Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1917. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1917
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über Potenzreihen, deren Summe im abgeschlossenen Konvergenzkreise überall stetig ist.

Von **Leopold Fejér.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 3. Februar 1917.

Ich habe im Jahre 1909 mit Hilfe einer besonderen Methode Beispiele konstruiert, die für die Theorie der Fourierschen Reihe (und verwandter Reihen) gewisse grundlegende Aufschlüsse geben. Später habe ich gelegentlich bemerkt, daß meine Methode auch einige analogen Beispiele für die Theorie der Potenzreihe liefert. Vorliegende Arbeit soll nun vermittelst der Konstruktion neuer Beispiele zeigen, daß jene Methode in der Theorie der Potenzreihe ebensoweit führt, wie bei der Fourierreihe. Sie zeigt insbesondere, daß die auf das Polynom

$$\frac{z}{n} + \frac{z^2}{n-1} + \cdots + \frac{z^n}{1} - \frac{z^{n+1}}{1} - \cdots - \frac{z^{2n-1}}{n-1} - \frac{z^{2n}}{n}$$

gegründete „Klammermethode" in der Tat überraschend fruchtbar ist.

1. Es sei $f(\Theta)$ eine reelle, durchweg stetige Funktion der reellen Veränderlichen Θ mit der Periode 2π.

Ich sage von der Fourierreihe von $f(\Theta)$, daß sie an der Stelle Θ die du Bois-Reymondsche Singularität aufweist, wenn sie an der Stelle Θ divergiert.

Ich sage von der Fourierreihe von $f(\Theta)$, daß sie an der Stelle Θ die Lebesguesche Singularität aufweist, wenn sie für jeden reellen Wert der Veränderlichen konvergiert, jedoch in keinem, die Stelle Θ in seinem Innern enthaltendem Intervalle gleichmäßig konvergiert.

2. Es sei nun

(1) $$\varphi(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_n z^n + \cdots$$

eine Potenzreihe der komplexen Veränderlichen z mit beliebigen komplexen Koeffizienten. Der Kreis $|z| = 1$ sei ihr Konvergenzkreis und die Summe $\varphi(z)$ der Reihe (1) sei im abgeschlossenen Konvergenzkreise $|z| \leqq 1$ stetig, d. h. es soll

$$\lim_{r=1} \varphi(r e^{i\Theta}) \qquad (0 \leqq r < 1)$$

existieren und zwar gleichmäßig im Intervalle $0 \leqq \Theta \leqq 2\pi$. Ich frage:

1. Kann eine Potenzreihe (1) an einer Stelle des Konvergenzkreises die du Bois-Reymondsche Singularität haben?

Diese Frage ist, wie schon früher von mir gezeigt wurde, zu bejahen[1]).

2. Kann eine Potenzreihe (1) die Lebesguesche Singularität (in dem oben für die Fourierreihe definierten Sinne) haben?

Diese Frage ist ebenfalls zu bejahen. Das soll durch Konstruktion eines Beispiels zum erstenmale in § 1 bewiesen werden.

§ 1. Beispiel einer Potenzreihe, deren Summe für $|z| \leqq 1$ überall stetig ist, und die an der Stelle $z = 1$ die Lebesguesche Singularität aufweist.

3. Da ich mich hier auf meine früheren Arbeiten nicht stützen will, muß ich einiges vorausschicken.

Eine Bezeichnung. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ eine unendliche Reihe mit beliebigen komplexen Gliedern und

$$g_1, g_2, g_3 \ldots g_\nu \ldots$$

[1]) Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze, Jahrg. 1910 dieser Sitzungsberichte; vgl. auch: Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues, Annales de l'École Normale (3), 28 (1911). Später habe ich noch einen andern Beweis gefunden: s. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie (Berlin 1916), § 3, S. 23–25. — Die Frage, ob eine Potenzreihe, deren Summe für $|z| \leqq 1$ überall stetig ist, an einer Stelle des Einheitskreises $|z| = 1$ die du Bois-Reymondsche Singularität aufweisen kann, rührt von Herrn A. Pringsheim her (s. meine oben zitierte Münchener Arbeit).

eine unendliche Folge von positiven ganzen Zahlen. Dann verstehe ich unter

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)_{g_\nu}$$

diejenige unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu,$$

die aus der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ dadurch hervorgeht, daß ich in ihr erst die ersten g_1 Glieder, dann die folgenden g_2 Glieder, ... dann die folgenden g_ν Glieder . . . zu einem Gliede zusammenziehe. In Formeln:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)_{g_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu,$$

wo

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + u_2 + \cdots + u_{g_1}, \\ v_2 &= u_{g_1+1} + \cdots + u_{g_1+g_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_\nu &= u_{g_1+g_2+\cdots+g_{\nu-1}+1} + \cdots + u_{g_1+g_2+\cdots+g_\nu}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

4. Hilfssätze. *I. Hilfssatz.* Wenn $z = e^{i\Theta}$, wo $0 < \Theta < 2\pi$, so ist

$$(2) \qquad |z^{r+1} + z^{r+2} + \cdots + z^{r+p}| \leq \frac{2}{|1-z|} = \frac{2}{|1-e^{i\Theta}|} = \frac{1}{\sin\frac{\Theta}{2}}$$

für $\qquad r = 0, 1, 2 \cdots \infty; \quad p = 1, 2, 3 \cdots \infty.$

In der Tat ist dann

$$|z^{r+1} + z^{r+2} + \cdots + z^{r+p}| = |z^{r+1}|\,|1 + z + \cdots + z^{p-1}|$$
$$= \left|\frac{1-z^p}{1-z}\right| < \frac{2}{|1-z|} = \frac{2}{|1-e^{i\Theta}|} = \frac{1}{\sin\frac{\Theta}{2}}.$$

