Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1917. Heft III

Oktober- bis Dezembersitzung

München 1917

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über das Verhalten analytischer Funktionen an Verzweigungsstellen[1]).

Von **Georg Faber.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 13. Oktober 1917.

Das Verhalten analytischer Funktionen an Polen und wesentlich singulären Stellen ist durch unzählige Arbeiten bis in alle Einzelnheiten aufgeklärt; dagegen fehlen allgemeine Untersuchungen über das Verhalten an Verzweigungsstellen fast völlig. In einer früheren Abhandlung (Math. Ann., Bd. 60 (1905), S. 379) habe ich das Mittag-Lefflersche Theorem auf mehrdeutige Funktionen ausgedehnt; dadurch ist die Untersuchung beliebig verwickelter mehrdeutiger Funktionen auf die einfacherer zurückgeführt, welche die Mindestzahl, nämlich zwei Verzweigungsstellen besitzen. Von diesen Funktionen ist wieder $\varphi(x) = \int\limits_a^b \frac{s(z)}{z-x}\,dz$ der einfachste Typus; a, b sind die beiden Verzweigungsstellen, das Integral ist über einen vorgeschriebenen Weg C zu erstrecken, $s(z)$ ist eine gegebene analytische Funktion von $z = \xi + i\eta$ oder auch nur eine

[1]) Dieser Aufsatz bildet einen stark gekürzten Auszug aus einer umfangreichen Abhandlung, die vor zwei Jahren von der Redaktion der acta mathematica angenommen worden war, von mir aber, da die Drucklegung sich ins Unabsehbare verzögerte, wieder zurück erbeten wurde. Die vorliegende Fassung, in welcher ich von längeren Überlegungen nur den Gedankengang mitteile und die nicht schwierige, aber stellenweise weitläufige Einzelnausführung dem Leser überlasse, gewinnt dadurch vor der ursprünglichen Abhandlung den Vorzug größerer Übersichtlichkeit.

Funktion von ξ, η. In diesem Falle kann C eine natürliche Grenze der Funktion $\varphi(x)$ sein, und a, b sind dann nicht eigentliche Verzweigungspunkte, insofern es unmöglich ist, durch einen Umlauf um sie in ein anderes Blatt der Funktion zu gelangen; trotzdem will ich auch in diesem Falle von einem „unausgebildeten" Verzweigungspunkt sprechen. Ist $s(z)$ für alle inneren Punkte von C regulär analytisch, so darf man bekanntlich C noch in gewissen Grenzen abändern, auch ist dann (wie übrigens auch unter viel allgemeineren Voraussetzungen über $s(z)$) die Differenz der Funktionswerte $\varphi(x)$ an beiden Ufern des Schnitts C gleich $2\pi i s(x)$; $s(z)$ möge daher die „Sprungfunktion" heißen.

Die Funktionen $\varphi(x) = \int\limits_a^b \frac{s(z)}{z-x}\,dz$ haben für die allgemeine Theorie der mehrdeutigen Funktionen nicht nur als einfachstes Beispiel, sondern auch deshalb besondere Bedeutung, weil jede Funktion, welche die zwei Verzweigungsstellen a, b, jedoch sonst in der längs C aufgeschnittenen Ebene keine Singularität besitzt, sich in der Form

$$g(x)\int\limits_a^b \frac{s(z)}{z-x}\,dz + g_1(x) \tag{1}$$

darstellen läßt, wo $g(x)$, $g_1(x)$ eindeutige und in der ganzen Ebene außer in a und b reguläre Funktionen bedeuten.

Es ist keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, wenn ich im folgenden $a = 1$, b reell > 1, $\leq \infty$ annehme und den Schnitt C von 1 bis b geradlinig führe. Ich untersuche diese Funktionen $\varphi(x)$ sowie gewisse allgemeinere $\varphi_a(x)$, die in der Form (1) enthalten sind, in der Umgebung der Stelle $x = 1$ und behandle insbesondere folgende beide Aufgaben in den beiden ersten Abschnitten der Arbeit:

1. Von welcher Größenordnung sind die Koeffizienten a_ν, a_ν^a der Potenzreihen $\varphi(x) = \sum\limits_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$,

$\varphi_a(x) = \sum_0^\infty \nu\, a_\nu^a x^\nu$; die gleiche Aufgabe für die Reihen nach Potenzen von $x - x_1$ ist dadurch von selbst mitgelöst, immer falls x_0 reell < 1 ist, für komplexe x_0 jedenfalls dann, wenn die Reihe auf ihrem Konvergenzkreis nur die eine singuläre Stelle $x = 1$ hat, und wenn es erlaubt ist, in deren Nähe den Schnitt C so abzuändern, daß er in die Verlängerung des Radius $x_0 1$ fällt.

2. Untersuche ich Größenordnung und Wertevorrat der Funktionen $\varphi(x)$, $\varphi_a(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = 1$, insbesondere auf den Kreisen $|x - 1| =$ konst.

Ein dritter Abschnitt bringt Ergänzungen, Beispiele, Anwendungen.

Es ist zweckmäßig, neben $s(\xi)$ $(\infty > \xi > 1)$ noch zwei andere Funktionen $v(\tau)$ $(0 < \tau < 1)$ und $t(w)$ $(1 < w < \infty)$ zu betrachten, deren Beziehungen zu $s(\xi)$ und untereinander durch folgende Gleichungen ausgedrückt werden:

$$
\begin{aligned}
\xi s(\xi) &= \tau^{-1} s(\tau^{-1}) = \frac{w}{w-1} s\left(\frac{w}{w-1}\right) \\
&= v\left(\frac{1}{\xi}\right) = v(\tau) = v\left(1 - \frac{1}{w}\right) \\
&= t\left(\frac{\xi}{\xi - 1}\right) = t\left(\frac{1}{1-\tau}\right) = t(w).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Außerdem benutze ich folgende Bezeichnungen: ε, ε', ε'' sind stets Funktionen (nicht jedesmal die gleichen), die der Null zustreben, wenn ihre Veränderliche positiv unendlich wird; es ist also z. B. $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon(\nu) = 0$, $\lim\limits_{\xi=1+0} \varepsilon'\left(\frac{1}{\xi - 1}\right) = 0$ usw.; für $\varepsilon(\nu)$ schreibe ich kürzer ε_ν. In ähnlichem Sinne schreibe ich, $\varepsilon_{\nu\beta}$, wenn $\lim\limits_{\beta=\infty} \left(\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\, \varepsilon_{\nu\beta}\right) = 0$.

Unter dem Logarithmus einer reellen nicht negativen oder einer komplexen Zahl x verstehe ich stets den Hauptwert $\lg x$, dessen Imaginärteil zwischen $-\pi i$ und $+\pi i$ liegt; wenn x veränderlich ist und reelle negative Werte annimmt, wird jedesmal durch die Forderung der Stetigkeit bestimmt, ob der

Imaginärteil $+\pi i$ oder $-\pi i$ sein soll. Potenzen a^k seien stets durch $e^{k \lg a}$ definiert; $\lg_2 x$ ist soviel wie $\lg(\lg x)$, $\lg_m x = \lg(\lg_{m-1} x)$ $(m = 3, 4, \ldots)$, $\lg_1 x = \lg x$, $L_m x = x \lg x \lg_2 x \ldots \lg_m x$.

