Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1918. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1918
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Anwendung des Prinzips der gekoppelten Schwingungen auf einige physiologische Probleme.

(2. Abhandlung.)

Von **Otto Frank.**

Vorgelegt in der Sitzung am 2. März 1918.

Die nachfolgende Mitteilung bildet eine Fortsetzung und Ergänzung der in diesen Sitzungsberichten unter dem gleichen Titel veröffentlichten Abhandlung (Sitzungsber. d. mathemat.-physikal. Klasse 1915, S. 289).

Sie soll die rechnerische Analyse des Schwingungsproblems für die Behandlung der graphischen Registrierung nutzbar machen. Im Verlauf der Untersuchung wurde ich wiederholt auf das allgemeine Schwingungsproblem und die Grundsätze der graphischen Registrierung zurückgeführt, weil ich bestrebt war, die Fragen in möglichster Allgemeinheit zu behandeln. Ich gehe deshalb von der allgemeinen Theorie aus. Dabei nehme ich aber ständig Rücksicht auf die praktischen Verhältnisse, insbesondere auf die Erfordernisse der experimentellen Untersuchung. Ich habe deshalb als Konstanten diejenigen gewählt, die experimentell leicht zu bestimmen sind, nämlich die Elastizitätskoeffizienten (c) bzw. die ihnen nahestehende Empfindlichkeit der Registriersysteme (γ) und die Schwingungszahlen (n), während ich die Massen oder Trägheitskoeffizienten in den Hintergrund treten lasse. Die letzteren sind kaum unmittelbar bestimmbar. Sie neben den anderen Konstanten in die Gleichungen einzuführen, würde die Übersicht verwirren, wie dies tatsächlich in der Literatur geschehen ist.

Im übrigen habe ich die Einführung reiner Zahlen bevorzugt: Zur Charakterisierung der Dämpfung die Zahl D, der Koppelung die Zahl K und der Veränderung des Ausschlags durch die dynamischen Beziehungen den Quotienten Q.

Allgemeines Schwingungsproblem.

Die Bewegungsgleichungen für Systeme von m Freiheitsgraden lassen sich (vgl. Rayl. S. 104/3) in folgender Form anschreiben:

$$\begin{array}{l} e_{11}x_1 + e_{12}x_2 + e_{13}x_3 + \cdots = P_1 \\ e_{21}x_1 + e_{22}x_2 + e_{23}x_3 + \cdots = P_2 \\ e_{31}x_1 + e_{32}x_2 + e_{33}x_3 + \cdots = P_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

Hierin sind $x_1, x_2, \ldots$ die Verrückungen, die als allgemeine Koordinaten verschiedener Art und verschiedener Dimension auftreten. $P_1, P_2 \ldots$ sind die auf das System einwirkenden Kräfte. e_{rs} bedeutet den Operator

$$e_{rs} = m_{rs}D^2 + b_{rs}D + c_{rs},$$

worin das Symbol D für d/dt, D^2 für d^2/dt^2 steht.

e_{rs} ist stets gleich e_{sr} (Rayl, S. 104). Die Koeffizienten m, b, c kann man als Trägheits-, Reibungs- und Elastizitätskoeffizienten bezeichnen. Unter ihnen heben sich analytisch diejenigen mit ungleichen Indices heraus: die $m_{12} m_{13} \ldots$, $b_{12} \ldots$, c_{12} usw. Sie kehren in allen einzelnen Gleichungen des Gleichungssystems wieder. Werden sie $= 0$, so wird die Verbindung der Gleichungen untereinander gelöst. Sie verbinden also die Gleichungen miteinander. Physikalisch genommen bemessen sie die elastischen Reibungs- und Trägheitskräfte, welche die Einzelsysteme miteinander verkoppeln. Ich unterscheide nach der physikalischen Bedeutung deshalb zwischen elastischer, Reibungs-, und Trägheitskoppelung. Die Einteilung von Wien nach Kraft-, Reibungs- und Beschleunigungskoppelung erscheint mir inhomogen. Zur Not könnte man von den drei Klassen der Verrückungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungskoppelung sprechen. In der vorliegenden Abhandlung beschäftige ich mich fast durchweg nur mit elastischer Koppelung, nur für Systeme von zwei Freiheitsgraden gebe ich auch die Gleichungen für Trägheitskoppelung bzw. gemischte elastische und Trägheitskoppelung an. Von der Behandlung der Reibungskoppelung sehe ich, weil sie bei mechanischen Spstemen keine Rolle spielt, vollständig ab. Die Koeffizienten der elastischen und der Trägheitskoppelung bringe ich in geeignete dimensionslose Form (vgl. unten).

Das Gesamtsystem setzt sich aus Einzelsystemen zusammen, die ich folgendermaßen definiere. Ein Einzelsystem umfaßt physikalisch einen bestimmten Massenpunkt mit den bis zu den benachbarten Massenpunkten reichenden elastischen, Trägheits-, und Reibungsverbindungen. Seine Bewegung ist durch die Bestimmung festgelegt, daß alle übrigen Massenpunkte unverrückt in der Lage $x = 0$ bleiben. Für nicht einwandfrei und nicht allgemein durchführbar halte ich die Angabe, daß man die Bewegung des Einzelsystems durch 0 Setzung der Koppelungskoeffizienten erhält. Man kann ein Einzelsystem nicht loskoppeln, ohne daß sich die elastischen Beziehungen der benachbarten Massen, ausgedrückt durch die Koeffizienten c_{11}, c_{22}, verändern. Auch die scheinbar einfachen Elastizitätskoeffizienten c_{11}, c_{22} sind zusammengesetzt aus elementaren Elastizitätskoeffizienten, die in die Koppelung eingehen, worauf ich unten zurückkomme. Richtig ist selbstverständlich, daß, wenn die Koppelung $= 0$ ist, sich die Bewegung in die selbstständige Bewegung der Einzelsysteme auflöst. (Anm. Die früher gegebene Definition der Einzelsysteme, die scheinbar nur für Systeme von zwei Freiheitsgraden Bedeutung hat, gebe ich auf.)

Die Frequenzen der Einzelsysteme berechne ich mit n_1, n_2, . . . etc., die Frequenzen des Gesamtsystems mit n_a, n_b . . . Die niedrigste Frequenz oder die Hauptschwingungszahl mit n_h.

Die Weiterbehandlung der Gleichungen ist verschieden, je nachdem es sich um Eigenschwingungen oder erzwungene Schwingungen handelt. Ferner ist die Behandlung verschieden für Systeme ohne und mit Reibung bzw. Dämpfung.

Eigenschwingungen ohne Reibung.

Die Kräfte $P_1, P_2 \ldots$ sind $= 0$ zu setzen. Man erhält das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \cdots = 0 \\ c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + \cdots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Eliminiert man aus diesen m Gleichungen alle Koordinaten außer einer, so kann man das Resultat in der Form schreiben

$$\nabla x = 0,$$

worin ∇ die Determinante bezeichnet

$$\left|\begin{array}{ccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right|$$

Setzt man die Determinante $= 0$, so erhält man eine Gleichung vom Grade $2\,m$ in D, deren Wurzeln λ die Schwingungszahlen bestimmen. Die Wurzeln sind hier bei der reibungslosen Bewegung rein imaginär, die Schwingungszahlen sind aus ihnen durch die Beziehung $\lambda = i\,n$ zu erhalten.

Die Determinante schreibe ich unter Einfügung der Trägheits- und Elastizitätskoeffizienten (Trägheitskoppelung $= 0$) und der Vorzeichen in folgender Weise um. Dabei wird statt $m_{11} : m_1 \ldots$ und statt $c_{11} : c_1 \ldots$ gesetzt.

$$\left|\begin{array}{ccc} m_1 \lambda^2 + c_1 & -c_{12} & -c_{13} \\ -c_{21} & m_2 \lambda^2 + c_2 & -c_{23} \\ -c_{31} & -c_{32} & m_3 \lambda^2 + c_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right| = 0.$$

Dividiert man die Kolonnen durch $m_1\, m_2\, m_3$, bzw. die Determinante durch das Produkt $m_1\, m_2\, m_3$, so erhält man, wenn die Ausdrücke

$$\frac{c_{21}}{m_1} = \frac{c_{21}\, c_1}{m_1\, c_1} = \frac{c_{21}\, n_1^2}{c_1}$$

gesetzt werden, die folgende Form:

$$
\begin{vmatrix}
\lambda^2 + n_1^2 & -\frac{c_{12} n_2^2}{c_2} & -\frac{c_{13} n_3^2}{c_3} \\
-\frac{c_{21} n_1^2}{c_1} & \lambda^2 + n_2^2 & -\frac{c_{23} n_3^2}{c_3} \\
-\frac{c_{31} n_1^2}{c_1} & -\frac{c_{32} n_2^2}{c_2} & \lambda^2 + n_3^2 .
\end{vmatrix}
$$

Aus der Determinante läßt sich erkennen, daß die von mir in der früheren Abhandlung für ein System von zwei Freiheitsgraden vorgeschlagene Einführung der Koppelungszahlen allgemein für beliebige Systeme möglich ist.

Als Koppelungszahl K_{rs} bestimme ich das Produkt $\frac{c_{rs}{}^2}{c_r \cdot c_s}$.

Man sieht nun, daß bei der Ausrechnung der Determinante im allgemeinen nur Potenzen der $\sqrt{K}$ bzw. deren Produkte auftreten können, weil die Einzelindices in den Produkten der Koeffizienten c_{rs} als Kolonnen- und Zeilenindices doppelt auftreten müssen. Die Produkte der Koppelungskoeffizienten können also durch die Produkte der Koppelungszahlen ersetzt werden. Ich halte die Einführung der $(m - 1)$ Koppelungszahlen statt $2(m - 1)$ Koeffizienten für sinngemäß, weil ein zwei Systeme verbindendes Moment für beide gleichwertig ist.

Für Registriersysteme spielt eine besondere Form der Koppelung, die ich als Kettenkoppelung bezeichne, die ausschlaggebende Rolle. Bei ihr sind die Massenpunkte in Reihen angeordnet. Eine Verknüpfung besteht nur zwischen benachbarten Massenpunkten der Reihe. Alle Koppelungszahlen K_{13}, K_{24} usw. sind $= 0$. In der obigen Determinante fallen die eingegrenzten Glieder weg. Es bleiben nur die Diagonale und die der Diagonale benachbarten, die Koppelungskoeffizienten enthaltenden, Glieder. In der Gleichung fallen die Wurzeln der Koppelungszahlen weg, weil sonst die Einzelindices in den Gliedern der Gleichung nicht doppelt vorkommen würden. So könnte bei der Determinante dritten Grades das Produkt $\frac{c_{21} n_1^2}{c_1} \times \frac{c_{32} n_2^2}{c_2}$ nur durch $\frac{c_{13} n_3^2}{c_3}$ vervollständigt werden und würde dann zu $\frac{n_1^2 n_2^2 n_3^2}{K_{12} K_{23} K_{13}}$, was nicht möglich ist, weil bei der Kettenkoppelung der Koeffizient $c_{13} = 0$ ist. Einige praktische Regeln für die Bildung der Produkte werde ich unten geben. Im Gegensatz zu dieser Koppelungsart spreche ich von Netzkoppelung, wenn die Koppelungszahlen K_{13} . . . etc. endlich sind.

Die Koppelungszahlen lassen sich ebenso allgemein für die Behandlung der gedämpften Eigenschwingungen und der erzwungenen Schwingungen benutzen.

Die Koppelungszahlen liegen nur zwischen 0 und 1, d. h. sind echte Brüche. Wenn eine Koppelungszahl = 1 wird, treten besondere Verhältnisse auf, die ich unten (S. 145) behandle. Die Koppelungszahlen können bestimmte Zahlen sein, z. B. in dem Beispiel Rayl., S. 290 = $^3/_4$ oder sie können Funktionen von einer oder mehreren Konstanten sein.

Für die Trägheitskoppelung können ähnliche Zahlen eingeführt werden, wie ich in dem Kapitel über die Systeme von zwei Freiheitsgraden zeigen werde.

Eine Berechnung der Wurzeln der Gleichung ist in bequemer geschlossener Form nur für Systeme bis zu zwei Freiheitsgraden möglich. Von drei Freiheitsgraden ab müssen Vereinfachungs- und Annäherungsmethoden benutzt werden.

Eigenschwingungen mit Reibung.

Der Operator e_{rs} wird vollständig, d. h. zu $m_{rs} D^2 + b_{rs} D + c_{rs}$ und die Determinante enthält jetzt ungerade Potenzen von D bzw. λ. Die Gleichung läßt sich nicht mehr vom m^{ten} Grad in λ_2 behandeln, sondern sie wird vom $2\,m^{\text{ten}}$ Grad. Die Wurzeln sind nicht mehr rein imaginär, sondern komplex. Von den Gliedern der Determinante ändern sich nur die Diagonaleglieder. Sie werden allgemein zu $m_1 \lambda^2 + b_1 \lambda + c_1$.

Wenn durch m_1 dividiert wird, so resultiert

$$\lambda^2 + 2 h_1 \lambda + n_1^2 \qquad \left(\text{worin } h_1 = \frac{b_1}{2 m_1}\right).$$

Bei Systemen von einem Freiheitsgrad hatte ich früher die Dämpfungszahl $D = \frac{h}{n}$ eingeführt. Sie hat sich dort sehr zweckmäßig erwiesen. Auch für gekoppelte Systeme, besonders für die wichtigen Systeme von zwei Freiheitsgraden erweist sich die Einführung als sehr nützlich. Das Diagonalglied wird dann zu $\lambda^2 + 2 D_1 n_1 \lambda + n_1^2$.

Die Lösung der Gleichung für die gedämpften Schwingungen ist wesentlich schwieriger als für ungedämpfte Schwingungen und erfordert schon bei Systemen von zwei Freiheitsgraden eine nicht ganz einfache Behandlung (s. unten).

In einem Fall läßt sich die Gleichung allgemein auf denselben Grad wie bei den ungedämpften Schwingungen zurückführen. Zu diesem Zweck entfernt man das zweite Glied in λ^{2m-1}, wie dies gewöhnlich bei Gleichungen höheren Grades geschieht, durch die Transformation:

$$\lambda = z - \frac{2 \Sigma h_i}{2m}$$

in eine Gleichung in z.

Das Diagonalglied wird dann zu

$$z^2 + \left(2 h_i - \frac{2 \Sigma h}{m}\right) z + \frac{\Sigma h}{m}\left(\frac{\Sigma h}{m} - 2 h_i\right) + n_i^2.$$

Das Glied in λ^{2m-1} wird

$$= z^{2m-2} z \left(2 \Sigma h - \frac{2 m \Sigma h}{m}\right) = 0 \text{ w. z. b. w.}$$

Ist nun $h_1 = h_2 = h_3 \ldots$ usw., so resultiert als Diagonalglied $z^2 - h_i^2 + n_i^2$, d. h. der Grad der Gleichung wird $= m$ in z^2. Das Diagonalglied kann dann auch folgendermaßen geschrieben werden: $z^2 + n_i^2 (1 - D_i^2)$.