II. Hilfssatz. Bedeuten überhaupt $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_p$ positive Zahlen, so daß entweder

a) $\qquad L > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p \geqq 0,$

oder

b) $$0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_p \leqq L,$$
so ist

$$(3) \qquad |\lambda_1 z^{r+1} + \lambda_2 z^{r+2} + \cdots \lambda_p z^{r+p}| \leqq \frac{2L}{|1 - e^{i\Theta}|} = \frac{L}{\sin\frac{\Theta}{2}}$$

für
$$z = e^{i\Theta}, \qquad 0 < \Theta < 2\pi$$
$$r = 0, 1, 2, 3 \cdots \infty$$
$$p = 1, 2, 3 \quad \cdots \infty.$$

In der Tat, wenn

$$\sigma_1 = z^{r+1}$$
$$\sigma_2 = z^{r+1} + z^{r+2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\sigma_p = z^{r+1} + z^{r+2} + \cdots + z^{r+p}$$

gesetzt wird, erhält man im Falle a):

$$|\lambda_1 z^{r+1} + \lambda_2 z^{r+2} + \cdots + \lambda_p z^{r+p}| = |\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2(\sigma_2 - \sigma_1) + \cdots + \lambda_p(\sigma_p - \sigma_{p-1})| = |\sigma_1(\lambda_1 - \lambda_2) + \sigma_2(\lambda_2 - \lambda_3) + \cdots + \sigma_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p) + \sigma_p \lambda_p| \leqq \frac{2}{|1 - e^{i\Theta}|}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_3 + \cdots + \lambda_{p-1} - \lambda_p + \lambda_p)$$
$$= \frac{2\lambda_1}{|1 - e^{i\Theta}|} \leqq \frac{2L}{|1 - e^{i\Theta}|} = \frac{L}{\sin\frac{\Theta}{2}}.$$

Im Falle b):

$$|\lambda_1 z^{r+1} + \lambda_2 z^{r+2} + \cdots + \lambda_p z^{r+p}| = \left|z^{2r+p+1}\left(\frac{\lambda_p}{z^{r+1}} + \frac{\lambda_{p-1}}{z^{r+2}} + \cdots + \frac{\lambda_1}{z^{r+p}}\right)\right| = |\lambda_p \bar{z}^{r+1} + \lambda_{p-1}\bar{z}^{r+2} + \cdots + \lambda_1 \bar{z}^{r+p}|$$
$$\leqq \frac{2L}{|1 - e^{-i\Theta}|} = \frac{2L}{|1 - e^{i\Theta}|} = \frac{L}{\sin\frac{\Theta}{2}}.$$

III. Hilfssatz. Es ist

$$(4) \qquad \left|\frac{z^{r+1}}{p} + \frac{z^{r+2}}{p-1} + \cdots + \frac{z^{r+p}}{1} - \frac{z^{r+p+1}}{1} - \frac{z^{r+p+2}}{2} - \cdots - \frac{z^{r+2p}}{p}\right| < 6$$

für den ganzen Einheitskreis

$$|z| = 1$$

und für $r = 0, 1, 2, 3 \cdots \infty;\quad p = 1, 2, 3 \cdots \infty.$

In der Tat ist für $z = e^{i\Theta}$, $0 \leqq \Theta \leqq 2\pi$,

$$\left|\sum_{\nu=1}^{p} \frac{z^{r+p-\nu+1}}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{p} \frac{z^{r+p+\nu}}{\nu}\right| = \left|\sum_{\nu=1}^{p} \frac{z^{r+p-\nu+1} - z^{r+p+\nu}}{\nu}\right|$$

$$= |z^{r+p+\frac{1}{2}}| \left|\sum_{\nu=1}^{p} \frac{z^{-(\nu-\frac{1}{2})} - z^{\nu-\frac{1}{2}}}{\nu}\right| = \left|\sum_{\nu=1}^{p} \frac{e^{-i(\nu-\frac{1}{2})\Theta} - e^{i(\nu-\frac{1}{2})\Theta}}{\nu}\right|$$

$$= 2\left|\sum_{\nu=1}^{p} \frac{\sin(2\nu-1)\frac{\Theta}{2}}{\nu}\right| = 2\sum_{\nu=1}^{p} \frac{\sin(2\nu-1)\frac{\Theta}{2}}{\nu} \leqq 2\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$$

$$= \pi + 2 < 6.$$

5. Definition einer unendlichen Konstantenfolge. Man betrachte die Gruppe von $2n$ Zahlen

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} \cdots \frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2} \cdots -\frac{1}{n}.$$

Man bilde diese Zahlengruppe der Reihe nach für die folgenden Werte der positiven ganzen Zahl n:

