Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1918. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1918
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Zur Theorie der Kurven im Raume.

Von A. Voss.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 4. Mai 1918.

Die allgemeine Theorie der Kurven C im Raume beschäftigt sich seit den Untersuchungen von Monge und seinen Schülern wesentlich mit dem Verhalten der abwickelbaren Flächen D, die zu C in einer gewissen Beziehung stehen. Diese Flächen D werden entweder von Ebenen umhüllt, die auf C senkrecht stehen (Polardeveloppabele von C), oder von den rektifizierenden Ebenen von C; endlich werden auch die Filarevoluten von C von Tangentenebenen der C umhüllt, deren Charakteristiken auf C senkrecht stehen.

Dagegen hat sich, soweit mir bekannt ist, die Betrachtung bisher nicht auf die allgemeinen D-Flächen erstreckt, welche von Tangentenebenen der C umhüllt werden. Obwohl diese D einfach durch Enveloppenbildung, aber auch auf anderen Wegen (§ I) entstehen, geben sie doch zu vielen interessanten und, wie ich glaube, neuen Untersuchungen Veranlassung. Von wesentlicher Bedeutung ist dabei die Bestimmung der Krümmungseigenschaften der D-Flächen in § II, sodann ihr Zusammenhang mit dem allgemeinen Problem der Traktorien. Das letztere wird hier auf zwei verschiedenen Wegen behandelt, von denen der eine, § X, eine neuerdings von Darboux geführte Untersuchung auf die Lösung einer in der einfachsten Weise aus den natürlichen Variabeln ϱ, τ, s der Kurve C gebildeten Riccatischen Gleichung zurückführt, während der andere, den Durchgang durch das Imaginäre vermeidend, die

Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung 3. resp. 4. Ordnung verlangt, und in § IX zur Bestimmung der Huygensschen Traktorien der Helix benutzt ist. Bei diesen Untersuchungen kommt häufig in Betracht, daß die Integration einer Differentialgleichung von scheinbar verwickelter Form von der Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung nächst höherer Ordnung abhängig wird, deren Integrationskonstanten dann nicht mehr willkürlich bleiben. In der Tat läßt sich jede linear-homogene $D_n = 0$ von z auf eine nicht lineare D_{n-1} an σ von allerdings ganz speziellem Charakter durch die Substitution $z' = z\sigma$ reduzieren, und die Koeffizienten der letzteren müssen, wie ich im § VIII zeige, einem System von gleich Null gesetzten Invarianten in Bezug auf Transformationen der abhängigen und unabhängigen Variabeln genügen, welches für die einfachsten Fälle $n = 2, 3, 4 \ldots$ aufgestellt ist.

In dem letzten Paragraphen sind endlich spezielle Fragen behandelt, die sich sehr viel weiter hätten ausdehnen lassen, von denen hier nur noch die der räumlichen Traktorien des Kreises, und die Bestimmung der durch einen Kreis gelegten Schraubenlinien hervorgehoben sei.

§ I.

Abwickelbare Flächen D durch eine Kurve im Raum.

Es sei C eine willkürliche Kurve im Raum,[1]) deren Punkte $x\,y\,z$ durch P, deren Bogenlänge von einer bestimmten Stelle aus gerechnet mit s, und die Richtung der Tangente bei wachsendem s, sowie die der Haupt- und Binormale durch das System der Richtungscosinus

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$$

[1]) Im folgenden wird unter einer Kurve im Raum jede ebene oder nicht ebene Kurve verstanden, die im Raum betrachtet wird; eine Raumkurve ist dagegen eine Kurve mit von Null verschiedener Torsion.

mit der Determinante $+1$ (das charakteristische Triëder von C) bestimmt sind, ferner ϱ und τ der Krümmungs- und Torsionsradius ist. Dann gelten die Frenetschen Gleichungen

$$\text{A)} \quad \begin{gathered} \frac{dx}{ds} = \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \gamma \\ \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{\varrho}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\eta}{\varrho}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\zeta}{\varrho} \\ \frac{d\xi}{ds} = -\left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{\tau}\right), \quad \frac{d\eta}{ds} = -\left(\frac{\beta}{\varrho} + \frac{\mu}{\tau}\right), \quad \frac{d\zeta}{ds} = -\left(\frac{\gamma}{\varrho} + \frac{\nu}{\tau}\right). \end{gathered}$$

Bei beliebiger Annahme der unabhängigen Variabeln t an Stelle von s ist

$$\text{B)} \quad \begin{gathered} \varrho = \frac{s'^2}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}} \\ \frac{1}{\tau} = -\frac{\Delta \varrho^2}{s'^6}, \end{gathered}$$

wobei Δ die Determinante

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

bedeutet, und in B) alle durch Striche angedeuteten Differentiationen nach t zu nehmen sind.

