Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1917. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1917
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über die näherungsweise Berechnung von Funktionen grosser Zahlen.

Von **Oskar Perron.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 5. Mai 1917.

§ 1.

Laplace hat zur näherungsweisen Berechnung von Integralen der Form

$$\int f(z)\,\varphi(z)^n\,dz \tag{1}$$

für sehr große Werte von n vielfach eine Methode angewandt, die sich folgendermaßen skizzieren läßt. Man braucht nur denjenigen beliebig kleinen Teil des Integrationswegs zu berücksichtigen, der in der Nähe des Maximums von $|\varphi(z)|$ liegt; denn der Rest des Integrationswegs liefert einen infinitär kleineren Beitrag. Wird das Maximum an der Stelle $z = z_0$ erreicht, so setzt man

$$\varphi(z) = \varphi(z_0)\cdot e^{-\alpha t^2}, \tag{2}$$

wodurch das Integral (1.) die Form

$$\varphi(z_0)^n \int \chi(t)\,e^{-n\alpha t^2}\,dt \tag{3}$$

annimmt. Sodann entwickelt man $\chi(t)$ nach Potenzen von t, integriert gliedweise und erstreckt nachträglich die Integrationsgrenzen ins Unendliche. Der dadurch fälschlich hinzugekommene Beitrag schadet nichts, da er von kleinerer Größenordnung ist, und man hat jetzt den Vorteil, daß die einzelnen Integrale bekannte Werte haben.

Vielfach ist es bei Anwendung dieser Methode notwendig, zuerst den Integrationsweg in passender Weise abzuändern; offenbar erhält man den günstigsten Näherungswert des Integrals, wenn man den Weg so wählt, daß auf ihm das Maximum von $|\varphi(z)|$ so klein wie möglich wird.

Bei der Laplaceschen Methode ist die Entwicklung der Funktion $\chi(t)$ nach Potenzen von t äußerst beschwerlich, da sie zuvor natürlich die Auflösung der Gleichung (2) nach z erfordert. Allerdings wird es bei Anwendungen meist genügen, ein oder zwei Glieder zu berechnen. Das theoretische Interesse geht aber weiter. Deshalb hat Burkhardt die Laplacesche Methode derart modifiziert,[1] daß die Auflösung der Gleichung (2) überflüssig wird, und die Überlegenheit seiner Methode an zwei Beispielen dargetan. Die Burkhardtsche Methode führt stets zu dem gleichen Näherungswert wie die Laplacesche, erreicht ihn aber auf wesentlich kürzerem Wege.

Eine ganz andere Frage ist nun die, in welchem Umfang diese Werte wirklich als Näherungswerte des Integrals (1) bezeichnet werden können. Denn die fraglichen Methoden haben bis jetzt eigentlich nur die Bedeutung eines heuristischen Prinzips. Eine strenge Begründung in der nötigen Allgemeinheit ist meines Wissens nie gegeben worden. In der vorliegenden Arbeit werde ich diese Lücke in, wie ich glaube, erschöpfender Weise ausfüllen. Dabei wird auch die Burkhardtsche Methode nochmals in einer die Rechnung vereinfachenden Weise abgeändert. Die Koeffizienten der asymptotischen Reihe, welche man für das Integral (1) erhält, lassen sich nunmehr in ihrem Bildungsgesetz vollständig überblicken, während man bisher über zwei oder höchstens drei Glieder nicht hinauskam.

Zur Vereinfachung der Formeln werde ich annehmen, daß die Stelle z_0, an welcher $|\varphi(z)|$ den maximalen Wert annimmt, der Nullpunkt ist, und daß $\varphi(0) = 1$ ist. Eine Beschränkung

[1] Über Funktionen großer Zahlen, insbesondere über die näherungsweise Bestimmung entfernter Glieder in den Reihenentwicklungen der Theorie der Keplerschen Bewegung. — Diese Sitzungsberichte, Jahrg. 1914.

der Allgemeinheit bedeutet das offenbar nicht. Der Exponent n, der ins Unendliche wachsen soll, kann nach Belieben auf ganzzahlige Werte beschränkt oder auch stetig wachsend angenommen werden. Unter $\varphi(z)^n$ ist dann $e^{n \log \varphi(z)}$ zu verstehen, wobei mit $\log \varphi(z)$ derjenige Zweig des Logarithmus bezeichnet ist, der für $z = 0$ den Wert 0 hat.

§ 2.

Bevor wir an unsere eigentliche Aufgabe herantreten, müssen wir uns über die Kurven

$$|\varphi(z)| = \text{konst.}$$

und insbesondere über ihre Singularitäten klar werden, wenn $\varphi(z)$ eine in einem gewissen Bereich reguläre Funktion bedeutet.

Sei $\varphi(z)$ an der Stelle z_0 regulär und von Null verschieden. Dann ist $\log \dfrac{\varphi(z)}{\varphi(z_0)}$ eine Reihe nach Potenzen von $z - z_0$ ohne konstantes Glied. Die Reihe beginne etwa mit der p^{ten} Potenz; also

$$\log \frac{\varphi(z)}{\varphi(z_0)} = (z - z_0)^p \left[b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \cdots\right], \quad b_0 \neq 0.$$

Setzt man

$$b_\nu = r_\nu e^{i\beta_\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$z - z_0 = v e^{i\omega},$$

so ist $r_0 > 0$, und

$$\log \frac{\varphi(z)}{\varphi(z_0)} = v^p \left[r_0 e^{i\beta_0 + ip\omega} + r_1 v e^{i\beta_1 + i(p+1)\omega} \right.$$
$$\left. + r_2 v^2 e^{i\beta_2 + i(p+2)\omega} + \cdots\right].$$

Nun ist die Gleichung

$$|\varphi(z)| = |\varphi(z_0)|$$

gleichbedeutend mit

$$\Re\left(\log \frac{\varphi(z)}{\varphi(z_0)}\right) = 0,$$

also mit

$$F(v,\omega) \equiv r_0 \cos(\beta_0 + p\,\omega) + r_1 v \cos(\beta_1 + (p+1)\,\omega) \\ + r_2 v^2 \cos(\beta_2 + (p+2)\,\omega) + \cdots = 0.$$

Die Gleichung $F(v,\omega) = 0$ hat für $v = 0$ die $2p$ modulo 2π inkongruenten Lösungen

$$\omega = -\frac{\beta_0}{p} + \frac{2q+1}{2p}\pi \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots 2p-1),$$

die wir mit δ_q bezeichnen wollen. Ferner ist

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)_{v=0,\ \omega=\delta_q} = -p\,r_0 \sin\frac{2q+1}{2}\pi \neq 0.$$

Nach einem bekannten Satz über die Existenz impliziter Funktionen hat also die Gleichung $F(v,\omega) = 0$ für kleine Werte von v genau $2p$ inkongruente Lösungen ω; diese sind stetige Funktionen von v und haben für $v \to 0$ die Grenzwerte δ_q. Die Kurve $|\varphi(z)| = |\varphi(z_0)|$ hat somit im Punkt z_0 genau $2p$ Äste, und die Richtungswinkel ihrer Tangenten sind die Werte δ_q. Da unter diesen Werten neben δ_q stets auch $\delta_q + \pi = \delta_{q+p}$ vorkommt, so hat die Kurve einen p-fachen Punkt im gewöhnlichen Sinne.

Die Umgebung des Punktes z_0 wird durch die verschiedenen Äste der Kurve $|\varphi(z)| = |\varphi(z_0)|$ in $2p$ (im allgemeinen krummlinig begrenzte) Sektoren geteilt mit lauter gleichen Zentriwinkeln $\left(= \frac{2\pi}{2p}\right)$. In diesen Sektoren ist abwechselnd $|\varphi(z)| < |\varphi(z_0)|$ und $|\varphi(z)| > |\varphi(z_0)|$, oder was dasselbe sagt, $F(v,\omega) < 0$ und $F(v,\omega) > 0$. In der Tat, für $\delta_q < \omega < \delta_{q+1}$ ist

$$\frac{\pi}{2} + q\pi < \beta_0 + p\,\omega < \frac{\pi}{2} + (q+1)\pi;$$

also

$$\cos(\beta_0 + p\,\omega) \begin{cases} < 0, & \text{wenn } q \text{ gerade} \\ > 0, & \text{wenn } q \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für hinreichend kleine Werte von v ist also auch

$$F(v,\omega) \begin{cases} < 0, & \text{wenn } q \text{ gerade} \\ > 0, & \text{wenn } q \text{ ungerade.} \end{cases}$$

§ 3.

