, wie man dafür sagen kann, für den Drillungswiderstand J in den von ihm untersuchten Fällen. Man findet eine zusammenhängende Darstellung der Ergebnisse von de Saint-Venant in den von ihm nach dem Tode des ursprünglichen Verfassers in dritter Auflage herausgegebenen Vorlesungen von Navier[1]). In einem über 200 Seiten füllenden Anhange zu dem Paragraphen, in dem Navier die Torsion der Stäbe besprochen hatte, widerlegt de Saint-Venant die darin ausgesprochenen Ansichten und entwickelt die von ihm selbst aufgestellte Theorie der Torsion in großer Ausführlichkeit.

Die Ergebnisse, zu denen de Saint-Venant hierbei gelangte, sind heute allgemein anerkannt. Sie haben sich auch, so weit bekannt, beim Vergleiche mit den Beobachtungen bei Verdrehungsversuchen stets gut bewährt. Auch in der Technik werden die aus den strengen Lösungen von de Saint-Venant abgeleiteten Verdrehungsformeln heute allgemein angewendet.

Aber diese strengen Lösungen der Verdrehungsaufgabe sind nur für eine begrenzte Zahl von Querschnittsformen aufgestellt worden und sie nützen nichts, wenn man mit anderen zu tun bekommt. Abgesehen vom Winkeleisen, das von Herrn Fritz Kötter[2]) behandelt wurde, liegt bisher keine strenge Lösung vor, die sich für die Walzeisenquerschnitte benützen ließe. Diesen Mangel hat schon de Saint-Venant selbst empfunden. Er suchte ihm durch Aufstellen von Näherungsformeln für den Verdrehungswinkel abzuhelfen, die mit einer für die praktischen Anwendungen ausreichenden Genauigkeit für eine große Zahl sehr verschiedener Querschnittsformen brauchbar sein sollten. Nach der ersten der von ihm aufgestellten Näherungsformeln wäre nach der hier gebrauchten Bezeichnungsweise der Drillungswiderstand

---

[1]) Navier, Résumé des leçons, 3ème édition par Barré de Saint-Venant. Paris 1864.

[2]) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1908, S. 935.

$$J = \frac{4\,J_x J_y}{J_p} \tag{3}$$

zu setzen, wenn man unter J_x und J_y die Trägheitsmomente für die in der Querschnittsebene liegenden beiden Hauptachsen versteht. Später hat er aber diese Fermel ausdrücklich wieder verworfen mit der Bemerkung, er habe sich überzeugt, daß sie nur für elliptische Querschnitte verwendbar sei und an ihrer Stelle eine neue empfohlen[1]). Nach dieser neueren Formel soll

$$J = \frac{F^4}{40\,J_p} \tag{4}$$

sein, wobei unter F der Flächeninhalt des Querschnitts zu verstehen ist.

Als de Saint-Venant diese letzte Formel aufstellte, lag seine Lebensarbeit schon fast vollständig hinter ihm und er konnte daher die Formel bereits mit allen von ihm aufgefundenen strengen Lösungen des Torsionsproblems vergleichen, was bei der früheren nicht der Fall war. Dementsprechend ist der Gültigkeitsbereich, innerhalb dessen die Formel noch eine annehmbare Genauigkeit liefert, viel weiter gesteckt, als bei der früheren. Aber in anderen Fällen, für die man damals noch keine besser begründete Lösung kannte, versagt die Formel, wie ich nachher noch zeigen werde, trotzdem vollständig. Es ist daher gefährlich, sich ihrer zu bedienen, wenn man nicht vorher schon weiß, daß der betreffende Querschnitt zu denen gehört, bei denen kein allzu großer Fehler befürchtet zu werden braucht.

Eine besondere Begründung hat de Saint-Venant für die Formel (4) nicht gegeben: er stellt sie einfach als eine Interpolationsformel hin, die in den meisten Fällen gut zutrifft. Man kann jedoch erkennen, wie er dazu gekommen ist. Gegen die von Navier vertretene „alte Theorie" der Torsion, also gegen die Formel (1) hatte er einen jahrzehntelangen Kampf zu führen, um seiner Theorie zur allgemeinen Anerkennung zu verhelfen. Dabei mußte er immer wieder darauf hinweisen,

[1]) Comptes rendus 88, 1879, p. 142.

daß beim rechteckigen oder elliptischen Querschnitt der Drillungswiderstand nicht etwa zunimmt, je länger gestreckt man ihn bei gleichem Flächeninhalt annimmt, wie nach Formel (1) zu erwarten wäre, sondern daß vielmehr umgekehrt, wie schon die einfachsten Beobachtungstatsachen lehren, das Quadrat von allen Rechtecken und der Kreis von allen Ellipsen gleichen Flächeninhalts den größten Drillungswiderstand liefern. Der Gegensatz seiner Theorie gegenüber der alten Theorie wird daher am deutlichsten hervorgehoben, wenn man J umgekehrt proportional mit J_p setzt. Das war in beiden Formeln (3) und (4) geschehen. Die Formel (3) hat er später offenbar nur deshalb aufgegeben, weil sie bei den später von ihm gefundenen strengen Lösungen nicht mehr genügend zutraf. Daß bei gleicher Querschnittsgestalt J mit der Fläche des Querschnitts wachsen muß, ist selbstverständlich und zwar muß, damit die Formel in den Dimensionen zutrifft, die vierte Potenz von F in den Zähler gesetzt werden. Der Zahlenfaktor 40 im Nenner ergab sich ihm als abgerundeter Mittelwert aus verschiedenen, zwischen etwa 38 und 42 liegenden Zahlen, die man beim Vergleich der Formel mit den genauen Lösungen in den verschiedenen Fällen findet. So wäre z. B. beim elliptischen Querschnitt nach der genauen Theorie eigentlich

$$J = \frac{F^4}{4\pi^2 J_p}$$

zu setzen, was aber nahezu mit Gl. (4) übereinstimmt.

Übrigens weist de Saint-Venant in seiner Abhandlung selbst schon darauf hin, daß die Formel (4) nicht immer brauchbar ist. Als Beispiel einer solchen Ausnahme erwähnt er einen Querschnitt von der Gestalt eines Kreissektors mit einem mehr als zwei Rechte betragenden Zentriwinkel, also mit einer einspringenden Ecke. Beim Halbkreis dagegen liefert die Formel noch eine gute Übereinstimmung mit dem dafür bekannten genauen Werte. Daß die Formel auf einen kreisringförmigen Querschnitt, oder mit anderen Worten auf eine hohle Welle nicht angewendet werden darf, hat er ohne Zweifel auch gewußt, wenn er es auch nicht ausdrücklich sagt.