Legt man durch C irgend eine abwickelbare Fläche, kurz D-Fläche, deren Gratlinie oder Rückkehrkante Γ den zum Punkte P zugehörigen oder entsprechenden Punkt Q enthält und bezeichnet die Koordinaten von Q mit X, Y, Z, so hat man die Gleichungen

$$\text{1)} \quad \begin{gathered} \frac{dX}{ds} = \Omega(X - x) \\ \frac{dY}{ds} = \Omega(Y - y) \\ \frac{dZ}{ds} = \Omega(Z - z), \end{gathered}$$

in denen Ω als eine willkürliche Funktion von s zu betrachten ist. Denn der zu Q benachbarte Punkt Q_1 hat zu Koordinaten $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$; diese müssen aber von der Form $X + ds\,\Omega(X - x)$, $Y + ds\,\Omega(Y - y)$, $Z + ds\,\Omega(Z - z)$ sein, woraus sich die Gleichungen 1) ergeben.

Setzt man $V = e^{-\int \Omega\, ds}$, so erhält man durch Integration von 1)

$$\begin{aligned} VX &= c_1 - \int \Omega V x\, ds \\ 2) \qquad VY &= c_2 - \int \Omega V y\, ds \\ VZ &= c_3 - \int \Omega V z\, ds, \end{aligned}$$

also für $\Omega = \dfrac{\theta'}{\theta}$, $V = \dfrac{1}{\theta}$,

$$\begin{aligned} X &= \theta\left(c_1 - \int \frac{\theta'}{\theta^2} x\, ds\right) \\ 2\,a) \qquad Y &= \theta\left(c_2 - \int \frac{\theta'}{\theta^2} y\, ds\right) \\ Z &= \theta\left(c_3 - \int \frac{\theta'}{\theta^2} z\, ds\right)^{1}). \end{aligned}$$

Für die durch die Gleichungen 2 a) bestimmten Flächen D ergibt sich nun sofort bei ungeändertem Ω oder θ, falls die Integrationskonstanten c_i durch c_i' ersetzt und die zugehörigen Werte der X, Y, Z durch X_1, Y_1, Z_1 bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} X - X_1 &= \theta\,(c_1 - c_1') \\ 3) \qquad Y - Y_1 &= \theta\,(c_2 - c_2') \\ Z - Z_1 &= \theta\,(c_3 - c_3'). \end{aligned}$$

Für je zwei Kurven Γ und Γ', welche zu denselben θ oder Ω gehören, ist die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte Q, Q' einer festen Richtung parallel.

Wird insbesondere

$$(c_1 - c_1')^2 + (c_2 - c_2')^2 + (c_3 - c_3')^2 = a^2$$

gewählt, so folgt:

[1]) Da jetzt ohne Beschränkung $\theta = e^{\int \Omega\, ds}$ genommen werden kann, läßt sich θ als positive Zahl voraussetzen, wenn wir uns, wie überall, wo nicht das Gegenteil ausdrücklich bemerkt ist, auf die Betrachtung reeller Verhältnisse beziehen.

Zieht man durch die sämtlichen Punkte Q' einer Kurve Γ' Strecken $a\theta$ parallel zu einer willkürlichen Richtung, so bilden die Endpunkte Q dieser Strecken eine neue Kurve Γ, die zu demselben θ gehört, und die sämtlichen Punkte Q, zu denen man auf diese Weise gelangt, liegen dabei jedesmal auf einer mit dem Radius $a\theta$ um Q' beschriebenen Kugel.