Nunmehr wenden wir uns unserer eigentlichen Aufgabe zu und betrachten zunächst das Integral

$$(4) \qquad \Phi_n = \int_0^Z z^{a-1} f(z)\, \varphi(z)^n\, dz,$$

wobei $f(z)$, $\varphi(z)$ auf dem ganzen Integrationsweg reguläre Funktionen sind. Ferner sei

$$(5) \qquad \varphi(0) = 1,$$

und sonst auf dem ganzen Integrationsweg $|\varphi(z)| < 1$. Hiernach bestehen für hinreichend kleine Werte von $|z|$ Entwicklungen der Form

$$(6) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots,$$

$$(7) \qquad \log \varphi(z) = z^p (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots),$$

und es ist $b_0 \neq 0$, wenn nur die ganze positive Zahl p richtig gewählt wird. Ferner darf auch $a_0 \neq 0$ angenommen werden, und dann muß, damit das Integral existiert, $\Re(a) > 0$ sein.

Nach § 2 besitzt die Kurve $|\varphi(z)| = 1$ im Nullpunkt einen p-fachen Punkt, und die p Tangenten haben, wenn

$$(8) \qquad b_0 = r e^{i\beta},$$

$$(9) \qquad z = v e^{i\omega}$$

gesetzt wird, die Richtungswinkel $\omega = \delta_q$, wo

$$\delta_q = -\frac{\beta}{p} + \frac{2q+1}{2p}\pi$$

ist. Dadurch wird die Umgebung des Nullpunktes in $2p$ Sektoren geteilt, in denen abwechselnd $|\varphi(z)| < 1$ und $|\varphi(z)| > 1$ ist. Und zwar ist für $\delta_q < \omega < \delta_{q+1}$

$$|\varphi(z)| < 1, \text{ wenn } q \text{ gerade,}$$
$$|\varphi(z)| > 1, \text{ wenn } q \text{ ungerade.}$$

Nach unseren Voraussetzungen verläuft der Integrationsweg in einem Sektor der ersten Art; für ihn sei etwa $q = 2l$.

Auf der Winkelhalbierenden dieses Sektors hat ω den Wert $\omega_0 = \frac{1}{2}(\delta_{2l} + \delta_{2l+1})$, oder also

(10) $$\omega_0 = -\frac{\beta}{p} + \frac{2l+1}{p}\pi.$$

Nunmehr läßt sich der Integrationsweg in (4) folgendermaßen abändern. Man geht zuerst geradlinig auf der Winkelhalbierenden von $z = 0$ bis $z = \varrho e^{i\omega_0}$, wo ϱ eine beliebig kleine positive Zahl ist, sodann auf einem geeigneten Weg W von $z = \varrho e^{i\omega_0}$ nach $z = Z$. Dieser Weg W kann offenbar so gewählt werden, daß auf ihm dauernd $|\varphi(z)| < 1$ ist. Hat also das Maximum von $|\varphi(z)|$ auf W etwa den Wert $1 - \eta$, so ist das Integral über W gleich $O((1-\eta)^n)$, wobei O das Landausche Ordnungssymbol bedeutet.[1] Daher:

(11) $$\Phi_n = \int_0^{\varrho e^{i\omega_0}} z^{\alpha-1} f(z)\,\varphi(z)^n\,dz + O((1-\eta)^n).$$

Zur Umformung des Integranden müssen wir zunächst eine Zwischenbetrachtung einschalten. Setzt man

(12) $$\frac{\log\varphi(z) - b_0 z^p}{z^p} = F(z),$$

so ist nach (7)

(13) $$F(z) \doteq b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots,$$

und daher, wenn x eine neue Variable bedeutet,

(14) $$f(z)\,e^{xF(z)} = \psi_0(x) + \psi_1(x)\,z + \psi_2(x)\,z^2 + \cdots,$$

wobei $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, ... leicht zu berechnende Polynome sind, und zwar $\psi_\nu(x)$ vom (höchstens) ν^{ten} Grad. Setzt man demgemäß

(15) $$\psi_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\nu} g_{\nu,\mu} x^\mu,$$

[1]) Die Zahl η hängt von ϱ ab. Damit η nicht von n abhängt, was für die späteren Schlüsse wesentlich ist, muß also ϱ unabhängig von n gewählt werden. Im übrigen darf aber ϱ beliebig klein sein, und wir behalten uns die geeignete Wahl noch vor.

so ist offenbar $g_{\nu,0} = a_\nu$, und allgemein ist $g_{\nu,\mu}$ der Koeffizient von z^ν in der Entwicklung von

$$\frac{1}{\mu!}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)(b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots)^\mu,$$

so daß die Zahlen $g_{\nu,\mu}$ als vollkommen bekannt gelten können. Die ersten Werte mögen hier noch ausführlich angegeben werden:

$$(16)\quad \begin{cases} g_{0,0} = a_0; \\ g_{1,0} = a_1, \quad g_{1,1} = a_0 b_1; \\ g_{2,0} = a_2, \quad g_{2,1} = a_1 b_1 + a_0 b_2, \quad g_{2,2} = \frac{1}{2} a_0 b_1^2; \\ g_{3,0} = a_3, \quad g_{3,1} = a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3, \quad g_{3,2} = \frac{1}{2}(a_1 b_1^2 \\ \qquad + 2 a_0 b_1 b_2), \quad g_{3,3} = \frac{1}{6} a_0 b_1^3. \end{cases}$$

Für die Reihe (14) werden wir alsbald eine Abschätzung des Restes nötig haben, die wir sogleich vornehmen wollen. Dazu sei σ eine festgewählte positive Zahl, die aber kleiner sein soll als die Konvergenzradien der Reihen (6) und (7). Dann gibt es eine positive Zahl M derart, daß

$$(17)\qquad |a_\nu| \leq \frac{M}{\sigma^\nu} \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$(18)\qquad |b_\nu| \leq \frac{M}{\nu \sigma^\nu} \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

ist, und die Funktion (14) läßt daher die folgende Majorante zu:

$$M\left(1 + \frac{z}{\sigma} + \frac{z^2}{\sigma^2} + \cdots\right) \cdot e^{|x| M \left(\frac{z}{\sigma} + \frac{z^2}{2\sigma^2} + \frac{z^3}{3\sigma^3} + \cdots\right)}$$

$$= \frac{M}{1 - \frac{z}{\sigma}} e^{-|x| M \log\left(1 - \frac{z}{\sigma}\right)} = M\left(1 - \frac{z}{\sigma}\right)^{-1 - M|x|}$$

$$= M \cdot \left(1 + \frac{1 + M|x|}{1} \frac{z}{\sigma} + \frac{(1 + M|x|)(2 + M|x|)}{1 \cdot 2} \frac{z^2}{\sigma^2} + \cdots\right).$$

Hieraus erkennt man, daß die Ungleichung

$$|\psi_\nu(x)| \leqq M \frac{(1+M|x|)(2+M|x|)\cdots(\nu+M|x|)}{1\cdot 2\cdots \nu}\,\frac{1}{\sigma^\nu}$$
$$= M\left(1+\frac{M|x|}{1}\right)\left(1+\frac{M|x|}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{M|x|}{\nu}\right)\frac{1}{\sigma^\nu}$$

gilt. Daher ist, wenn k eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, für $|z|<\sigma$

$$\left|\sum_{\nu=k}^{\infty}\psi_\nu(x)z^\nu\right| \leqq M\left(1+\frac{M|x|}{1}\right)\left(1+\frac{M|x|}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{M|x|}{k}\right)\left(\frac{|z|}{\sigma}\right)^k$$
$$\times\left[1+\left(1+\frac{M|x|}{k+1}\right)\frac{|z|}{\sigma}+\left(1+\frac{M|x|}{k+1}\right)\left(1+\frac{M|x|}{k+2}\right)\left(\frac{|z|}{\sigma}\right)^2+\cdots\right]$$
$$\leqq M(1+M|x|)^k\left(\frac{|z|}{\sigma}\right)^k\cdot\left[1+\left(1+\frac{M|x|}{1}\right)\frac{|z|}{\sigma}\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{M|x|}{1}\right)\left(1+\frac{M|x|}{2}\right)\left(\frac{|z|}{\sigma}\right)^2+\cdots\right];$$

oder also

$$(19)\qquad \left|\sum_{\nu=k}^{\infty}\psi_\nu(x)z^\nu\right| \leqq M(1+M|x|)^k\left(\frac{|z|}{\sigma}\right)^k\left(1-\frac{|z|}{\sigma}\right)^{-1-M|x|}.$$