Die erzwungenen Schwingungen.

Die Analyse der erzwungenen Schwingungen stützt sich auf das oben angegebene System von simultanen Differentialgleichungen. Ich folge bei den allgemeinen Entwicklungen zunächst wieder der Darstellung von Rayleigh, S. 145. Um die Verrückungen in jedem Zeitmoment zu bestimmen, löst man die Gleichungen nach x_1, x_2 usw. auf. Hierzu benutzt Rayleigh die Unterdeterminanten $\frac{d\nabla}{de_1}$ etc. von ∇ als Operatoren an P_1 etc.

Die Lösung wird

$$\nabla x_1 = \frac{d\nabla}{de_1} P_1 + \frac{d\nabla}{de_{21}} P_2 + \cdots$$
$$\nabla x_2 = \frac{d\nabla}{de_{12}} P_1 + \frac{d\nabla}{de_2} P_2 + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Determinante und die Unterdeterminante sind hier zunächst aus den Operatoren $e_{rs} = m_{rs} D^2 + b_{rs} D + c_{rs}$ zusammengesetzt.

Bekanntlich kann man sich ohne Verlust von Allgemeingültigkeit auf periodische bzw. harmonische Kräfte beschränken. Sie seien in der Form $P_1 = E_1 e^{i\nu t}$ gegeben. Nach Ausführung der Differentiation usw. sieht man, daß die gewünschte partikuläre Lösung in folgender Form angeschrieben werden kann:

$$x_1 \nabla(i\nu) = \left\{\frac{d\nabla(i\nu)}{de_1} E_1 + \frac{d\nabla(i\nu)}{de_{21}} E_2 + \cdots\right\} e^{i\nu t} = A_1 e^{i\nu t}.$$

Hierin bedeutet ∇ jetzt dieselbe Determinante wie vorher, nur daß statt des Differentialoperators $D : (i\nu)$ gesetzt ist. Die Elemente der Determinante sind jetzt:

$$e_1 = c_1 - m_1 \nu^2 + i b_1 \nu, \; \ldots \; e_{12} = c_{12} - m_{12} \nu^2 + i b_{12} \nu \text{ etc.}$$

Ebenso bedeuten die Ausdrücke $\frac{d\nabla(i\nu)}{de_1}$ usw. die entsprechenden Unterdeterminanten.

Zur Wegschaffung der imaginären Teile von A_1 und $\nabla(i\nu)$ werden sie in die reellen und imaginären Teile A_{1r} und A_{1i} bzw. $\nabla_r(i\nu)$ und $\nabla_i(i\nu)$ zerlegt. Dann schreibt sich die Lösung in folgender Form an:

$$x_1 = \frac{\sqrt{A_{1r}^2 + A_{1i}^2} \cos(\nu t + \vartheta_1 + \gamma)}{\{[\nabla_r(i\nu)]^2 + \nu^2 [\nabla_i(i\nu)]^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Die Phasenverschiebung ϑ_1 bemißt sich nach $\tan\vartheta_1 = \frac{A_{1i}}{A_{1r}}$; hierbei ist zu bemerken, daß ϑ_1 verschieden ist für die verschiedenen Freiheitsgrade.

Die Phasenverschiebung γ bemißt sich nach $\tan\gamma = \frac{\nabla_i(ir)}{\nabla_r(i\nu)}$. Im Gegensatz zu ϑ_1 ist γ gleich für alle Freiheitsgrade.

Bei einem System, das keine Reibung besitzt, reduzieren sich die Elemente der Determinante auf die Form $c_1 - m_1\nu^2$ $\nabla(ir)$ wird reell, und die Lösung lautet:

$$x_1 = \frac{A_1 \cos\nu t}{\nabla(i\nu)}.$$

Ist die Periode der Kräfte dieselbe wie diejenige einer der Schwingungen des Gesamtsystems, oder $\nu = n_a$ bzw. n_b etc., so wird $\nabla(i\nu) = 0$ und die Amplitude wird unendlich. Denn, um die Eigenschwingungszahl zu ermitteln, muß die Determinante ∇, in welcher n_a für ν eintritt, $= 0$ gesetzt werden (vgl. oben).

Ist in diesem Fall, d. h. wenn $\nu = n_a$ bzw. n_b etc. ist, die Reibung klein aber endlich, so verschwindet $\nabla_r(i\nu)$, denn es enthält neben den Ausdrücken für die reibungslosen Bewegungen, die $= 0$ werden, die Reibungskoeffizienten nur in zweiter oder höherer Ordnung, während sie in $\nabla_i(i\nu)$ in der ersten Ordnung vorkommen. Daher wird $\tan\gamma = -\infty$ und

$$x = \frac{\sqrt{A_{1r}^2 + A_{1i}^2}\,\sin(\nu t + \vartheta)}{\nu\nabla_i(i\nu)}$$

d. h. die Amplitude wird sehr groß, aber was für die Registrierung von Wichtigkeit, ist umgekehrt proportional von ν.

Für die Verwertung dieser Theorie der erzwungenen Schwingungen für die Registrierinstrumente lassen sich die Beziehungen zweckmäßig in folgender Weise umschreiben. Man dividiert die einzelnen Gleichungen (s. S. 108) durch c_1, c_2 etc. und schreibt

$$c_1 = 1 - \frac{\nu^2}{n_1^2} + 2i\frac{\nu}{n_1}D_1 = 1 - R^2 + 2iRD_1.$$

Es treten jetzt nur mehr die Komponenten der Koppelungszahlen, die Dämpfungszahl und die Verhältnisse R der Schwingungszahl der erregenden Schwingungen zu den Eigenschwingungen auf. Die Determinante, die aus diesen Elementen zusammengesetzt ist, bezeichne ich kurz mit $\nabla(R)$.

Eine starke Vereinfachung der analytischen Beziehungen tritt ein, wenn man sich auf die für die Registrierung wichtigen Probleme beschränkt. Wenn wie hierbei stets alle Kräfte außer $P_1 = 0$ sind, so wird die Verrückung $x_n = \frac{d\nabla}{de_{1n}} \frac{P_1}{c_1}$. Beschränkt man sich auf Kettenkoppelung und ist die Reibungskoppelung $= 0$, so wird der Ausdruck noch wesentlich einfacher. Die Unterdeterminante schrumpft auf das Produkt der Elemente zusammen, die unter der Hauptdiagonale liegen. Sie wird $= c_{12}\, c_{23} \ldots c_{m-1\, m}$. Dieses Produkt ist reell. Damit wird $\vartheta = 0$. Der Ausdruck für die Verrückung lautet:

$$x_n = \frac{c_{12}\, c_{23} \ldots c^*_{m-1\, m} E_1}{c_1\, c_2 \ldots c_m \{[\nabla_r(R)]^2 + \nu^2 [\nabla_i(R)]^2\}^{\frac{1}{2}}}; \quad \tan\gamma = \frac{\nabla_i(R)}{\nabla_r(R)}.$$

Die letztere Beziehung wird bei der allgemeinen Theorie zur Ermittlung des Quotienten Q verwertet (s. S. 120).

* Die Größen c_{12} usw. können noch die Trägheitskoppelung enthalten, d. h. $c_{12} - m_{12}$ usw. bedeuten, ohne daß sich an der Form etwas ändert.

Allgemeine Theorie der graphischen Registrierung.

Die Theorie der Registrierinstrumente hat die Aufgabe, die für die Leistungen der Systeme wichtigen Größen allgemein anzugeben, die Mittel zur Verbesserung der Instrumente zu liefern, die Methoden zur Bestimmung der wichtigen Konstanten zu begründen und die Prinzipien für eine Korrektur der registrierten Kurven festzulegen.

Die für die Beurteilung der Registriersysteme wesentlichen Größen sind 1. die Empfindlichkeit des Systems, 2. die Schwingungszahlen, insbesondere die Hauptschwingungszahl des ungedämpften Gesamtsystems, 3. das logarithmische Dekrement ermittelt aus den Dämpfungszahlen des Systems. Aus 1 und 2 leitet sich 4. die Güte G ab. Die Diskussion der Quotienten Q und der Phasenverschiebung erweist 5. die Bedeutung der Konstanten n, und D für die Kritik der Registriersysteme. In einem 6. Abschnitt diskutiere ich die Methoden für eine Korrektur der registrierten Kurven. Zur Bestimmung dieser wesentlichen Größen ist die Kenntnis der Schwingungszahlen der Einzelsysteme der Dämpfungszahlen der Einzelsysteme, der Koppelungszahlen des Systems, und teilweise auch der Elastizitätskoeffizienten notwendig.

1. Die Empfindlichkeit.

Die Empfindlichkeit des Systems ist der Ausschlag (die Verrückung) des Endpunktes des Systems unter statischen Bedingungen, dividiert durch die äußere Kraft, welche die Verrückungen hervorgerufen hat. Die Empfindlichkeit γ_e des Endpunktes des Systems wird gewöhnlich durch Hebelvergrößerung v (unter Umständen mit einem masselosen Lichthebel) auf die Empfindlichkeit γ_r des registrierten Punktes erhöht. Für die Empfindlichkeit γ_e läßt sich ein wichtiger allgemeiner Ausdruck entwickeln. Ich schreibe hierzu für ein System mit Kettenkoppelung die folgenden leichtverständlichen Beziehungen an

$$\begin{aligned}
c_1 x_1 - c_{12} x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= P_1 \\
- c_{21} x_1 + c_2 x_2 - c_{23} x_3 \qquad\qquad &= 0 \\
- c_{32} x_2 + c_3 x_3 - c_{34} x_4 &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}$$

Lösung für $x_m = \frac{D'}{D}$, wobei

$$D' = \begin{vmatrix} c_1 & -c_{12} & 0 & 0 & P_1 \\ -c_{21} & c_2 & -c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -c_{32} & c_3 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \end{vmatrix} = P_1 c_{12} c_{23} c_{34} c_{45} \ldots c_{m-1\,m}\,.$$

Und

$$D = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \begin{vmatrix} 1 & -c_{12}/c_1 & 0 \\ -c_{21}/c_2 & 1 & -c_{23}/c_2 \\ 0 & -c_{32}/c_3 & 1 \\ . & . & . \end{vmatrix} \begin{aligned} &= c_1 c_2 \ldots c_m \\ &(1 - K_{12} \ldots \\ &- K_{m-1\,m} + K_{12} K_{34} \\ &+ K_{12} K_{45} + \cdots \\ &- K_{12} K_{34} K_{56} \ldots). \end{aligned}$$

Daraus berechnet sich die Empfindlichkeit zu

$$\gamma_e = \frac{\sqrt{K_{12} K_{23} \ldots K_{m-1\,m}}}{\sqrt{c_1 c_m (1 - K_{12} - K_{23} \ldots + K_{24} K_{34} \ldots)}}.$$

γ_e wird stets die Empfindlichkeit, die dem System zukommt, wenn P_1 die der Verrückung x_1 korrespondierende Kraft ist, und die Verrückung x_m eine einfache lineare Verschiebung darstellt. Z. B. bei manometrischen Systemen wird sie zu f/p, wenn in der ersten Gleichung $x_1 = V$, $c_1 = E'$ und $P_1 = p$ und in der letzten $x_m = f$ ist (vgl. vorhergehende Abhandlung S. 292, 293).

2. Die Schwingungszahlen des ungedämpften Systems.

Ihre Bedeutung und besonders die Wichtigkeit der Hauptschwingungszahl wird unten bei der Diskussion der Quotienten Q usw. nochmals erörtert werden. Im übrigen verweise ich auf das oben S. 110 ff. gesagte und mache besonders darauf aufmerksam, daß bei der Kettenkoppelung keine Quadratwurzeln von K auftreten. Ferner darauf, daß das letzte Glied der Gleichung die Form hat:

$$n_1^2 n_2^2 \cdots n_m^2 (1 - K_{12} - K_{23} \cdots + K_{12} K_{34} \cdots).$$

3. Das logarithmische Dekrement der Eigenschwingungen.

Es wird ebenso aus den Schwingungszahlen und den Dämpfungszahlen ermittelt, wie bei dem System von einem Freiheitsgrad (s. unten), d. h. es wird zu

$$\Lambda_a = \frac{D_a \pi}{\sqrt{1 - D_a^2}} \quad \text{etc.}$$

Umgekehrt kann man aus den logarithmischen Dekrementen der Schwingungen und den Schwingungszahlen die Dämpfungszahlen bzw. schließlich die Reibungskoeffizienten ermitteln.

Die Kenntnis der Frequenzen des gedämpften Systems ist bei den Registriersystemen nicht wichtig. Dagegen ist die Dämpfung zur Feststellung des sogenannten Dekrements von Bedeutung. Ich werde aber aus anderen Gründen bei Systemen von zwei Freiheitsgraden die Ermittelung der gedämpften Frequenzen behandeln.

4. Die Güte des Registriersystems.

Die Empfindlichkeit und die Schwingungszahl des Systems bestimmen in allererster Linie die Leistungen des Systems. Die Dämpfung spielt eine vergleichsweise geringere Rolle, sie hat im wesentlichen die Aufgabe, die Schädlichkeiten einer zu geringen Schwingungszahl zu kompensieren. Eine einfache Betrachtung der Verhältnisse bei Systemen von einem Freiheitsgrad zeigt, daß eine Steigerung der Empfindlichkeit nur auf Kosten einer Verminderung der Schwingungszahl zustande kommt. Ich habe deshalb den Ausdruck $\gamma_r. n^2$ als die Güte des Systems bezeichnet. Sie wird bei dem einfachen System von einem Freiheitsgrad = dem reciproken Wert der Masse. Zunächst sieht es so aus, als ob mit diesem Ausdruck nicht viel gewonnen wäre. Aber er hat sich schon bei Systemen sehr bewährt, die nicht unmittelbar Systeme von einem Freiheitsgrad sind, aber als solche behandelt werden können. So z. B. bei Flüssigkeitssystemen, insbesondere dem Kolbenmanometer, bei dem die Flüssigkeitsbewegung durch eine allgemeine Koordinate, die Volumverrückung, dargestellt werden kann. In noch höherem Maße wertvoll ist der Ausdruck für die Bemessung der Leistungen von gekoppelten Systemen. Hier existiert nicht mehr die einfache oben angegebene Beziehung $G = \frac{1}{m}$, sondern es sind so viele Einzelkonstanten vorhanden, daß ihre Auswahl nur durch die Bestimmung von gewissen Maximis der Güte möglich ist. Als Schwingungszahl kommt, wie ich unten S. 121 zeigen werde, die Hauptschwingungszahl in Betracht. Die Güte hat verschiedene Dimensionen, je nach dem Charakter der Empfindlichkeit. Für manometrische Apparate ist die Dimension $= [L^2]$. Im übrigen gilt für sie Ähnliches, wie das oben über den Charakter der Empfindlichkeit gesagt ist.