Wenn de Saint-Venant daran gedacht hätte, daß seine Formel (4) später einmal auf solche Querschnittsformen angewendet werden könnte, wie sie bei den dünnwandigen und scharf eingeschnittenen Walzeisen vorkommen, die man nach den heutigen Walzverfahren herzustellen vermag, würde er sich wahrscheinlich etwas vorsichtiger bei der Empfehlung der Formel für den praktischen Gebrauch ausgedrückt und eine vorhergehende genauere Prüfung einer solchen Anwendung als nötig bezeichnet haben.

In der praktischen Technik stützt man sich heute bei der Berechnung des Verdrehungswinkels — von vereinzelten Ausnahmen vielleicht abgesehen — offenbar fast ausschließlich auf die Arbeiten von de Saint-Venant, ohne auf die grundsätzlich davon abweichenden neueren Arbeiten, die übrigens zum Teil auch schon viele Jahre zurückliegen, irgend wie Rücksicht zu nehmen. Das geht z. B. sehr deutlich aus der Behandlung hervor, die der Abschnitt über die Verdrehungselastizität in dem überall verbreiteten und viel gebrauchten Nachschlagewerk „Hütte, des Ingenieurs Taschenbuch“ gefunden hat. Auf dieses Buch, das schon in 22. Auflage erschienen ist, beziehen sich die Ingenieure gern, wenn sie bei ihren Berechnungen eine Quelle anführen wollen und eine Formel, die darin nicht aufgenommen ist, wird von vornherein mit Mißtrauen betrachtet. In der neuesten, im Jahre 1915 erschienenen Auflage findet man die in der Technik heute gebrauchten Formeln für den Verdrehungswinkel in Bd. I, S. 570 zusammengestellt. Außer den genauen Formeln für die einfacheren Querschnitte oder den daraus für diese Fälle abgeleiteten, gut stimmenden Näherungsformeln findet man nur noch als allgemeiner gültig die Formeln (3) und (4) angegeben. In der „Hütte“ ist jedoch Formel (3) noch mit einem Berichtigungskoeffizienten versehen, durch dessen passende Wahl die Anwendbarkeit der Formel natürlich erweitert werden kann. Da dieser Koeffizient aber nur für die einfachsten Fälle angegeben ist (für die ohnehin schon gute Lösungen bekannt sind), scheidet diese Formel für alle anderen Fälle aus; sie würde auch ohne genauere

Kenntnis des Berichtigungsfaktors, wie schon de Saint-Venant selbst bemerkt hat, unter Umständen zu ganz falschen Ergebnissen führen.

Einem Praktiker, der für einen Walzeisenträger den Verdrehungswinkel berechnen will und der in der „Hütte“ nach einer Formel sucht, auf die er sich dabei stützen kann, bleibt daher gar keine andere Wahl als die Anwendung der neueren Saint-Venantschen Formel (4). Man wird daher annehmen dürfen, daß in der Technik die Berechnung in solchen Fällen fast ausnahmslos nach dieser Formel vorgenommen wird. Ich muß dies näher besprechen, weil ich diese Berechnungsgrundlage hier als trügerisch nachweisen und davor warnen will. Deshalb führe ich auch noch an, daß in der „Hütte“ zur Empfehlung der Formel gesagt wird, daß sie näherungsweise auch für stark vom Rechteck oder Kreise abweichende Querschnitte, wie z. B. I-Profile gültig sei, wobei zur Abschätzung der dabei zu erwartenden Fehler angegeben wird, daß der genauere Wert des eigentlich an die Stelle der Zahl 40 zu setzenden Koeffizienten je nach der Querschnittsform nur zwischen 38,5 und 42,68 schwanke. Wer dies liest und sich darauf verläßt, wird kein Bedenken tragen, die Formel (4) auf alle in der Technik vorkommenden Walzeisenprofile (selbstverständlich mit Ausnahme der Hohlquerschnitte, wie der Röhren u. s. f.) anzuwenden, falls er sich mit einer Genauigkeit von etwa 5 oder gar von 10 vom Hundert begnügen kann, die bei Festigkeitsberechnungen für praktische Zwecke häufig vollständig ausreicht.

Nun stimmen die Angaben der „Hütte“ in der Tat mit denen von de Saint-Venant ziemlich überein. Es wird freilich nicht gesagt, daß dieser auch von Ausnahmen gesprochen hat und daß die zur Beurteilung der Genauigkeit angeführten Zahlen nur für Querschnittsformen gültig sind, die keineswegs mit I-Profilen näherungsweise zusammenfallen. Aber man kann den Herausgebern der „Hütte“ trotzdem kaum einen Vorwurf daraus machen, daß sie diese Vorbehalte unterdrückt haben, wenn man die Äußerung liest, mit der schließlich de Saint-

Venant seine Formel für den praktischen Gebrauch empfohlen hat. Er sagt nämlich: „On voit donc qu'en se bornant aux sections de prismes pouvant être employés et même de prismes plats ou de rails on ne se trompera jamais beaucoup en prenant généralement pour le moment de torsion . . .", worauf die der Gl. (4) entsprechende Formel folgt.

Daß man sich in der Technik auf eine so gewichtige Empfehlung, die von dem erfolgreichsten Bearbeiter, ja von dem Schöpfer der heutigen Theorie der Torsion herrührt, gern verläßt und auf Stimmen, die sich dagegen wenden, nicht leicht hört, ist durchaus begreiflich. Nur durch die Vorführung von ganz unzweideutigen Versuchsergebnissen würde man den Glauben an die Gültigkeit der Saint-Venantschen Formel innerhalb der jetzt angenommenen Grenzen in der Technik vielleicht erschüttern können. Aber selbst dies ist noch zweifelhaft, da man nicht alle Fälle, um die es sich dabei handelt, prüfen kann und weil auch die Bedenken, die sich gegen die Beweiskraft von Versuchen mit Rücksicht auf die gewählten Versuchsbedingungen stets erheben lassen, nur schwer widerlegt werden können. Um die Formel von de Saint-Venant wirksam bekämpfen zu können, muß man sich daher schon der Waffen von de Saint-Venant selbst bedienen, d. h. man muß auf theoretischem Wege den Nachweis führen, daß sie innerhalb der jetzt angenommenen Gültigkeitsgrenzen zu ganz falschen Ergebnissen führen kann. Erst wenn ein solcher Nachweis vorliegt, gegen den von berufener Seite kein Widerspruch erhoben wird, gewinnt ein Versuch, der diese Kritik bestätigt, das nötige Schwergewicht. Aus diesem Grunde wende ich mich mit dieser Abhandlung nicht an die technischen Kreise, die ich erst später vor der unvorsichtigen Anwendung der Formel (4) zu warnen beabsichtige, sondern zunächst an die Mathematiker und an die Physiker, die sich mit Fragen der Elastizitätslehre zu beschäftigen pflegen und denen es weder, wie den praktischen Ingenieuren, an der Zeit, noch auch an der Befähigung fehlt, eine genauere Prüfung vorzunehmen und sich selbst ein Urteil über die Frage zu bilden.