I. Abschnitt.

Abschätzung der Taylor-Koeffizienten.

Die Koeffizienten a_ν der Potenzreihe

$$(3)\quad \varphi(x) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = \int_1^\infty \frac{s(\xi)\,d\xi}{\xi - x} = \int_0^1 \frac{v(\tau)\,d\tau}{1 - \tau x} = \int_1^\infty \frac{t(w)\,dw}{w(w - x(w-1))}$$

haben die Form[1])

$$(4)\quad a_\nu = \int_1^\infty \frac{s(\xi)}{\xi^{\nu+1}}\,d\xi = \int_0^1 v(\tau)\,\tau^\nu\,d\tau = \int_1^\infty \frac{t(w)\,(1 - w^{-1})^\nu}{w^2}\,dw,$$

und es handelt sich darum, diese Integrale (4) abzuschätzen; dies soll zunächst unter der Voraussetzung geschehen, daß $s(\xi)$ reell und

$$(5)\qquad s(\xi) \geqq 0 \text{ ist.}$$

Doch soll selbstverständlich nicht $\int_1^\xi s(\xi)\,d\xi = 0$ sein für alle ξ in einer gewissen rechtsseitigen Umgebung der Stelle $\xi = 1$.

Bei der hier wie auch im nächsten Abschnitt erstrebten Genauigkeit kommt es auf die Funktionswerte $s(\xi)$ für $\xi > \xi'$, wo ξ' irgend eine feste Zahl > 1 ist, überhaupt nicht an; es darf daher immer, wenn es vorteilhaft erscheint,

$$(6)\qquad s(\xi) = 0 \text{ für } \xi > \xi'$$

vorausgesetzt werden. Dadurch wird von $\varphi(x)$ nur eine im Kreise $|x| = \xi'$ reguläre Funktion abgezogen.

---

1) Solche Reihen $\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu$ sind zuerst von Herrn Hadamard (Journ. de math. (4), Bd. 8 (1892), S. 158) und seitdem vielfach untersucht worden (vgl. z. B. Pringsheim, Münch. Ber. 1912, S. 58, woselbst weitere Literaturangaben). Meine obigen Ausführungen haben mit diesen Untersuchungen nur den Ausgangspunkt gemein.

Aus (5) folgen sofort zwei Sätze, deren sehr einfache Beweise ich unterdrücke:

I. Es ist

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 1. \tag{7}$$

II. Wenn $v(\tau)$ und $\bar{v}(\tau)$ 2 Funktionen, für die $\lim\limits_{\tau=1-0} \frac{v(\tau)}{\bar{v}(\tau)} = A$ gilt, und a_ν, $\overline{a_\nu}$ die zugehörigen Koeffizienten sind, so ist

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{\overline{a_\nu}} = A. \tag{8}$$

Die Annahme (5) ist als Ausgangspunkt für die weitere Untersuchung noch zu allgemein; ich mache daher vorläufig außerdem folgende Voraussetzung:

Zu jedem Zahlenpaare $\beta' > 1$, $\varepsilon > 0$ (β' beliebig groß, ε beliebig klein) gibt es eine Zahl $w' > 1$ der Art, daß für alle $w > w'$ und alle β zwischen 1 und β' folgende Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^{-1} t(\beta w) < t(w) < (1+\varepsilon) t(\beta w)\\ (1+\varepsilon)^{-1} t(\beta^{-1} w) < t(w) < (1+\varepsilon) t(\beta^{-1} w)\end{aligned} \tag{9 a}$$

oder, was dasselbe heißt,

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^{-1} v\left(1-\frac{1}{\beta w}\right) < v\left(1-\frac{1}{w}\right) < (1+\varepsilon) v\left(1-\frac{1}{\beta w}\right)\\ (1+\varepsilon)^{-1} v\left(1-\frac{\beta}{w}\right) < v\left(1-\frac{1}{w}\right) < (1+\varepsilon) v\left(1-\frac{\beta}{w}\right)\end{aligned} \tag{9 b}$$

oder

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^{-1} s\left(1+\frac{1}{\beta w-1}\right) < s\left(1+\frac{1}{w-1}\right) < (1+\varepsilon) s\left(1+\frac{1}{\beta w-1}\right)\\ (1+\varepsilon)^{-1} s\left(1+\frac{1}{\beta^{-1} w-1}\right) < s\left(1+\frac{1}{w-1}\right) < (1+\varepsilon) s\left(1+\frac{1}{\beta^{-1} w-1}\right)\end{aligned} \tag{9 c}$$

Durch diese Bedingungen, die weder Monotonie noch Stetigkeit der Funktionen $t(w)$, $s(\xi)$, $v(\tau)$ verlangen, wird ein großer Kreis der bekannten elementaren mehrdeutigen Funktionen getroffen; genügen zwei Funktionen einzeln diesen Bedingungen (9), so auch ihr Produkt und Quotient, unter Beachtung von (5) auch ihre Summe.

Beispiele von Funktionen $t(w)$, die der Bedingung (9a) genügen: $t(w) = (\lg w)^k$, wo k jede reelle Zahl sein kann; allgemeiner $(\lg_m w)^k$, ferner $\lg w + \sin \lg w$ usw.

Für alle zugelassenen Funktionen $t(w)$ gilt folgender leicht zu beweisende Satz:

Zu jeder noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl w' der Art, daß für $w_2 > w_1 > w'$

(10) $t(w_2)w_2^{-\varepsilon} < (1+\varepsilon)\, t(w_1) w_1^{-\varepsilon}$ und $t(w_2) w_2^{\varepsilon} > (1+\varepsilon)^{-1}\, t(w_1)\, w_1^{\varepsilon}$

wird. Und hieraus folgt für jedes $\eta > 0$

$$\text{(11)} \qquad \lim_{w=\infty} w^{\eta} t(w) = \infty, \quad \lim_{w=\infty} w^{-\eta} t(w) = 0.$$

Nach diesen Vorbereitungen zerlege ich $\int\limits_0^1 v(\tau)\tau^{\nu} dt$ in die 3 Integrale $\int\limits_0^{1-\frac{\beta}{\nu}} + \int\limits_{1-\frac{\beta}{\nu}}^{1-\frac{1}{\beta\nu}} + \int\limits_{1-\frac{1}{\beta\nu}}^{1}$ mit $\beta > 1$, $< \nu$. Auf Grund des Vorausgeschickten erkennt man, daß das erste und dritte dieser Teilintegrale die Form $\varepsilon_{\nu\beta} \frac{t(\nu)}{\nu}$ haben, während das mittlere gleich $\frac{t(\nu)}{\nu}(1 + \varepsilon_{\nu\beta})$ wird; und da a_ν selbst von β nicht abhängt, folgt daraus das erste Hauptergebnis:

$$\text{(12)} \quad a_\nu = \frac{t(\nu)}{\nu}(1+\varepsilon_\nu) = \frac{v\left(1-\frac{1}{\nu}\right)}{\nu}(1+\varepsilon_\nu) = \frac{s\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}{\nu}(1+\varepsilon_\nu').$$