Die Bestimmung des Maximums der Güte hat selbst dann, wenn die Bedingungen technisch nicht durchführbar sind, noch eine Bedeutung, nämlich die Grenze für die Leistungen der betreffenden Instrumente festzusetzen.

5. Der Amplitudenquotient Q und die Phasenverschiebung.

Die Veränderung der registrierten Kurve gegenüber dem zeitlichen Ablauf der Krafteinwirkung ist bedingt durch die Veränderung der Amplitude und die Phasenverschiebung. Über die Bedeutung der erstgenannten Veränderung erhält man am besten Aufschluß, wenn man den Quotienten der „dynamischen" Empfindlichkeit und der statischen Empfindlichkeit: Q einführt. Als „dynamische" Empfindlichkeit ist die Amplitude der erzwungenen Schwingungen dividiert durch die Kraftamplitude zu bezeichnen. Für die Kettenkoppelung läßt sich bei Abwesenheit von Reibungskoppelung hierfür ein sehr einfacher Ausdruck angeben. Es ist der Quotient aus der Größe x_n S. 116 und der Empfindlichkeit γ_e S. 118. Q wird dann zu

$$Q = \frac{1 - K_{12} - K_{23} \cdots + K_{12} K_{34} + \cdots}{\{[\nabla_r R]^2 + \nu^2 [\nabla_i R]^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\tan \gamma = - \frac{\nabla_i R}{\nabla_r R}.$$

Für eine getreue Registrierung muß $R_1 = \frac{\nu}{n_1}$ etc. klein sein. Dann wird der Quotient $= 1$ und die dynamische Amplitude wird $=$ der statischen. Auf der andern Seite ist die

Phasenverschiebung $\gamma = 0$. Die Entstellungen treten auf, wenn die Schwingungszahl der erregenden Schwingung größer ist als die irgend einer Schwingung des Gesamtsystems. Es kommt also für die Beurteilung der Entstellungen die niedrigste Schwingungszahl, d. h. die Hauptschwingung des Systems in Betracht, vgl. S. 120 und 144.

Sehr wichtig für die Beurteilung der Registriersysteme ist auch die Frage nach der Lage und Größe der Resonanzmaxima, für deren Amplitude ich schon oben bei kleiner Dämpfung die Formel angegeben habe. Bei größerer Dämpfung fallen die Maxima nicht auf die Stelle der Koinzidenz der Schwingungszahlen der erregenden Schwingung und der Eigenschwingungen, sondern sie liegen im allgemeinen vor diesen Punkten (vgl. jedoch S. 143). Bei bestimmten Dämpfungen verschwindet das Maximum. Diese Verhältnisse werde ich bei den Systemen von zwei Freiheitsgraden eingehend erörtern.

6. Die Korrektur der registrierten Kurven.

Die Korrektur der registrierten Kurven läßt sich unter Benützung der Konstanten des Systems durchführen. Bei Systemen von einem Freiheitsgrad steht hierzu die Differentialgleichung und ihr Integral, d. h. die erzwungene Schwingung zur Verfügung. Man sieht, daß für gekoppelte Schwingungen nur die letztere Möglichkeit besteht, wenn man die Struktur der simultanen Differentialgleichung ins Auge faßt. Denn unmittelbar aus der Kurve sind nur die Verrückungen des Endpunktes bzw. des Registrierpunktes des Systems zu entnehmen, während die anderen allgemeinen Koordinaten nicht bekannt sind. Dagegen läßt sich die zweite Korrekturmethode unter Zerlegung der Kurve in eine Fouriersche Reihe, Korrektur der Teilschwingungen nach Amplitude und Phase und Wiederzusammensetzung der korrigierten Fourierschen Reihe durchführen.

Vereinfachung der Systeme und angenäherte Lösung der Gleichungen für reibungslose Schwingungen.

Wie ich schon in der vorhergehenden Abhandlung auseinandergesetzt habe, ist die rechnerische Behandlung kontinuierlicher Systeme (bzw. solcher von unendlich vielen Freiheitsgraden), an denen diskrete Massen angebracht sind, schwierig und vor allem wenig übersichtlich. Es besteht das Bedürfnis nach Vereinfachung der Systeme. Hierzu stehen zunächst zwei Methoden zur Verfügung. Bei der einen erteilt man dem System einen willkürlichen Schwingungstypus. Man läßt z. B. die Saite in Form einer in der Mitte geknickten Geraden schwingen, berechnet die kinetische und potentielle Energie für diesen Typus und hieraus die Schwingungszahl. Wie Rayleigh gezeigt hat, fällt diese Schwingungszahl stets höher aus als die wirkliche Hauptschwingungszahl, weil man bei diesem Verfahren das System einem Zwang unterwirft. Ich habe in der vorhergehenden Abhandlung mehrere Beispiele für Luftsäulen, Membranen usw. für diese Vereinfachungsmethode gegeben. Die Methode kann zu sehr guten Annäherungen führen. In den wichtigsten Fällen müßte man aber die kontinuierlichen Systeme auf solche von zwei und mehr Freiheitsgraden zurückführen, wofür ich ein geeignetes Verfahren noch nicht gefunden habe.

Für ebenso zweckmäßig halte ich, wie ich ebenfalls früher angedeutet habe, ein anderes Vereinfachungsverfahren, das man wohl als das Verfahren der Massenkonzentration bezeichnen kann (vgl. Rayl. Art. 52, 54 und 120). Es wird systematisch angewandt bei der Entwicklung der Schwingungsgleichung für die Saite. Dabei wird z. B. die Masse einer Saite oder eines Stückes der Saite oder ganz ähnlich einer Luftsäule in die Mitte der Länge verlegt. Diese Verlegung bedeutet einen Zwang, da ein besonderer Typus der Bewegung vorgeschrieben wird. Es müßte demnach die berechnete Frequenz zu hoch ausfallen, wenn die kinetische Energie richtig bemessen würde. Dies ist aber selbstverständlich nicht der Fall, wenn wie hier die ganze Masse an dem Punkt der stärksten Verrückung gelegt wird. Sie wird zu groß angenommen selbst dann, wenn z. B. bei der Saite oder Luftsäule die halbe Masse in die Mitte verlegt wird und die übrigen Viertel an die Enden. Man sieht in dem letzteren Fall, daß der Zwang bedingt durch die Annahme der Bewegung in Form der geknickten Geraden zu einer um 10% zu hohen Schwingungszahl führt, während für die Belastung in der Mitte $m/2$ die kinetische Energie um 20% niedriger als bei diesem Bewegungstypus und gleichmäßig verteilter Masse ausfällt. Die Schwingungszahl wird also bei der Massenkonzentration in der Mitte immer noch um 10% zu niedrig ausfallen. Der richtige Wert wäre 0,4 m (vgl. Rayl. S. 57). Vorläufig kann man als Regel für diese Methode nur angeben, daß die Massen so zu verlegen und so zu bemessen sind, daß die wichtigsten Grenzfälle genügend richtig dargestellt werden. Bei der Berücksichtigung des Systems wird man sehr zweckmäßige und hinreichend richtige Vereinfachungen erzielen. So kann man das Transmissionsmanometer ohne Bedenken auf ein System von drei Freiheitsgraden zurückführen, weil bei ihm die Luftsäule, für welche die Massenkonzentration in Betracht kommt, nur eine geringe Rolle spielt, nötigenfalls hat man immer noch die genauen Formeln zur Verfügung (vgl. S. 147).

Bei Systemen, die eine höhere Zahl von Freiheitsgraden als zwei besitzen, kann die Lösung der Gleichungen für die Schwingungszahlen nicht mehr in übersichtlicher geschlossener Form erfolgen. In einer Reihe von Fällen kann man aber sehr gute angenäherte Lösungen erhalten.

1. Die Koppelungszahlen sind klein. Das letzte Glied sei:

$$n_1^2 n_2^2 \cdots n_m^2 (1 - K_{12} - K_{23} \cdots + K_{12} K_{34} \cdots).$$

Dann schreibt man die Gleichung in der Form an:

$$(\lambda^2 + n_1^2)(\lambda^2 + n_2^2) \cdots (\lambda^2 + n_m^2)$$
$$= n_1^2 : \cdots n_m^2 (K_{12} + K_{23} \cdots - K_{12} K_{34} \cdots)$$

und setzt der Reihe nach $\lambda^2 = -n_1^2, \; -n_2^2, \; \cdots - n_m^2$.

Man erhält so lineare Gleichungen von der Form:

$$(\lambda^2 + n_1^2)(n_2^2 - n_1^2) \cdots (n_m^2 - n_1^2) = n_1^2 \cdots n_m^2 (K_{12} + K_{23} \cdots).$$

Diese Methode ist im Grund die Newtonsche Annäherungsmethode zur Lösung von Gleichungen höheren Grades. Und diese beruht wieder auf der Entwicklung von $f(\lambda)$ nach der Taylorschen Reihe mit Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung. In ausgedehntem Maße werde ich diese Methode zur Lösung der Gleichungen von gedämpften Schwingungen von zwei Freiheitsgraden anwenden.

2. Die Schwingungszahlen von r Einzelsystemen werden unendlich. Ein sehr wichtiger Fall.

Die endlichen Schwingungszahlen des gekoppelten Systems erhält man aus den Gliedern $(\lambda^2)^{m-r}$ bis λ^0. Z. B. bei fünf Freiheitsgraden und Unendlichwerden von drei Schwingungszahlen z. B. der mittleren Einzelsysteme aus den Gliedern $(\lambda^2)^2$, (λ^2),, λ^0, also aus einer quadratischen Gleichung.

Die (unendlich) großen Schwingungszahlen erhält man aus einer Gleichung, die aus den Gliedern $(\lambda^2)^m$ bis $(\lambda^2)^{m-r}$ besteht. Z. B. bei fünf Freiheitsgraden unter denselben Umständen wie vorher aus den Gliedern $(\lambda^2)^5$, $(\lambda^2)^4$, $(\lambda^2)^3$, $(\lambda^2)^2$, also aus einer Gleichung dritten Grades.

3. Eine Koppelungszahl $K_{rs} = 1$.

Man erhält einerseits eine angenähert richtige lineare Gleichung für die Hauptschwingung aus den beiden letzten Termen der Gleichung.

Andererseits eine Gleichung $(m-1)$ten Grades für die Oberschwingungen. Auch diese läßt sich reduzieren, wenn man berücksichtigt, daß nach dem Gesagten (S. 145) alle übrigen Koppelungszahlen außer K_{rs} sehr klein sind. Dann reduziert sich die Gleichung schließlich folgendermaßen:

$$(\lambda^2 + n_1^2)(\lambda^2 + n_2^2) \cdots (\lambda^2 + n_r^2 + n_s^2) = \text{dem vorletzten Glied der ursprünglichen Gleichung.}$$

In dieser Gleichung wird wie oben für λ^2 der Reihe nach $-n_1^2 . \cdots - n_2^2 \cdots - (n_r^2 + n_s^2)$ gesetzt, und man erhält $m-1$ lineäre Gleichungen.

Systeme von einem Freiheitsgrad.

Ich schreibe die für die Registrierung wichtigen Beziehungen ohne weitere Erläuterung an:

$$\gamma_e = \frac{1}{c}, \quad n^2 = \frac{c}{m}, \quad G = \frac{1}{m}.$$

$$n' = n\sqrt{1 - D^2}, \quad \text{worin} \quad D = \frac{h}{n} = \frac{b}{2\,m\,n} = \frac{b\,n}{2\,c} = \frac{b}{2\sqrt{m\,c}}.$$

Logarithmisches Dekrement $\Lambda = \dfrac{D\,\pi}{\sqrt{1 - D^2}}$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{(1 - R^2)^2 + 4\,D^2\,R^2}}, \quad \tan\gamma = \frac{2\,D\,R}{1 - R^2}.$$

Systeme von zwei Freiheitsgraden.

1. Die Empfindlichkeit.

$$\gamma_e = \frac{\sqrt{K}}{(1 - K)\sqrt{c_1\,c_2}}.$$

Zu beachten ist, daß, wenn $K = 1$ wird, zugleich $\sqrt{c_1\,c_2} = \infty$ wird, also γ_e einen endlichen Wert behält.

2. Die Frequenz des ungedämpften Systems.

$$n^2 = \tfrac{1}{2}\,(n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\,n_1^2\,n_2^2\,K}$$

oder wenn man $n_2 = r\,n_1$ setzt:

$$n^2 = \tfrac{1}{2}\,n_1^2\,(1 + r^2 \pm \sqrt{(1 - r^2)^2 + 4\,r^2\,K})$$

oder wenn $n_2 = n_1\,(1 + \varepsilon)$, worin ε klein ist:

$$n^2 = n_1^2\,(1 + \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + K + 2\,\varepsilon\,K})$$

ist $n_1 = n_2$, so wird $n^2 = n_1^2\,(1 \pm \sqrt{K})$.

Die Angabe angenäherter Lösungen hat neben Anderem die Bedeutung für die Beurteilung der Tragweite der angenäherten Lösungen bei den gedämpften Schwingungen.

Wenn K sehr klein ist, wird $n_a^2 = n_1^2 - \frac{n_1^2 n_2^2 K}{n_2^2 - n_1^2}$, $n_b^2 = n_2^2 + \frac{n_1^2 n_2^2 K}{n_2^2 - n_1^2}$. Ist $n_1 = n_2$, so versagt diese Newtonsche Annäherungsmethode, wenn man sich auf eine Annäherung erster Ordnung beschränkt. Nimmt man die Größen zweiter Ordnung dazu, so ergibt sich die Lösung $n = n_1\left(1 \pm \frac{\sqrt{K}}{2}\right)$, die mit der strengen Lösung für kleine K übereinstimmt.

Ist K annähernd $= 1$, so werden die Lösungen $n_a^2 = \frac{n_1^2 n_2^2 (1 - K)}{n_1^2 + n_2^2}$, $n_b^2 = n_1^2 + n_2^2$. Ist $n_1 = n_2$, so resultiert in diesem Fall (ebenso, wenn $n_2^2 = \infty$ ist):

$$n_a^2 = \frac{n_1^2 (1 - K)}{2}, \quad n_b^2 = 2 n_1^2 \text{ [1]},$$

vgl. hierzu die frühere Abhandlung S. 292.