(5) $$n = 2^{1^3}, 2^{2^3}, 2^{3^3}, 2^{4^3} \ldots 2^{\nu^3} \ldots$$

Man schreibe die so erhaltenen Zahlengruppen der Reihe nach alle nebeneinander, nachdem man aber vorher die Zahlen der ν-ten Gruppe ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$) alle durch ν^2 dividiert hat. So entsteht eine ganz bestimmte unendliche Zahlenfolge

(6) $$\frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4\cdot 2^8}, \frac{1}{4(2^8-1)}, \frac{1}{4(2^8-2)} \cdots$$

Diese unendliche Zahlenfolge bezeichne ich durch

(6) $$a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots a_k \ldots$$

6. Man betrachte die Potenzreihe

(7) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k + \cdots$$

Von dieser Potenzreihe habe ich bewiesen, daß ihre Summe im abgeschlossenen Kreise $|z| \leqq 1$ stetig ist, und dennoch für

$z = 1$ divergiert, d. h. daß sie an dieser Stelle die du Bois-Reymondsche Singularität aufweist. (Ich erinnere daran, daß sie auf jedem Bogen $z = e^{i\Theta}$, $\varepsilon \leqq \Theta \leqq 2\pi - \varepsilon$ gleichmäßig konvergiert. Hier bedeutet ε eine beliebig kleine, aber feste positive Zahl).

Nun möchte ich zeigen, wie man mit Hilfe der Reihe (7) zu einer neuen Potenzreihe gelangen kann, die bei $z = 1$ die Lebesguesche Singularität besitzt.

Ich will nur noch für die Reihe (7) eine Benennung erklären. Es sei

$$g_1 = 2.2^{1^3}, \quad g_2 = 2.2^{2^3} \ldots g_\nu = 2.2^{\nu^3} \ldots$$

Dann nenne ich die ersten g_1 Glieder der Reihe (7) die „erste Gliedergruppe", die folgenden g_2 Glieder die „zweite Gliedergruppe" . . ., die folgenden g_ν Glieder die „ν-te Gliedergruppe" . . . Die Gesamtheit derjenigen Glieder der ν-ten Gliedergruppe, die positive Koeffizienten haben, nenne ich die „ν-te positive Gliedergruppe", die Gesamtheit derjenigen, die negative Koeffizienten haben, „die ν-te negative Gliedergruppe." Manchmal verstehe ich unter Gliedergruppe auch die Summe der Gruppenglieder. Es wird durch diesen doppelten Gebrauch des Wortes Gliedergruppe kein Mißverständnis entstehen[1]).

7. Man setze in die ν-te Gliedergruppe ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$) der Potenzreihe (7) $e^{-\frac{i}{\nu}} z$ statt z, so entsteht eine neue Potenzreihe

$$(8) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k = b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_k z^k + \cdots,$$

die bei $z = 1$ die Lebesguesche Singularität aufweist.

D. h. (α) ihre Summe ist im abgeschlossenen Kreisbereiche $|z| \leqq 1$ überall stetig,

(β) sie ist in eben diesem Kreisbereiche $|z| \leqq 1$ überall konvergent,

[1]) Vgl. die Nummern 3, 4, 5, 6 dieser Arbeit mit meiner in der Fußnote auf S. 34 zitierten französischen Arbeit.

(γ) und sie ist dennoch ungleichmäßig konvergent auf jedem Bogen des Einheitskreises $|z| = 1$, der die Stelle $z = 1$ in seinem Innern hat. —

(δ) Dagegen ist sie auf jedem Bogen $z = e^{i\Theta}$, $\varepsilon \leq \Theta < 2\pi - \varepsilon$ gleichmäßig konvergent. (Hier bedeutet ε eine beliebig keine, aber feste positive Größe).

Mit anderen Worten: die Lebesguesche Singularität tritt isoliert auf.

8. Beweis. Es sei $|z| < 1$. Dann ist die Reihe (8) wegen $\lim\limits_{k=\infty} b_k = 0$ gewiß konvergent. Also ist ihre Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k = f(z) \qquad (|z| < 1) \tag{8}$$

gewiß gleich der Summe der unendlichen Reihe

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k\right)_{g_\nu} \qquad (|z| < 1) \tag{9}$$

Hier ist wieder $g_\nu = 2.2^{\nu^3}$, $(\nu = 1, 2 \cdots \infty)$, und die Bezeichnung ist in Nr. 3 erklärt.

Die Reihe (9), deren Glieder Polynome von z sind, ist aber sogar für $|z| < 1$ gleichmäßig konvergent. In der Tat ist, auf Grund von Nr. 5 und des Hilfssatzes III, das ν-te Glied der Reihe (9) für $|z| = 1$ dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{6}{\nu^2}$. Die Reihe (9) ist also für $|z| = 1$, und folglich auch für $|z| \leq 1$ gleichmäßig konvergent. Ihre Summe für $|z| < 1$, d. h. $f(z)$ ist also im abgeschlossenen Kreisbereiche $|z| \leq 1$ stetig. Hiermit ist bewiesen, daß die Reihe (8) die Eigenschaft (α) besitzt.

9. Jetzt will ich beweisen, daß die Reihe (8) die Eigenschaft (β) besitzt, d. h. daß sie an jeder Stelle des Einheitskreises $|z| = 1$ konvergiert.

Ich beweise erst, daß sie an der Stelle $z = 1$ konvergiert.