Nunmehr kehren wir zu Formel (11) zurück. Zunächst ist nach (12) und (14)

$$f(z)\,\varphi(z)^n = f(z)\,e^{n\log\varphi(z)} = e^{n b_0 z^p}\cdot f(z)\,e^{n z^p F(z)}$$
$$= e^{n b_0 z^p}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_\nu(n z^p)\,z^\nu.$$

Setzt man das in (11) ein, so ergibt sich:

$$(20)\qquad \Phi_n = \int_0^{\varrho e^{i\omega_0}} z^{\alpha-1}\,e^{n b_0 z^p}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_\nu(n z^p)\,z^\nu\cdot dz + O((1-\eta)^n).$$

Macht man jetzt die Substitution

$$z = e^{i\omega_0}\sqrt[p]{\frac{t}{n r}},$$

so ist

$$n z^p = e^{i\omega_0 p}\frac{t}{r} = -e^{-i\beta}\frac{t}{r} = -\frac{t}{b_0},$$

und Formel (20) geht über in folgende:

$$\Phi_n = \frac{1}{p} e^{i\omega_0 \alpha}\int\limits_0^{n r \varrho^p} e^{-t}\left(\frac{t}{nr}\right)^{\frac{\alpha}{p}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right)\left(e^{i\omega_0}\sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^{\nu}\cdot\frac{dt}{t}$$
$$+ O((1-\eta)^n).$$

Trennt man hier von der Summe die k ersten Glieder ab, so kommt:

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi_n = \frac{1}{p}\sum_{\nu=0}^{k-1} e^{i\omega_0(\alpha+\nu)}\left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{\alpha+\nu}{p}}\int\limits_0^{n r\varrho^p} e^{-t}t^{\frac{\alpha+\nu}{p}-1}\,\psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right)dt \\ + R_k + O((1-\eta)^n), \end{aligned}\right.$$

wobei

$$(22)\quad R_k = \frac{1}{p} e^{i\omega_0\alpha}\int\limits_0^{n r\varrho^p} e^{-t}\left(\frac{t}{nr}\right)^{\frac{\alpha}{p}} \cdot \sum_{\nu=k}^{\infty}\psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right)\left(e^{i\omega_0}\sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^{\nu}\cdot\frac{dt}{t}.$$

Nun schätzen wir zunächst den Rest R_k ab. Nach (19) besteht die Ungleichung

$$\left|\sum_{\nu=k}^{\infty}\psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right)\left(e^{i\omega_0}\sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^{\nu}\right|$$
$$\leqq M\left(1+\frac{Mt}{r}\right)^{k}\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^{k}\left(1-\frac{1}{\sigma}\sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^{-1-\frac{Mt}{r}},$$

sobald nur $\sqrt[p]{\frac{t}{nr}} < \sigma$ ist. Bei dem Integral (22) ist aber

$$t \leqq n r \varrho^p, \text{ also } \sqrt[p]{\frac{t}{nr}} \leqq \varrho.$$

Wählt man daher die positive Zahl ϱ zunächst kleiner als σ, so ist

$$\sqrt[p]{\frac{t}{nr}} \leqq \varrho < \sigma,$$

und man erhält die Ungleichung:

$$\left|\sum_{\nu=k}^{\infty}\psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right)\left(e^{i\omega_0}\sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^\nu\right|$$
$$< M\left(1+\frac{Mt}{r}\right)^k\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^k\left(1-\frac{\varrho}{\sigma}\right)^{-1-\frac{Mt}{r}}.$$

Mit Rücksicht hierauf ergibt sich aus (22):

$$|R_k| \leq \frac{M}{p}\,|e^{i\omega_0\alpha}|\,\frac{\left(1-\frac{\varrho}{\sigma}\right)^{-1}}{\sigma^k}\left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{\Re(\alpha)+k}{p}}$$
$$\times\int_0^{nr\varrho^p} e^{-t}\left(1-\frac{\varrho}{\sigma}\right)^{-\frac{M}{r}t}\,t^{\frac{\Re(\alpha)+k}{p}-1}\left(1+\frac{Mt}{r}\right)^k dt.$$

Nun wollen wir die Zahl ϱ so klein wählen, daß

$$e\cdot\left(1-\frac{\varrho}{\sigma}\right)^{\frac{M}{r}} > 1$$

ist. Dann läßt sich in dem letzten Integral die obere Grenze ins Unendliche erstrecken, wodurch das Integral einen größeren, aber von n unabhängigen Wert erhält. Daher ist schließlich

$$|R_k| < C_k\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\Re(\alpha)+k}{p}},$$

wo C_k von n nicht abhängt. Aus Formel (21) erhält man somit:

$$(23)\quad\left\{\begin{aligned}\Phi_n = \frac{1}{p}\sum_{\nu=0}^{k-1} e^{i\omega_0(\alpha+\nu)}\left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{\alpha+\nu}{p}}\int_0^{nr\varrho^p} e^{-t}\,t^{\frac{\alpha+\nu}{p}-1}\,\psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right)dt\\ + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\Re(\alpha)+k}{p}}\right).\end{aligned}\right.$$

Denn das in (21) stehende Fehlerglied $O((1-\eta)^n)$ kann weggelassen werden, weil es von kleinerer Ordnung ist als das hier angeschriebene.

Für das in (23) auftretende Integral erhält man, wenn für ψ_ν die Reihe (15) eingesetzt wird:

$$(24)\quad \int_0^{nr\varrho^p} e^{-t} t^{\frac{a+\nu}{p}-1} \psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right) dt = \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{g_{\nu,\mu}}{(-b_0)^\mu} \int_0^{nr\varrho^p} e^{-t} t^{\frac{a+\nu}{p}+\mu-1} dt.$$

Nun ist offenbar

$$(25)\quad \int_0^{nr\varrho^p} e^{-t} t^{\frac{a+\nu}{p}+\mu-1} dt = \int_0^{\infty} - \int_{nr\varrho^p}^{\infty}.$$

Da die Funktion

$$e^{-t} t^{\frac{\Re(a)+\nu}{p}+\mu+1}$$

für genügend große t monoton abnimmt, so ist das letzte Integral absolut kleiner als

$$\int_{nr\varrho^p}^{\infty} e^{-nr\varrho^p} (nr\varrho^p)^{\frac{\Re(a)+\nu}{p}+\mu+1} \frac{dt}{t^2} = e^{-nr\varrho^p} (nr\varrho^p)^{\frac{\Re(a)+\nu}{p}+\mu},$$

sofern nur die Zahl n genügend groß angenommen wird. Dagegen ist das erste Integral auf der rechten Seite von (25) eine Gammafunktion, und man erhält:

$$\int_0^{nr\varrho^p} e^{-t} t^{\frac{a+\nu}{p}+\mu-1} dt = \Gamma\left(\frac{a+\nu}{p}+\mu\right) + O\left(e^{-nr\varrho^p}(nr\varrho^p)^{\frac{\Re(a)+\nu}{p}+\mu}\right)$$

Daher a fortiori:

$$\int_0^{nr\varrho^p} e^{-t} t^{\frac{a+\nu}{p}+\mu-1} dt = \Gamma\left(\frac{a+\nu}{p}+\mu\right) + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{k}{p}}\right);$$

denn dieses Fehlerglied ist von größerer Ordnung als das vorige.