3. Die Güte.

Nach S. 119 ist:

$$G = \frac{v\sqrt{K}}{(1 - K)\sqrt{c_1 c_2}} \cdot \frac{n_1^2}{2}\left(1 + r^2 - \sqrt{(1 - r^2)^2 + 4 r^2 K}\right).$$

Führt man die Massen durch die Beziehungen $c_1 = m_1 n_1^2$, $c_2 = m_2 n_2^2$ ein, so wird

$$G = \frac{v\sqrt{K}}{2(1 - K)\sqrt{m_1 m_2}}\left(r + \frac{1}{r} - \sqrt{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 + 4K}\right).$$

Man sieht leicht, daß $\frac{dG}{dr} = 0$ wird, für $r = 1$, d. h. daß in diesem Fall die Güte ein — sehr wichtiges — Maximum hat. Das Maximum der Güte wird dann

$$\frac{v\sqrt{K}}{(1 + \sqrt{K})\sqrt{m_1 m_2}}.$$

[1]) Ergibt noch für $K = 0{,}5$, $r = 4$ nur 8,8% Abweichung von dem richtigen Resultat.

Fast durchweg besteht die Masse m_2 aus der auf den Endpunkt des Systems reduzierten Masse des Hebels. $= \frac{v^2 L \mu}{3}$, worin L die Länge und μ die Massendichte pro Längeneinheit ist. Führt man diesen Wert ein, so wird:

$$G_{\max} = \frac{\sqrt{K}}{(1 + \sqrt{K}) \sqrt{m_1 L \mu / 3}}$$

d. h. die Güte wächst mit wachsendem K und ist für

$$K = 1 = \frac{1}{2 \sqrt{m_1 L \mu / 3}}.$$

4. Zwei Freiheitsgrade, Elastizitäts- und Trägheitskoppelung.

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_{12} \ddot{x}_2 + c_{11} x_1 - c_{12} x_2 = 0$$
$$m_2 \ddot{x}_2 + m_{12} \ddot{x}_1 + c_{22} x_2 - c_{12} x_1 = 0.$$

Die Empfindlichkeit ist dieselbe wie bei der reinen Elastizitätskopplung. Die Frequenz berechnet sich aus folgender Gleichung. In ihr ist die Trägheitskoppelungszahl $= T = \frac{m_{12}^2}{m_1 m_2}$

$$\lambda^4 (1 - T) + \lambda^2 (n_1^2 + n_2^2 - 2 n_1 n_2 \sqrt{TK}) + n_1^2 n_2^2 (1 - K) = 0.$$

Bezeichnet man das Verhältnis n_2/n_1 wie vorher mit r, so wird

$$n_{a,b}^2 = \frac{n_1^2}{2(1-T)} \left[1 + r^2 - 2\sqrt{TK} \mp \sqrt{(1 + r^2 - 2\sqrt{TK})^2 - 4 r^2 (1-K)(1-T)}\right].$$

Die Güte wird, wenn man $r = 1$ setzt, maximal und zwar $=$

$$G_{\max} = \frac{\sqrt{K}}{(1 + \sqrt{K})(1 - \sqrt{T}) \sqrt{m_1 L \mu / 3}}$$ vgl. diese Seite oben.

5. Die Schwingungen des gedämpften Systems.

Ich schreibe die Gleichungen in Determinantenform und aufgelöst an:

$$\begin{vmatrix} m_1\lambda^2+b_1\lambda+c_1 & c_{12} \\ c_{21} & m_2\lambda^2+b_2\lambda+c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^2+2D_1\lambda+1 & c_{12}r^2/c_2 \\ c_{21}/c_1 & \lambda^2+2D_2r\lambda+r^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 + 2(D_1 + D_2 r)\lambda^3 + (1 + r^2 + 4rD_1D_2)\lambda^2 + 2(r^2 D_1 + rD_2)\lambda + r^2(1 - K) = 0$$

$$r = \frac{n_2}{n_1}.$$

In der letzten Gleichung bedeutet λ die für die Schwingungszahl $n_1 = 1$ ausgerechnete Wurzel.

Zunächst stelle ich die Bedingungen fest, unter denen die Gleichung vierten Grades auf eine zweiten Grades reduziert werden kann. Ich bringe das Diagonalglied, die Determinante durch $\lambda = z - \frac{h_1 + h_2}{2}$ in die folgende Form (vgl. S. 113):

$$z^2 + (h_1 - h_2)z + \frac{(h_1 - h_2)^2}{4} - h_1^2 + n_1^2 \text{ usw.}$$

Dadurch fällt das Glied mit z^3 heraus. Das Glied mit z fällt dann weg, wenn

Fall 1. $h_1 = h_2$ ist. Das ist die gleiche Bedingung, die ganz allgemein gilt (s. S. 113).

Fall 2. Wenn $n_1^2 - h_1^2 = n_2^2 - h_2^2$ ist bzw. $1 - r^2 = D_1^2 - r^2 D_2^2$. Eine derartige Bedingung scheint nur für Systeme von zwei Freiheitsgraden zu bestehen.

In diesen beiden Fällen sind die sämtlichen Lösungen mit gleichen reellen Teilen der Wurzeln ($D_a = D_b$) und gleichen imaginären Teilen der Wurzeln ($n_a' = n_b'$) enthalten. Außerdem selbstverständlich der Fall der Doppelwurzel der quadratischen Gleichung.

Im Fall 1 ist die Lösung $\lambda = n_1(-D_1 \pm i\sqrt{n^2 - D_1^2})$, worin n^2 unter der Wurzel die zwei Schwingungen des ungedämpften Systems bedeuten. Wir bekommen

a) Zwei verschiedene komplexe Wurzeln mit gleichem reellem, aber stets verschiedenen imaginären Teil, so lange D_1^2 kleiner als n^2 der Hauptschwingung ist.

b) Überschreitet D_1^2 diesen Wert, so tritt eine komplexe Wurzel und eine reelle als Lösung auf.

c) Wenn D_1^2 auch noch größer als n^2 der Oberschwingung wird, treten zwei positive reelle Wurzeln auf. Damit sind also die beiden Schwingungen aperiodisch bzw. überaperiodisch geworden.

Für den Fall 2 schreibe ich die Gleichung in folgender Form an:

$$z^4 + a z^2 + c = 0, \quad \text{worin} \quad a = 2 - 2 D_1^2 - \frac{(D_1 - r D_2)^2}{2}$$

und $$c = 1 - D_1^2 + \frac{(D_1 - r D_2)^2}{4} - r^2 K.$$

Die Teilfälle diskutiere ich an der Hand der allgemeinen Lösung der quadratischen Gleichung und schreibe diese Lösung folgendermaßen an:

$$\lambda = -\frac{D_1 + r D_2}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4c}}.$$

Diese Diskussion faßt natürlich auch die Lösungen von Fall 1 in sich.

a) $a^2 = 4c$ bzw. $(D_1 - r D_2^2)^2 (1 - D_1^2) = r^2 K$. Lösung: die komplexe Doppelwurzel:

$$\lambda = -\frac{D_1 + r D_2}{2} + i \sqrt{\frac{a}{2}},$$

aber nur, wenn a positiv ist; sonst zwei verschiedene reelle Wurzeln. Nur bei Fall 2 möglich. Auch hier nicht, wenn $n_1 = n_2$ bzw. $r = 1$.

b) $a^2 > 4c$. Bei Fall 1 und 2 möglich.

Teilfälle $a > \sqrt{a^2 - 4c}$: zwei komplexe Wurzeln mit gleichen reellen, aber verschiedenen imaginären Teilen.

$a = \sqrt{a^2 - 4c}$: eine konjugiert komplexe Wurzel und zwei gleiche reelle Wurzeln.

$a < \sqrt{a^2 - 4c}$: eine konjugiert komplexe Wurzel und zwei verschiedene reelle Wurzeln. Im Fall 1 verschwindet bei hohen Dämpfungen diese konjugierte komplexe Wurzel bzw. die Oberschwingung (aufgezeigt durch das Unendlichsetzen von D), während bei Fall 1 dies nicht stattzufinden braucht (s. unten).

c) $a^2 < 4c$: zwei gleiche imaginäre und ungleiche reelle Teile der komplexen Wurzeln. Nur bei Fall 2, aber auch hier nicht für $n_1 = n_2$. Denn hier wird nach der Vorbedingung von Fall 2: $D_1 = D_2$, also $a = 2 - 2D_1^2$ und $c = (1 - D_1^2)^2 - K$ und $a^2 - 4c = 4K$, also > 0.

D_1 *bzw.* $D_2 = \infty$.

Für die Beurteilung von Grenzfällen ist der Einfluß des Unendlichwerdens einer Dämpfungszahl von Interesse. Das Resultat ist, wenn $D =$ unendlich wird ($n_1 = 1$):

$$\lambda = r(-D_2 + i\sqrt{1 - D_2^2}).$$

Man sieht, daß bei dem Unendlichwerden einer Dämpfungszahl eine Oberschwingung bestehen bleiben kann, die hier erst dann verschwindet, wenn D_2 über 1 wird.

Ist $D_2 = 0$, so wird $\lambda = ir$.

Wird $D_2 = \infty$, so ist das Resultat:

$$\lambda = -D_1 + i\sqrt{1 - D_1^2}.$$

Wenn $D_1 = 0$ ist, wird $\lambda = i$.

$n_1 = n_2$.

Von überwiegendem Interesse sowohl für die Theorie der Registrierungen als auch für akustische Beziehungen ist der Fall, daß die Frequenzen der ungedämpften Schwingungen der Einzelsysteme gleich werden. Bei den Registrierinstrumenten bedeutet dieses Gleichwerden die Bedingung für das Gütemaximum. Über die Bedeutung dieses Falles für die Akustik braucht nichts besonderes gesagt zu werden. Man kann diesen Fall als die innere Resonanz bezeichnen.

Die Gleichung und ihre Lösungen schreibe ich durch n_1 dividiert an.

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 2 D_1 \lambda + 1 & c_{12}/c_1 \\ c_{21}/c_2 & \lambda^2 + 2 D_2 \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 + (2 D_1 + 2 D_2) \lambda^3 + (2 + 4 D_1 D_2) \lambda^2 + (2 D_1 + 2 D_2) \lambda + 1 - K = 0.$$

Zwei Teilfälle sind von Wichtigkeit:

1. $D_1 = D_2 = D$. Diese Bedingung ist identisch mit der allgemeinen $h_1 = h_2$. Aber auch mit dem zweiten Fall der Bedingung für die Reduktion der Gleichung zu einer quadratischen (s. S. 128). Die Lösung wird:

$$\lambda = - D + i \sqrt{1 \pm \sqrt{K} - D^2}.$$

2. $D_1 = 0$, $D_2 = D$.

Den Teilfall 1 werde ich nicht weiter besprechen. Die Lösung ist einfach, Verwicklungen treten nicht auf, nur gebe ich hier kurz eine angenäherte Lösung für den Fall, daß D_2 sich nur wenig von D_1 unterscheidet. Ich setze $D_2 = D_1 + \delta$ und nehme als angenäherten richtigen Wert den aus der Bedingung $D_1 = D_2$ gefundenen Wert

$$\lambda = - D + i \sqrt{1 \pm \sqrt{K} - D^2}.$$

Die Newtonsche Annäherungsmethode liefert dann folgenden Wert:

$$\lambda = - D - \frac{\delta}{2} + i \sqrt{1 \pm \sqrt{K} - D^2 - D \delta}.$$

Dagegen behandle ich den Fall ($D_1 = 0$) in einem besonderen Abschnitt.

$$n_1 = n_2,\ D_1 = 0,\ D_2 = D.$$

Die Gleichung lautet:

$$\lambda^4 + 2 D \lambda^3 + 2 \lambda^2 + 2 D \lambda + 1 - K = 0.$$

Aus der Struktur der Gleichung kann man den wichtigen Satz ableiten, daß hier immer $D_{a,b} = \frac{D}{2} \pm \delta$ ist. Nur dann wird nämlich der Faktor von $\lambda^3 = 2 D$.

Aus dem nächsten Glied ist zu entnehmen: $\frac{3}{2} D^3 - 2\delta^2 + n_a^2 + n_b^2 = 2$. Es kann bei Kenntnis einer komplexen Wurzel zur Berechnung der anderen benutzt werden.

Bei niedrigem K (Grenze s. S. 135) tritt eine bemerkenswerte Erscheinung auf, nämlich, daß sich die Schwingungszahl der Hauptschwingung bei wachsender Dämpfung erhöht, um dann wieder abzunehmen. Es ist dies der einzige Fall, bei dem eine Erhöhung der Dämpfung zu einer Vermehrung der Frequenz führt. (Auch für die Nachbarwerte von $r = 1$ tritt dasselbe ein. Diese Erweiterung des Erscheinungsgebietes habe ich noch nicht untersucht.) Dagegen wird die Oberschwingungszahl, wie in jedem anderen Fall, durch wachsende Dämpfung herabgesetzt, bis sie $= 1$ wird. Das Maximum von n_a in Bezug auf D läßt sich in folgender Weise berechnen. Man setzt die komplexe Lösung der Gleichung $= (D_a + i n_a)$ in die Gleichung ein. Man erhält dann eine komplexe Funktion dieser Lösungen und der Konstanten D und K. Diese komplexe Gleichung wird in zwei aufgelöst:

1. $n_a^4 - 2 n_a^2 + 1 - K + (6 n_a^2 - 2)(D D_a - D_a^2) - (2 D - D_a) D_a^3 = 0$.

2. $(n_a^2 - 1)(2 D_a - D) + (3 D - 2 D_a) D_a^2 = 0$.

Man kann nun die Bedingung für das Maximum nach den bekannten Regeln für die Ermittlung von Maxima von simultanen Gleichungen festsetzen. Die dritte Gleichung, die sich dann zu den obigen gesellt, lautet:

$$6 n_a^2 D_a^2 + 3 D_a^4 + 3 n_a^4 - 4 n_a^2 + 1 = 0.$$

Aus der dritten Gleichung kann man dasjenige D_a berechnen, das zu der maximalen Schwingungszahl gehört. Die Beziehung lautet:

$$D_a^2 = - n_a^2 + \sqrt{\frac{4 n_a^2 - 1}{3}}.$$

Setzt man dieses D_a in Gleichung 2 ein, so erhält man dasjenige D, welches das Maximum hervorruft.

Die gewonnenen drei Werte in die Gleichung 1 eingesetzt, ergibt das zugehörige K. Man kann dann in einer

Tabelle die zugehörigen Werte zusammenstellen und ist der Suche nach dem Maximum durch Ausprobieren enthoben.