Schon jetzt möchte ich indessen bemerken, daß ich mit der Ausführung von Verdrehungsversuchen mit Walzeisen schon vor längerer Zeit begonnen habe, um die Sache auch von dieser Seite her zu beleuchten. Als aber meine beiden Assistenten zum Heer eingezogen und auch noch andere Erschwerungen der Versuchsausführung durch den Krieg herbeigeführt wurden, entschloß ich mich, die Weiterführung dieser Versuche bis nach der Beendigung des Krieges zurückzustellen. Ich behalte mir vor, in späterer Zeit darüber an anderer Stelle zu berichten. Einstweilen aber möchte ich nicht länger zögern, hier die theoretischen Einwendungen zu begründen, die sich gegen Formel (4) erheben lassen und zugleich eine andere einfache Formel vorzuschlagen. Diese Formel bezieht sich freilich nur auf dünnwandige Walzeisenquerschnitte, verspricht aber für diese auch wirklich zuverlässige Ergebnisse.

Es wird sich nämlich zeigen, daß man für gewisse Grenzfälle, denen die Querschnitte der Walzeisenträger zum großen Teile wenigstens sehr nahe kommen, eine strenge Lösung des Torsionsproblems angeben kann. Und wenn man findet, daß die Formel (4) in diesen Grenzfällen vollständig unrichtige Ergebnisse liefert, ist damit genügend gezeigt, daß sie auch für die ganz ähnlichen, wirklich ausgeführten Profile unzuverlässig ist. Zugleich ist damit auch der Weg gewiesen, um eine besser brauchbare Formel aufzustellen. Übrigens liegen die Vorarbeiten zu einem solchen Beginnen schon seit sehr langer Zeit bereit; sie wurden bisher nur nicht genügend beachtet und es bedarf für mich jetzt nur noch eines ganz kleinen Schrittes, um sie nutzbar zu machen.

Der erste Anfang dazu ist in einer Bemerkung zu erblicken, die von den großen Physikern W. Thomson (Lord Kelvin) und Tait herrührt[1]). Später hat man den wichtigen Gedanken, der darin ausgesprochen wurde, ein wenig anders gefaßt, so daß er noch anschaulicher wurde. Hiernach kommt die strenge

---

[1]) W. Thomson und P. G. Tait, Handbuch der theoretischen Physik. Deutsche Übersetzung von Helmholtz und Wertheim, 1. Band, 2. Teil. Braunschweig 1874, S. 228.

Lösung des Torsionsproblems für einen gegebenen Stabquerschnitt auf die Ermittelung einer ebenen Flüssigkeitsbewegung hinaus, die ganz innerhalb der Querschnittsfläche verläuft, also am Rande überall der Umrißlinie folgt und deren Wirbelstärke über die ganze Fläche den gleichen Wert hat. Die Stromlinien dieser zur Abbildung verwendeten Flüssigkeitsbewegung fallen zusammen mit den Spannungslinien, die überall in den Richtungen der im Querschnitt übertragenen Schubspannungen fortschreiten und die Geschwindigkeit der Strömung ist proportional mit der Schubspannung, die an der gleichen Stelle des Querschnitts durch die Verdrehung des Stabs hervorgerufen wird. Dieses „hydrodynamische Gleichnis", wie ich es nannte, ist in den Kreisen der Physiker wohl ziemlich allgemein bekannt geworden; ich selbst habe es mir angelegen sein lassen, in meinem Lehrbuche[1]) auf das sich daraus ergebende Verfahren zur näherungsweisen Lösung der Verdrehungsaufgabe eindringlich hinzuweisen und es an einigen Beispielen zu erläutern. Übrigens war auch schon von den ersten Urhebern des Verfahrens, also von Thomson und Tait selbst, ausdrücklich der Nutzen hervorgehoben worden, der sich daraus für die näherungsweise Berechnung der Torsionssteifigkeit ziehen ließe, wenn auch kein unmittelbarer Gebrauch davon gemacht wurde.

Einen erheblichen Schritt weiter in der gleichen Richtung hat dann L. Prandtl[2]) gemacht. Er hat nämlich noch einen anderen Vergleich gezogen, der sich ebenfalls zur Ableitung von guten Näherungsformeln für den Verdrehungswinkel, namentlich für solche Querschnitte, wie sie bei den Walzeisen vorkommen, sehr gut eignet. Dabei ist dieser Vergleich vielleicht noch anschaulicher als das hydrodynamische Gleichnis

---

[1]) A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, 3. Bd., Festigkeitslehre, 5. Aufl., Leipzig 1914, S. 399. In etwas kürzerer Fassung auch schon in der 1. Auflage vom Jahre 1897.

[2]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 13, 1904, S. 31. Eine Wiedergabe des wesentlichen Inhalts der Prandtlschen Abhandlung findet man auch in meinem Lehrbuche, Bd. 5, Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie, Leipzig 1907, S. 173.

und jedenfalls hat er den Vorzug, einen Weg anzugeben, auf dem das Torsionsproblem auch durch einen einfachen Versuch gelöst werden kann.

Denkt man sich nämlich in eine dünne Wand ein Loch geschnitten von der Gestalt des Stabquerschnitts, für den man die Verdrehungsaufgabe lösen will und spannt man über das Loch eine Seifenhaut aus, auf die von der einen Seite her ein Luftüberdruck wirkt, so baucht sich die Haut aus und die Fläche, nach der dies geschieht, steht unter der Voraussetzung, daß die Ausbauchung klein bleibt, in einem einfachen Zusammenhange mit der Stabverdrehung. Bezeichnet man mit Prandtl den Raum, der zwischen der ausgebauchten Haut und der ursprünglichen Ebene liegt, als einen Hügel, so geben, wie man leicht beweisen kann, die Linien gleicher Höhe, die man auf diesem Hügel ziehen kann, die Gestalt der Spannungslinien im Stabquerschnitt bei der Verdrehung an. Ferner ist die Größe der Schubspannung an jeder Stelle proportional mit dem Gefäll des Hügels an der entsprechenden Stelle. Und endlich läßt sich noch beweisen, daß das Volumen des Hügels für ein gegebenes Verhältnis zwischen der Spannung der Seifenhaut und dem Luftüberdruck proportional ist mit dem Verdrehungswiderstand J des Stabquerschnitts oder mit anderen Worten proportional der Verdrehungssteifigkeit des Stabs. Gerade der zuletzt angeführte Satz von Prandtl eignet sich sehr gut zur Entscheidung der Frage, mit der wir uns hier beschäftigen.