Diese Abschätzung soll nach zwei Richtungen erweitert werden. Die erste Verallgemeinerung wird am besten an einem Beispiel erklärt, an dem zugleich zu ersehen ist, wie sie auch in anderen Fällen angebracht werden kann. Die Funktion $t(w) = \sin(\lg_2 w)$ gehört nicht zu den vermöge (9a) zugelassen; schließt man aber die Werte ν aus, die in den Intervallen $\frac{1}{k}\exp(\exp k\pi) < \nu < k\exp(\exp k\pi)$ liegen $(k = 1, 2, 3 \ldots)$, so bleibt für die übrigen ν die Abschätzung (12) giltig, für die ausgeschlossenen ν aber gilt $\lim\limits_{\nu=\infty} \nu a_\nu = 0$; ähnliches gilt für $t(w) = \cos \lg_2 w$, wobei wiederum die Nullstellen der Funktions-Intervalle auszuschließen sind. Da die beidesmal ausgeschlossenen Intervalle jedenfalls für große ν nicht übereinander greifen, gilt für $t(w) = \cos(\lg_2 w) + \sqrt{-1}\sin(\lg_2 w)$ die Gleichung (12) ohne Einschränkung, (ebenso für $t(w) = \cos \lg_m w + i \sin \lg_m w$, $m > 2$).

Die zweite Verallgemeinerung, die auch gleichzeitig mit der soeben besprochenen angebracht werden kann, besteht in der Zulassung von Sprungfunktionen $s_\alpha(\xi) = (\xi - 1)^\alpha s(\xi)$, wo $s(\xi)$ der Bedingung (9b) genügt, während α irgend eiue reelle Zahl sein kann; im Anschluß an die bisherigen Bezeichnungen setze ich $v_\alpha(\tau) = \frac{1}{\tau} s_\alpha\left(\frac{1}{\tau}\right)$, $t_\alpha(w) = v_\alpha\left(1 - \frac{1}{w}\right)$.

Wenn $\alpha > -1$ ist, läßt sich eine Funktion $\varphi_\alpha(x)$ mit der vorgeschriebenen Differenz $2\pi i\, s_\alpha(\xi)$ an beiden Ufern von C am einfachsten wieder durch das Integral $\int\limits_1^\infty \frac{s_\alpha(\xi)}{\xi - x}\, d\xi$ definieren:

$$(13)\quad \varphi_\alpha(x) = \int\limits_1^\infty \frac{s_\alpha(\xi)}{\xi - x}\, d\xi = \int\limits_0^1 \frac{v_\alpha(\tau)}{1 - \alpha\tau}\, d\tau = \int\limits_1^\infty \frac{t_\alpha(w)}{w(w - x(w-1))}.$$

$\varphi_0(x)$ ist somit das nämliche wie $\varphi(x)$. Daß das Verhalten von $s_\alpha(\xi)$ bei $\xi = \infty$ die Darstellung (13) nicht hindert, darf ohne weiteres angenommen werden, da wir uns vorbehalten haben, jederzeit die Voraussetzung (6) zu machen. Mit Überlegungen, ganz ähnlich denen, die zu (12) geführt haben, beweist man, daß die Koeffizienten a_ν^α der Potenzreihen

$$(14)\qquad \varphi_\alpha(x) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu^\alpha x^\nu$$

für die obigen Funktionen $\varphi_\alpha(x)$ $(\alpha > -1)$ der Grenzgleichung

$$(15) \qquad a_\nu^\alpha = \frac{t(\nu)}{\nu^{1+\alpha}} \Gamma(\alpha+1)(1+\varepsilon_\nu)$$

genügen; für $\alpha = 0$ ist (15) mit (12) identisch.

Ist n irgend eine ganze Zahl > 0 und bleibt $\alpha > -1$, so ergibt sich durch den Schluß von n auf $n+1$:

(16) $\varphi_{\alpha+n}(x) = (x-1)^n \varphi_\alpha(x) +$ einem Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades.

Wir hätten mithin, ohne daß dadurch die Abschätzung (15) beeinflußt worden wäre, $\varphi_\alpha(x)$ durch (13) nur für die α, die > -1 und $\leqq 0$ zu definieren brauchen, und für $\alpha + n$ die neue abgeänderte Definition

$$(17) \qquad \varphi_{\alpha+n}(x) = (x-1)^n \varphi_\alpha(x) \quad (-1 < \alpha \leqq 0)$$

verwenden können. Wir wollen künftig stets in diesem Sinne das Zeichen $\varphi_\alpha(x)$ verstehen und dürfen jetzt auch für n eine negative ganze Zahl wählen, so daß $\varphi_\alpha(x)$ für jedes reelle α definiert ist.

Durch eine unschwierige Rechnung, die ich hier nicht ausführe, findet man sodann, daß die Koeffizientenabschätzung (15) für alle reellen α giltig bleibt, außer wenn α eine negative ganze Zahl ist. Für diesen Ausnahmefall aber ergibt sich

$$(18) \qquad a_\nu^{-n} = (-1)^n \frac{T(\nu)}{\nu^{-n+1}\Gamma(n)}(1+\varepsilon_\nu).$$

Die hier benutzte Funktion $T(w)$ ist durch die Gleichung

$$(19) \qquad T(w) = \int_1^w \frac{t(w)\,dw}{w}$$

definiert und hat folgende Eigenschaften, die z. T. beim Beweise von (18), z. T. auch im nächsten Abschnitt zu benutzen sind:

I. $\lim\limits_{w=\infty} \dfrac{T(w)}{t(w)} = \infty$.

II. $T(w)$ genügt ebenso wie $t(w)$ den Ungleichungen (9a).

III. $\int\limits_1^\infty \frac{t\,w}{w}\,dw$ und $\sum\limits_0^\infty{}^{\nu}\, a_\nu$ konvergieren und divergieren gleichzeitig und sind im Falle der Konvergenz einander gleich.

Für eine spätere Anwendung möge noch erwähnt werden, daß nach dem Cauchyschen Integralsatze

$$(20) \qquad \overset{a}{a}_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi_a(z)}{z^{\nu+1}}\,dz \text{ ist,}$$

das Integral erstreckt über einen Kreis $|z| = \xi' > 1$ und eine Schleife, die auf beiden Ufern der reellen Achse und auf einem kleinen Kreis um den Punkt 1 herumführt, und daß hiebei, so lange man sich mit der Genauigkeit der Abschätzungen (15), (18) begnügt, das Integral über den Kreis $|z| = \xi'$ weggelassen werden darf.

Ist $\varkappa$ eine reelle Zahl < 1, so findet man vermöge der Substitution $\xi' = \dfrac{\xi - \varkappa}{1 - \varkappa}$ für die Koeffizienten $\overset{a}{a}_\nu(\varkappa)$ der Potenzreihe

$$\varphi_a(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu}\, \overset{a}{a}_\nu(\varkappa)\,(x - \varkappa)^\nu$$

die Abschäzung

$$(21) \qquad \begin{gathered} \overset{a}{a}_\nu(\varkappa) = (1-\varkappa)^{a-\nu}\,\overset{a}{a}_\nu\,(1 + \varepsilon_\nu) \\ (-\infty < a < +\infty;\ -\infty < \varkappa < 1). \end{gathered}$$

II. Abschnitt.

Verhalten der Funktionen $\varphi(x)$ und $\varphi_a(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = 1$.