In einem Fall, nämlich wenn die Schwingungszahl n nur wenig von 1 abweicht, was bei kleinem k eintritt, kann man diese Werte unmittelbar aus K berechnen. Die Lösungen lauten:

Wenn $n = 1 - \delta$, so ist $\delta = 9/8\,K \quad D_a^2 = 3/4\,K \quad D^2 = 4/3\,K$ für das Maximum.

In der folgenden Tabelle stelle ich einige nach dem entwickelten Prinzip gewonnene Werte zusammen zugleich mit den Frequenzen für die ungedämpfte Hauptschwingung:

K	D_2	D_a	n_a	$\sqrt{1-\sqrt{K}}$	Differenz
2/3	0		0.5773	0.5773	0.0000
0.4113	0.2842	0.1520	0.6000	0.5988	0.0012
0.2767	0.3999	0.2751	0.7000	0.6885	0.0115
0.2222	**0.4330**	**0.2887**	0.7638	0.7270	0.0368
0.1859	0.4165	0.2848	0.8000	0.7542	0.0458
0.1567	0.3960	0.2758	0.8300	0.7772	0.0528
0.1472	0.3879	0.2712	0.8400	0.7850	0.0550
0.1281	0.3693	0.2615	0.8600	0.8013	0.0587
0.0907	0.3223	0.2326	0.9000	0.8360	0.0640

$n_1 = n_2$, $D_1 = 0$. *Grenze der Aperiodizität einer Schwingung.*

Von einem gewissen D ab bleibt nur eine komplexe Wurzel übrig, und zwei reelle negative Wurzeln, d. h. zwei überaperiodische Bewegungsmodi treten auf. Bei diesem Grenz-D sind die beiden reellen Wurzeln gleich. Analytisch wird dieser Fall dadurch bestimmt, daß die Diskriminante $= 0$ wird. Ich habe nicht diesen Weg zur Bestimmung der Grenze verfolgt, sondern gehe so vor: Stellt man D als Funktion der reellen Wurzeln D_a dar, so erhält man:

$$D = -\left\{\frac{D_a^4 + 2\,D_a^2 + 1 - K}{2\,(D_a^3 + D_a)}\right\}.$$

Das Minimum von D liefert die Grenzbedingung. Die Bedingungsgleichung wird:

$$D_a^6 + D_a^4 + (1 - 3K) D_a^2 - 1 + K = 0.$$

Sie hat die reelle Wurzel:

$$D_a^2 = \tfrac{1}{3}\left\{\sqrt[3]{8 + \sqrt{a}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{a}} - 1\right\},$$

worin $a = 729\,K^3 - 972\,K^2 + 432\,K$. Wird der Wert von D_a in die obige Gleichung eingesetzt, so erhält man dasjenige D, das die Aperiodizität der Hauptschwingung hervorruft. An einem besonderen Beispiel $K = 0.9$ habe ich verifiziert, daß diese Bedingung mit der Bedingung: (Diskriminante $= 0$) übereinstimmt. Für einige mittlere Werte von K habe ich diese Grenze berechnet. Die folgende Zusammenstellung ist für die Beurteilung des Einhaltens des Königschen Resonanzphänomens wichtig (s. letzte Spalte und S. 139).

	Grenz-D	D^2
$K = 0.4$	0.7798	0.6081
0.4444	0.8511	0.7244
0.5	0.8236	0.6783
0.6	0.7651	0.5853

$n_1 = n_2$, $D_1 = 0$. *Angenäherte Berechnung der Wurzeln.*

Da im allgemeinen die Lösung der biquadratischen Gleichung nur für bestimmte Zahlenwerte möglich ist, so empfiehlt es sich, die Grundzüge von Annäherungsmethoden zu entwerfen. Sie können auch zur angenäherten Bestimmung von Zahlenwerten unmittelbar benutzt werden. Im Prinzip wird man hier die Newtonsche Annäherungsmethode verwenden. Man kann hierbei den Ausgang von verschiedenen Punkten der funktionellen Beziehungen nehmen.

Ausgang von den Lösungen für die ungekoppelten Systeme. Für die Oberschwingung angenäherte Wurzel $\lambda = i$ liefert denselben Wert $\lambda = i$ (vgl. S. 136).

Für die Hauptschwingung Ausgang $\lambda = -D + i\sqrt{1-D^2}$.

Lösung $\lambda = -\frac{K}{4D} + \sqrt{1 - \frac{K}{2} - D^2}$.

Ausgang von der Lösung für ungedämpfte Systeme. Ausgang $\lambda = i\sqrt{1 \pm \sqrt{K}}$.

$$\text{Lösung: } \lambda = -\frac{D}{2}\left\{\frac{4(1\pm\sqrt{K})K}{4(1\pm\sqrt{K})K + D^2(2\pm 3\sqrt{K})^2}\right\}$$

$$+ i\left\{\sqrt{1\pm\sqrt{K}} \mp \frac{D^2\sqrt{K}\sqrt{1\pm\sqrt{K}}(2\pm 3\sqrt{K})}{4(1\pm\sqrt{K})K + D^2(2\pm 3\sqrt{K})^2}\right\}.$$

Da hier der ganze Dämpfungswert als Korrektur auftritt, weicht er von dem Richtigen nicht unwesentlich ab. Er fällt immer etwas kleiner als $D/2$ aus, während er für die Hauptschwingung größer sein soll (vgl. oben S. 132). Eine bessere Annäherung ergibt die Berücksichtigung der quadratischen Glieder für die Korrektur des reellen Teils der Wurzeln. Die Korrektur des imaginären Teils der Wurzeln, bestehend in dem zweiten Term des imaginären Teils, liefert eine sehr wichtige Grenzbeziehung. Man sieht nämlich, daß diese Korrektur positiv bleibt, so lange $2 > 3\sqrt{K}$ bzw. K kleiner als $4/9$ ist, d. h. die Kurve $n_h = f(D)$ senkt sich sofort von $D = 0$ oder was dasselbe ist, dieser Wert von K bestimmt die Grenze für die Ausbildung eines Maximums in dieser Funktion. Bei höheren K ruft also die Dämpfung, vom Wert 0 angefangen, keine Erhöhung der Schwingungszahl mehr hervor (vgl. o. S. 132).

Es gibt noch eine weitere Annäherungsmöglichkeit, die gute rechnerische Resultate gibt, nämlich für die Hauptschwingung als Ausgangswert zu wählen:

$$\lambda = -\frac{D}{2} + i\sqrt{1-\sqrt{K}}$$

auszugehen. Die Resultate schreibe ich nicht an.

Für $K = 1$ kann man die biquadratische Gleichung in zwei quadratische zerreißen (vgl. o. S. 124).

Die Lösungen sind für die Hauptschwingung:

$$\lambda = -\frac{D}{2} + i\sqrt{\frac{1-K}{2} - \frac{D^2}{4}}$$

und für die Oberschwingung:

$$\lambda = -D + i\sqrt{2 - D^2}.$$

n_1 und n_2 verschieden, $n_2 = r n_1$.

Die Grenzfälle, die bestimmt sind durch ein sehr großes r und sehr kleines r, haben eine gewisse Wichtigkeit für die Übersicht der Beziehungen.

Ungedämpfte Schwingungen. r groß:

$$n_h = i\sqrt{1-K} \qquad n_0 = i r,$$

r sehr klein gegen 1:

$$n_h = i r \sqrt{1-K} \qquad n_0 = i.$$

Gedämpfte Schwingungen. r sehr groß:

$$n_h = -D_1 + i\sqrt{1-K-D_1^2}$$
$$n_0 = r(-D_2 + i\sqrt{1-D_2^2}),$$

r sehr klein:

$$n_h = r(-D_2 + i\sqrt{1-K-D_2^2}; \quad n_0 = -D_1 \pm i\sqrt{1-D_1^2}$$

$$D_1 = 0, \quad D_2 = D_2$$

$$\lim r - \infty \quad n_h = i\sqrt{1-K} \qquad n_0 = r(-D_2 + i\sqrt{1-D_2^2})$$
$$\lim r = 0 \quad n_h = r(-D_2 + i\sqrt{1-K-D_2^2}) \quad n_0 = i.$$

n_2 nur wenig größer oder kleiner als n_1, K klein, $D = 0$.

$n_2 = n_1\ (1 \pm \varepsilon)$. Ausgang: die Schwingung des ungekoppelten Systems $\lambda = i$. Die Newtonsche Annäherung ergibt die Lösung für die schwächer gedämpfte Schwingung:

$$\lambda = \frac{-KD}{4(D^2+\varepsilon^2)} + i\left(1 - \frac{K\varepsilon}{4D^2 + 4\varepsilon^2}\right).$$

Der Überschuß über die Schwingungszahl des ungedämpften Einzelsystems hat ein Maximum bei $\varepsilon = D$. Diese Beziehung wird zur Begründung des Königschen Resonanzphänomens benutzt, dessen Grundzug durch die Formel gut wiedergegeben wird, während für den Fall ($n_1 = n_2$) die Annäherung unzureichend ist (vgl. S. 134 und S. 138).

Das Königsche Resonanzphänomen.

König hat einen sehr interessanten Resonanzversuch ausgeführt (Poggendorfs Annalen, N. F. 9, S. 394, 1880). Er hat einer Stimmgabel einen Resonator gegenüber gestellt, der aus einer mit Luft gefüllten, einseitig offenen, Röhre bestand. Die Länge der Luftsäule konnte durch Verschieben eines Stempels verändert werden. Die Schwingungszahl der Stimmgabel wurde sehr genau mit einem Vibrationsmikroskop bestimmt. Der Eigenton des Resonators lag zunächst unter dem Eigenton der Stimmgabel. Die Stimmgabel gab dann ihren Eigenton. Als der Ton des Resonators erhöht wurde und sich bis etwa eine Terz dem Ton der Stimmgabel genähert hatte, wurde der Ton der Stimmgabel erhöht. Diese Erhöhung wuchs bis zu dem Punkt der vollständigen Ubereinstimmung der Eigenschwingungen und erniedrigte sich rasch auf den Eigenton der Stimmgabel. Das Umgekehrte trat dann bei der Erhöhung des Tones des Resonators über dem Ton der Stimmgabel ein. Wenn man die Schwingungszahl der Stimmgabel als Funktion des Tons des Resonators aufzeichnet, so kommt eine Kurve zustande, die von niedrigen Tönen des Resonators angefangen oberhalb der Abscisse liegend zu einem Maximum steigt, um dann durch den Nullpunkt der Kurve hindurch gehend, zu einem Bogen wird, der ungefähr symmetrisch zur Abscisse verläuft. König hat keine Erklärung für das Phänomen gegeben. Sie ist zuerst von Rayleigh auf Grund der Lehre von den erzwungenen Schwingungen angebahnt worden. M. Wien hat gezeigt, daß dieses Doppelsystem als ein gekoppeltes behandelt werden kann und daß es sich hier um die Veränderung der Schwingungszahlen durch die Koppelung handelt. Es handelt sich hier um Trägheitskoppelung, deren Gesetze aber nicht sehr von denen der elastischen Koppelung abweichen. Bedingend für das Zustandekommen ist das Verhältnis der Dämpfungen der beiden Teilsysteme. Die Dämpfung der Stimmgabel wird als sehr klein gegenüber dem Resonator zu gelten haben. Ich setze sie $= 0$. Wien hat mit einer sehr guten Annäherungsmethode den Verlauf der Kurve dargestellt. Er ist ähnlich wie ihn auch Rayleigh gefunden hat. Und derselbe wie er durch die Beziehungen S. 136 geliefert wird. Obwohl die Wiensche Annäherungsformel an sich sehr gut ist, so gibt sie doch an wichtigen Stellen den Verlauf nicht richtig dar, insbesondere den Punkt, bei dem der Stimmgabelton auf den Eigenton zurückfällt. Es ist keine Frage, daß es sich hierbei um den Punkt handelt, bei dem die Frequenz der Hauptschwingung und der Oberschwingung miteinander übereinstimmt. Oder in der graphischen Darstellung um den Kreuzungspunkt der Kurven. Oder analytisch ausgedrückt, um die Gleichheit des imaginären Teils der komplexen Wurzeln. Das kann aber nicht zutreffen für die Übereinstimmung des Eigentons von Stimmgabel und Resonator bzw. für den Fall $n_1 = n_2$ aus den S. 132 angeführten Gründen oder nach einer einfachen Überlegung, die sich auf die graphische Darstellung stützt. Wir wissen außerdem aus dem vorhergehenden, daß für $n_1 = n_2$ die Oberschwingung in ihrer Frequenz durch die wachsende Dämpfung verringert wird, daß die Frequenz aber niemals unter $n = 1$ gehen kann, wie dies nach der Wienschen Formel erforderlich wäre. Kurzum, der Stimmgabelton fällt auf den Eigenton der Stimmgabel zurück, wenn der Resonator einen etwas höheren Ton als die Stimmgabel hat. Daß dies von König nicht beobachtet werden konnte, liegt ohne Zweifel daran, daß wohl die Schwingungszahl der Stimmgabel mit dem Vibrationsmikroskop sehr genau bestimmt wurde, aber nicht die Eigenfrequenz der Resonatorschwingungen. Sie wurde scheinbar nur akustisch festgestellt. Wird die Dämpfung des Resonators kleiner, so verschwindet das Phänomen bzw. die Kurven der Schwingungszahl kreuzen sich nicht mehr, sondern sie werden auseinander gerissen. Der Grenzpunkt ist identisch mit dem Auftreten der Doppelwurzel (vgl. o. S. 129). Bei einem gewissen höheren K tritt zweifellos das Phänomen überhaupt nicht mehr ein. Dieses Grenz-K konnte ich nicht genauer bestimmen. Aber das Phänomen wird unmöglich, wenn bei einem niedrigeren D als das Auftreten der Doppelwurzel erfordert, schon Aperiodizität eintritt. Die S. 134 mitgeteilte Tabelle gibt dieses K als zwischen 0.5 und 0.6 liegend an. Man sieht also, daß die durchgreifende Analyse zu einer vollen Aufklärung dieser Erscheinung führen kann. Man hat dabei die physikalischen Momente zu berücksichtigen, aber auch alle Mittel der allgemeinen rechnerischen Analyse unter Zuhülfenahme von graphischer und event. tabellarischer Darstellung. Auf das Phänomen selbst gedenke ich auf Grund meiner obigen Entwicklungen zurückzukommen.