Betrachten wir irgend eine Restsumme

$$R_{n,m} = b_n + b_{n+1} + \cdots + b_m \tag{10}$$

der Reihe (8) für $z=1$, d. h. der Reihe

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_k + \cdots \tag{11}$$

n und m sind beliebige positive ganze Zahlen, und es ist $n < m$. Ich zeige, daß

$$\lim_{n=\infty} R_{n,m} = 0. \tag{12}$$

Es gehöre das erste Glied b_n von $R_{n,m}$ der ν-ten, das letzte Glied b_m der μ-ten Gliedergruppe der Reihe (11) an. Hier sind ν und μ positive ganze Zahlen, und es ist $\nu \leqq \mu$.

Ich zerlege nun $R_{n,m}$ in 5 Teile:

$$R_{n,m} = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 + \varrho_5. \tag{14}$$

Hier bedeutet ϱ_3 die Summe der

$$(\nu+1)\text{-ten},\ (\nu+2)\text{-ten}\ \ldots\ (\mu-1)\text{-ten} \tag{15}$$

Gliedergruppen der Reihe (11). (Wenn keine dieser Gliedergruppen vollständig in $R_{n,m}$ enthalten ist, so sei $\varrho_3 = 0$. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn $\mu = \nu$, oder $\mu = \nu + 1$.) Jedenfalls ist also nach dem Hilfssatze III

$$|\varrho_3| < \frac{6}{(\nu+1)^2} + \frac{6}{(\nu+2)^2} + \cdots + \frac{6}{(\mu-1)^2} < 6\left(\frac{1}{(\nu+1)^2} + \frac{1}{(\nu+2)^2} + \cdots \text{ ad. inf.}\right) < \frac{6}{\nu}. \tag{16}$$

ϱ_1 bedeutet in (14) die ganze ν-te positive Gliedergruppe der Reihe (11), wenn sie ganz, und ein Fragment derselben, wenn nur ein Bruchteil von ihr in $R_{n,m}$ enthalten ist. (Es sei $\varrho_1 = 0$, wenn sie in $R_{n,m}$ ganz fehlt.) ϱ_1 ist also entweder gleich der ganzen Summe

$$\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{e^{-\frac{i}{\nu}(r+1)}}{2^{\nu^3}} + \frac{e^{-\frac{i}{\nu}(r+2)}}{2^{\nu^3}-1} + \cdots + \frac{e^{-\frac{i}{\nu}(r+2^{\nu^3})}}{1}\right), \tag{17}$$

oder einer Teilsumme oder auch $= 0$. (Hier bedeutet r eine gewisse nicht negative ganze Zahl, auf deren Wert es aber hier nicht ankommt.)

In jedem Falle ist also, auf Grund des Hilfssatzes II $\left(\text{mit } z = e^{-\frac{i}{\nu}}\right)$,

$$(18) \qquad |\varrho_1| < \frac{2 \cdot \frac{1}{\nu^2}}{\left|1 - e^{-\frac{i}{\nu}}\right|} = \frac{1}{\nu^2} \frac{1}{\sin\frac{1}{2\nu}} < \frac{1}{\nu^2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2\nu}} = \frac{\pi}{\nu}.$$

ϱ_2 bedeutet in (14) die ganze ν-te negative Gliedergruppe der Reihe (11), wenn sie ganz, und eine Teilsumme derselben, wenn nur ein Teil von ihr in $R_{n,m}$ enthalten ist. (Es sei $\varrho_2 = 0$, wenn sie in $R_{n,m}$ ganz fehlt.)

In jedem Falle ist, auf Grund des Hilfssatzes II, wieder

$$(19) \qquad |\varrho_2| < \frac{\pi}{\nu}.$$

Aus demselben Grunde ist

$$(20) \qquad |\varrho_4| < \frac{\pi}{\mu}, \quad |\varrho_5| < \frac{\pi}{\mu},$$

wo ϱ_4, ϱ_5 dieselbe Bedeutung haben für die μ-te Gliedergruppe, wie ϱ_1, ϱ_2 für die ν-te Gliedergruppe. Also ist auf Grund von (14), (16), (18), (19), (20)

$$(21) \quad |R_{n,m}| < \frac{\pi}{\nu} + \frac{\pi}{\nu} + \frac{6}{\nu} + \frac{\pi}{\mu} + \frac{\pi}{\mu} = \frac{2\pi + 6}{\nu} + \frac{2\pi}{\mu} \leqq \frac{4\pi + 6}{\nu}.$$

Da aber $\lim \nu = +\infty$, wenn $\lim n = +\infty$, so ist

$$\lim_{n=\infty} R_{n,m} = 0.$$

Hiermit ist also die Beziehung (12), mithin auch die Konvergenz der Reihe (8) für $z = 1$ erwiesen.

10. Ich beweise ferner, daß die Reihe (8) auch an allen übrigen Stellen $z = e^{i\Theta}$, $(z \neq 1)$, konvergiert. Ich will aber gleichzeitig die Eigenschaft (δ) beweisen, d. h. zeigen, daß die Reihe (8) auf dem Bogen

$$(22) \qquad z = e^{i\Theta}, \quad \varepsilon \leqq \Theta \leqq 2\pi - \varepsilon$$

sogar gleichmäßig konvergiert. Hier bedeutet ε eine beliebig kleine, aber feste positive Zahl.