Ich setze

$$(22) \quad x = 1 - \varrho^{-1}\cos\psi + i\varrho^{-1}\sin\psi \quad (-\pi < \psi < \pi,\ \ \varrho > 0),$$

und lasse dann ϱ über alle Grenzen wachsen. Das Integral $\int\limits_1^\infty \dfrac{\varrho^{-1}\sin\psi\, s(\xi)}{(\xi - 1 + \varrho^{-1}\cos\psi)^2 + \varrho^{-2}\sin^2\psi}\,d\xi$ für den Imaginärteil

$J(\varphi(x))$ zerlege ich in $\int\limits_{1}^{1+\frac{\varrho^{-1}}{\beta}} + \int\limits_{1+\frac{\varrho^{-1}}{\beta}}^{1+\varrho^{-1}\beta} + \int\limits_{1+\varrho^{-1}\beta}^{\infty}$ und finde diese Integrale der Reihe nach gleich $\varepsilon_{\varrho\beta}\psi t(\varrho)$, $(1+\varepsilon_{\varrho\beta})\psi t(\varrho)$, $\varepsilon_{\varrho\beta}\psi t(\varrho)$; daraus folgt

$$J(\varphi(x)) = \psi t(\varrho)\,(1+\varepsilon_\varrho) \tag{23}$$

und zwar ist $\lim\limits_{\varrho=\infty}\varepsilon_\varrho = 0$ gleichmäßig für alle ψ, die der Ungleichung $-\pi < \psi < \pi$ genügen. Für die Endwerte $\psi = \pm\pi$ hat das Integral für $J(\varphi(x))$ keinen Sinn; legt man ihm aber an diesen Stellen die Werte $\pm\pi s\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)$ bei, denen es, falls $s(\xi)$ bei $\xi = 1+\frac{1}{\varrho}$ stetig ist, ohnehin mit $\lim\psi = \pm\pi$ zustrebt, so gilt die Abschätzung (23) gleichmäßig in dem abgeschlossenen Intervall $-\pi \leqq \psi \leqq \pi$.

Die nämliche Zerlegung nehme ich mit dem Integrale $\int\limits_1^\infty \frac{(\xi-1+\varrho^{-1}\cos\psi)\,s(\xi)}{(\xi-1+\varrho^{-1}\cos\psi)^2+\varrho^{-2}\sin^2\psi}\,d\xi$ für den Realteil $\Re(\varphi(x))$ vor; während hier die beiden ersten Teilintegrale je auf $\varepsilon_{\varrho\beta}T(\varrho)$ führen, wird das dritte gleich $T(\varrho)\,(1+\varepsilon_{\varrho\beta})$ und also

$$\Re(\varphi(x)) = T(\varrho)\,(1+\varepsilon_\varrho) \tag{24}$$

mit $\lim\limits_{\varrho=\infty}\varepsilon_\varrho = 0$ gleichmäßig für alle ψ die der Ungleichung $|\psi| \leqq \pi - \varepsilon'$ mit $\varepsilon' > 0$ genügen. Durch eine geeignete Zusatzbedingung für $s(\xi)$ kann man erreichen, daß (24) gleichmäßig für das abgeschlossene Intervall $|\psi| \leqq \pi$ gilt; es genügt z. B. als solche, daß $s(\xi)$ differenzierbar ist und daß

$$\overline{\lim_{\xi=1+0}}\,(\xi-1)\,\frac{d\lg s(\xi)}{d\xi} \neq \infty \text{ ist;} \tag{25}$$

ihr genügen beispielsweise $s(\xi) = (\lg_m(\xi-1))$ und alle Produkte solcher Funktionen.

Nach Zusammenfassung des Real- und Imaginärteils hat man also

$$\begin{aligned} (26)\qquad & \varphi(1-\varrho^{-1}\cos\psi+i\varrho^{-1}\sin\psi) \\ & = T(\varrho)\,(1+\varepsilon_\varrho)+i\psi t(\varrho)\,(1+\varepsilon_\varrho'); \end{aligned}$$

man vergleiche damit das bekannte Verhalten der Funktion $\lg\frac{1}{1-x}$, die als einfachstes Beispiel gelten kann ($t(\varrho)=1$).

Das Verhalten der Funktionen $\varphi_n(x)$ mit ganzzahligem positivem oder negativem n ergibt sich auf Grund der Definition (14) unmittelbar aus (26), wenn man noch $\lim\limits_{w=\infty}\frac{T(w)}{t(w)}=\infty$ beachtet:

$$\begin{aligned} (27)\qquad & \varphi_n(1-\varrho^{-1}\cos\psi+i\varrho^{-1}\sin\psi) \\ & = T(\varrho)\,(\varrho^{-n}\cos n\psi-i\varrho^{-n}\sin n\psi)\,(1+\varepsilon_\varrho) \qquad \text{oder} \\ & \varphi_n(x)=T\left(\frac{1}{1-x}\right)(x-1)^n\,(1+\varepsilon_\varrho). \end{aligned}$$

Bei den Funktionen $\varphi_a(x)$, wo a keine ganze Zahl ist, wird man zunächst a zwischen Null und -1 voraussetzen und sich dann auf Gleichung (17) berufen. Den Realteil und Imaginärteil von $\varphi_a(x)$ $(-1<a<0)$ wird man wieder gesondert abschätzen und zu diesem Zwecke die auftretenden Integrale, genau wie vorhin, in drei Teilintegrale zerlegen. Ich übergehe wieder die nicht schwierigen, aber etwas weitläufigen Zwischenrechnungen und schreibe gleich das für alle reellen nicht ganzzahligen a giltige Schlußergebnis nach Zusammenfassung des Real- und Imaginärteils hin:

$$(28)\qquad \varphi_a(x)=\frac{\pi}{\sin(-a\pi)}(1-x)^a\,t\left(\frac{1}{1-x}\right)(1+\varepsilon_\varrho).$$

Für die Gleichmäßigkeit der Beziehung $\lim\limits_{\varrho=\infty}\varepsilon_\varrho=0$ gilt das S. 272 Gesagte.

III. Abschnitt.

Ergänzungen, Beispiele, Anwendungen.

§ 1. Eine merkwürdige Funktionalgleichung. $\varphi(x) = \sum_0^\infty{}_\nu a_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}_\nu \int_0^1 v(\tau)\tau^\nu d\tau x^\nu$, $\psi(x) = \sum_0^\infty{}_\nu b_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}_\nu \int_0^1 u(\tau)\tau^\nu d\tau x^\nu$ seien zwei Funktionen „der φ-Klasse". Dann ist auch $\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu b_\nu x^\nu$ eine Funktion der φ-Klasse, d. h. $a_\nu b_\nu$ läßt sich in der Form $\int_0^1 W(\tau)\tau^\nu d\tau$ darstellen und zwar ist $W(\tau) = \int_\tau^1 \frac{u(\tau')}{\tau'} v\left(\frac{\tau}{\tau'}\right) d\tau'$. Man beweist dies folgermaßen: δ sei eine Zahl > 0, < 1, dann ist

$$\tag{29} \begin{aligned} \int_0^1 u(\tau)\tau^\nu d\tau &= \lim_{\delta=1} \sum_1^\infty{}_\varkappa u(\delta^\varkappa)\,\delta^{\varkappa(\nu+1)}(1-\delta) \qquad \text{und} \\ \int_0^1 v(\tau)\tau^\nu d\tau &= \lim_{\delta=1} \sum_1^\infty{}_\varkappa v(\delta^\varkappa)\,\delta^{\varkappa(\nu+1)}(1-\delta); \end{aligned}$$