6. Erzwungene ungedämpfte Schwingungen.

$$Q = \frac{1 - K}{(1 - R_1^2)(1 - R_2^2) - K}.$$

Dies kann auch in den Ausdruck verwandelt werden:

$$Q = \frac{1}{(1 - R_a^2)(1 - R_b^2)},$$

worin jetzt R_a und R_b das Verhältnis der erregenden Schwingungszahl einer der beiden Schwingungen des Gesamtsystems bedeuten. Man sieht, daß Q unendlich wird, wenn R_a oder $R_b = 1$ wird, d. h. die Periode der einwirkenden Schwingung mit der Periode der Eigenschwingung übereinstimmt. Dazwischen liegt ein Minimum von Q für $\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R^2} = 2$. Für

$$n_1 = n_2 \quad \text{wird} \quad Q = \frac{1 - K}{(1 - R^2)^2 - K}.$$

Es wird unendlich für $R = 1 \pm \sqrt{K}$. Das Minimum liegt bei $R = 1$.

7. Erzwungene gedämpfte Schwingungen.

$$Q = \frac{1 - K}{\sqrt{[\nabla_r R]^2 + [\nabla_i R]^2}}, \text{ worin}$$

$$\nabla_r R = (1 - R_1^2)(1 - R_2^2) - K - 4 D_1 D_2 R_1 R_2$$

und

$$\nabla_i R = D_1 R_1 (1 - R_2^2) + D_2 R_2 (1 - R_1^2).$$

Wenn $n_1 = n_2$ ist, welchen Fall ich weiterhin allein behandle, wird

$$\nabla_i R = (1 - R^2)^2 - K - 4 D_1 D_2 R^2$$

und

$$\nabla_i R = (D_1 + D_2) R (1 - R^2).$$

Die Maximum-Minimumbedingung $\frac{dQ}{dR^2} = 0$ ergibt eine Gleichung dritten Grades in R^2. Ich behandle nur den Teilfall $D_1 = D_2$.

$$Q = \frac{1 - K}{\sqrt{\{(1 - R^2)^2 - K - 4 D^2 R^2\}^2 + 16 D^2 R^2 (1 - R^2)^2}}.$$

Die Bedingungsgleichung für die Maxima lautet:

$$R^6 - (3 - 6 D^2) R^4 + (3 - K - 8 D^2 + 8 D^4) R^2 - 1 + K$$
$$+ 2 D^2 + 2 K D^2 = 0.$$

Die in den Formeln angegebenen Beziehungen lassen sich am anschaulichsten in Kurvenscharen: $K =$ konst. mit D als Parameter darstellen. Man könnte sie die Charakteristiken der Registriersysteme nennen.

Bei niedrigen Dämpfungen besitzt die Gleichung drei reelle Wurzeln. Es treten zwei Resonanzmaxima auf, dazwischen liegt das Minimum. Wird die Dämpfung größer, so verschwinden schließlich die Maxima bzw. die physikalisch möglichen Wurzeln vollständig. Das Verschwinden erfolgt im allgemeinen stufenweise durch folgende Änderungen der analytischen Beziehungen. 1. die eine Wurzel wird negativ, 2. zwei Wurzeln werden komplex. Beide Bedingungen streiten sich gewissermaßen um den Vorrang. Bei Koppelungen, die über einem gewissen „kritischen" K liegen, tritt bei wachsendem D zuerst die Bedingung 1 ein. In diesem Fall verschwindet das

Resonanzmaximum der Hauptschwingung durch Negativwerden der Wurzel für R^2. Die Kurve $Q = f(R^2)$ senkt sich bis zu einem Minimum, um dann wieder zu dem Maximum der Resonanz der Oberschwingung anzusteigen. Bei weiterem Wachsen von D verschwindet Maximum und Minimum, indem die beiden entsprechenden Wurzeln komplex werden.

In dem zweiten Fall — bei einem K unterhalb des kritischen — bleibt bei einer gewissen Dämpfung nur mehr eine reelle Wurzel, entsprechend einem Maximum, übrig. Ein Minimum ist nicht vorhanden. Dieses Maximum verschwindet dann, wenn die erste Bedingung realisiert, nämlich die zweite Wurzel negativ wird.

Ich formuliere jetzt die beiden Bedingungen. Die eine Wurzel wird negativ, wenn der letzte Term der Gleichung von der Negativität in die Positivität übergeht, d. h. $= 0$ wird. Die Bedingung lautet: $2D^2 + 2KD^2 - 1 + K = 0$. Oder $D^2 = \frac{1-K}{2(1+K)}$ wird die eine Wurzel $R^2 = 0$. Die Gleichung ergibt eine Lösung $R^2 = 0$. Die anderen Lösungen werden aus der übrig bleibenden quadratischen Gleichung entnommen. Die Lösungen sind

$$R^2 = \frac{1}{1+K}\left(3K \pm \sqrt{2K^2 + K^3 - 1 - K}\right).$$

Wenn der Ausdruck unter der Wurzel $= 0$ wird, werden die beiden Wurzeln gleich groß. Der Ausdruck, $= 0$ gesetzt, liefert dann das kritische K, bei kleinerem K werden hier sofort die Wurzeln komplex.

Das Verschwinden der möglichen Wurzeln tritt im zweiten Fall dadurch ein, daß die Wurzeln komplex werden. Dies ist der Fall, wenn die Diskriminante der Gleichung verschwindet. Die Diskriminante $= q^2 + p^3 = 0$, worin

$$q = 2KD^2 \quad \text{und} \quad p = \frac{4D^2 - 4D^4 - K}{3}.$$

Der Beweis, daß für das kritische K die Grenzbedingung 1 der dreifachen Positivität der Wurzeln zugleich die Grenzbedingung der dreifachen Reellität erfüllt ist, läßt sich leicht allgemein dadurch erbringen, daß man in der Gleichung ($q^2 + p^3 = 0$) D durch den Wert für die erste Grenzbedingung ersetzt. Man erhält dann eine Gleichung $f(K) = 0$, die identisch ist mit der obigen Gleichung: $K^3 + 2K^2 - K - 1 = 0$. Die Gleichung für das kritische K ist selbst dritten Grades und liefert die Lösung: kritisches $K = 0.8019377$.

Grenzen der dreifachen Positivität und Reellität für kleine und große Koppelung.

1. K sehr klein. In der Grenzbedingung $q^2 + p^3 = 0$ kann q vernachlässigt werden. Dann ergibt sich für $D^2 = K/4$. Es wird weiter:

$$R_{1,2}^2 = 1 - 2D^2 \pm \sqrt{K - 4D^2}; \quad R_3^2 = 1 - 2D^2$$

$$Q_{1,2} = \frac{1}{4D\sqrt{K}} \text{ (Maxima)}; \quad Q_3 = \frac{1}{K + 4D^2} \text{ (Minimum)}.$$

2. K annähernd 1. Grenzwerte für die dreifache Positivität der Wurzeln:

$$D^2 = \frac{1-K}{4} \quad R_1^2 = 0 \quad Q = 1$$

$$R_2^2 = \frac{2}{1+K} = \frac{3-K}{2} \quad Q = 1 - K$$

$$R_3^2 = \frac{6K-2}{1+K} = 2K \quad Q = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1-K}{2}}.$$

Grenzwerte für die dreifache Reellität der Wurzeln:

$$D^2 = 0.063863, \quad R_{2,3}^2 = 1.375883, \quad Q = 0.$$

Lage der Maxima und des Minimums.

Bei einem Freiheitsgrad liegt das Resonanzmaximum der gedämpften Schwingung vor dem Maximum der ungedämpften Schwingung, wenn man Q als Funktion von R ansieht und die Lage des Maximums durch die Größe von R, das es hervorruft, angibt. Bei den gekoppelten Schwingungen ist im allgemeinen das Gleiche der Fall. Nur bei der Hauptschwingung finden Ausnahmen statt. Die Lage der Maxima der gedämpften Schwingungen gegenüber den ausgezeichneten Größen der ungedämpften Schwingung kann man für kleine D aus dem Vorzeichen des Differentialquotienten $\frac{dQ}{d(R^2)}$ bestimmen, wenn man in diese Beziehung jeweilig die Größen von R^2 für die Oberschwingung, das Minimum und die Hauptschwingung bei der ungedämpften Schwingung einsetzt.

1. Lage des Resonanzmaximums der Oberschwingung. Für die ungedämpfte Schwingung ist $R^2 = 1 + \sqrt{K}$. $\frac{dQ}{d(R^2)}$ ist proportional $-(2K + 2D^2 + \sqrt{K} + 2D^2\sqrt{K})$, also stets negativ, d. h. das gedämpfte Maximum liegt stets vor der ungedämpften Resonanz.

2. Das ungedämpfte Minimum befindet sich bei $R = 1$. Es wird $\frac{dQ}{d(R^2)}$ proportional $-(4D^2 + K)$. Der Differentialquotient ist stets negativ, das Minimum der gedämpften Schwingung liegt also stets hinter dem Minimum der ungedämpften Schwingung. Die Reduktion auf eine reelle Wurzel kommt durch Vereinigung des nach rechts rückenden Minimums und des nach links rückenden Maximums zustande. Es entsteht dadurch ein Wendepunkt. Das noch bleibende „zusammengezogene" Maximum entspricht also dem Maximum der Hauptschwingung.

3. Lage des Resonanzmaximums der Hauptschwingung. Für die ungedämpfte Schwingung ist $R^2 = 1 - \sqrt{K}$. Der Differentialquotient $\frac{dQ}{d(R^2)}$ ist proportional

$$2K - \sqrt{K} + 2D^2(1 - \sqrt{K}).$$

Dieser Wert kann positiv oder negativ sein. Wenn er positiv ist, liegt das Maximum hinter demjenigen der ungedämpften Resonanz. Wenn $K = 1$ ist, so ist er stets negativ. Mit abnehmendem K kann er positiv werden. Die Grenze liegt bei $2\sqrt{K} - 1 = 0$ oder $K = 1/4$. Ist K größer als $1/4$, so wandert das Maximum schon bei geringster Dämpfung nach links, d. h. nach der Seite der kleineren R Werte und verschwindet bei einem gewissen D. Ist $K < 1/4$, so wandert das Maximum mit ansetzender Dämpfung nach rechts und dann bei höherer Dämpfung wieder nach links, um schließlich bei $R = 0$ zu verschwinden. Es kann bei der Rückwanderung wieder auf derselben Stelle eintreten, wie das ungedämpfte Maximum. Die Bedingung hierfür ist:

$$2\,D^2(1 - \sqrt{K}) = \sqrt{K} - 2\,K \quad \text{oder} \quad D^2 = \frac{\sqrt{K} - 2\,K}{2\,(1 - \sqrt{K})},$$

$$\begin{array}{lll} \text{z. B. für } & K = 0.24 & D^2 = 0.00972 \\ & K = 0.23 & D^2 = 0.01883 \\ & K = 0.22 & D^2 = 0.0273. \end{array}$$

Bei einem Vergleich dieser Zahlen mit einer hier nicht veröffentlichten tabellarischen Übersicht über die gesamten zahlenmäßigen Beziehungen ist zu sehen, daß bei einem K zwischen 0.23 und 0.22 das „zusammengezogene“ Maximum bei seinem ersten Auftreten auf diese Stelle fällt. Bei K unter dieser Grenze liegt es zuerst immer rechts von dem ungedämpften Resonanzmaximum, bewegt sich dann nach rechts bei weiterem Wachsen der Dämpfung, um schließlich wieder umzukehren und bei $R = 0$ zu verschwinden. Bei den kleinen Koppelungen, wie sie bei akustischen Verhältnissen im allgemeinen vorhanden sind, z. B. bei den von M. Wien behandelten Fällen tritt es also stets rechts von dem ungedämpften Maximum zuerst auf.

Zum Schluß verweise ich nochmals auf die S. 115 angegebene allgemeine Beziehung hin, welche die Größe der Amplituden-Quotienten bei sehr kleiner Dämpfung festlegt. Wie die genannte Tabelle zeigt, nimmt das Verhältnis zwischen den Quotienten Q der Oberschwingung und der Hauptschwingung bei wachsender Dämpfung ab, was zur Beurteilung der Bedeutung der Hauptschwingung für die Leistung der Registriersysteme wichtig ist (vgl. S. 121).

Systeme von drei Freiheitsgraden.

Die Empfindlichkeit wird hier

$$\gamma_e = \frac{\sqrt{K_{12} K_{23}}}{\sqrt{c_1 c_3 (1 - K_{12} K_{23})}}.$$

Zu beachten sind folgende Beziehungen, die ich zum Teil schon oben behandelt habe (vgl. S. 112).

1. Wenn $1 - K_{12} - K_{23} = 0$ wird, ist zugleich $\sqrt{c_1 c_3} = \infty$. γ_e bleibt damit endlich.

2. $0 < (K_{12} + K_{23}) < 1$. Wenn $K_{12} + K_{23} > 1$, so wird γ_e negativ, was unmöglich ist.

3. Ebensowenig ist K_{12} oder K_{23} größer als 1.

4. Bedingungen 2 und 3 zeigen, daß die Elastizitätskoeffizienten untereinander und mit dem Koppelungskoeffizienten folgende Beziehungen haben müssen:

$$c_1 = c_{12} + a, \quad c_2 = c_{12} + c_{23}, \quad c_3 = c_{23} + b,$$

worin a und b zunächst willkürliche, aber positive Größen sind.

Die Gleichung für die Wurzeln der ungedämpften Schwingungszahl lautet:

$$(\lambda^2)^3 + (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)(\lambda^2)^2 + [n_1^2 n_2^2 (1 - K_{12}) + n_2^2 n_3^2 (1 - K_{23}) + n_1^2 n_3^2]\,\lambda^2 + n_1^2 n_2^2 n_3^2 (1 - K_{12} - K_{23}) = 0.$$

Die Werte der Wurzeln können nach den oben angegebenen Annäherungsmethoden berechnet werden. Wichtig ist für die Registriersysteme der Fall, daß n_2 gegenüber den anderen Frequenzen der Einzelschwingungen unendlich wird. Die Lösungen der Gleichung werden nach dem oben Mitgeteilten unter diesen Umständen folgende:

$$(\lambda_{1,2})^2 = -\tfrac{1}{2}\{n_1^2 (1 - K_{12}) + n_3^2 (1 - K_{23}) \pm \sqrt{\{n_1^2 (1 - K_{12}) - n_3^2 (1 - K_{23})\}^2 + 4\, n_1^2 n_2^2 K_{12} K_{23}}\}$$

$$n_3^2 = n_2^2 + n_1^2 K_{12} + n_3^2 K_{23}.$$

Die beiden ersten Wurzeln geben die beiden endlichen Frequenzen an. Eine davon liegt unter der niedrigsten Frequenz der Einzelschwingungen. Es ist die Hauptschwingung, die durch das Minuszeichen angegeben wird. Die zweite Formel gibt die große Frequenz an, die wesentlich durch die Schwingungszahl n_2 des mittleren Einzelsystems bedingt ist. So würde sich ein System verhalten, das zusammengesetzt ist aus zwei belasteten Membranen, die durch eine Luftsäule verbunden sind. Das sind Systeme, wie sie bei der Lufttransmission häufig vorkommen, vorausgesetzt, daß sie nach dem Grundsatz der Massenkonzentration zu behandeln sind (vgl. die frühere Abhandlung und oben S. 122).