Trägt man das letzte Ergebnis in (24) ein, so kommt zunächst:

$$\int_0^{nr\varrho^p} e^{-t} t^{\frac{a+\nu}{p}-1} \psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right) dt = \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{g_{\nu,\mu}}{(-b_0)^\mu} \Gamma\left(\frac{a+\nu}{p}+\mu\right) + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{k}{p}}\right).$$

Schließlich ergibt sich also, wenn man das in (23) einträgt, das folgende Endresultat:

$$\Phi_n = \frac{1}{p}\sum_{\nu=0}^{k-1} P_\nu \left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{\alpha+\nu}{p}} + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\Re(\alpha)+k}{p}}\right), \tag{26}$$

wobei

$$P_\nu = e^{i\omega_0(\alpha+\nu)} \cdot \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{g_{\nu,\mu}}{(-b_0)^\mu}\, \Gamma\left(\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu\right) \tag{27}$$

ist. Da die Formel (26) für beliebig große Werte von k gilt, so kann man das Resultat einfacher in folgender Weise als asymptotische Gleichung schreiben:

$$\Phi_n \sim \frac{1}{p}\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu \left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{\alpha+\nu}{p}}. \tag{28}$$

Die Formel (27) läßt sich noch folgendermaßen interpretieren. P_ν ist der Koeffizient von z^ν in der Entwicklung der Funktion

$$e^{i\omega_0(\alpha+\nu)}\, \Gamma\left(\frac{\alpha+\nu}{p}\right) \cdot (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)$$
$$\times \left(1 + \frac{b_1 z + b_2 z^2 + \cdots}{b_0}\right)^{-\frac{\alpha+\nu}{p}}$$

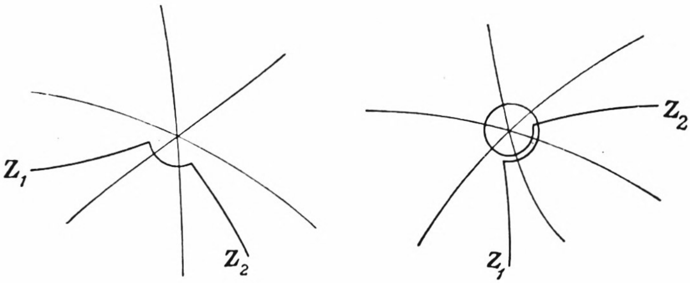
nach Potenzen von z. Jedoch dürfte für die wirkliche Ausrechnung die Beibehaltung der Zahlen $g_{\nu,\mu}$ zweckmäßiger sein.

§ 4.

Nunmehr wenden wir uns zu dem Integral

$$\Omega_n = \int_{Z_1}^{Z_2} z^{\alpha-1} f(z)\, \varphi(z)^n\, dz, \tag{29}$$

wobei $f(z)$, $\varphi(z)$ die gleiche Bedeutung haben wie bisher. Die Integrationsgrenzen Z_1 und Z_2 sollen in zwei Sektoren S_1 und S_2 liegen, in denen $|\varphi(z)| < 1$ ist, und der Integrationsweg soll folgenden Verlauf haben (siehe die beiden Figuren):



Zunächst von Z_1 im Sektor S_1 in die Umgebung des Nullpunkts; sodann auf einem Kreisbogen um den Nullpunkt in den Sektor S_2; schließlich in S_2 zum Endpunkt Z_2.

Ist $\Re(a) > 0$, so kann das Integral Ω_n sofort auf das in § 3 behandelte zurückgeführt werden. Läßt man nämlich den Radius des Kreisbogens gegen Null abnehmen, so konvergiert das Integral über den Kreisbogen gegen Null, während die Integrale in den Sektoren S_1 und S_2 die Form $-\Phi_n$ und $+\Phi_n$ haben. Sind daher

$$(30) \qquad \begin{cases} \omega_1 = -\dfrac{\beta}{p} + \dfrac{2l_1+1}{p}\pi, \\ \omega_2 = -\dfrac{\beta}{p} + \dfrac{2l_2+1}{p}\pi \end{cases}$$

die Richtungswinkel für die Winkelhalbierenden der Sektoren S_1 und S_2, so gilt nach den Ergebnissen des § 3 die asymptotische Gleichung

$$(31) \qquad \Omega_n \sim \frac{1}{p}\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu \left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{a+\nu}{p}},$$

wobei die Koeffizienten Q_ν die folgende Bedeutung haben:

$$(32) \qquad Q_\nu = \left(e^{i\omega_2(a+\nu)} - e^{i\omega_1(a+\nu)}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{g_{\nu,\mu}}{(-b_0)^\mu}\,\Gamma\left(\frac{a+\nu}{p}+\mu\right).$$

Wir wollen nun zeigen, daß dieses zunächst für $\Re(a) > 0$ erhaltene Resultat unverändert auch ohne diese Einschränkung gilt. Dazu wählen wir den Integrationsweg in der folgenden offenbar erlaubten Weise:

Zuerst vom Punkt Z_1 im Sektor S_1 zum Punkt $\varrho e^{i\omega_1}$; von da auf einem Kreisbogen um den Nullpunkt zum Punkt $\varrho e^{i\omega_2}$; von hier endlich im Sektor S_2 zum Punkt Z_2. Der Radius ϱ des Kreisbogens darf beliebig klein gewählt werden, muß jedoch wieder unabhängig von n sein. Dann sind die Integrale über den ersten und dritten Teil wie in § 3 gleich $O((1-\eta)^n)$.

Daher:

$$\Omega_n = \int\limits_{\varrho e^{i\omega_1}}^{\varrho e^{i\omega_2}} z^{a-1} f(z)\, \varphi(z)^n\, dz + O((1-\eta)^n),$$

oder, wenn man für $f(z)\,\varphi(z)^n$ wieder die früher benutzte Reihe einsetzt:

$$\Omega_n = \int\limits_{\varrho e^{i\omega_1}}^{\varrho e^{i\omega_2}} z^{a-1} e^{n b_0 z^p} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu(n z^p)\, z^\nu \cdot dz + O((1-\eta)^n). \tag{33}$$

Macht man jetzt die Substitution

$$z = e^{i\omega_1} \sqrt[p]{\frac{t}{nr}},$$

so ist wieder

$$n z^p = -\frac{t}{b_0},$$

und Formel (33) geht über in:

$$\Omega_n = \frac{1}{p} e^{i\omega_1 a} \int\limits_{n r \varrho^p}^{n r \varrho^p} e^{-t} \left(\frac{t}{nr}\right)^{\frac{a}{p}} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right) \left(e^{i\omega_1} \sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^{\nu} \cdot \frac{dt}{t} + O((1-\eta)^n),$$

wobei der Integrationsweg jetzt aus $l_2 - l_1$ Umläufen um den Nullpunkt besteht[1]). Trennt man von der Summe wieder die k ersten Glieder ab, so kommt, wenn die Integrationsgrenzen der Einfachheit halber weggelassen werden:

$$\left\{ \begin{aligned} \Omega_n = \frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{k-1} e^{i\omega_1(a+\nu)} \left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{a+\nu}{p}} \int e^{-t}\, t^{\frac{a+\nu}{p}-1} \psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right) dt \\ + R_k' + O((1-\eta)^n), \end{aligned} \right. \tag{34}$$

[1]) Ist $l_2 < l_1$, so sind es $l_1 - l_2$ Umläufe in negativer Richtung.

wobei

(35) $$R_k' = \frac{1}{p} e^{i\omega_1 a} \int e^{-t} \left(\frac{t}{nr}\right)^{\frac{a}{p}} \cdot \sum_{\nu=k}^{\infty} \psi_\nu \left(-\frac{t}{b_0}\right) \left(e^{i\omega_1} \sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^{\nu} \cdot \frac{dt}{t}.$$