Hierdurch wird eine natürliche Zerlegung der Gesamtheit der D-Flächen oder Kurven Γ in ∞^3 den Integrationskonstanten entsprechende, welche zu denselben Werten von θ gehören, herbeigeführt. Insbesondere kann man aus zwei zu demselben θ gehörenden Kurven Q und Q_1, bei denen QQ_1 einer festen Richtung parallel ist, eine neue Kurve Q_2 dadurch herleiten, daß man auf derselben Richtung $QQ_1 : QQ_2 = \text{konst.}$ setzt.

Um diesen Satz zur Konstruktion von beliebig vielen Kurven Q' mittels Q wirklich verwenden zu können, muß man allerdings aus Γ die Funktion θ zuvor bestimmen. Dies geschieht folgendermaßen.

Bezeichnet man mit h die Entfernung PQ, mit i den Winkel der Tangente von C in P mit der Richtung PQ (positiv gemessen im Sinne der Strecke PQ), so ist bei gegebener Kurve Q die Funktion θ durch Quadratur bestimmt. Denn es ist

$$h\cos i = \alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z)$$

und aus $h^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2$ folgt durch Differentiation

$$hh' = (X-x)\left(\frac{dX}{ds} - \alpha\right) + (Y-y)\left(\frac{dY}{ds} - \beta\right) + (Z-z)\left(\frac{dZ}{ds} - \gamma\right)$$

$$= \frac{\theta'}{\theta} h^2 - h\cos i$$

oder:

$$\frac{\theta'}{\theta} = \Omega = \frac{h' + \cos i}{h},$$

wie übrigens auch geometrisch unmittelbar erhellt.[1])

[1]) Vgl. darüber z. B. § IV und S. 289.

Man erhält ferner durch partielle Integration aus 2a)

$$X - x = \theta\left(c_1 - \int \frac{\alpha}{\theta}\, ds\right)$$

2b) $$Y - y = \theta\left(c_2 - \int \frac{\beta}{\theta}\, ds\right)$$

$$Z - z = \theta\left(c_3 - \int \frac{\gamma}{\theta}\, ds\right).$$

Die Gleichungen 2b) geben für jeden Punkt Q seine relativen Koordinaten in Bezug auf den Punkt P an. Dividiert man diese letzteren durch θ, so erhält man die Koordinaten eines auf PQ gelegenen Punktes (Q) mit den Koordinaten

$$\Xi = c_1 - \int \frac{\alpha}{\theta}\, ds$$

$$H = c_2 - \int \frac{\beta}{\theta}\, ds$$

$$Z = c_3 - \int \frac{\gamma}{\theta}\, ds.$$

Denkt man sich diese „reduzierten Koordinaten von Q" im Axensystem der x, y, z aufgetragen, so entsteht eine neue Kurve Γ, deren Krümmungsradius $\frac{\varrho}{\theta}$, deren Torsionsradius $-\frac{\tau}{\theta}$, und deren charakteristisches Triëder entgegengesetzt parallel dem der Kurve C ist, die also dieser Kurve als in den kleinsten Teilen ähnlich, aber als entgegengesetzt gewunden bezeichnet werden kann, wie aus der Bestimmung der betreffenden Verhältnisse nach den Formeln A) und B) hervorgeht.

Die Bestimmung der Kurven Γ kann noch auf eine andere Art erfolgen, welche ebenfalls vielfach zur Verwendung im folgenden kommen wird. Von jedem Punkte P gelangt man zum Punkte Q dadurch, daß man, anstatt auf den Axen der x, y, z um $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ fortzuschreiten, auf den Axen des Triëders von P um die relativen Strecken p, q, r fortgeht, wobei

$$
\begin{aligned}
X - x &= \alpha p + \xi q + \lambda r \\
Y - y &= \beta p + \eta q + \mu r \\
Z - z &= \gamma p + \zeta q + \nu r,
\end{aligned}
\qquad 4)
$$

oder

$$
\begin{aligned}
p &= \alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z) \\
q &= \xi(X-x) + \eta(Y-y) + \zeta(Z-z) \\
r &= \lambda(X-x) + \mu(Y-y) + \nu(Z-z).
\end{aligned}
$$