Die Bezeichnungen der Nr. 9 behalte ich bei, nur daß sie sich jetzt eben auf die Stelle $z = e^{i\Theta}$, und nicht auf die Stelle $z = 1$ beziehen.

Es sei also $R_{n,m}$ die Restsumme der Reihe (8) an der Stelle $z = e^{i\Theta}$, $0 < \varepsilon \leqq \Theta \leqq 2\pi - \varepsilon$. Diese zerlege ich wieder in die 5 Teile

$$R_{n,m} = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 + \varrho_5. \tag{23}$$

Es ist wieder

$$|\varrho_3| < \frac{6}{\nu}, \tag{24}$$

und zwar nicht nur für $\varepsilon \leqq \Theta \leqq 2\pi - \varepsilon$, sondern überhaupt für jeden Wert von Θ.

ϱ_1 bedeutet in (23) die Summe

$$\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{e^{-\frac{i}{\nu}(r+1)}\, e^{i(r+1)\Theta}}{2^{\nu^3}} + \frac{e^{-\frac{i}{\nu}(r+2)}\, e^{i(r+2)\Theta}}{2^{\nu^3}-1} + \cdots + \frac{e^{-\frac{i}{\nu}(r+2^{\nu^3})}\, e^{i(r+2^{\nu^3})\Theta}}{1}\right), \tag{25}$$

oder eine Teilsumme davon oder die Null. (r ist eine gewisse nicht negative ganze Zahl.)

Ist aber ν so groß, daß

$$\frac{1}{\nu} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{26}$$

dann ist, wegen (22),

$$\frac{\varepsilon}{2} < \Theta - \frac{1}{\nu} < 2\pi - \varepsilon < 2\pi - \frac{\varepsilon}{2},$$

und also auf Grund des Hilfssatzes II $\left(\text{mit } z = e^{i\left(\Theta - \frac{1}{\nu}\right)}\right)$ in jedem Falle

$$|\varrho_1| \leqq \frac{2\cdot\frac{1}{\nu^2}}{\left|1 - e^{i\left(\Theta - \frac{1}{\nu}\right)}\right|} < \frac{2\cdot\frac{1}{\nu^2}}{\left|1 - e^{i\frac{\varepsilon}{2}}\right|} = \frac{1}{\nu^2 \sin\frac{\varepsilon}{4}} < \frac{2\pi}{\nu^2\varepsilon}. \tag{27}$$

So erhalte ich schließlich: Ist ν genügend groß, so ist für jede Stelle des Bogens

$$z = e^{i\Theta}, \quad \varepsilon < \Theta < 2\pi - \varepsilon,$$

(28) $$|R_{n,m}| < \frac{2\pi}{\nu^2\varepsilon} + \frac{2\pi}{\nu^2\varepsilon} + \frac{6}{\nu} + \frac{2\pi}{\mu^2\varepsilon} + \frac{2\pi}{\mu^2\varepsilon} < \left(6 + \frac{8\pi}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\nu}.$$

Da aber $\lim \nu = +\infty$, wenn $\lim n = +\infty$, also ist

(29) $$\lim_{n=\infty} R_{n,m} = 0,$$

und zwar gleichmäßig im Intervalle $\varepsilon < \Theta \leqq 2\pi - \varepsilon$.

Hiermit ist für die Reihe (8) die Eigenschaft (β), aber auch die Eigenschaft (δ) vollständig erwiesen.

11. Schließlich werde ich noch zeigen, daß die Reihe (8) auf keinem Bogen des Einheitskreises gleichmäßig konvergieren kann, der die Stelle $z = 1$ in seinem Innern hat (Eigenschaft (γ)).

In der Tat, die ν-te positive Gliedergruppe der Reihe (8) (diese ist doch auch eine ihrer Restsummen) hat an der Stelle

(30) $$z_\nu = e^{\frac{i}{\nu}}$$

den Wert

(31) $$\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{2^{\nu^3}} + \frac{1}{2^{\nu^3}-1} + \cdots + 1\right).$$

Dieser müßte mit $\lim \nu = +\infty$ zu Null konvergieren, wenn die Reihe (8) auf einem, die Stelle $z = 1$ in seinem Innern enthaltenden Bogen des Kreises $|z| = 1$ gleichmäßig konvergieren würde. Dies ist aber nicht der Fall, denn die Summe (31) ist größer als

(32) $$\frac{1}{\nu^2}\log 2^{\nu^3} = \nu \log 2,$$

konvergiert also mit $\lim \nu = +\infty$ nicht gegen 0, sondern geradezu gegen $+\infty$.

Damit ist das Theorem von Nr. 7 vollständig bewiesen.

12. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ hat komplexe Koeffizienten. Will man eine Reihe mit denselben geforderten Eigenschaften, deren Koeffizienten sämtlich reell sind, so bilde man die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k + \bar{b}_k) z^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k. \tag{33}$$

Diese Potenzreihe hat lauter reelle Koeffizienten, und es ist auf Grund des Vorhergehenden sehr leicht einzusehen, daß sie alle geforderten Eigenschaften besitzt.

§ 2. Über die verschiedenen Möglichkeiten des Auftretens der Du Bois-Reymondschen und Lebesgueschen Singularität bei konjugierten Reihen.