In R_k' kann man den Integrationsweg folgendermaßen abändern: Zuerst von $nr\varrho^p$ auf der reellen Achse beliebig nahe an den Nullpunkt heran, etwa bis zum Punkt ζ, sodann $(l_2 - l_1)$-mal um den Nullpunkt herum, und schließlich längs der reellen Achse nach $nr\varrho^p$ zurück. Wenn $\Re(a) + k > 0$ ist, kann man zur Grenze $\zeta = 0$ übergehen, und bei Berücksichtigung der Gleichung

$$\omega_1 + \frac{l_2 - l_1}{p} 2\pi = \omega_2$$

erhält man dadurch:

$$R_k' = -\frac{1}{p} e^{i\omega_1 a} \int_0^{nr\varrho^p} e^{-t} \left(\frac{t}{nr}\right)^{\frac{a}{p}} \cdot \sum_{\nu=k}^{\infty} \psi_\nu \left(-\frac{t}{b_0}\right) \left(e^{i\omega_1} \sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^{\nu} \cdot \frac{dt}{t}$$
$$+ \frac{1}{p} e^{i\omega_2 a} \int_0^{nr\varrho^p} e^{-t} \left(\frac{t}{nr}\right)^{\frac{a}{p}} \cdot \sum_{\nu=k}^{\infty} \psi_\nu \left(-\frac{t}{b_0}\right) \left(e^{i\omega_2} \sqrt[p]{\frac{t}{nr}}\right)^{\nu} \cdot \frac{dt}{t}.$$

Die hier auftretenden Integrale sind aber die gleichen wie in Formel (22); nur ist ω_0 durch ω_1 bzw. ω_2 ersetzt. Wenn also ϱ klein genug gewählt wird, so erhält man wie früher die Abschätzung:

$$|R_k'| < C_k' \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\Re(a)+k}{p}},$$

wo C_k' von n nicht abhängt. Aus (34) folgt daher:

(36) $$\begin{cases} \Omega_n = \frac{1}{p} \sum_{\nu=0}^{k-1} e^{i\omega_1(a+\nu)} \left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{a+\nu}{p}} \int e^{-t} t^{\frac{a+\nu}{p}-1} \psi_\nu \left(-\frac{t}{b_0}\right) dt \\ \qquad + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\Re(a)+k}{p}}\right). \end{cases}$$

Für das hier auftretende Integral erhält man, wenn für ψ_ν die Reihe (15) eingesetzt wird:

$$(37)\quad \int e^{-t}\, t^{\frac{\alpha+\nu}{p}-1}\, \psi_\nu\left(-\frac{t}{b_0}\right) dt = \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{g_{\nu,\mu}}{(-b_0)^\mu} \int e^{-t}\, t^{\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu-1}\, dt.$$

Der Integrationsweg ist dabei ein $(l_2 - l_1)$-maliger Umlauf um den Nullpunkt vom Punkt $nr\varrho^p$ zu diesem Punkt zurück. Diesem Weg darf man aber vorn und hinten noch das Stück der reellen Achse von $nr\varrho^p$ bis ∞ hinzufügen; denn die hierdurch neu hinzukommenden Integralteile sind von geringerer Größenordnung als das in (36) angeschriebene Fehlerglied (vgl. die Abschätzung im Anschluß an Fl. (25)). Für den so modifizierten Integrationsweg ist aber bekanntlich

$$(38)\quad \begin{cases} \displaystyle\int e^{-t}\, t^{\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu-1}\, dt = \left(e^{2\pi i (l_2 - l_1)\frac{\alpha+\nu}{p}} - 1\right)\cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu\right) \\ \displaystyle\qquad = \left(e^{i(\omega_2-\omega_1)(\alpha+\nu)} - 1\right)\cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu\right). \end{cases}$$

Wenn einmal $\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu = -\lambda$ eine negative ganze Zahl oder Null sein sollte, so ist hier der Grenzwert zu setzen, den die rechte Seite in diesem Fall annimmt. Dieser ist gleich

$$\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\, 2\pi i (l_2 - l_1) = \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\, p i (\omega_2 - \omega_1);$$

doch wollen wir der Gleichförmigkeit halber die Formel (38) auch für diesen Fall beibehalten.

Setzt man (38) in (37) und dann in (36) ein, so kommt:

$$(39)\qquad \Omega_n = \frac{1}{p}\sum_{\nu=0}^{k-1} Q_\nu \left(\frac{1}{nr}\right)^{\frac{\alpha+\nu}{p}} + O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\Re(\alpha)+k}{p}}\right),$$

wobei Q_ν die in (32) angegebene Bedeutung hat. Die Formel (39) besagt aber genau soviel wie die Formel (31), die damit in voller Allgemeinheit bewiesen ist.

Zugleich erkennt man, daß, wenn einmal $\frac{\alpha+\nu}{p}+\mu$ eine negative ganze Zahl oder Null ist, auf der rechten Seite von (32) der Grenzwert stehen muß, den dieser Ausdruck dann annimmt.

§ 5.

Wir behandeln jetzt einige Beispiele.

Erstes Beispiel. In der Theorie der Gammafunktion beweist man die Formel

$$\log \Gamma(n+1) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \log \sqrt{2\pi}$$
$$+\int_0^\infty \frac{1}{z}\left(\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\right)e^{-nz}\,dz.$$

Zerlegt man das Integral in

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty,$$

so ist das zweite Integral der rechten Seite gleich $O(e^{-n})$, während das erste die in § 3 behandelte Form hat. Und zwar ist

$$a = 1,$$
$$f(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\right) = \frac{B_1}{2!} - \frac{B_2}{4!}z^2 + \frac{B_3}{6!}z^4 - \frac{B_4}{8!}z^6 + \cdots,$$
$$\log \varphi(z) = -z,$$

wobei $B_1, B_2, B_3, \cdots$ die Bernouillischen Zahlen sind. Man hat also:

$$p = 1,$$
$$a_{2\nu} = (-1)^\nu \frac{B_{\nu+1}}{(2\nu+2)!}, \quad a_{2\nu+1} = 0,$$
$$b_0 = -1, \quad b_\nu = 0 \text{ für } \nu \geqq 1,$$
$$r = 1, \quad \beta = \pi, \quad \omega_0 = 0,$$

und folglich:

$$g_{2\nu,0} = (-1)^\nu \frac{B_{\nu+1}}{(2\nu+2)!}, \quad g_{2\nu+1,0} = 0,$$
$$g_{\nu,\mu} = 0 \text{ für } \mu \geqq 1.$$

Nach Formel (27) ist daher $P_\nu = g_{\nu,0} \cdot \Gamma(1+\nu) = g_{\nu,0} \cdot \nu!$; also:

$$P_{2\nu} = (-1)^\nu \frac{B_{\nu+1}}{(2\nu+1)(2\nu+2)}, \quad P_{2\nu+1} = 0.$$

Folglich nach (28):

$$\int_0^1 \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{B_{\nu+1}}{(2\nu+1)(2\nu+2)} \left(\frac{1}{n}\right)^{1+2\nu}.$$

Die gleiche asymptotische Darstellung gilt dann aber auch für

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + O(e^{-n}),$$

so daß wir folgendes Resultat erhalten:

$$\log \Gamma(n+1) \sim (n+\tfrac{1}{2}) \log n - n + \log \sqrt{2\pi}$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{B_{\nu+1}}{(2\nu+1)(2\nu+2)} \cdot \frac{1}{n^{2\nu+1}}.$$

Das ist die bekannte Stirlingsche Reihe.