Dann muß ich noch eine andere Abhandlung besprechen, die schon um 20 Jahre zurückliegt und die ebenfalls, wenn sie auch von ganz anderen Gesichtspunkten ausgeht, sehr wohl geeignet ist, als Grundlage für die Ableitung eines guten Näherungswertes für den Drillungswiderstand von Walzeisenprofilen zu dienen. Sie wurde von Rudolph Bredt unter dem Titel „Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität" in der verbreitetsten technischen Zeitschrift[1]) veröffentlicht, hat aber bisher auch in technischen Kreisen offenbar gar keine Beach-

[1]) Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, 1896, S. 785.

tung gefunden, obschon sie ohne Zweifel zu den besten Arbeiten gehört, die über diesen Gegenstand jemals veröffentlicht wurden. Der Verfasser war damals Ingenieur einer Maschinenfabrik in Wetter a. d. Ruhr. Ich habe seiner Zeit aus Anlaß seiner Veröffentlichung mit ihm in Briefwechsel gestanden; inzwischen ist er, wie ich hörte, gestorben.

Diese Arbeit ist sehr merkwürdig; sie ist ein gewiß sehr seltenes Beispiel dafür, wie ein scharfsinniger Geist trotz geringer theoretischer Schulung, ohne jede eingehendere Kenntnis der wichtigsten vorausgehenden Arbeiten auf einem immerhin nicht ganz einfachen Gebiete die Wahrheit einfach erschaut und zwar über die Grenzen hinaus, bis zu denen andere vor ihm schon gekommen waren, ohne daß er davon wußte. Verfehlt ist an der Arbeit nur die Kritik, die der Titel ankündigt. Er tadelt darin die Mathematiker, weil sie die Sätze, die er ableitet und für neu hält, nicht selbst schon gefunden und beachtet hätten und meint deshalb, daß ihre Lösungen falsch sein müßten. Aber die Arbeiten von de Saint-Venant, gegen die sich diese Bemerkungen richten, waren Bredt gar nicht näher bekannt; er wußte von ihnen nur aus einem kurzen Auszuge in dem Buche von Grashof und man muß zugeben, daß ihm dessen Fassung leicht zu einem Mißverständnisse Anlaß geben konnte. So kam es, daß die Kritik von Bredt auf einer falschen Voraussetzung über den Umfang und den genaueren Inhalt der früheren Leistungen auf diesem Gebiete aufgebaut und daher ganz unberechtigt war. Um so bemerkenswerter und zutreffender sind dagegen seine übrigen Ausführungen, die noch um ein gutes Stück über die Ergebnisse von de Saint-Venant hinausreichen.

Für den Leser, der das „hydrodynamische Gleichnis“ bereits kennt und außerdem auch mit dem Satze von Stokes bekannt ist, von denen beiden Bredt aber natürlich nichts wußte, kann man den Satz, den er ableitet und dann zum Ausgangspunkt aller weiteren Erörterungen macht, mit wenigen Worten erklären und auch beweisen. Nach dem Satze von Stokes ist das Linienintegral des Vektorfeldes, als das man die Verteilung der Schubkräfte über die Querschnittsfläche des verwundenen Stabs ansehen kann, für jede geschlossene Kurve, die man im Querschnitt ziehen mag, gleich dem Oberflächenintegral des Wirbels dieses Vektorfeldes über die von der Kurve umschlossene Fläche. Dieser Wirbel ist aber im vorliegenden Falle über die ganze Fläche von gleicher Größe und beträgt für die Flächeneinheit $2G\vartheta$. Das Linienintegral der Schubspannung kann daher gleich $2FG\vartheta$ gesetzt werden, wenn man unter F den von der beliebig gewählten Kurve umschlossenen Teil des Flächeninhalts des Querschnitts versteht.

Bredt gelangt zu diesem Satze durch die unmittelbare geometrische Anschauung, die sich an die krumme Fläche knüpft, in die der vorher ebene Stabquerschnitt bei der Drillung übergeht. Er versteht es freilich nicht recht, seinen Gedankengang klar zu legen. Ich habe es schwer gefunden, ihm zu folgen und ich glaube kaum, daß mich die Bredtsche Beweisführung von der Richtigkeit seiner Schlüsse überzeugt hätte, wenn mir der Satz nebst den unmittelbar daran geknüpften Folgerungen nicht schon von früher her in der Form des Stokesschen Satzes geläufig gewesen wäre. Aber richtig sind seine Ergebnisse, wie daraus schon hervorgeht, zweifellos.

Indem Bredt den Ausgangssatz auf ein unendlich kleines Rechteck anwendet, findet er die Differentialgleichung, die ausdrückt, daß der Wirbel des Vektorfeldes gleich $2G\vartheta$ sein muß und hier betont er, daß dieser Satz, dessen Wichtigkeit er wohl erkannte, früher übersehen worden wäre, was aber natürlich nicht zutrifft. Auf die Möglichkeit, die Aufgabe auf eine Flüssigkeitsströmung zurückzuführen, verfällt Bredt zwar nicht, wohl aber zeichnet er mit sicherem Verständnis die Spannungslinien ihrem allgemeinen Verlaufe nach in die von ihm behandelten Querschnitte ein, so daß man beim ersten Anblick das von anderen Arbeiten her bekannte Strombild vor sich zu haben glaubt.

Als Techniker dachte Bredt natürlich von vornherein auch an die Walzeisenträger und zwar namentlich an die I-Träger. Was er über diese sagt, ist wohl bis heute noch nicht übertroffen worden. Besonders seine Bemerkungen über die Stelle, an der die größte Beanspruchung auftritt, bei denen er sich gegen eine herrschende irrtümliche Ansicht wendet, sind vollständig zutreffend und beweisen, wie tief er die ganze Frage erfaßt und durchdacht hat. Hierbei muß man bemerken, daß vor 20 Jahren die neueren Walzverfahren noch nicht bekannt waren, die inzwischen zu dünnwandigen, an den Flanschen breiter ausladenden und weniger abgeschrägten Querschnittsprofilen geführt haben. Sonst würde Bredt wohl damals schon für diese Profile zu ungefähr denselben Schlüssen gelangt sein, die ich jetzt selbst gezogen habe; die Grundlagen dazu liefert seine Arbeit wenigstens ohne weiteres, also ohne daß man eine der anderen vorher besprochenen Vorarbeiten daneben auch noch zu Rat ziehen müßte.