indem man diese Gleichungen miteinander multipliziert und dann die rechte Seite nach Potenzen von $\delta^{\nu+1}$ ordnet, erhält man:

$$\tag{30} \begin{aligned} \int_0^1 u(\tau)\tau^\nu d\tau \cdot \int_0^1 v(\tau)\tau^\nu d\tau = \lim_{\delta=1} \sum_1^\infty{}_\varkappa \delta^{(\nu+1)\varkappa}\,[u(\delta)v(\delta^{\varkappa-1}) \\ + u(\delta^2)v(\delta^{\varkappa-2}) + \cdots + u(\delta^{\varkappa-1})v(\delta)]\,(1-\delta)^2; \end{aligned}$$

auf der rechten Seite konvergiert $(1-\delta)\,[u(\delta)v(\delta^{\varkappa-1}) + u(\delta^2)v(\delta^{\varkappa-2}) + \cdots u(\delta^{\varkappa-1})v(\delta)]$ gegen $W(\delta^\varkappa) = \int_{\delta^\varkappa}^1 \frac{u(\tau')}{\tau'} v\left(\frac{\delta^\varkappa}{\tau'}\right) d\tau'$ und, wenn man noch $\delta^\varkappa = \tau$ setzt, die ganze rechte Seite, wie behauptet, gegen $\int_0^1 W(\tau)\tau^\nu d\tau$. Mit $W(\tau)$ ist auch die Sprungfunktion und mit dieser die analytische Fortsetzung der Funktion $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu b_\nu x^\nu$ über C hinaus bekannt; sind beide Funktionen $u(\tau)$, $v(\tau)$ auf C regulär analytisch, so auch $W(\tau)$; $W(\tau)$ ist nur dann $\equiv 0$, wenn eine der Funktionen $u(\tau)$, $v(\tau)$ es ist.

§ 2. Produkte von Funktionen $\varphi_a(x)$. Wie soeben sei

$$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{v(\tau)\, d\tau}{1 - \tau x}, \quad \psi(x) = \int_0^1 \frac{u(\tau)\, d\tau}{1 - \tau x}, \quad \text{ferner } \chi(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x).$$

Die Funktionen $u(\tau)$, $v(\tau)$ und die aus ihnen hervorgehenden Sprungfunktionen mögen den Bedingungen (9 b), (9 c), wie auch (25) genügen; da jetzt die Verzweigungsstellen $x = \infty$ eine mit $x = 1$ gleichberechtigte Rolle spielt, sollen auch die Funktionen $u(1 - \tau)$, $v(1 - \tau)$ den nämlichen Bedingungen genügen. Die zu $\chi(x)$ längs C gehörige Sprungfunktion $S(\xi)$ ergibt sich ohne weiteres aus den Werten, welche von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ längs C angenommen werden; insbesondere ergibt sich für das Verhalten von $S(\xi)$ in der Nähe von $\xi = 1$ folgende Gleichung

$$\begin{aligned} S(\xi) = \Big(T_1\left(\frac{1}{\xi - 1}\right) t_2\left(\frac{1}{\xi - 1}\right) \\ + T_2\left(\frac{1}{\xi - 1}\right) t_1\left(\frac{1}{\xi - 1}\right)\Big)\left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{\xi - 1}\right)\right), \end{aligned} \tag{31}$$

wo t_1, t_2, T_1, T_2 die zu $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gehörigen t- und T-Funktionen sind. Daraus folgt, daß $S(\xi)$ der Bedingung (9 b) genügt; da ferner $S(\xi)$ bei $\xi = \infty$ infolge der gemachten Annahmen stärker Null wird als $\frac{1}{\xi^\varkappa}$, falls $\varkappa < 2$, so konvergiert $\int_1^\infty \frac{S(\xi)}{\xi - x}\, d\xi$. Diese Funktion erleidet längs C den nämlichen Sprung wie $\chi(x)$, kann sich also von $\chi(x)$ nur um eine eindeutige, überall außer etwa an den Stellen $x = 1$, $x = \infty$ reguläre Funktion $E(x)$ unterscheiden, und man erkennt leicht, daß $E(x) \equiv 0$ sein muß. Es ist also (wenigstens unter den gemachten Voraussetzungen, die sich leicht verallgemeinern ließen) das Produkt zweier zur Klasse $\varphi(x)$ gehöriger Funktionen wieder eine solche Funktion. Allgemein gilt: Wenn α und β zwei reelle Zahlen sind, so ist

$$\varphi_\alpha(x)\,\varphi_\beta(x) = \varphi_\gamma(x) + r(x); \tag{32}$$

hier ist $\gamma = \alpha + \beta$ und $r(x)$ eine rationale Funktion mit Polen höchstens bei $x = 1$ und $x = \infty$, über deren Höhe sich noch Aussagen machen lassen. Nur wenn $\alpha + \beta$ eine ganze Zahl ist, kann $\varphi_\alpha(x)\,\varphi_\beta(x)$ eindeutig werden, dann fällt $\varphi_\gamma(x)$ auf der rechten Seite weg.

Es möge als Beispiel derjenige Fall dieses Produktsatzes betrachtet werden, wo $\varphi_\alpha(x) = (1-x)^\alpha$ (α nicht ganzzahlig) und $\varphi_\beta(x)$ sich auf $\varphi(x)$ reduziert; zu $\varphi(x)$ mögen die Funktionen $v(\tau)$, $s(\xi)$, $t(w)$, $T(w)$ gehören. Als Sprungfunktion $s_\alpha(x)$ des Produkts $(1-x)^\alpha\varphi(x)$ ergibt sich

$$s_\alpha(x) = \frac{\sin(-\alpha\pi)}{\pi}(\xi-1)^\alpha\, T\left(\frac{1}{\xi-1}\right)\left(1+\varepsilon\left(\frac{1}{\xi-1}\right)\right) \tag{33}$$

und demgemäß nach dem ersten Abschnitt für die Koeffizienten b_ν^α der Potenzreihe $(1-x)^\alpha\varphi(x) = \sum_0^\infty{}^\nu\, b_\nu^\alpha x^\nu$

$$b_\nu^\alpha = \frac{T(\nu)}{\Gamma(-\alpha)\,\nu^{\alpha+1}}(1+\varepsilon_\nu) \qquad (\alpha \text{ nicht ganzzahlig}); \tag{34}$$

ist α eine ganze Zahl, so sind die b_ν^α mit den im ersten Abschnitt betrachteten Zahlen a_ν^α identisch, es gelten also die Abschätzungen (15), (18), d. h. für $n = -1, -2, -3\ldots$ bleibt die Formel (34) für b_ν^α giltig, während für $n = 0, 1, 2, 3\ldots$

$$b_\nu^n = \frac{(-1)^n\, t(\nu)}{\nu^{n+1}}\,\Gamma(n+1)\,(1+\varepsilon_\nu) \text{ wird.} \tag{35}$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß unter geeigneten Voraussetzungen über $s(\xi)$ auch die Funktionen $\dfrac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi_\beta(x)}$, $\dfrac{d\varphi_\alpha(x)}{dx}$, $\int_0^x \varphi_\alpha(x)\,dx$ zur Klasse $\varphi_\alpha(x)$ gehören.