Zweites Beispiel. Macht man in der Formel

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx$$

die Substitution $x = ny$, so ergibt sich:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{n^{n+1}} = \int_0^\infty (ye^{-y})^n \, dy.$$

Die Funktion ye^{-y} hat ihr Maximum an der Stelle $y = 1$.
Setzt man daher $y = 1 + z$, so kommt:

$$\frac{e^n \Gamma(n+1)}{n^{n+1}} = \int_{-1}^\infty [(1+z)e^{-z}]^n \, dz = \int_{-1}^1 + \int_1^\infty.$$

Nun ist

$$\int_1^\infty [(1+z)e^{-z}]^n \, dz = \int_1^\infty [(1+z)e^{-z}]^{n-1} (1+z) e^{-z} \, dz$$
$$< \int_1^\infty \left(\frac{2}{e}\right)^{n-1} (1+z) e^{-z} \, dz = O\left(\left(\frac{2}{e}\right)^n\right),$$

während dagegen das Integral

$$\int_{-1}^{1} [(1+z)\,e^{-z}]^n\,dz$$

die in § 4 behandelte Form hat. Und zwar wird

$$\begin{aligned} a &= 1, \\ f(z) &= 1, \\ \log\varphi(z) &= \log(1+z) - z = -\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + - \cdots. \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned} p &= 2, \\ a_0 &= 1, \quad a_\nu = 0 \quad \text{für} \quad \nu \geqq 1, \\ b_\nu &= \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu+2}, \\ r &= \tfrac{1}{2}, \quad \beta = \pi, \quad \omega_1 = \pi, \quad \omega_2 = 0. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$g_{0,0} = 1, \quad g_{\nu,0} = 0 \quad \text{für} \quad \nu \geqq 1,$$

und allgemein ist $g_{\nu,\mu}$ der Coefficient von z^ν in

$$\frac{1}{\mu!}\left(\frac{z}{3} - \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{5} - \cdots\right)^\mu.$$

Aus Formel (32) folgt dann:

$$\begin{aligned} Q_0 &= 2\,\Gamma(\tfrac{1}{2}), \\ Q_{2\nu} &= 2\sum_{\mu=1}^{2\nu} g_{2\nu,\mu}\, 2^\mu\, \Gamma(\tfrac{1}{2} + \nu + \mu) \quad \text{für} \quad \nu \geqq 1, \\ Q_{2\nu+1} &= 0 \quad \text{für} \quad \nu \geqq 0, \end{aligned}$$

und nach (31) gilt die asymptotische Gleichung

$$\int_{-1}^{1} [(1+z)\,e^{-z}]^n\,dz \sim \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_{2\nu}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}+\nu};$$

folglich auch

$$\frac{e^n\,\Gamma(n+1)}{n^{n+1}} \sim \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_{2\nu}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}+\nu},$$

da das Fehlerglied $O\left(\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)$ von geringerer Ordnung ist.

Die Koeffizienten lassen sich noch etwas einfacher schreiben. Es ist

$$Q_0 = 2\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\sqrt{\pi}\,,$$

und für $\nu \geqq 1$

$$Q_{2\nu} = 2\sum_{\mu=1}^{2\nu} g_{2\nu,\mu}\, 2^{\mu} \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2\nu+2\mu-1}{2}$$

$$= 2\sqrt{\pi} \cdot 2^{-\nu} \sum_{\mu=1}^{2\nu} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu+2\mu-1) \cdot g_{2\nu,\mu}\,.$$

Setzt man also $1 = R_0$, und für $\nu \geqq 1$

$$\sum_{\mu=1}^{2\nu} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu+2\mu-1) \cdot g_{2\nu,\mu} = R_\nu\,,$$

so ergibt sich:

$$\frac{e^n\,\Gamma(n+1)}{n^{n+1}} \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}\, R_\nu \sqrt{2}}{n^{\frac{1}{2}+\nu}}\,,$$

oder also:

$$\Gamma(n+1) \sim n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n} \sqrt{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{R_\nu}{n^\nu}\,.$$

Die wirkliche Ausrechnung der Koeffizienten R_ν ist mühsam. Die ersten Werte sind:

$$R_0 = 1, \quad R_1 = \frac{1}{2^2 \cdot 3}, \quad R_2 = \frac{1}{2^5 \cdot 3^2}, \quad R_3 = -\frac{139}{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5}.$$

D r i t t e s B e i s p i e l. In der Theorie der K e p l e r schen Bewegung spielt das Integral

$$A_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{n(x-\varepsilon \sin x)i}}{1-\varepsilon \cos x}\, dx \tag{40}$$

eine Rolle; dabei soll $0 < \varepsilon < 1$, und n ganzzahlig sein. Es ist

$$A_n = \int_{-\pi}^{-\pi+\tau i} + \int_{-\pi+\tau i}^{\pi+\tau i} + \int_{\pi+\tau i}^{\pi},$$

wo die Integrationswege geradlinig sind. Aber das erste und dritte Integral auf der rechten Seite heben sich gegenseitig auf, weil n ganzzahlig ist, und es ergibt sich:

$$A_n = \int_{-\pi+\tau i}^{\pi+\tau i} \frac{e^{n(x-\varepsilon \sin x)i}}{1-\varepsilon \cos x}\, dx.$$

Dabei wollen wir die Zahl τ positiv und möglichst vorteilhaft wählen. Für $x = z + \tau i$ ist

$$\begin{aligned}\sin x &= \cos \tau i \cdot \sin z + \sin \tau i \cdot \cos z \\ &= \frac{1}{2}(e^{\tau} + e^{-\tau}) \sin z + \frac{i}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}) \cos z;\end{aligned}$$

also

$$\left| e^{(x-\varepsilon \sin x)i} \right| = e^{-\tau + \frac{\varepsilon}{2}(e^{\tau} - e^{-\tau}) \cos z}.$$

Das Maximum des Exponenten tritt ein für $z = 0$ und hat den Wert

$$-\tau + \frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon^{\tau} - e^{-\tau}).$$

Dieses Maximum wird möglichst klein, wenn

$$-1 + \frac{\varepsilon}{2}(e^{\tau} + \varepsilon^{-\tau}) = 0$$

ist, also für

(41) $$\tau = \log \frac{1 + \sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Indem wir fortan mit τ nur den Wert (41) bezeichnen, bemerken wir, daß im Innern des Rechtecks mit den Ecken

$$-\pi, \quad -\pi + \tau i, \quad \pi + \tau i, \quad \pi$$

kein singulärer Punkt des Integranden liegt; wohl aber liegt ein solcher auf dem Rand an der Stelle τi; denn es ist

$$1 - \varepsilon \cos \tau i = 1 - \frac{\varepsilon}{2}(e^{\tau} + e^{-\tau}) = 0.$$

In der Formel

$$A_n = \int_{-\pi+\tau i}^{\pi+\tau i} \frac{e^{n(x-\varepsilon \sin x)i}}{1-\varepsilon \cos x}\, dx$$

muß daher der Integrationsweg dem Punkt τi nach unten ausweichen. Setzt man $x = z + \tau i$, so kommt:

$$A_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{n(z+\tau i - \varepsilon \sin(z+\tau i))i}}{1 - \varepsilon \cos(z+\tau i)}\, dz,$$

wobei der Integrationsweg dem Nullpunkt in der unteren Halbebene ausweichen muß. Da aber mit Berücksichtigung von (41)

$$e^{\tau i i} = e^{-\tau} = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon},$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \sin(z+\tau i) &= \frac{\varepsilon}{2}(e^{\tau}+e^{-\tau})\sin z + i\,\frac{\varepsilon}{2}(e^{\tau}-e^{-\tau})\cos z \\ &= \sin z + i\sqrt{1-\varepsilon^2}\cos z, \\ \varepsilon \cos(z+\tau i) &= \frac{\varepsilon}{2}(e^{\tau}+e^{-\tau})\cos z - i\,\frac{\varepsilon}{2}(e^{\tau}-e^{-\tau})\sin z \\ &= \cos z - i\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin z \end{aligned}$$

ist, so kommt nach leichter Umformung:

$$(42)\qquad A_n = \left(\frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\, e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} z^{-1} f(z)\, \varphi(z)^n\, dz,$$

wobei

$$(43)\qquad f(z) = \frac{z}{1-\cos z + i\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin z},$$

$$(44)\qquad \log \varphi(z) = i(z - \sin z) - \sqrt{1-\varepsilon^2}\,(1-\cos z)$$

ist. Die Funktion $\varphi(z)$ erfüllt unsere Voraussetzungen, und zwar ist

$$\log \varphi(z) = -\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2} z^2 + \frac{i}{6} z^3 + \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{24} z^4 - \frac{i}{120} z^5 \cdots;$$

also:

$$p = 2,$$

$$b_0 = -\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2},\quad b_1 = \frac{i}{6},\quad b_2 = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{24},\quad b_3 = -\frac{i}{120}, \ldots,$$

$$r = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2},\quad \beta = \pi,\quad \omega_1 = \pi,\quad \omega_2 = 2\pi.$$