Zu der Formel für den Verdrehungswinkel eines I-Trägers gelangt Bredt, indem er den von ihm aufgestellten Satz, der dem Satze von Stokes entspricht, auf den ganzen Umfang U und die davon eingeschlossene Fläche des I-Profils anwendet. Das über den Umfang erstreckte Linienintegral setzt er gleich dem Umfange mal dem mittleren Werte der längs des Umfangs auftretenden Schubspannung, den er dann noch mit der in der Mitte des Stegrands auftretenden Spannung vergleicht. So erhält er die Formel

$$\vartheta = c\,\frac{UM}{eF^2G}, \tag{5}$$

worin c ein Zahlenfaktor ist, dessen Wert von der Gestalt des Umrisses abhängt. Unter e ist die halbe Stegdicke des Trägers zu verstehen. Der Drillungswiderstand ist daher nach Bredt

$$J_{Br} = \frac{eF^2}{cU} \tag{6}$$

zu setzen. Da der Faktor c nicht näher ermittelt ist, kann man die Formel freilich nicht unmittelbar verwenden. Indessen läßt sich in dem Grenzfalle, von dem sofort die Rede sein wird, diese Ermittelung leicht nachholen, so daß man auch auf diesem Wege die dafür nachher aufzustellende Formel ableiten kann.

Ich komme jetzt zu der Zusatzbemerkung, die ich den hier aufgeführten älteren Arbeiten beizufügen habe, um zu der Formel zu gelangen, die ich selbst für die Ermittelung des Drillungswiderstands eines Walzträgerquerschnitts empfehlen möchte. Man findet nämlich, daß sich die Walzeisenquerschnitte meist annähernd und oft ziemlich genau aus einigen schmalen Rechtecken zusammensetzen, wobei die an den Zusammenschlußstellen je zweier Rechtecken entstehenden einspringenden Ecken mit Ausrundungen versehen sind. Diese Ausrundungen sind wegen des Herstellungsverfahrens der Träger erforderlich; zugleich verhüten sie auch, daß die in der Ecke bei der Verdrehung eintretende Spannungserhöhung zu groß ausfällt. Für die Größe des Verdrehungswinkels sind sie bedeutungslos, so daß sie hier unbeachtet bleiben können.

Die in den letzten Zeiten ausgebildeten Walzverfahren[1]) gestatten, Träger herzustellen, deren Querschnitte nicht nur mit guter Annäherung die aus Rechtecken zusammengesetzte Gestalt zeigen, sondern bei denen auch das Verhältnis zwischen Langseite und Schmalseite dieser Rechtecke erheblich größer sein kann, als sich dies früher erreichen ließ. Von dieser Möglichkeit macht man auch immer mehr Gebrauch, da solche Träger aus Gründen, auf die ich jetzt nicht einzugehen brauche, als vorteilhaft zu betrachten sind.

Unter diesen Umständen liegt es sehr nahe, bei der Ableitung einer Formel für den Verdrehungswinkel solcher Walzeisen von der Voraussetzung auszugehen, daß für jedes der Rechtecke die Schmalseite näherungsweise als unendlich klein gegenüber der Langseite anzusehen sei. Das ist die Grundlage, auf der die Formel beruht, die ich hier aufstellen will und man sieht daraus schon, daß ihre Anwendung ausschließlich auf solche Querschnitte beschränkt ist, bei denen man die Voraussetzung gelten lassen kann. Wie weit man darin gehen darf, ermittelt man am besten auf dem Wege des Versuchs

[1]) Vgl. R. Sonntag, Breitflanschige und parallelflanschige I-Eisen. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, 1916 (in verschiedenen Fortsetzungen).

und dazu soll die Versuchsreihe dienen, mit der ich bereits begonnen habe und die ich später fortsetzen will.

Im Grenzfalle der unendlich schmalen Rechtecke kann man im Sinne der strengen Elastizitätstheorie den Satz aufstellen, daß der Drillungswiderstand eines aus den Rechtecken zusammengesetzten (einfach zusammenhängenden) Querschnitts gleich ist der Summe der Drillungswiderstände der einzeln für sich genommenen Rechtecke.

Den Beweis für diese Behauptung kann man etwa nach dem Vorgange von Bredt führen, indem man das Linienintegral der Schubspannung sowohl für den ganzen Querschnitt als für die einzelnen Teilstücke bildet und die erhaltenen Werte miteinander vergleicht oder auch mit Benützung der von Prandtl eingeführten Darstellung des Drillungswiderstandes durch den Rauminhalt des von der Seifenhaut gebildeten Hügels. Auch zu diesem Zwecke zerlegt man die Querschnittsflächen durch Schnitte in die einzelnen Rechtecke, womit auch der Hügel in einzelne Teilhügel zerfällt. Offenbar ist dann die Summe der Rauminhalte der Teilhügel etwas kleiner als der Hügel über der ganzen Querschnittsfläche, weil sich an den Schnittstellen eine Talfurche ausbildet, die bis zum Hügelfuße hinabreicht, während sich vorher der Hügel über der Grenzlinie ununterbrochen fortsetzte. Aber bei den Größenverhältnissen der Schmalseiten zu den Langseiten der Rechtecke, die wir hier voraussetzen, macht der Unterschied nur einen kleinen Bruchteil des ganzen Hügelinhalts aus, der im Grenzfalle vernachlässigt werden kann.

Es möge übrigens noch ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß sich diese Betrachtung nur auf einfach zusammenhängende Querschnittsflächen bezieht, daß sie also nicht etwa auf Röhren u. dgl. angewendet werden kann. Bei mehrfach zusammenhängenden Querschnittsflächen erfährt der Hügel durch einen Schnitt nicht nur eine rein örtliche Störung, die im Grenzfalle vernachlässigt werden kann, sondern er wird dadurch seiner ganzen Erstreckung nach vollständig verändert, womit der Rauminhalt bedeutend, ja sogar auf einen kleinen

Bruchteil des früheren Wertes herabgesetzt wird. Auch hierüber gibt die von Prandtl gegebene Darstellung in sehr anschaulicher Weise Auskunft, worauf ich hier verweisen kann.