Aus 4) folgt durch Differentiation nach 1) und A)

$$\Omega(\alpha p + \xi q + \lambda\alpha) - \alpha = \frac{\xi p}{\varrho} - \left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{\tau}\right) q + \frac{\xi}{\tau} r + \alpha p' + \xi q' + \lambda r' \text{ [1]})$$

nebst den analogen Gleichungen, wenn man α, ξ, λ durch β, η, μ; γ, ζ, ν ersetzt. Da die Determinante der Richtungscosinus nicht Null ist, erhält man

$$
\begin{aligned}
1 + p' - \frac{q}{\varrho} &= p\Omega \\
q' + \frac{p}{\varrho} + \frac{r}{\tau} &= q\Omega \qquad 5) \\
r' - \frac{q}{\tau} &= r\Omega.
\end{aligned}
$$

Setzt man hier

$$p^2 + q^2 + r^2 = h^2 = (PQ)^2, \qquad \text{so ist}$$

$$\cos i = \frac{p}{h}, \qquad 6)$$

und aus 5) folgt durch Multiplikation mit p, q, r und Addition, mit Benutzung von

$$pp' + qq' + rr' = hh'$$

wieder die Gleichung auf S. 287.

$$\frac{dh}{ds} + \cos i = \Omega h.$$

---

[1]) Die oben zugefügten Striche bedeuten, wie überall im folgenden, die Differentialquotienten der Funktionen, z. B. $p' = \frac{dp}{ds}$ usw.

Das System der Gleichungen 5) gibt bei beliebig gewähltem θ ∞^3 Kurven Γ, nämlich die bereits vorhin untersuchten. Zur Vereinfachung der Integration von 5) sei

$$p = \theta p_1, \quad q = \theta q_1, \quad r = \theta r_1,$$

wodurch 5) übergeht in

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\theta} + p_1' - \frac{q_1}{\varrho} = 0 \\ 5\,\text{a)} \qquad &q_1' + \frac{p_1}{\varrho} + \frac{r_1}{\tau} = 0 \\ &r_1' - \frac{q_1}{\tau} = 0. \end{aligned}$$

Man erhält aus 5a) durch Elimination von p_1, q_1 die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$7) \qquad \frac{1}{\theta} = \frac{d}{ds}\left[\varrho \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{dr_1}{ds}\right) + \frac{\varrho}{\tau} r_1\right] + \frac{1}{\varrho} \tau \frac{dr_1}{ds}$$

deren Integration mit Hülfe des zugehörigen homogenen Systems

$$\begin{aligned} &p_1' - \frac{q_1}{\varrho} = 0 \\ 5\,\text{b)} \qquad &q_1' + \frac{p_1}{\varrho} + \frac{r_1}{\tau} = 0 \\ &r_1' - \frac{r_1}{\tau} = 0 \end{aligned}$$

erfolgen kann, aus dem bei gegebenem θ nach den Frenetschen Formeln unmittelbar die 3 Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3 enthaltenden Werte

$$\begin{aligned} p_1 &= c_1 \alpha + c_2 \beta + c_3 \gamma \\ q_1 &= c_1 \xi + c_2 \eta + c_3 \zeta \\ r_1 &= c_1 \lambda + c_2 \mu + c_3 \nu \end{aligned}$$

folgen, aus denen sich durch Variation der Konstanten die vollständigen Lösungen

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha A + \beta B + \gamma C \\ \text{c)} \qquad q_1 &= \xi A + \eta B + \zeta C \\ r_1 &= \lambda A + \gamma B + \nu C, \end{aligned}$$

in denen

$$A = c_1 - \int \frac{ds}{\theta}\alpha, \quad B = c_2 - \int \frac{ds}{\theta}\beta, \quad C = c_3 - \int \frac{ds}{\theta}\gamma$$

ergeben, die übrigens nach 2b) auch unmittelbar ersichtlich sind, während die Integration der verkürzten linearen homogenen Gleichung von 7), welche allerdings den integrierenden Faktor

$$\varrho\left[\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{dr_1}{ds}\right) + \frac{r_1}{\tau}\right]$$

hat, für r_1 bei willkürlichen Werten von ϱ und τ unmittelbar keine weitere Behandlung zu gestatten scheint.[1]) Durch die Einführung der p_1, q_1, r_1 und die daran geknüpfte Variation der Konstanten erhält man eine übersichtliche Darstellung der Kurven Γ, durch welche die Aufgabe ihrer Bestimmung in zwei getrennte Prozesse verwandelt wird.