§ 3. Uber den Divergenzcharakter gewisser Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Durch Vergleichen der Koeffizientenabschätzungen des ersten und der Funktionsabschätzungen des zweiten Abschnitts gewinnt man von einer ganz neuen Seite her einen allgemeinen Satz, den zuerst Herr Pringsheim bewiesen hat (acta math. 26 (1903)). Die Potenzreihe $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, b_\nu^a$ für die Funktion $(1-x)^a \varphi(x)$ sei bei $x=1$ divergent (also $a \leqq 0$); setzt man

$$(36)\qquad \begin{gathered} x = 1 - \varrho^{-1}\cos\psi + i\varrho^{-1}\sin\psi \\ \left(\psi' \leqq \psi < \frac{\pi}{2},\ 0 < \varrho^{-1} < \varrho^{-1} \leqq 2\cos\psi'\right), \end{gathered}$$

so konvergiert $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, b_\nu^a x^\nu$, und es ist nach (33), (28) für $a<0$ und nach (27) für $a=0$:

$$(37)\qquad \sum_0^\infty{}^{\nu}\, b_\nu^a x^\nu = (1-x)^a\, T\left(\frac{1}{|1-x|}\right)(1+\varepsilon_\varrho)$$

mit $\lim\limits_{\varrho=\infty} \varepsilon_\varrho = 0$ gleichmäßig für die obigen x; andererseits ist nach (34)

$$(38)\qquad b_\nu^{(a)} = \frac{T(\nu)}{\Gamma(-a)\,\nu^{a+1}}\,(1+\varepsilon_\nu) \text{ für } a<0$$

und nach (35):

$$(39)\qquad b_\nu^{(0)} = \frac{t(\nu)}{\nu}\,(1+\varepsilon_\nu).$$

Die Abschätzung (37) bleibt offenbar richtig, wenn man für b_ν^a aus (38), (39) die Näherungswerte $\dfrac{T(\nu)}{\Gamma(-a)\,\nu^{a+1}}$, $\dfrac{t(\nu)}{\nu}$ einsetzt; tut man dies, so hat man den erwähnten Pringsheimschen Satz über das Verhalten der Reihen

$$\sum_0^\infty{}^{\nu}\, \frac{T(\nu)}{\nu^{a+1}}\, x^\nu\ (a<0) \text{ und } \sum_1^\infty{}^{\nu}\, \frac{t(\nu)}{\nu}\, x^\nu \text{ bei } x=1.$$

Durch besondere Wahl von $T(w)$ ergibt sich folgendes Beispiel (Pringsheim, a. a. O., S. 30), an das ich nachher weitere Ausführungen knüpfen werde.

Ist

$$(40)\quad A_\nu = (1+\varepsilon_\nu)\frac{\nu^\gamma}{L_{m-1}(\nu)\,(\lg_m \nu)^\sigma (\lg_{m+1}\nu)^{\sigma_1}\cdots(\lg_{m+k}\nu)^{\sigma_k}}\quad (m \geqq 1),$$

so hat man, falls $\gamma < 0$, $\sigma \gtreqless 1$:

$$(41)\quad \begin{gathered}\lim_{x=1}(1-x)^{\gamma+1}L_{m-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\lg_m\frac{1}{1-x}\right)^\sigma\left(\lg_{m+1}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_1}\cdots\\ \left(\lg_{m+k}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_k}\cdot\sum_0^\infty{}^\nu A_\nu x^\nu = \Gamma(\gamma),\end{gathered}$$

dagegen für $\gamma = 0$, in welchem Falle allemal $\sigma < 1$ sein muß $\left(\text{für } \sigma > 1 \text{ wäre ja } \sum\limits_0^\infty{}^\nu A_\nu \text{ konvergent}\right)$

$$(42)\quad \begin{gathered}\lim_{x=1}\left(\lg_m\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma-1}\left(\lg_{m+1}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_1}\cdots\\ \left(\lg_{m+k}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_k}\sum_0^\infty A_\nu x_\nu = \frac{1}{1-\sigma}.\end{gathered}$$

Führt man nun in (41), (42) an Stelle von x die neue Veränderliche $\dfrac{x-\varkappa}{1-\varkappa}$ mit $\varkappa > 0$, < 1 ein und beachtet man, daß gleichmäßig für alle x des Gebietes (36)

$$(43)\quad \lim_{x=1}\frac{\lg_m\dfrac{1}{1-x}}{\lg_m\dfrac{1}{1-\dfrac{x-\varkappa}{1-\varkappa}}} = \lim_{x=1}\frac{\lg_m\dfrac{1}{1-x}}{\lg_m\dfrac{1-\varkappa}{1-x}} = 1 \text{ ist,}$$

wie man durch den Schluß von m auf $m+1$ beweist, so geht die vorige Aussage über in folgende:

Ist

$$(44)\quad A_\nu = \frac{\nu^\gamma(1-\varkappa)^{\gamma-\nu}}{L_{m-1}(\nu)(\lg_m\nu)^\sigma(\lg_{m+1}\nu)^{\sigma_1}\cdots(\lg_{m+k}\nu)^{\sigma_k}}(1+\varepsilon_\nu)\ (m \geqq 1),$$

so hat man, falls $\gamma > 0$, $\sigma \gtreqless 1$:

$$\lim_{x=1}(1-x)^{\gamma+1}L_{m-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\lg_m\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma}\left(\lg_{m+1}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_1}\cdots$$

$$\left(\lg_{m+k}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_k}\sum_0^{\infty}{}_{\nu}\,A_\nu(x-\varkappa)^\nu=\Gamma(\gamma), \tag{45}$$

dagegen für $\gamma=0,\ \sigma<1$:

$$\lim_{x=1}\left(\lg_m\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma-1}\left(\lg_{m+1}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_1}\cdots$$

$$\left(\lg_{m+k}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_k}\cdot\sum_0^{\infty}{}_{\nu}\,A_\nu(x-\varkappa)^\nu=\frac{1}{1-\sigma}. \tag{46}$$

Bei diesen Grenzübergängen ist natürlich x auf jenen Teil des Gebietes (36) zu beschränken, der innerhalb des Kreises $|x-\varkappa|=1-\varkappa$ liegt.

Es möge nun noch $\varkappa$ so nahe an 1 vorausgesetzt werden, daß die Funktionen $\lg_\mu\frac{1}{1-x}$ $(\mu=1,2\ldots m+k)$ sich im Kreise $|x-\varkappa|=1-\varkappa$ regulär verhalten. Dann legen die Sätze (45), (46) die Vermutung nahe, daß umgekehrt die Entwickelung von

$$\Gamma(\gamma)(1-x)^{-\gamma-1}L_{m-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\lg_m\frac{1}{1-x}\right)^{-\sigma}\left(\lg_{m+1}\frac{1}{1-x}\right)^{-\sigma_1}\cdots\left(\lg_{m+k}\frac{1}{1-x}\right)^{-\sigma_k}$$

für $\gamma>0$ und von

$$\frac{1}{1-\sigma}\left(\lg_m\frac{1}{1-x}\right)^{1-\sigma}\left(\lg_{m+1}\frac{1}{1-x}\right)^{-\sigma_1}\left(\lg_{m+k}\frac{1}{1-x}\right)^{-\sigma_k}$$

Koeffizienten haben wird, die der Grenzgleichung (44) genügen; man wird sogar vermuten, daß diese Koeffizientenabschätzung richtig bleibt, wenn man die bisher γ und σ auferlegten Beschränkungen fallen läßt.