Bezeichnet man die Langseite eines Rechtecks mit l und die Schmalseite oder Dicke mit d, so geht für den Grenzfall $l:d = \infty$ die von de Saint-Venant für den rechteckigen Querschnitt aufgestellte genaue Formel für den Verdrehungswinkel über in

$$\vartheta = \frac{3\,M}{d^3 l G}. \tag{7}$$

Man kann dies etwa in Band V meines Lehrbuchs mit dem Untertitel: „Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie“, § 26, S. 156 (Leipzig bei Teubner 1907) nachlesen. Der Drillungswiderstand für ein unendlich schmales Rechteck ist daher

$$J = \frac{d^3 l}{3} \tag{8}$$

zu setzen, entsprechend zugleich dem Rauminhalt des Prandtlschen Hügels für den Grenzfall. Nach dem vorher aufgestellten Satze findet man demnach den Drillungswiderstand für alle in der hier angenommenen Weise zusammengesetzten Walzeisenprofile nach der Formel

$$J = \tfrac{1}{3} \Sigma d^3 l, \tag{9}$$

wobei sich die Summierung über alle einzelnen Rechtecke zu erstrecken hat. Anstatt Gl. (9) kann man auch unmittelbar die Formel für den Verdrehungswinkel

$$\vartheta = \frac{3\,M}{G \Sigma d^3 l} \tag{10}$$

anschreiben. Bei allen sehr dünnstegigen und breitflanschigen Trägern der neueren Art wird man sie ohne weiteren Beisatz verwenden können. Sind diese Voraussetzungen aber nicht genügend erfüllt, so wird man ihr einen aus Versuchsergebnissen abzuleitenden Berichtigungsfaktor ζ beigeben müssen, so daß sie in der Gestalt

$$\vartheta = \zeta \cdot \frac{3M}{G \Sigma d^3 l} \tag{11}$$

erscheint. Der Faktor ζ wird jedenfalls ein echter Bruch sein, der sich der Einheit um so mehr nähert, je schlanker das Profil in allen seinen Teilen erscheint.

Wir sind jetzt auch in den Stand gesetzt, die Brauchbarkeit der Näherungsformel (4) von de Saint-Venant für Walzeisenprofile zu prüfen. Dazu ist es nämlich nicht nötig, die Versuchsergebnisse abzuwarten, aus denen sich der Koeffizient ζ für die verschiedenen wirklich ausgeführten Walzeisenprofile ergeben wird. Denn die Formel (4) beansprucht, sofern man sie überhaupt auf I-Profile und ähnliche Walzeisenprofile anwendet, gleichmäßige Gültigkeit für alle Größenverhältnisse, die bei diesen vorkommen, ohne daß durch irgend eine Anwendungsvorschrift etwa darauf hingewiesen würde, unter welchen Umständen eine größere oder geringere Genauigkeit von ihr zu erwarten wäre. Es genügt daher, wenn man nachweisen kann, daß sie im Grenzfalle der unendlich schmalen Rechtecke, für den wir eine im Sinne der mathematischen Elastizitätstheorie strenge Lösung besitzen, zu erheblichen Fehlern führt, um sie überhaupt als trügerisch zu erkennen.

Zu diesem Zwecke betrachte ich zunächst einen Stab von kreuzförmigem Querschnitte, bei dem man durch Anwendung von Gl. (4) zu einem besonders weit von dem richtigen Werte abweichenden Drillungswiderstande geführt wird. Der Querschnitt bestehe also jetzt aus zwei schmalen Rechtecken, die sich in der Mitte kreuzen, so daß er wie ein Pluszeichen $+$ aussieht. Nach unserer Formel (9) ist der Drillungswiderstand doppelt so groß, als für eins der beiden Rechtecke, aus denen man sich den Querschnitt gebildet denken kann. Dagegen wird nach Formel (4), wie man sofort sieht, der Drillungswiderstand für den zusammengesetzten Querschnitt achtmal so groß gefunden, als für jedes der beiden Rechtecke. In diesem Falle ist also die Unbrauchbarkeit der Saint-Venantschen Näherungsformel augenscheinlich nachgewiesen, da sie den Drillungswiderstand auf das Vierfache des richtigen Wertes überschätzt.

Man braucht nur an den Prandtlschen Hügel zu denken, um sich darüber Rechenschaft zu geben, daß die bedeutende Abweichung nicht etwa zum größeren Teile darauf zurückgeführt werden kann, daß das Verhältnis $l:d$ bei den wirklich ausgeführten Profilen nicht gleich ∞, sondern vielleicht gleich 10 oder so ähnlich ist. Auch bei diesen Größenverhältnissen wird vielmehr der Widerspruch ohne Zweifel zum großen Teile noch bestehen bleiben.

Für ein Flacheisen, also für ein einzelnes schmales Rechteck, erhält man nach Gl. (4)

$$J = \frac{12}{40} d^3 l,$$

was mit Gl. (8) noch hinlänglich übereinstimmt. Das war natürlich nicht anders zu erwarten, da de Saint-Venant den Fall des einfach rechteckigen Querschnitts, für den er die genaue Lösung schon lange vorher abgeleitet hatte, schon selbst zur Prüfung der Genauigkeit seiner Näherungsformel verwenden konnte und ihn mit dazu benützt hat, um den Zahlenfaktor 40 festzusetzen. Er würde die Näherungsformel jedenfalls gar nicht veröffentlicht haben, wenn sie schon in diesem einfachen Falle versagt hätte.

Bei einem Winkeleisen, also bei einem Querschnitt, der aus zwei gleichen schmalen Rechtecken gebildet wird, die in einer Ecke rechtwinklig zusammenstoßen, erhält man nach Gl. (9)

$$J = \tfrac{2}{3} d^3 l = 0{,}67\, d^3 l,$$

während man nach Formel (4) nach einfacher Ausrechnung

$$J_{Ven} = 0{,}96\, d^3 l$$

findet. In diesem Falle ist also der Widerspruch zwar nicht mehr so groß, wie beim kreuzförmigen Querschnitt, aber doch noch viel zu groß, als daß man den Fehler hinnehmen könnte.