Die beiden ersten Wurzeln kann man ähnlich wie bei Systemen von zwei Freiheitsgraden folgendermaßen anschreiben, wenn man $n_3 = r\, n_1$ setzt:

$$n_{a,b}^2 = \tfrac{1}{2} n_1^2 \{1 - K_{12} + r^2 (1 - K_{23}) \pm \sqrt{[1 - K_{12} - r^2 (1 - K_{23})]^2 + 4 r^2 K_{12} K_{23}}\}.$$

Für die soeben berechnete Hauptschwingung läßt sich in ähnlicher Weise ein Ausdruck für die maximale Güte bestimmen, wie bei den Systemen von zwei Freiheitsgraden. Die Güte wird dann

$$G = \frac{v}{2} \cdot \frac{\sqrt{K_{12} K_{23}}}{(1 - K_{12} - K_{23}) \sqrt{m_1 m_3}} \Big\{ r (1 - K_{12}) + \frac{1}{r} (1 - K_{23}) - \sqrt{\Big[r (1 - K_{12}) - \frac{1}{r} (1 - K_{23})\Big]^2 + 4 K_{12} K_{23}} \Big\}.$$

Es ist zu ersehen, daß die Maximumbedingung $\frac{dG}{dr} = 0$ erfüllt wird, wenn $r^2 = \frac{1 - K_{12}}{1 - K_{23}}$ wird. Die für r maximale Güte wird dann:

$$G_{\max} = \frac{\sqrt{K_{12} K_{23}}}{\sqrt{(1 - K_{12})(1 - K_{23})} + \sqrt{K_{12} K_{23}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1 \mu L/3}},$$

wenn ein Hebel die Vergrößerung übernimmt.

Die Güte ist bei $K_{12} = 0$ unendlich klein und wird für $K_{12} = 1$ unter Berücksichtigung der Bedingung, daß $K_{12} + K_{23}$ höchstens $= 1$ ist $= \frac{1}{2\sqrt{m_1 \mu L/3}}$ ebenso wie bei dem System von zwei Freiheitsgraden.

Strenge Behandlung der Lufttransmission.

Die Lufttransmissionssysteme bestehen im allgemeinen aus einer Luftsäule, die an beiden Enden mit einer Membran verschlossen ist. An den Membranen sind Massen befestigt. Unter der „strengen" Behandlung dieser Systeme verstehe ich die in der früheren Abhandlung S. 296—305 gegebene. Bei ihr ist die Luftsäule als ein kontinuierliches System behandelt. Die Einschränkungen, die bei dieser „strengen" Behandlung gemacht worden sind, beziehen sich nur auf die Bewegungen der Luft innerhalb der Säule. Bei der „angenäherten" Behandlung wird im Gegensatz hierzu das Prinzip der Massenkonzentration für die Luftsäule verwendet, oder die Masse der Luft wird überhaupt vernachlässigt. In der früheren Abhandlung habe ich erklärt, daß ich die weiteren theoretischen Auseinandersetzungen verschieben wollte, bis die Experimentaluntersuchung zu einem gewissen Ergebnis geführt hätte. Ich glaube jedoch, daß es auf Grund der Theorie jetzt schon möglich ist, für die experimentelle Untersuchung wichtige Schlüsse abzuleiten.

Zunächst entwickle ich die Formeln S. 304 der früheren Abhandlung nochmals in einer etwas anderen Form. Die Massen, die mit den Membranen verbunden sind, behandle ich dabei als wirksame Massen (S. 292 der früheren Abhandlung). Statt der Membran nehme ich einen in das Ende der Röhre eingedichteten mit einer Feder versehenen Kolben an. Die letztere Vereinfachung ist aus verschiedenen Gründen zulässig. Identisch ist dieses System dann mit einer Luftsäule, die mit einer Membran verschlossen ist, die selbst wieder an Flüssigkeitssäulen angrenzen. Nach den früheren Entwicklungen wird

$$\tan \varepsilon = \frac{n \varkappa}{a\, Q\,(e_1 - n^2 m_1)} = \frac{n \sqrt{M' E'}}{e_1 - n^2 m_1} = N_1$$

und

$$\tan\left(\frac{n L}{a} + \varepsilon\right) = -\frac{n \varkappa}{a\, Q\,(e_2 - n^2 m_2)} = -\frac{n \sqrt{M' E'}}{e_2 - n^2 m_2} = -N_2.$$

In diesen Formeln ist a die Schallgeschwindigkeit, $\varkappa$ der spezifische Volumelastizitäts-Koeffizient der Luft, L die Länge der Luftsäule, e_1 und e_2 sind die Volumelastizitäts-Koeffizienten, m_1 und m_2 die wirksame Masse der an die Luftsäule angehängten Flüssigkeitssäulen, M' und E' die wirksame Masse bzw. der Volumelastizitäts-Koeffizient $\left(\frac{dp}{dV}\right)$ der Luftsäule, Q ist der Querschnitt der Luftsäule und n die Schwingungszahl. Die Kombination dieser beiden Beziehungen ergibt

$$\tan (n\, L/a) = \frac{N_1 + N_2}{N_1\, N_2 - 1} = F.$$

Die rechts stehende Funktion bezeichne ich mit F. Von Wichtigkeit ist der Verlauf dieser Funktion, die eine ähnliche Bedeutung hat, wie ich sie S. 303 der früheren Abhandlung entwickelt habe. In unserem Falle ist die Funktion nur komplizierter. Stellt man sie graphisch dar, so erkennt man, daß sie zunächst bei $n = 0$ mit 0 beginnt und dann bei wachsendem n negativ wird. Dann wird sie negativ unendlich groß, springt auf einen positiv unendlichen Wert über und senkt sich von diesem durch 0 stetig hindurch gehend wieder zu negativ unendlich herab, springt nochmals auf positiv unendlich und senkt sich, von hier aus ständig positiv bleibend, zu dem Grenzwert 0 herab. Die auf der linken Seite der Gleichung stehende Tangentenfunktion steigt bis $n\, L/a = \frac{\pi}{2}$ ständig positiv bleibend bis unendlich an. Sie kann in diesem Intervall von F zweimal gekreuzt werden und zwar jedesmal hinter den beiden Unstetigkeitspunkten von F. Diese Kreuzungspunkte geben natürlich die Lösungen der Gleichung an. Fernerhin wird F von der Kurve $\tan (n\, l/a)$ jeweilig etwas hinter $n\, \pi$ gekreuzt. Die letzteren Werte stellen die von der Luftsäule herrührenden Schwingungen bzw. Oberschwingungen dar, während die beiden ersten Kreuzungspunkte die durch die Anwesenheit der beiden Massen bedingten Schwingungen repräsentieren. Um diese Punkte annähernd festzustellen, muß man zunächst die Lage der Unstetigkeitspunkte ermitteln. Sie resultieren aus der Beziehung $N_1\, N_2 = 1$ bzw. aus der Gleichung

$$n^4 - n^2\left(\frac{e_1}{m_1} + \frac{e_2}{m_2} + \frac{M' E'}{m_1 m_2}\right) + \frac{e_1 e_2}{m_1 m_2} = 0.$$

Daraus wird für diese Unstetigkeitspunkte:

$$n^2 = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{e_1}{m_1} + \frac{e_2}{m_2}\right.$$

$$\left. + \frac{M' E'}{m_1 m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{e_1}{m_1} + \frac{e_2}{m_2} + \frac{M' E'}{m_1 m_2}\right)^2 - \frac{4 e_1 e_2}{m_1 m_2}}\right\}.$$

Man sieht, daß diese Unstetigkeitspunkte wenig vor dem Punkt $\frac{e_2}{m_2}$ oder wenig nach dem Punkt $\frac{e_1}{m_1}$ liegen, wobei der Wert $\frac{e_2}{m_2}$ kleiner als der Wert $\frac{e_1}{m_1}$ angenommen ist. Für diese beiden letzten Punkte beträgt $F = \frac{1}{N_1}$ oder $= \frac{1}{N_2}$.

Nach dem zweiten Unstetigkeitspunkt senkt sich die Kurve auf den Grenzwert $\frac{\sqrt{M' E'}(m_1 + m_2)}{n\, m_1 m_2}$ herab. Zwischen den beiden Unstetigkeitspunkten liegt der Wert $F = 0$ für $N_1 = -N_2$ oder $n^2 = \frac{e_1 + e_2}{m_1 + m_2}$.

Der Wert für n der Hauptschwingung wird zwischen diesem letzteren Punkt und dem Punkt $\frac{e_2}{m_2}$ zu suchen sein.

Das Transmissionsmanometer als System von zwei Freiheitsgraden.

Das Transmissionsmanometer besteht aus einer Flüssigkeitssäule mit der wirksamen Masse M, die auf der einen Seite in Verbindung steht mit dem Inhalt des Röhrensystems, in dem der Druck gemessen werden soll (Arterie, Vene oder dgl.), auf der anderen Seite durch eine Membran mit dem Volumelastizitäts-Koeffizienten e_1 abgegrenzt ist. Dann folgt eine Luftsäule mit dem Volumelastizitäts-Koeffizienten E' zur Verbindung mit der Registrierkapsel. Die Registrierkapsel wird von mir jetzt als Kolbenkapsel behandelt. Sie hat den Querschnitt Q. Die an dem Kolben angebrachte Feder erzielt einen Volumelastizitäts-Koeffizienten e_2, die Bewegungen des Kolbens werden durch einen Hebel mit der Masse $l\mu$ um das $v$fache vergrößert.

v und Q treten immer in der Verbindung $v/Q = R$ auf. Die Elastizitätskoeffizienten sind die folgenden:

$$c_1 = e_1 + E', \quad c_2 = (e_2 + E')\,Q^2, \quad c_{12} = E'\,Q.$$

Die Koppelungszahl

$$K = \frac{E'^2}{(e_1 + E')\,(e_2 + E')} = \frac{1}{1 + R/\gamma\,E'}.$$

Die Empfindlichkeit wird gleich

$$\gamma_r = \frac{v\sqrt{K}}{\sqrt{c_1\,c_2\,(1 - K)}} = \frac{R}{e_1\,e_2/E' + e_1 + e_2}.$$

Die maximale Güte ist erreicht, wenn $n_1 = n_2$. Sie wird dann zu

$$G_{\max} = \frac{\sqrt{K}}{(1 - K)\sqrt{M'\,\mu\,e/3}}.$$

Die Bedingung $n_1 = n_2$ lautet hier:

$$(e_1 + E')\,R^2\,l\,\mu/3 = e_2 + E'.$$

Zu beachten ist, daß für die Empfindlichkeit eine gewisse Grenze nicht überschritten werden darf, wenn e nicht negativ werden soll. Sie findet sich, wenn man in der Gleichung für die Empfindlichkeit und in der letzten Bedingungsgleichung $e_2 = 0$ setzt. Die maximale Empfindlichkeit wird dann

$$\gamma = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{3\,E'\,M'}{l\,\mu\,(e_1 + E')}}.$$

Ebenso muß R über einen gewissen Wert hinausgehen, der aus denselben Beziehungen durch die Formel:

$$R^3 + E'\,\gamma\,R^2 - \frac{3\,E'\,\gamma\,M'}{\mu} = 0$$

ermittelt wird.

Die Formeln für die Reibung an der Hebelspitze werde ich später mitteilen.

Ich gebe für das Transmissionsmanometer einige Beispiele und zwar für einen Typus von der Empfindlichkeit des Arterienmanometers und einen zweiten von der Empfindlichkeit des Venenmanometers.

Arterienmanometer $\gamma_r = 7.5 \times 10^{-6}$ $M' = 60$ $\mu = 0.02$
$l = 5$ $E' = 0.3 \times 10^6$.

1. $R = 40$ $K = 0.0533$ $G = 0.419$ $N = 37.8$ $e_1 = 4.06 \times 10^6$
2. $R = 50$ $K = 0.0431$ $G = 0.384$ $N = 36.3$ $e_1 = 3.61 \times 10^6$
3. $R = 100$ $K = 0.0220$ $G = 0.289$ $N = 31.4$ $e_1 = 2.41 \times 10^6$

Venenmanometer $\gamma_r = 200 \times 10^{-6}$ $M' = 20$.

1. $R = 70$ $K = 0.462$ $G = 1.57$ $N = 14.1$ $e_1 = 0.188 \times 10^6$
2. $R = 100$ $K = 0.375$ $G = 1.47$ $N = 13.7$ $e_1 = 0.080 \times 10^6$

Berechnungen eines Transmissionsmanometers von brauchbarer Art 1. nach der „strengen“ Behandlung, 2. als System von zwei Freiheitsgraden und 3. nach dem Prinzip der Massenkonzentration für die Luftsäule als System von drei Freiheitsgraden ergeben für die Hauptschwingung und die erste Oberschwingung eine sehr gute Übereinstimmung aller drei Berechnungsarten und für die zweite Oberschwingung eine Übereinstimmung der ersten und dritten Berechnungsart.

Der Lufttonograph.

Bei dem Lufttonographen fällt die Membran zwischen Flüssigkeitssäule und Luftsäule des Transmissionsmanometers weg, d. h. $e_1 = 0$. Damit wird $K = \frac{E'}{e_2 + E'}$ und die Empfindlichkeit $\gamma_r = \frac{R}{e}$.

Die Maximumbedingung für die Güte $n_1 = n_2$ läßt sich nicht erfüllen, weil sie erfordert, daß zu gleicher Zeit K nicht beeinflußt wird. Dagegen läßt sich ein Maximum der Güte für R ermitteln. Sie erfordert für das Venenmanometer (vgl.

oben) $R = 106.4$, für das Arterienmanometer dagegen $R = 4000$. Man sieht hieraus, daß der Lufttonograph als Arterienmanometer sehr unzweckmäßig ist, daß er dagegen eine relativ hohe Güte als Venenmanometer besitzen kann. Die besonderen Rechnungen, die in den folgenden Tabellen zusammengestellt sind, erweisen dies. Sie zeigen, daß der Lufttonograph als Venenmanometer sogar vor dem Transmissionsmanometer den Vorzug verdient, obwohl die Güte des Lufttonographen immer noch etwas hinter derjenigen des besten Transmissions-Venenmanometers zurücksteht. Aber technische Gründe, vor allem die Unmöglichkeit, gerade diejenige Membran als Scheidewand zu finden, welche die richtige Empfindlichkeit erzielt, bedingen für den Lufttonographen hier den Vorzug.

Arterienmanometer $\gamma_r = 7.5 \times 10^{-6}$.