Das Bestreben, diese Vermutungen zu beweisen, war für mich mitbestimmend, als ich die vorliegenden Untersuchungen in Angriff nahm. Den Beweis, der nach den Ausführungen des ersten Abschnitts keine Schwierigkeit mehr macht, bringe ich im nächsten Paragraphen.

§ 4. Abschätzung der Taylor-Koeffizienten der Funktionen[1] $(1-x)^\gamma \left(\lg \frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_1} \left(\lg_2 \frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_2} \cdots \left(\lg_m \frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_m}$.

Das Verhalten der Funktionen $\left(\lg_\mu \frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_\mu}$ $(\mu \geqq 1;\ -\infty < \sigma_\mu < +\infty)$, die sämtlich zur Klasse der φ-Funktionen gehören, in der rechtsseitigen Umgebung der Stelle $\xi = 1$ des Schnittes C sind durch folgende Formeln beschrieben, in denen $\xi - 1 = \varrho^{-1}$ gesetzt ist:

$$\lg \frac{1}{1-x} = \lg \varrho \pm i\pi,$$

$$\text{allgemein } \lg_\mu \frac{1}{1-x} = (1+\varepsilon_\varrho)\lg_\mu \varrho \pm \frac{i\pi(1+\varepsilon_\varrho')}{\lg\varrho \lg_2\varrho \ldots \lg_{\mu+1}\varrho} \tag{47}$$

$$\lg\left(\frac{1}{1-x}\right)^\sigma = (\lg\varrho)^\sigma\left(1 + \frac{\sigma i\pi(1+\varepsilon_\varrho)}{\lg\varrho}\right),$$

$$\left(\lg_\mu \frac{1}{1-x}\right)^\sigma = (1+\varepsilon_\varrho)(\lg_\mu\varrho)^\sigma \pm \frac{\sigma i\pi(1+\varepsilon_\varrho')(\lg_\mu\varrho)^\sigma}{\lg\varrho\lg_2\varrho\ldots\lg_\mu\varrho}$$

Man findet hier den durch die Gleichungen (23), (24) festgestellten Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil der φ-Funktionen bestätigt; die Anwendung der Formeln (15), (18), (21) liefert ohne weiteres folgenden Satz:

Die Koeffizienten $a_\nu^\alpha(\varkappa)$ der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-\varkappa)$ für

$$(1-x)^\alpha\left(\lg_m\frac{1}{1-x}\right)^\sigma\left(\lg_{m+1}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_1}\cdots\left(\lg_{m+k}\frac{1}{1-x}\right)^{\sigma_k} \tag{48}$$

sind gleich

$$\frac{\nu^{-\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(1-\varkappa)^{\nu-\alpha}}(1+\varepsilon_\nu)\sigma\cdot\frac{(\lg_m\nu)^\sigma(\lg_{m+1}\nu)^{\sigma_1}\ldots(\lg_{m+k}\nu)^{\sigma_k}}{L_{m-1}\nu}, \tag{49}$$

wenn α eine ganze Zahl $\geqq 0$ ist, in jedem anderen Falle aber gleich

$$\frac{\nu^{-\alpha-1}(1+\varepsilon_\nu)}{\Gamma(-\gamma)(1-\varkappa)^{\nu-\alpha}}(\lg_m\nu)^\sigma(\lg_{m+1}\nu)^{\sigma_1}\cdots(\lg_{m+k}\nu)^{\sigma_k}, \tag{50}$$

---

[1]) Von diesen Abschätzungen scheinen nur die allereinfachsten Fälle bekannt zu sein; am weitesten reichen noch die Ergebnisse des Herrn

$\alpha, \sigma, \sigma_1 \ldots \sigma_m$ können irgend welche reelle Zahlen sein; nur wenn $\sigma = \sigma_1 = \sigma_k = 0$, soll selbstverständlich α keine positive ganze Zahl sein.

Ich behaupte weiter:

Die Formel (49) gilt bei ganzzahligem α auch für beliebige komplexe $\sigma, \sigma_1 \ldots \sigma_k$ (außer $\sigma = \sigma_1 = \cdots = \sigma_k = 0$); die Formel (50) gilt, wenn α eine beliebige, auch komplexe, nur nicht positive ganze Zahl ist, und wenn $\sigma, \sigma_1, \ldots \sigma_k$ beliebige, auch komplexe Zahlen sind.

Eines neuen Beweises bedarf es nicht; man hat nur folgende zwei Tatsachen zusammenzuhalten:

1. Die Formeln (47) gelten auch für komplexe $\sigma, \sigma_1 \ldots \sigma_k$, die zugehörigen s, v, t, T-Funktionen sind dann natürlich auch komplex, aber ihre Real- und Imaginärteile einzeln gehören zu den vermöge der ersten Verallgemeinerung (S. 269) zugelassenen Funktionen.

2. Die Funktionen $\varphi_\alpha(x)$ können auch für komplexe α definiert werden: durch $\int\limits_1^\infty \frac{(\xi-1)^\alpha s(\xi)}{\xi - x}\, d\xi$, falls $-1 < \Re(\alpha) \leqq 0$ und durch (17) für alle andern α. Man überzeugt sich, daß dann nicht nur die gefundenen Formeln für a_ν^α und b_ν^α weiter gelten, sondern auch deren Beweise, letztere mit ganz geringfügigen und ohne weiteres ersichtlichen Abänderungen.

Viele der bisherigen Abschätzungen hätten durch Aussagen über die Größenordnung der ε_ν verschärft werden können; ich will dies nur an dem Beispiele der Koeffizienten a_ν^α für die Potenzreihe $\sum\limits_0^\infty {}_\nu\, a_\nu^\alpha x^\nu$ der Funktion $\varphi_\alpha(x) = (1-x)^\alpha (\lg(1-x))^k$ (α beliebig; k ganz, > 0) näher ausführen. Abschätzungsfehler, die für $\lim \nu = \infty$ kleiner als ϑ^ν mit festem positivem $\vartheta < 1$

Perron (Münch. Ber. 1913, S. 355), die sich auf die Koeffizienten von $(1-x)^\gamma (\lg 1 - x)^n$ bei beliebigem, auch komplexem γ und ganzzahligem $n > 0$ beziehen.

sind, bleiben von vornherein außer Betracht; um mich kurz auszudrücken, schreibe ich ϑ_ν, ϑ'_ν für ε_ν, wo es sich um solche Größen handelt.