Endlich möge noch der besonders wichtige I-förmige Querschnitt etwas näher betrachtet werden. Bei ihm sei die Höhe des Stegs (also des mittleren Querschnittsteiles) jetzt mit h bezeichnet und die Stegdicke mit d_1; ferner die Breite der Flanschen mit b und ihre Dicke mit d_2. Dabei sind d_1 und d_2 von gleicher Größenordnung und beide sollen als unendlich klein angesehen werden gegenüber h und b. Nach Gl. (9) hat man dann für den Drillungswiderstand

$$J = \tfrac{1}{3}(d_1^3 h + 2 d_2^3 b). \tag{12}$$

Hiermit ist der aus der Näherungsformel (4) folgende Wert

$$J_{Ven} = \frac{12}{40} \frac{(d_1 h + 2 d_2 b)^4}{d_1 h^3 + 2 d_2 b^3 + 6 d_2 b h^2} \tag{13}$$

zu vergleichen. Unter Voraussetzung eines breitflanschigen Trägers kann man ungefähr $b = h$ und $d_2 = 2 d_1$ annehmen. Mit diesen Verhältniszahlen liefern die vorigen Formeln

$$J = \tfrac{17}{3} d_1^3 h = 5{,}67\, d_1^3 h$$
$$J_{Ven} = 11{,}03\, d_1^3 h.$$

Der Drillungswiderstand eines solchen Trägers wird demnach unter Zugrundelegung von Formel (4) auf fast das Doppelte überschätzt. Das gilt aber, wie wohl zu beachten ist, nur bei den angenommenen Größenverhältnissen, die den breitflanschigen Träger kennzeichnen. Setzt man dagegen, ohne sonst etwas zu ändern, $b = \frac{1}{2} h$, wie es ungefähr bei den älteren Normalprofilen zutrifft, so erhält man nach den Gleichungen (12) und (13)

$$J = 3\, d_1^3 h \quad \text{und} \quad J_{Ven} = 3{,}24\, d_1^3 h$$

d. h. die Saint-Venantsche Näherungsformel liefert unter diesen Umständen einen immerhin noch annehmbaren Wert. Daher kann es nicht überraschen, daß bei Verdrehungsversuchen, die mit I-Trägern vom Normalprofil gelegentlich an verschiedenen Stellen ausgeführt wurden, im allgemeinen hinreichende Übereinstimmung mit der Saint-Venantschen Formel beobachtet worden zu sein scheint. Mit breitflanschigen Trägern scheint man einen solchen Versuch noch nicht vorgenommen zu haben. — Man sieht nun auch deutlich die Gefahr, die die Anwendung der Formel mit sich bringt. Will man die Verdrehungssteifigkeit von breitflanschigen Trägern mit der von Normalprofil-trägern auf Grund der Formel (4) vergleichen, unter der hierbei selbstverständlich erscheinenden Annahme, daß sie in beiden Fällen ungefähr gleich gut zutreffen dürfte, so wird man zu ganz falschen Schlüssen geführt.

Hiermit ist das, was ich über den Verdrehungswinkel sagen wollte, erledigt. Aber ich möchte diese Abhandlung doch nicht schließen, ohne auf die andere Seite der Verdrehungslehre noch mit einigen Bemerkungen einzugehen. Diese andere Seite besteht in der Behandlung der Frage, an welcher Stelle des Querschnitts die größte Schubspannung $\tau_{\max}$ auftritt und ferner, in welchem Zusammenhange $\tau_{\max}$ mit dem verdrehenden Momente M steht. Auf die zahlreichen genauen oder angenäherten Lösungen, die man dafür bei den verschiedenen Querschnitten gefunden hat, brauche ich hier nicht einzugehen; es genügt, im Zusammenhange mit den vorhergehenden Betrachtungen die Beantwortung der Frage für den Grenzfall des aus schmalen Rechtecken zusammengesetzten Walzeisenquerschnitts zu versuchen.

Allgemein gesagt, kann jede Lösung dieser Spannungsaufgabe für irgend einen Querschnitt in der Form

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W} \tag{14}$$

angeschrieben werden, in der W eine nur von der Gestalt und der Größe des Querschnitts abhängige Größe bedeutet, von der man beim Abzählen der Dimensionen erkennt, daß sie eine Länge zur dritten Potenz darstellt. Diese Formel stimmt überein mit der gewöhnlichen Biegungsformel, nach der man die durch ein Moment M hervorgebrachten Biegungsspannungen berechnet. Die im Falle der Biegung auftretende Größe W wird das Widerstandsmoment des Querschnitts genannt. Ich glaube, daß kein Bedenken dagegen besteht, diese Bezeichnung auch auf den Fall der Drehung zu übernehmen: natürlich mit dem Zusatze „Widerstandsmoment gegen Drehen“. Für die praktischen Berechnungen würde es eine große Erleichterung bedeuten, wenn in den Profiltabellen solcher Walzeisenträger, die öfters auch einmal auf Verdrehen beansprucht werden können, dieses Widerstandsmoment ebenso angegeben wäre, wie das gegen Biegen. Diese Ergänzung wäre ebenso wichtig, wie die Beifügung des „Drillungswiderstandes“, die ich vorher schon in Anregung gebracht habe. Als Vorarbeit für eine solche Ermittelung werden die nachfolgenden Bemerkungen immerhin dienen können, wenn sie auch keinen Anspruch darauf erheben, den Gegenstand vollständig erledigen zu wollen.

Vorher machte ich schon von der Überlegung Gebrauch, daß der Prandtlsche Spannungshügel, dessen Höhenlinien die Gestalt der Spannungslinien angeben und dessen Gefäll überall mit der Größe der Spannung proportional ist, keine großen Veränderungen erfahren kann, wenn er im Grenzfalle der schmalen Rechtecke durch Trennungslinien in Teilhügel über den einzelnen Rechtecken zerlegt wird. Nur einen Vorbehalt muß man bei dieser Aussage machen. An den einspringenden Ecken nämlich hat der Hügel, wenn keine genügende Ausrundung vorgenommen ist, ein weit größeres Gefäll, als jeder der Teilhügel, die nach der Trennung des Querschnitts in seine Bestandteile dort zusammenstoßen. Es kann dann leicht das größte Gefäll sein, das überhaupt an irgend einer Stelle des ganzen Querschnittsumfangs vorkommt. Aber die Spannung τ_{max}, die ihm entspricht, hat für die Bruchgefahr, die man abschätzen will, nicht dieselbe Bedeutung, als wenn sie in derselben Größe an einer anderen Stelle vorkäme.