Ebenso erfüllt die Funktion $f(z)$ unsere Voraussetzungen, und zwar ist

$$f(z) = 1 : \left[i\sqrt{1-\varepsilon^2} + \frac{1}{2} z - \frac{i\sqrt{1-\varepsilon^2}}{6} z^2 - \frac{1}{24} z^3 \dots \right]$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} z + i \frac{1+2\varepsilon^2}{12\sqrt{1-\varepsilon^2}^3} z^2 - \frac{\varepsilon^2}{8(1-\varepsilon^2)^2} z^3 \dots$$

Das Integral in (42) hat also die in § 4 behandelte Form mit $a = 0$. Die Koeffizienten Q_ν mit geradem Index sind nach (32) alle gleich Null, mit Ausnahme von Q_0. Für diesen tritt die am Schluß des § 4 gemachte Bemerkung in Kraft; demnach ist

$$Q_0 = g_{0,0} \cdot \lim_{\nu = 0} (e^{2i\pi\nu} - e^{i\pi\nu}) \, \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = 2\pi i g_{0,0}.$$

Die Zahl $g_{\nu,\mu}$ ist der Koeffizient von z^ν in

$$\frac{1}{\mu!} \left(\frac{-i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} z + i \frac{1+2\varepsilon^2}{12\sqrt{1-\varepsilon^2}^3} z^2 - \frac{\varepsilon^2}{8(1-\varepsilon^2)^2} z^3 \dots \right)$$

$$\times \left(\frac{i}{6} z + \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{24} z^2 - \frac{i}{120} z^3 \dots \right)^\mu.$$

Daher $g_{0,0} = \dfrac{-i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, und also

$$Q_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Ferner ist

$$g_{1,0} = \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)}, \quad g_{1,1} = \frac{1}{6\sqrt{1-\varepsilon^2}};$$

also

$$Q_1 = 2\left[\frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3(1-\varepsilon^2)} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \right] = \frac{4\sqrt{\pi}}{3(1-\varepsilon^2)}.$$

Die Zahlen $g_{2,\mu}$ brauchen nicht berechnet zu werden, da wir bereits erkannt haben, daß $Q_2 = 0$ ist (der Index ist gerade). Dagegen wollen wir noch die Zahlen $g_{3,\mu}$ angeben; eine leichte Rechnung liefert:

$$g_{3,0}=\frac{-\varepsilon^2}{8(1-\varepsilon^2)^2},\quad g_{3,1}=\frac{-1-29\,\varepsilon^2}{720\sqrt{1-\varepsilon^2}^{\,3}},\quad g_{3,2}=\frac{-\varepsilon^2}{144(1-\varepsilon^2)},$$

$$g_{3,3}=\frac{-1}{1296\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Also:

$$Q_3=2\left[\frac{-\varepsilon^2}{8(1-\varepsilon^2)^2}\,\Gamma(\tfrac{3}{2})-\frac{1+29\,\varepsilon^2}{360(1-\varepsilon^2)^2}\,\Gamma(\tfrac{5}{2})-\frac{\varepsilon^2}{36(1-\varepsilon^2)^2}\,\Gamma(\tfrac{7}{2})\right.$$
$$\left.-\frac{1}{162(1-\varepsilon^2)^2}\,\Gamma(\tfrac{9}{2})\right]=-\frac{46+189\,\varepsilon^2}{540\,(1-\varepsilon^2)^2}\sqrt{\pi}\,.$$

Der Koeffizient Q_4 ist wieder Null, weil er einen geraden Index hat. Weiter wollen wir die Rechnung nicht führen. Die Formel (31) liefert dann für das in (42) auftretende Integral den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}+\frac{4\sqrt{\pi}}{3(1-\varepsilon^2)}\left(\frac{2}{n\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{46+189\,\varepsilon^2}{540(1-\varepsilon^2)^2}\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{n\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$+\,O\left(\frac{1}{\sqrt{n^5}}\right);$$

also endlich, wenn man das in (42) einsetzt:

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} A_n=\frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\,e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^n\cdot\left[1+\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\frac{2}{n\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right.\\ \left.-\frac{46+189\,\varepsilon^2}{1080\sqrt{\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2}^{\,3}}\left(\frac{2}{n\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^{\frac{3}{2}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n^5}}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Viertes Beispiel. Wir behandeln jetzt das Integral (40) im Fall $\varepsilon=1$. Dann hat aber der Integrand am Nullpunkt einen Pol zweiter Ordnung, und wir setzen demgemäß

$$(46)\qquad B_n=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{n(z-\sin z)i}}{1-\cos z}\,dz$$

mit dem Zusatz, daß der Integrationsweg dem Nullpunkt ausweichen muß. Ob das in der oberen oder unteren Halbebene geschieht, ist ohne Einfluß auf den Wert des Integrals, da, wie man leicht sieht, das Residuum des Integranden verschwindet.

Es ist, wenn γ eine kleine positive Zahl bedeutet,

$$B_n = \int_{-\pi}^{-\pi+\gamma\pi i} + \int_{-\pi+\gamma\pi i}^{\pi+\gamma\pi i} + \int_{\pi+\gamma\pi i}^{\pi}.$$

Das erste und dritte Integral der rechten Seite heben sich gegenseitig auf, weil n ganzzahlig ist; als Weg für das mittlere kann die gebrochene Linie

$$-\pi + \gamma\pi i, \quad 0, \quad \pi + \gamma\pi i$$

gewählt werden, jedoch mit Umgehung des Nullpunkts. Bezeichnen wir diese Linie kurz mit L, so ist also

$$B_n = \int_L z^{-2} f(z)\, \varphi(z)^n\, dz, \tag{47}$$

wobei

$$f(z) = \frac{z^2}{1-\cos z}, \quad \varphi(z) = e^{(z-\sin z)i}. \tag{48}$$

Auf der Linie L ist $z = \tau(+1+\gamma i)$, wo τ von 0 bis π läuft. Daher

$$|\varphi(z)| = |e^{(z-\sin z)i}| = e^{-\tau\gamma + \frac{1}{2}(e^{\tau\gamma} - e^{-\tau\gamma})\cos\tau}.$$

Der hier auftretende Exponent ist, wenn $\gamma < \frac{1}{2\pi}$ gewählt wird, gleich

$$-\tau\gamma + \left(\tau\gamma + \frac{\tau^3\gamma^3}{3!} + \frac{\tau^5\gamma^5}{5!} + \cdots\right)\cos\tau = -\tau\gamma(1-\cos\tau)$$
$$+ \left(\frac{\tau^3\gamma^3}{3!} + \frac{\tau^5\gamma^5}{5!} + \cdots\right)\cos\tau$$
$$\leq -\tau\gamma \cdot \frac{\tau^2}{12} + \frac{\tau^3\gamma^3}{6} \cdot \frac{1}{1-\tau\gamma} < -\frac{\tau^3\gamma}{12} + \frac{\tau^3\gamma^3}{3} = -\frac{\tau^3\gamma}{12}(1-4\gamma^2);$$

er ist also negativ; nur für $\tau = 0$ verschwindet er. Folglich ist $\varphi(0) = 1$ und sonst auf L durchweg $|\varphi(z)| < 1$.