$R = 20$	$K = 0.10$	$G = 0.034$	$N = 10.7$
$R = 100$	$K = 0.0220$	$G = 0.036$	$N = 11.1$.

Venenmanometer $\gamma_r = 200 \times 10^{-6}$.

$R = 20$	$K = 0.75$	$G = 0.72$	$N = 9.6$
$R = 100$	$K = 0.375$	$G = 1.41$	$N = 13.4$.

Der Transmissions-Sphygmograph.

Die Auswahl der zweckmäßigen Konstruktion ist bei diesem Instrument noch schwieriger als bei dem Transmissionsmanometer, weil die Zahl der Größen, über die verfügt werden muß, größer ist. Als Urkonstanten kommen in Betracht (ich verweise hierbei auf die Abhandlung von Frank und Petter über den Sphygmographen): 1. Die Berührungsfläche zwischen der Arterie und der Pelotte $= F$. 2. Der Querschnitt der Empfangskapsel (Kolbenkapsel) $= Q_1$. 3. Der Querschnitt der Registrierkapsel $= Q_2$. 4. Die Hebelvergrößerung $= v$. 5. Der Elastizitätskoeffizient von Haut und Gefäßpolster, der Sphygmographenfeder und ev. der Spannung der Membran $= \mathfrak{E}$. 6. E' der Luftsäule. 7. η bzw. e_2 der Registrierkapsel. In den Gleichungen tritt immer v mit Q als Quotient $v/Q = R$ auf.

Die abgeleiteten wichtigen Konstanten sind:

$$c_1 = e_1 + E', \quad c_2 = (e_2 + E')\, Q_2^2, \quad c_{12} = E'\, Q$$

$$K = \frac{E'^2}{(e_1 + E')\,(e_2 + E')} = \frac{1}{1 + \dfrac{F R}{Q_1 \gamma E'}}.$$

Die Empfindlichkeit wird zu

$$\gamma_r = \frac{f}{p} = \frac{v F \sqrt{K}}{Q_1 \sqrt{c_1 c_2}\,(1 - K)} = \frac{F}{Q_1} \cdot \frac{R}{e_1 e_2 / E' + e_1 + e_2}.$$

Wenn $F = Q_1$ gesetzt wird, dann ergibt sich die Formel für das Transmissionsmanometer.

Die Güte wird maximal für $n_1 = n_2$. Sie wird dann gleich

$$\frac{F \sqrt{K}}{(1 + \sqrt{K})\, \sqrt{m_1 \mu e / 3}}.$$

Die Maximumbedingung ($n_1 = n_2$) hat die Form:

$$e_2 + E' = (\mathfrak{E} + E'\, Q_1^2)\, l \mu R^2 / 3 M'.$$

Zu der Berechnung der Güte ist folgendes hinzuzufügen. Neben der Maximumbedingung $\dfrac{\partial G}{\partial r} = 0$ könnte noch die Maximumbedingung $\dfrac{\partial G}{\partial Q_1} = 0$ erfüllt werden. Sie führt aber zu negativen Werten von e_2, ist daher unbrauchbar.

Die Erfüllung der Maximumbedingung $n_1 = n_2$ bringt gewisse Schwierigkeiten mit sich. Die Empfindlichkeit kann nämlich nicht über eine gewisse Grenze gesteigert werden, sonst wird e_2 negativ. Diese Grenze ergibt sich, wenn man in der Formel von γ_r und in der Maximumbedingung ($n_1 = n_2$) $e_2 = 0$ setzt:

$$\gamma_r < \frac{F Q}{\mathfrak{E}} \sqrt{\frac{E'\, 3 M'}{\mu l (E'\, Q^2 + \mathfrak{E})}}. \quad \text{Wenn } Q = \infty: \ \gamma_r < \frac{F}{\mathfrak{E}} \sqrt{\frac{1}{\mu'}}.$$

Berechnet man diesen Grenzwert für die Konstanten, wie sie bei dem Sphygmographen im allgemeinen vorhanden sind, so kommt man zur Empfindlichkeit $\gamma_r = 11.6 \times 10^{-6}$, deren Überschreitung ein negatives e hervorruft.

Ferner zeigt sich, daß beim Einhalten der Bedingung $(n_1 = n_2)$ die Größen e_2, R und $R Q_2$ für ein bestimmtes Q ein Maximum haben. Es ergibt sich aus den allgemeinen Beziehungen und geht aus der angefügten Tabelle für die normaler Weise verfügbaren Größen hervor:

	R	RQ	e_2
$Q = 0.5$	13.8	6.9	— 0.164
1	20.0	20.0	— 0.0332
3	12.8	38.5	+ 0.1060
5	7.9	39.3	+ 0.0480
10	3.9	38.9	+ 0.0124

Bei der Forderung einer bestimmten Empfindlichkeit kann nach dem Vorhergehenden die Bedingung $(n_1 = n_2)$ nur eingehalten werden, wenn die Empfindlichkeit unter dem obigen Grenzwert liegt. Da ferner für v und η (der Registrierkapsel) aus technischen Gründen bestimmte Grenzen gezogen sind, wird man in diesem Fall Q als Funktion der übrigen Größen darstellen. Aus der Formel für die Empfindlichkeit ergibt sich:

$$Q_2 = \frac{Q_1}{2\,\mathfrak{E}}\left[\frac{F v}{\gamma} \pm \sqrt{\frac{F^2 v^2}{\gamma^2} - 4\,\mathfrak{E}\,\eta\left(1 + \frac{\mathfrak{E}}{E' Q_1^2}\right)}\right].$$

Hieraus ersieht man, daß Q nur reell wird, wenn

$$v^2 > \frac{4\,\gamma^2\,\mathfrak{E}\,\eta}{F^2}\left(1 + \frac{\mathfrak{E}}{E' Q^2}\right).$$

Wird dieses minimale v eingesetzt, so erhält man:

$$Q_2 = \frac{F Q_1 v}{2\,\gamma\,\mathfrak{E}} \text{ bzw. } Q_2 = Q_1 \sqrt{\frac{\eta}{\mathfrak{E}}\left(1 + \frac{\mathfrak{E}}{E' Q_1^2}\right)}. \text{ Da } \sqrt{1 + \frac{\mathfrak{E}}{E' Q_1^2}}$$

fast durchweg sehr nahe 1 wird, so ist Q_2 annähernd

$$= Q_1 \sqrt{\frac{\eta}{\mathfrak{E}}}.$$

Ich gebe zum Schluß eine Übersicht über nach diesen Grundsätzen ausgewählte Konstruktionen.

$\gamma = 5 \times 10^{-6}$ Forderung $n_1 = n_2$ erfüllt $\mathfrak{E}$ stets $= 10^6$.

$Q_1 = 1.8 \quad R = 18.5 \quad K = 0.331 \quad G = 0.882$

$Q_1 = 3.0 \quad R = 12.8 \quad K = 0.54 \quad G = 0.979$

$\gamma = 7.5 \times 10^{-6}$.

$Q_1 = 2 \quad R = 14.9 \quad K = 0.501 \quad G = 0.93$

$Q_1 = 5 \quad R = 7.5 \quad K = 0.833 \quad G = 1.12 \quad (N = 61.4)$

$\gamma = 30 \times 10^{-6}$.

$Q_1 = 20 \quad Q_2 = 9 \quad v = 90 \quad R = 10, \quad \eta = 0.2 \times 10^6 \quad G = 0.432$

$N = 19.2$.

Es läßt sich auch der Einfluß des Trommelraumes berechnen, ebenso die Rückwirkung auf den Kreislauf. Die Formeln gebe ich hier nicht an.

Die Hebelschwingungen.

Die Ausschläge der Kolben und Membranen usw. werden bei den Instrumenten, die zur Russchreibung dienen, durch materielle Hebel vergrößert. Diese Hebel können durch Schwingungen die registrierte Kurve entstellen. Um eine Grundlage für das rechnerische Vorgehen zu gewinnen und zur Schätzung des Einflusses dieser Schwingungen berechne ich ein einfaches System. Ein Hebel dreht sich um eine Achse. Er ist bis zur Entfernung a von dieser Achse starr. Von dort für die Länge l biegsam mit dem Modul E. Die Masse eines Zentimeters ist $= \mu$, das Trägheitsmoment des Querschnitts $= \Theta$. In dem Punkt a greifen die äußeren Kräfte an. Sie bestehen in den Trägheitskräften einer Masse M und einer Feder mit dem Koeffizienten e. Die Differentialgleichung für die Biegungskurve des schwingenden Hebels (Stabs) lautet nach Rayleigh, Sound S. 256 und 261:

$$\frac{d^4 u}{d x^4} = \frac{\mu n^2 u}{\Theta E},$$

wobei u die Amplituden der verschiedenen Punkte des Hebels sind. Die Lösung dieser Gleichung läßt sich, da das eine Ende des Hebels $x = 0$ frei ist, in der Form schreiben, wenn man

$$\sigma = \sqrt[4]{\frac{n^2 \mu}{\Theta E}}$$

setzt: $u = A(\cos\sigma x + \cos h\,\sigma x) + C(\sin\sigma x + \sin h\,\sigma x)$.

Auf Grund des d'Alembertschen Prinzips gilt an dem Ende $x = l$ die Beziehung:

$$\Theta E \left(\frac{d^2 u}{d x^2} + a\,\frac{d^3 u}{d x^3}\right)_{x=l} = a(e - n^2 M)\,u,$$

worin durch $\frac{d^2 u}{d x^2}$ das Biegungsmoment und durch $a\,\frac{d^3 u}{d x^3}$ die Scheerkraft bestimmt ist. Ich schreibe zunächst u und seine Differentialquotienten an. Ist

$$R = \cos\sigma l + \cos h\,\sigma l, \quad S = -\sin\sigma l + \sin h\,\sigma l,$$
$$T = -\cos\sigma l + \cos h\,\sigma l, \quad U = \sin\sigma l + \sin h\,\sigma l,$$

so wird $u = A\,R + C\,U$.

$$\frac{du}{dx} = \sigma(A\,S + C\,R), \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = \sigma^2(A\,T + C\,S)$$

und

$$\frac{d^3 u}{d x^3} = \sigma^3(A\,U + C\,T).$$

Zur Elimination der Konstante C bzw. A dient die Beziehung $a\,(du/dx)_{x=l} = -u$. C wird dann

$$= -\frac{A(R + a\sigma S)}{U + a\sigma R}.$$

Daraus resultiert die Schlußgleichung

$$E\Theta[\sigma(TU - RS) + a\sigma^2(U^2 - S^2) + a^2\sigma^3(RU - ST)]$$
$$= a^2(e - n^2 M)(R^2 - SU)$$

bzw. $E\,\Theta\,[\sigma(\sin\cos h - \cos\sin h) + a\,\sigma^2(2\sin\sin h)$
$+ a^2\sigma^3(\sin\cos h + \cos\sin h)] = a^2(e - n^2 M)\,(1 + \cos\cos h)\cdot$
$[\sin = \sin\sigma l$ etc.$]$.

Interessant sind die Grenzwerte.

1. Die Masse des Hebels verschwindet. Dann ist $\varrho = 0$ und $n^2 = \frac{e}{M}\cdot$

2. Der Grenzwert für das Verschwinden der Masse M läßt sich aus der Formel entnehmen.

3. Der Elastizitätskoeffizient der Feder wird $= \infty$, d. h. der Hebel wird unverrückbar eingeklemmt. Dann erhält man, weil die linke Seite der Gleichung endlich ist:

$$1 + \cos \sigma l \cos h \sigma l = 0,$$

was für den einseitig festgeklemmten Stab gilt.

4. Besonders bemerkenswert ist die Umformung der Gleichung beim Starrwerden des Hebels, d. h. wenn der Modul E unendlich wird. Dann wird bei der Entwicklung bis zur 4. Potenz von σl:

$$\sin \sigma l \sin \sigma l = \sigma^2 l^2; \ \sin \sigma l \cos h \sigma l = \sigma l + \frac{\sigma^3 l^3}{3},$$

$$\cos \sigma l \sin h \sigma l = \sigma l - \frac{\sigma^3 l^3}{3}; \ \cos \sigma l \cos h \sigma l = 1 - \frac{\sigma^4 l^4}{4}.$$

Die Hauptgleichung wird zu

$$E \Theta \left(\sigma \cdot \frac{2 \sigma^3 l^3}{3} + a \sigma^2 \cdot 2 \sigma^2 l^2 + a^2 \sigma^3 \cdot 2 \sigma l \right) = 2 a^2 (e - n^2 M)$$

$$n^2 \mu \left(\frac{l^3}{3} + a l^2 + a^2 l \right) = a^2 (e - n^2 M).$$

Daraus

$$n^2 = \frac{e}{m_{\text{red}} + M}$$

d. h. es resultiert die Schwingungszahl eines starren Hebels unter der Einwirkung des Elastizitätskoeffizienten e, wenn seine reduzierte Masse m_{red} und die Zusatzmasse M beträgt. Durch die Feststellung dieser Grenzwerte wird die allgemeine Gleichung verifiziert.

Da die Lösung der Gleichung durch die trigonometrischen bzw. hyperbolischen Funktionen verwickelt wird, empfiehlt es sich, eine angenäherte Lösung zu suchen, die einer Beschränkung auf zwei Freiheitsgrade gleichkommt. Dazu entwickelt man die obigen Produkte in Reihen (bis zur 7. Potenz von σl).

Schließlich wird die Gleichung zu:

$$E\Theta\sigma^4\left[\frac{l^3}{3}+a l^2+a^2 l-\sigma^4 l^4\left(\frac{l^3}{630}+\frac{a l^2}{90}+\frac{a^2 l}{30}\right)\right]$$
$$=a^2(e-n^2 M)\left(1-\frac{\sigma^4 l^4}{12}\right).$$

Dividiert man durch $1-\frac{\sigma^4 l^4}{12}$, so ergibt sich:

$$n^2\mu\left[\frac{l^3}{3}+a l^2+a^2 l+\frac{n^2\mu}{E\Theta}l^4\left(\frac{11 l^3}{420}+\frac{13 a l^2}{180}+\frac{a^2 l}{20}\right)\right]$$
$$=a^2(e-n^2 M).$$

Die weitere Behandlung dieser Gleichung hat sich den experimentellen Untersuchungen anzupassen.

Wendet man dieselbe Annäherung auf einen bekannten Fall an, nämlich auf einen einseitig eingeklemmten Stab, so führt sie zu sehr guten Werten für die Hauptschwingung und den ersten Oberton. Es ist zu erwarten, daß dies auch für unseren Fall gilt.

Ebenso wie unser Fall läßt sich auch die Schwingung eines Stabs mit am Ende befestigter Masse behandeln.

Inhalt.