13. Es sei

$$a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{34}$$

eine beliebige Potenzreihe, deren Summe für $|z| \leq 1$ stetig ist und die auf jedem Bogen $z = e^{i\Theta}$, $\varepsilon \leq \Theta \leq 2\pi - \varepsilon$, gleichmäßig konvergiert. (Hier bedeutet ε wieder eine beliebig kleine, aber feste positive Zahl.) Sie soll aber nicht auf dem ganzen Einheitskreise $|z| = 1$ gleichmäßig konvergieren.

Betrachten wir die reelle und imaginäre Komponente der Potenzreihe (34) für $z = e^{i\Theta}$, d. h. die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n \cos n\Theta - \tau_n \sin n\Theta), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\tau_n \cos n\Theta + \sigma_n \sin n\Theta),$$

$$\sigma_n + i\tau_n = a_n, \quad n = 1, 2, 3 \cdots \infty.$$

Diese sind die Fourierreihen je einer überall stetigen und nach 2π periodischen reellen Funktion von Θ. Beide Reihen konvergieren gleichmäßig im Intervalle $\varepsilon \leq \Theta \leq 2\pi - \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$.

Nun sind bei einer Potenzreihe wie (34) für die Stelle $\Theta = 0$ offenbar nur die folgenden 3 Fälle denkbar[1]):

1. Fall: die eine Komponente von (34) hat an der Stelle $\Theta = 0$ die du Bois-Reymondsche Singularität, und die andere Komponente hat an der Stelle $\Theta = 0$ die Lebesguesche Singularität;

[1]) Zwei weitere denkbare Fälle lassen sich leicht ausschließen.

2. Fall: beide Komponenten haben an der Stelle $\Theta = 0$ die du Bois-Reymondsche Singularität;

3. Fall: beide Komponenten haben an der Stelle $\Theta = 0$ die Lebesguesche Singularität.

Ich bin jetzt in der Lage, zu zeigen, daß alle 3 denkbare Fälle auch wirklich auftreten können.

Beweis. 1. Fall: dieser tritt bei der Reihe (7)

$$a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k + \cdots \tag{7}$$

auf[1]).

2. Fall: dieser tritt bei der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + i) a_k z^k \tag{35}$$

auf. In der Tat ist die reelle Komponente der Potenzreihe (35) für $z = e^{i\Theta}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Theta - a_k \sin k\Theta), \tag{36}$$

und die imaginäre Komponente

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Theta + a_k \sin k\Theta). \tag{37}$$

Beide gehen für $\Theta = 0$ in die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ über, welche divergiert.

3. Fall: dieser tritt bei der Reihe (8), oder auch bei der Reihe

$$c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_k z^k + \cdots \tag{33}$$

auf. Würde nämlich die eine Komponente von (33) für $|z| = 1$ gleichmäßig konvergieren, so müßte auch die andere Komponente von (33) für $|z| = 1$ gleichmäßig konvergieren. (Das folgt aus meinem Satze: wenn die Summe einer Potenz-

---

[1]) Zum erstenmal bewiesen in meiner Note: Sur une paire de séries de Fourier conjuguées, C. R., Paris (28 février 1910); ausführlicher in meiner oben in der Fußnote auf S. 34 zitierten französischen Arbeit. Einen zweiten auf einem allgemeinen Satze über konjugierte trigonometrische Reihen beruhenden Beweis findet man in meiner Arbeit: Über konjugierte trigonometrische Reihen, Journ. f. Math., Bd. 144 (1914).

reihe für $|z| < 1$ stetig ist, und wenn eine ihrer Komponenten für $|z| = 1$ gleichmäßig konvergiert, so konvergiert auch ihre andere Komponente für $|z| = 1$ gleichmäßig[1].) Es würde also die Potenzreihe (33) für $|z| = 1$ gleichmäßig konvergieren, was aber nicht der Fall ist. Es müssen also beide Komponenten von (33) bei $\Theta = 0$ ungleichmäßig konvergieren, w. z. b. w.

§ 3. Über die im § 1 verwendete Methode; Verallgemeinerung derselben; weitere Anwendungen.

13. Die Reihe (8) habe ich aus der Reihe (7) dadurch erhalten, daß ich in ihre erste, zweite, . . ., ν-te, . . . Gliedergruppe statt z der Reihe nach

$$(38) \qquad e^{-\frac{i}{1}} z, \quad e^{-\frac{i}{2}} z, \quad \ldots, \quad e^{-\frac{i}{\nu}} z, \quad \ldots$$

schrieb. Dieses Vorgehen gestattet die folgende Verallgemeinerung: Es sei

$$(39) \qquad t_1, \; t_2, \; t_3, \; \ldots \; t_\nu, \; \ldots$$

eine beliebige Folge von reellen Zahlen, die alle dem Intervalle $0 \leqq \Theta < 2\pi$ angehören. Man setze in die konsekutiven Gliedergruppen der Reihe (7)

$$(7) \qquad a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k + \cdots$$

statt z der Reihe nach

$$(40) \qquad e^{-t_1 i} z, \quad e^{-t_2 i} z, \quad \ldots \quad e^{-t_\nu i} z, \quad \ldots$$

Die so entstehende Potenzreihe sei

$$(41) \qquad u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_k z^k + \cdots$$

Von ihr kann — in dieser Allgemeinheit — nur gesagt werden: 1. ihre Summe ist für $|z| < 1$ stetig, 2. ist AB ein