Zur Vorbereitung mache ich folgenden Ansatz:

$$(1-z)^\alpha = \left(\frac{\lg\frac{1}{z}}{1} - \frac{\left(\lg\frac{1}{z}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\lg\frac{1}{z}\right)^3}{3!} - + \cdots\right)^\alpha$$

$$(51)\qquad = \left(\lg\frac{1}{z}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{1}\lg\frac{1}{z} + \left(\frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha}{24}\right)\left(\lg\frac{1}{z}\right)^2 + \cdots\right)$$

$$= \sum_0^\infty {}^\mu P_\mu(\alpha)\left(\lg\frac{1}{z}\right)^{\alpha+\mu};$$

die $P_\nu(\alpha)$ sind Polynome ν^{ten} Grads in α; in einer gewissen Umgebung U der Stelle $z=1$ und für alle α, deren Betrag unter einer endlichen Schranke bleibt, konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty {}^\mu P_\mu(\alpha)\left(\lg\frac{1}{z}\right)^{\alpha+\mu}$ gleichmäßig und das gleiche gilt von ihrer gliedweise gebildeten k^{ten} Ableitung nach α:

$$(52)\qquad (1-z)^\alpha(\lg(1-z))^k = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{d^k P_\mu(\alpha)\left(\lg\frac{1}{z}\right)^{\mu+\alpha}}{d\alpha^k}.$$

Für a_ν^α liefert der Cauchysche Integralsatz folgende Abschätzung, wo unter S die Seite 271 erklärte Schleife verstanden wird:

$$(53)\qquad a_\nu^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{(1-z)^\alpha(\lg(1-z))^k}{z^{\nu+1}} + \vartheta_\nu,$$

also unter der erlaubten Annahme, daß S ganz in U liegt:

$$(54)\qquad \begin{aligned} a_\nu^\alpha &= \frac{1}{2\pi i}\int_S \sum_0^l {}^\mu \frac{d^k P_\mu(\alpha)\left(\lg\frac{1}{z}\right)^{\mu+\alpha}}{d\alpha^k}\frac{dz}{z^{\nu+1}} \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_S \sum_{l+1}^\infty {}^\mu \frac{d^k P_\mu(\alpha)\left(\lg\frac{1}{z}\right)^{\mu+\alpha}}{d\alpha^k}\frac{dz}{z^{\nu+1}} + \vartheta_\nu. \end{aligned}$$

Der zweite der drei Summanden auf der rechten Seite von (54) stellt den Koeffizienten von z^ν einer Funktion $\varphi_{a+l+1}(z)$ dar und ist nach der bekannten Bezeichnungsweise des Herrn Landau $O\left(\frac{(\lg\nu)^k}{\nu^{a+l+2}}\right)$. Wenn ich in dem vorausgehenden ersten Integral auf der rechten Seite von (54) die auf der reellen Achse liegenden Stücke des Schleifenintegrals bis $+\infty$ ausdehne, kommt nur ein Glied ϑ_ν' hinzu. Die so verlängerte Schleife bezeichnete ich mit S', und es ist also

$$(55)\qquad a_\nu^a = \frac{1}{2\pi i}\sum_0^l{}^\mu \frac{d^k}{d_a^k}\left(P_\mu(a)\int_{S'}\frac{\left(\lg\frac{1}{z}\right)^{a+\mu}}{z^{\nu+1}}dz\right) + O\left(\frac{(\lg\nu)^k}{\nu^{a+l+2}}\right).$$

Jetzt stehen auf der rechten Seite neben $O\left(\frac{(\lg\nu)^k}{\nu^{a+l+2}}\right)$ nur bekannte Funktionen und deren Ableitungen, da ja

$$(56)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{S'}\frac{\left(\lg\frac{1}{z}\right)^{-a-1}}{z^{\nu+1}} = \frac{\nu^a}{\Gamma(a+1)}.$$

Der besondere Fall $l = 1$ der sehr genauen Abschätzung (55) ist schon von Herrn Perron in der S. 280/281 genannten Abhandlung auf anderem Wege bewiesen worden.

§ 5. Über Funktionen, die durch Potenzreihen $\sum_1^\infty{}^\nu G\left(\frac{1}{\nu^k}\right)x^\nu$ definiert sind. Die zuletzt benutzte Hilfsformel aus der Theorie der Γ-Funktion ist auch sonst nützlich zur Untersuchung mehrdeutiger Funktionen. Es sei beispielsweise k eine ganze Zahl >1 und $\lim_{\mu=\infty}\sqrt[\mu]{|c_\mu|} = 0$; dann ist

$$(57)\qquad G(z) = \sum_1^\infty{}^\mu \frac{c_\mu z^\mu}{\Gamma\left(\frac{\mu}{k}+1\right)}$$

eine ganze Funktion, höchstens vom Minimaltypus der Ordnung k. Aus (56) erhält man, indem man $a = \frac{\mu}{k}$ setzt ($\mu = 1, 2, 3\ldots$) und summiert:

$$(58)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{S'}\frac{\left(\lg\frac{1}{z}\right)^{-1}\sum_1^\infty{}^{\mu}\, c_\mu\left(\lg\frac{1}{z}\right)^{-\frac{\mu}{k}}}{z^{\nu+1}} = G\left(\nu^{\frac{1}{k}}\right).$$

Darin liegt folgender Satz:

Die Potenzreihe $\sum_1^\infty{}^{\nu}\, G\left(\nu^{\frac{1}{k}}\right) x^\nu$ ist das Element einer in der längs C aufgeschnittenen Ebene regulären Funktion

$$(59)\qquad \Phi(x) = \frac{x}{2\pi i}\int_{S'}\frac{\left(\lg\frac{1}{z}\right)^{-1}\sum_1^\infty{}^{\mu}\, c_\mu\left(\lg\frac{1}{z}\right)^{-\frac{\mu}{k}}}{z(z-x)}\, dz.$$

Längs C erleidet dieselbe den Sprung

$$(60)\qquad s(\xi) = \sum_1^\infty{}^{\mu}\, c_\mu\left(\lg\frac{1}{\xi}\right)^{-1-\frac{\mu}{k}}\sin\frac{\mu}{k}\pi.$$

Da $\lg\frac{1}{x}$ in der Umgebung von $x=1$ regulär ist, verhält sich somit $\Phi(x)$ daselbst wie eine ganze Funktion von $(x-1)^{-\frac{1}{k}}$.

Mit genau den nämlichen Mitteln beweist man beispielsweise ferner, daß die Reihe $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, a_\nu x^\nu$, wo a_ν für $\nu > \nu'$ die Form $\mathfrak{P}\left(\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$ hat, Element einer Funktion ist, die in der längs der reellen Achse $1\,\infty$ aufgeschlitzten Ebene regulär ist, und die sich bei $x=1$ wie eine reguläre Funktion von $(x-1)^{\frac{1}{k}}$ verhält. Wenn man die Formel (56), nachdem man sie beiderseits mit $\Gamma(\alpha+1)$ multipliziert hat, k mal nach α differenziert, mit x^ν multipliziert und sodann summiert, gelangt man zu Reihen $\sum_1^\infty{}^{\nu}\, \nu^\alpha(\lg\nu)^k x^\nu$, und man ersieht ohne weiteres, daß auch die so gebildeten Funktionen innerhalb der längs C aufgeschnittenen Ebene regulär sind und daß ihre Sprungfunktionen, mithin ihre Fortsetzungen über C hinaus mittels bekannter elementarer Funktionen gebildet werden können.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1917

Band/Volume: 1917

Autor(en)/Author(s): Faber Georg

Artikel/Article: Über das Verhalten analytischer Funktionen an Verzweigungsstellen 263-284