Sollte nämlich in der einspringenden Ecke wegen ungenügender Abrundung die Schubspannung die Elastizitätsgrenze überschreiten, so würde dies zwar eine kleine bleibende Formänderung zur Folge haben, die sich aber auch nur auf einen engen Bezirk beschränkte. Diese geringfügige bleibende Formänderung würde sofort an der davon betroffenen Stelle die Schubspannung herabsetzen, in ähnlicher Art, wie man es auch durch eine entsprechende Ausrundung der Ecke hätte bewirken können und damit wäre dem Übel und jeder weiteren Gefahr abgeholfen. Nur bei einem sehr spröden Stoffe kann daher eine solche rein örtliche Überschreitung der als noch zulässig anzusehenden Spannungsgrenze schon bei einmaliger Belastung eine Bruchgefahr herbeiführen. Etwas anderes ist es freilich, wenn der Stab einem periodisch wechselnden Drehmomente ausgesetzt ist. Dann folgen sich die kleinen unelastischen Formänderungen an der überbeanspruchten Stelle immer von neuem in entgegengesetzter Richtung und so unbedeutend sie an sich auch sein mögen, können sie doch nach genügend häufiger Wiederholung schließlich einen sogenannten Ermüdungsbruch herbeiführen.

Aber die Walzeisenträger bestehen keineswegs aus einem spröden, sondern vielmehr aus einem recht zähen Stoffe und bei den Bauten, die man aus ihnen herstellt, handelt es sich auch in der Regel nicht um Belastungen, die dem Vorzeichen nach wechseln. Daher können selbst bei ungenügender Ausrundung der Ecken die dort zu erwartenden Spannungserhöhungen keinen Schaden tun. Mit dem Vorbehalte, daß in anderen Fällen hierauf zu achten sein würde, soll deshalb hier von ihnen abgesehen werden.

Dann läßt sich leicht zeigen, daß die größte Spannung, von der die Bruchgefahr abhängt, in der Mitte der Langseite jenes Rechtecks eintreten muß, dessen Dicke am größten ist. Alle Rechtecke bilden nämlich die Querschnitte von Flacheisen, die sich alle um denselben Winkel ϑ verdrehen müssen, wobei Formänderung und Spannung nach dem, was vorher besprochen war, ungefähr ebenso ausfallen, als wenn jedes dieser Flacheisen für sich genommen zu dem vorgeschriebenen Winkel ϑ verdreht würde. Für eines dieser Flacheisen hat man nach Gl. (7)

$$\vartheta = \frac{3\,M_1}{d_1^3 l_1 G}$$

und für die größte in ihm in der Mitte der Langseite des Querschnitts auftretende Schubspannung τ_1 läßt sich, wie bekannt (vgl. etwa mein Lehrbuch, Bd. V, S. 163)

$$\tau_1 = \frac{3\,M_1}{d_1^2 l_1}$$

setzen.

Aus der Verbindung beider Gleichungen findet man

$$\tau_1 = \vartheta\, d_1\, G. \tag{15}$$

Das Verdrehungsmoment M_1, das von dem gerade betrachteten Flacheisen übernommen wird, ist aus dieser Gleichung verschwunden und ϑ hat für alle Teile denselben Wert. Demnach erlangt in der Tat τ_1 in jenem Rechteck den überhaupt größten Wert $\tau_{\max}$, dessen Dicke d den größten Wert $d_{\max}$ hat. Setzt man schließlich noch den Verdrehungswinkel ϑ aus Gl. (10) ein, so findet man

$$\tau_{\max} = \frac{3\, M\, d_{\max}}{\Sigma\, d^3\, l}, \tag{16}$$

wobei unter M das vom ganzen Stab aufzunehmende Verdrehungsmoment zu verstehen ist. Für den Grenzfall der unendlich schmalen Rechtecke wenigstens ist hiermit die Spannungsaufgabe ebenfalls gelöst.

Um diese Gleichung auf die Form der Gl. (14) zu bringen, hat man das Widerstandsmoment W gegen Verdrehen

$$W = \frac{\Sigma\, d^3\, l}{3\, d_{\max}} = \frac{J}{d_{\max}} \tag{17}$$

zu setzen. Bei den Walzeisenprofilen besteht demnach — so weit als die für den Grenzfall abgeleiteten Formeln noch als genügend genau angesehen werden können — ein ganz ähnlicher Zusammenhang zwischen Widerstandsmoment gegen Verdrehen und dem die Drehsteifigkeit bedingenden Drillungswiderstand J, wie er von der Biegungslehre her zwischen den entsprechenden Größen bekannt ist. Die alte Naviersche Theorie der Verdrehung hatte die Formeln der Biegungslehre fast unverändert übernommen. Das war freilich nicht richtig; aber man sieht doch, daß sich bis zu einem gewissen Grade eine solche formale Übereinstimmung wenigstens bei den praktisch besonders wichtigen Walzeisenprofilen immer noch aufrecht erhalten läßt.

Mit welchem Grade der Genauigkeit diese Formeln, die sich ja zunächst nur auf den Grenzfall beziehen, auch auf die wirklich ausgeführten Walzeisen angewendet werden können, muß ich zunächst dahin gestellt lassen. Ich betrachte es als eine Aufgabe der für solche Zwecke eingerichteten Versuchsanstalten, an denen ja kein Mangel ist, hierüber Aufschluß zu geben. Ich muß dabei freilich hinzufügen, daß es stets erheblich schwieriger ist, eine Formel für die Spannung auf dem Versuchswege zu prüfen, als eine Formel für den Verdrehungswinkel oder für eine andere unmittelbar beobachtbare Formänderungsgröße. Aus diesem Grunde der leichteren Prüfungsmöglichkeit habe ich auch in dieser Abhandlung den Verdrehungswinkel vorangestellt und die Spannungsformel nur anhangsweise folgen lassen. Denn ich betrachte die theoretische Darlegung, die ich hier gab, nur als die eine Hälfte der ganzen Arbeit, der die andere ebenso wichtige noch folgen muß. Diese hoffe ich beim Verdrehungswinkel mit den mir zur Verfügung stehenden Mitteln später noch selbst leicht leisten zu können, während die Ausdehnung auf die Prüfung der Formeln (16) oder (17) viel mehr Arbeit machen wird, von der mir zweifelhaft ist, ob sie in meinem Laboratorium in absehbarer Zeit bewältigt werden kann.

Gewisse ungefähre Anhaltspunkte für die Zuverlässigkeit der Gl. (16) werden natürlich die zum Zwecke der Messung des Verdrehungswinkels anzustellenden Versuche ganz von selbst schon liefern. Außerdem wird man auch wohl annehmen dürfen, daß eine Bestätigung der Formel (11) für den Verdrehungswinkel durch die Versuche, ohne daß man dabei genötigt wäre, für den Berichtigungsfaktor ζ einen stärker von Eins abweichenden Wert einzusetzen, zugleich eine gewisse Gewähr dafür liefern würde, daß auch die auf der gleichen Grundlage beruhende Formel (16) nicht zu weit von der Wirklichkeit abweichende Werte liefern kann.

München, beim Jahreswechsel 1916/17.