---

[1]) S. die in der Fußnote auf S. 45 zitierte Arbeit „Über konjugierte trigonometrische Reihen". Herr Marcel Riesz hat durch Anwendung einer originellen Methode diesen Satz auf einen Kreissektor verallgemeinert: „Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome", Jahresb. der D. M. V. 23 (1914); s. insbesondere § 5.

solcher abgeschlossener Bogen des Einheitskreises, welcher in seinem Innern keine der Verdichtungsstellen der Punkte

$$e^{t_1 i}, \quad e^{t_2 i}, \quad \ldots \quad e^{t_\nu i}, \quad \ldots$$

hat, so konvergiert die Reihe (41) gleichmäßig auf jedem Teilbogen $A_1 B_1$ des Bogens AB, der durch zwei innere Punkte A_1, B_1 von AB begrenzt wird (zu den Verdichtungsstellen rechne ich auch einen Punkt $e^{t_m i}$, der in dieser Punktfolge unendlich oft auftritt); 3. die Reihe (41) konvergiert niemals gleichmäßig auf dem ganzen Einheitskreise $|z| = 1$.

Nehme ich z. B. $t_\nu = \frac{1}{\nu}$, so erhalte ich die Reihe (8), die ich in § 1 dieser Arbeit ausführlich untersucht habe.

(Es wäre wohl von Interesse, überhaupt den Fall $t_\nu = \frac{1}{\nu^\alpha}$, wo $\alpha > 0$, zu untersuchen.)

Ich erwähne noch das folgende Beispiel allgemeiner Natur. Es sei

$$\Theta_1, \ \Theta_2, \ \ldots \ \Theta_\nu, \ \ldots \tag{42}$$

eine beliebige gegebene Zahlenfolge, deren Glieder dem Intervalle $0 < \Theta < 2\pi$ angehören. Man setze

$$\begin{array}{lllll} t_1 = \Theta_1, & t_2 = \Theta_1, & t_3 = \Theta_2, & t_4 = \Theta_1, & t_5 = \Theta_2, \\ t_6 = \Theta_3, & t_7 = \Theta_1, & t_8 = \Theta_2, & t_9 = \Theta_3, & t_{10} = \Theta_4, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \tag{43}$$

Die entsprechende Potenzreihe (41) ist dann an den vorgeschriebenen Stellen

$$e^{\Theta_1 i}, \quad e^{\Theta_2 i}, \quad \ldots \quad e^{\Theta_\nu i}, \quad \ldots \tag{44}$$

des Einheitskreises divergent, d. h. sie hat an diesen Stellen die du Bois-Reymondsche Singularität. Interessante spezielle Fälle: die Stellen (44) bedecken den ganzen Einheitskreis überall dicht, oder: sie bedecken die eine Hälfte des Einheitskreises überall dicht, lassen aber die andere Hälfte frei etc.

Die Einführung der unendlich vielen Parameter

$$t_1, \ t_2, \ \ldots \ t_\nu, \ \ldots$$

in die Reihe (7) scheint mir einen großen Nutzen zu bringen.

§ 4. Modifikation der in § I angewendeten Methode nach einer anderen Richtung. — Eine Anwendung.

14. Ich möchte noch von einer anderen Modifikation meiner Methode sprechen, die vielleicht auch Interesse verdient.

Ich bin von der Konstantenfolge

$$(6) \qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_k,\ \ldots$$

ausgegangen, die in Nr. 5 definiert ist[1]).

Hier müßte die Zahl n die Werte

$$n = 2^{1^3},\ 2^{2^3},\ 2^{3^3},\ 2^{4^3},\ \ldots\ 2^{\nu^3},\ \ldots$$

durchlaufen.

Ich verfahre nun genau so wie in Nr. 5, nur lasse ich jetzt n die Werte[2])

$$(44) \qquad n = 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \ldots\ 2^\nu,\ \ldots$$

durchlaufen. Ich erhalte so statt der Folge (6) die Folge

$$(45) \qquad A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_k,\ \ldots,$$

$$A_1 = \frac{1}{2},\quad A_2 = 1,\quad A_3 = -1,\quad A_4 = -\frac{1}{2},$$

$$A_5 = \frac{1}{4.4},\quad A_6 = \frac{1}{4.3},\quad A_7 = \frac{1}{4.2},\quad A_8 = \frac{1}{4.1},$$

$$A_9 = -\frac{1}{4.1},\quad A_{10} = -\frac{1}{4.2},\quad \ldots$$

---

1) Die Konstantenfolge (6) findet sich schon in meiner Arbeit: Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, Journ. f. Math., 138 (1910); s. insbesondere S. 46, 47.

2) Der Gedanke, statt der Zahlen

$$2^{1^3},\ 2^{2^3},\ 2^{3^3},\ \ldots\ 2^{\nu^3},\ \ldots$$

gewisse andere zu wählen, ist schon in meiner in der Fußnote auf S. 34 zitierten französischen Arbeit kurz angedeutet. Daselbst (S. 99 Fußn.) proponiere ich (für gewisse Zwecke) die Folge

$$2^{1^2},\ 2^{2^2},\ 2^{3^2},\ \ldots\ 2^{\nu^2},\ \ldots$$

Vgl. hierzu auch Ch.-J. de la Vallée-Poussin: Cours d'Analyse infinitésimale, II (1912), p. 166—169. Der Vorteil, die Folge 2^{ν^3} durch gewisse andere ersetzen zu können, ist auch von Herrn Hardy benützt worden.