Das Integral (47) hat somit die in § 4 behandelte Form mit $a = -1$, und zwar ist

$$f(z) = \frac{z^2}{1-\cos z} = 2 + \frac{1}{6} z^2 + \frac{1}{120} z^4 + \cdots,$$

$$\log \varphi(z) = (z - \sin z) i = \frac{i}{3!} z^3 - \frac{i}{5!} z^5 + \frac{i}{7!} z^7 - \cdots;$$

also

$$(49) \quad \begin{cases} p = 3, \\ b_0 = \frac{i}{3!}, \; b_1 = 0, \; b_2 = -\frac{i}{5!}, \; b_3 = 0, \; b_4 = \frac{i}{7!}, \cdots, \\ r = \frac{1}{6}, \; \beta = \frac{\pi}{2}, \; \omega_1 = \frac{5\pi}{6}, \; \omega_2 = \frac{7\pi}{6} \pm \pi, \end{cases}$$

wobei in ω_2 das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem man dem Nullpunkt in der unteren oder oberen Halbebene ausweicht. Die Zahl $g_{\nu,\mu}$ ist jetzt der Koeffizient von z^ν in

$$\frac{1}{\mu!} \frac{z^2}{1-\cos z} \cdot \left(-\frac{i}{5!} z^2 + \frac{i}{7!} z^4 - \frac{i}{9!} z^6 + \cdots\right)^\mu$$
$$= \frac{1}{\mu!}\left(2 + \frac{1}{6} z^2 + \cdots\right)\left(-\frac{i}{120} z^2 + \cdots\right)^\mu.$$

Für ungerade ν ist daher $g_{\nu,\mu} = 0$, also auch $Q_\nu = 0$. Ferner enthält nach (32) Q_ν den Faktor

$$e^{i\omega_2(a+\nu)} - e^{i\omega_1(a+\nu)} = e^{\frac{i\pi}{6}(\nu-1)} - e^{\frac{5i\pi}{6}(\nu-1)};$$

also ist für $\nu \equiv 1 \pmod{3}$ ebenfalls $Q_\nu = 0$. Nur der Wert $\nu = 1$ würde eine Ausnahme machen, bei welcher die Bemerkung am Schluß des § 4 in Kraft tritt; jedoch ist Q_1 ebenfalls gleich Null, weil der Index ungerade ist. Als nicht verschwindende Koeffizienten Q_ν kommen demnach nur die folgenden in Frage:

$$Q_0, \; Q_2, \; Q_6, \; Q_8, \; Q_{12}, \; Q_{14}, \; \ldots$$

Es sind diejenigen, deren Index modulo 6 den Rest 0 oder 2 läßt. Wir wollen nur die beiden ersten berechnen.

Es ist $g_{0,0} = 2$; also

$$Q_0 = \left(e^{-\frac{i\pi}{6}} - e^{-\frac{5i\pi}{6}}\right) \cdot 2\,\Gamma(-\tfrac{1}{3}) = 2\sqrt{3}\,\Gamma(-\tfrac{1}{3})$$
$$= -6\sqrt{3}\,\Gamma(\tfrac{2}{3}).$$

Ferner ist

$$g_{2,0} = \frac{1}{6},\quad g_{2,1} = -\frac{i}{60},\quad g_{2,2} = 0;$$

also

$$Q_2 = \left(e^{\frac{i\pi}{6}} - e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)\left[\tfrac{1}{6}\,\Gamma(\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{10}\,\Gamma(\tfrac{4}{3})\right] = \tfrac{1}{5}\sqrt{3}\,\Gamma(\tfrac{1}{3}).$$

Die Koeffizienten Q_3, Q_4, Q_5 sind Null, und Formel (31) liefert daher das folgende Resultat:

$$B_n = \tfrac{1}{3}\left[-6\sqrt{3}\,\Gamma(\tfrac{2}{3})\left(\frac{6}{n}\right)^{-\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{5}\sqrt{3}\,\Gamma(\tfrac{1}{3})\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\right] + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right),$$

oder, etwas anders geschrieben:

$$(50)\qquad B_n = -\frac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{n}\left[\Gamma(\tfrac{2}{3}) - \frac{\sqrt[3]{36}}{30}\,\Gamma(\tfrac{1}{3})\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

Fünftes Beispiel. Zum Schluß behandeln wir noch das Integral

$$(51)\qquad C_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{n(z - \sin z)i}\,dz.$$

Hier kann man den Integrationsweg genau wie beim vorigen Beispiel abändern, und es kommt analog zu (47)

$$(52)\qquad C_n = \int_L f(z)\,\varphi(z)^n\,dz,$$

wobei $f(z) = 1$ ist, während $\varphi(z)$ die gleiche Bedeutung hat wie beim vorigen Beispiel. Das Integral (52) hat daher die in § 4 behandelte Form mit $\alpha = 1$, und es gelten wieder die Formeln (49).

Die Zahl $g_{\nu,\mu}$ ist jetzt der Koeffizient von z^ν in

$$\frac{1}{\mu!}\left(-\frac{i}{5!}z^2 + \frac{i}{7!}z^4 - \frac{i}{9!}z^6 + \cdots\right)^\mu.$$

Für ungerade ν ist also wieder $g_{\nu,\mu}=0$ und folglich $Q_\nu=0$. Ferner enthält Q_ν diesmal den Faktor

$$e^{i\omega_2(\alpha+\nu)}-e^{i\omega_1(\alpha+\nu)}=e^{\frac{i\pi}{6}(\nu+1)}-e^{\frac{5i\pi}{6}(\nu+1)},$$

so daß für $\nu\equiv-1 \pmod{3}$ ebenfalls $Q_\nu=0$ ist. Als nicht verschwindende Koeffizienten Q_ν kommen demnach jetzt nur die folgenden in Frage:

$$Q_0,\ Q_4,\ Q_6,\ Q_{10},\ Q_{12},\ Q_{16},\ \ldots$$

Es sind diejenigen, deren Index modulo 6 den Rest 0 oder 4 läßt. Wir wollen die drei ersten berechnen. Es ist $g_{0,0}=1$; also

$$Q_0=\left(e^{\frac{i\pi}{6}}-e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)\cdot 1\cdot\Gamma(\tfrac{1}{3})=\sqrt{3}\,\Gamma(\tfrac{1}{3}).$$

Ferner ist

$$g_{4,0}=0,\quad g_{4,1}=\frac{i}{7!},\quad g_{4,2}=\frac{-1}{2!(5!)^2},\quad g_{4,3}=0,\quad g_{4,4}=0;$$

also

$$Q_4=\left(e^{\frac{5i\pi}{6}}-e^{\frac{25i\pi}{6}}\right)\cdot\left[-\frac{3!}{7!}\Gamma(\tfrac{5}{3}+1)+\frac{(3!)^2}{2!(5!)^2}\Gamma(\tfrac{5}{3}+2)\right]$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{420}\Gamma(\tfrac{2}{3}).$$

Endlich findet man

$$g_{6,0}=0,\quad g_{6,1}=-\frac{i}{9!},\quad g_{6,2}=\frac{1}{5!\,7!},\quad g_{6,3}=\frac{i}{3!(5!)^3},$$

$$g_{6,4}=0,\quad g_{6,5}=0,\quad g_{6,6}=0;$$

also

$$Q_6=\left(e^{\frac{7i\pi}{6}}-e^{\frac{35i\pi}{6}}\right)\cdot\left[\frac{3!}{9!}\Gamma(\tfrac{7}{3}+1)-\frac{(3!)^2}{5!\,7!}\Gamma(\tfrac{7}{3}+2)\right.$$

$$\left.+\frac{(3!)^3}{3!(5!)^3}\Gamma(\tfrac{7}{3}+3)\right]=-\frac{\sqrt{3}}{8100}\Gamma(\tfrac{1}{3}).$$

Die Koeffizienten Q_7, Q_8, Q_9 sind Null, und nach (31) ergibt sich daher folgendes Resultat:

$$C_n = \tfrac{1}{3}\left[\sqrt{3}\,\Gamma(\tfrac{1}{3})\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{420}\,\Gamma(\tfrac{2}{3})\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{5}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{8100}\,\Gamma(\tfrac{1}{3})\left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{7}{3}}\right] + O\left(\frac{1}{n^{\frac{11}{3}}}\right),$$

oder etwas anders geschrieben:

$$(53)\quad \begin{cases} C_n = \dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{3}}\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\left[\Gamma(\tfrac{1}{3}) - \dfrac{\sqrt[3]{6}}{70}\,\Gamma(\tfrac{2}{3})\,\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}} - \dfrac{1}{225}\,\Gamma(\tfrac{1}{3})\,\dfrac{1}{n^2}\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. + O\left(\dfrac{1}{n^{\frac{10}{3}}}\right)\right]. \end{cases}$$

Unser drittes und fünftes Beispiel sind auch von Burkhardt a. a. O. behandelt, der aber von Formel (45) nur die beiden ersten, von Formel (53) gar nur das erste Glied ermittelt, während wir mit leichter Mühe nicht nur mehr Glieder berechnen, sondern vor allem auch die Größenordnung des Fehlers angeben konnten.