Betrachten wir nun die Potenzreihe

$$(46) \qquad A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_k z^k + \cdots$$

Ich behaupte: die Potenzreihe (46) ist zwar für $|z| = 1$ gleichmäßig konvergent (und folglich ist ihre Summe für $|z| \leq 1$ stetig), sie ist aber an keiner Stelle des Einheitskreises $|z| = 1$ absolut konvergent[1]).

Beweis. Ich benütze die alten Benennungen und Bezeichnungen, nur daß sich jetzt eben alles auf die Reihe (46) bezieht.

G. H. Hardy: On the summability of Fouriers series, Proceedings London Math. Soc. (2), 12, part 5; s. insbesondere Nr. 6, S. 371—372.

[1]) Beispiele von Potenzreihen, welche für $|z| = 1$ ausnahmslos und dennoch nicht absolut konvergieren, wurden zum erstenmal durch Herrn A. Pringsheim konstruiert. S. A. Pringsheim: „Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise“, Jahrg. 1900 dieser Sitzungsberichte; s. insbesondere § 3, S. 68—78. (Hier findet man auch die ältere Literatur.) Es ist aber noch heute unentschieden, ob es unter diesen Pringsheimschen Potenzreihen eine solche gibt, die eine für $|z| \leq 1$ überall stetige Summe hat. Die Frage nach einer Potenzreihe, deren Summe für $|z| \leq 1$ überall stetig ist, und die für $|z| < 1$ gleichmäßig, aber für $|z| = 1$ nicht absolut konvergiert, wurde mir im Jahre 1910 gesprächsweise durch Herrn H. Bohr gestellt. (Vgl. auch Pringsheim, l. c. S. 77.) Ich habe auf Grund meiner asymptotischen Darstellung von e_n vermutet, daß die Potenzreihe

$$\sqrt{1-z}\; e^{\frac{1}{z-1}} = e_0 + e_1 z + \cdots e_n z^n + \cdots$$

diese Eigenschaft besitzt, was auch von Herrn Marcel Riesz durch Heranziehung eines bekannten Hardyschen Satzes alsbald erwiesen wurde. Später fanden die Herren Marcel Riesz und G. H. Hardy auf ganz anderer Grundlage äußerst elegante Beispiele dieser Art; s. G. H. Hardy: A Theorem concerning Taylors series, Quaterly Journal of Mathematics, Nr. 174 (1913), s. insbesondere Nr. 12, 13, 14, S. 157—160. (Auf S. 160, oben, steht ein offenbarer Druckfehler; es soll da heißen $\sqrt{1-x}\; e^{\frac{1}{x-1}}$ statt $\sqrt{1-x}\; e^{\frac{1}{1-x}}$.) Über das Hardysche Beispiel vgl. auch das in der Fußnote auf S. 34 zitierte Buch des Herrn Landau, § 14, S. 61: „Hardysches Beispiel“. Im Texte wollte ich nun besonders zeigen, daß meine bereits zur Konstruktion zahlreicher anderer Beispiele dienliche Methode auch hier einfach zum Ziele führt.

(S. insbesondere Nr. 9.) Z. B. hat die ν-te Gliedergruppe in (46) nicht 2.2^{ν^3}, sondern 2.2^{ν} Gliedern.

Es sei $|z| = 1$, und es bezeichne $R_{n,m}$ die Restsumme von (46). Ich zerlege wieder in

$$R_{n,m} = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 + \varrho_5.$$

Nun ist aber für $|z| = 1$ (genau so wie in Nr. 9) $|\varrho_3| < \frac{6}{\nu}$.

Weiter ist für $|z| = 1$

$$|\varrho_1| < \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{2^\nu - 1} + \cdots + \frac{1}{1}\right) < \frac{1}{\nu^2} \log 2^\nu = \frac{\log 2}{\nu}$$

usw. Also ist

$$|R_{n,m}| < \frac{\log 2}{\nu} + \frac{\log 2}{\nu} + \frac{6}{\nu} + \frac{\log 2}{\mu} + \frac{\log 2}{\mu} \leq \frac{6 + 4\log 2}{\nu}, \text{ d. h.}$$

$$\lim_{n=\infty} R_{n,m} = 0$$

und zwar gleichmäßig für $|z| = 1$.

Die Reihe (46) ist also für den ganzen Einheitskreis $|z| = 1$ gleichmäßig konvergent.

Sie ist aber an keiner Stelle des Einheitskreises absolut konvergent, denn die Reihe

$$(47) \qquad |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k| + \cdots$$

ist divergent. Würde sie nämlich konvergieren, so müßte auch die Reihe

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|\right)_{2.2^\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(2\,\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{2^\nu - 1} + \cdots + 1\right)\right)$$

konvergieren. Diese ist aber divergent, da ihr ν-tes Glied größer ist als

$$2 \cdot \frac{1}{\nu^2} \log 2^\nu = \frac{2\log 2}{\nu},$$

und $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ divergiert.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1917

Band/Volume: 1917

Autor(en)/Author(s): Fejer [Fejér] Lipot [Lipót]

Artikel/Article: Über Potenzreihen, deren Summe im abgeschlossenen Konvergenzkreise überall stetig ist 33-50