Sie soll gleich hier benutzt werden, um für die allgemeinen Schraubenlinien $\frac{\tau}{\varrho} = \text{const} = k$ eine Klasse von Kurven Γ zu bestimmen, die man im allgemeineren Sinne als Traktorien von C bezeichnen kann.[2]) Wird z. B. gefordert, daß die p, q, r gleich ϱp_1, ϱq_1, ϱr_1 bei konstanten Werten von p_1, q_1, r_1 sind, so folgt aus 5), wenn man

$$\Omega\varrho - \varrho' = \delta, \quad 1 - q_1 = p_1\delta$$

setzt,

$$p_1 + \frac{r_1}{k} = q_1\delta, \quad -\frac{q_1}{k} = r_1\delta.$$

Sie liefern bei konstantem δ (ein Fall, der nach den letzten beiden Gleichungen nur bei den Schraubenlinien auftreten kann)

$$(8) \qquad p_1 = \frac{1 + k^2\delta^2}{\delta N}, \quad q_1 = \frac{k^2}{N}, \quad r_1 = -\frac{k}{N\delta},$$

falls

$$N = 1 + k^2(1 + \delta^2)$$

---

[1]) Sie kann natürlich durch eine bekannte Substitution auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung reduziert werden.

[2]) Über den Begriff der Traktorien siehe § VII.

oder $$h^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \varrho^2 \left(\frac{1 + k^2 \delta^2}{N \delta^2} \right)$$

gesetzt wird. Für jede (allgemeine) Schraubenlinie gibt es, entsprechend der willkürlichen Wahl der Konstanten δ, ∞^1 Kurven Γ, deren Erzeugende für alle Punkte P von C gleiche relative Lage gegen das charakteristische Triëder von C besitzen, wobei $h = PQ = \varrho \cdot \text{const.}$ ist. Insbesondere gibt es nach 8) für die gemeine Schraubenlinie oder Helix (ϱ und τ konstant) bei gegebenem konstantem h eine Gleichung 4. Grades für δ, die zwei nur durch das Vorzeichen verschiedene reelle Werte von δ liefert. Dies ist freilich nur eine partikuläre Lösung des Huygensschen Traktorienproblems für die Helix.[1])

Trägt man die p_1, q_1, r_1 in einem rechtwinkligen Axensystem als Koordinaten auf, so erhält man nach 8) eine Raumkurve dritter Ordnung R_3, falls δ alle möglichen Werte zuerteilt werden, und die mit ϱ multiplizierten Radii Vectores der R_3 liefern dann jedesmal einen Punkt der zugehörigen Kurve Γ. Denn durch Elimination von δ aus den Gleichungen 8) entstehen die Gleichungen von drei Flächen 2. Grades, nämlich (wenn an Stelle von p_1, q_1, r_1 für den Augenblick x, y, z geschrieben werden),

$$\alpha) \quad y = x^2 + y^2 + \frac{xz}{k}$$

$$\beta) \quad z - zy + \frac{xy}{k} = 0$$

$$\gamma) \quad y^2 + z^2 + xzk = 0$$

Von diesen Flächen ist γ) ein Kegel mit der Spitze in P, dessen Schnitte mit den Ebenen $x = \text{konst.}$ Kreise sind, welche die xz-Ebene berühren. Dreht man die Axe der x in dieser Ebene um den Winkel α, und bezeichnet die neuen Koordinaten durch x^1, z^1, $y^1 = y$ so erhält man für $\operatorname{tg} 2\alpha = -k$, $\sin 2\alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$, $\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ die Gleichung

[1]) Die allgemeine Lösung desselben siehe in § IX.

$$2y_1^2 + x_1^2(1 + \sqrt{1+k^2}) - z'^2(\sqrt{1+k^2} - 1) = 0$$

also die Gleichung eines einschaligen Hyperboloids.

Die Fläche α) ist dagegen, wenn das System in analoger Weise um den Winkel α, $\operatorname{tg} 2\alpha = 1$ gedreht wird, für die Koordinaten x_1, z_1, $^1/_2 = y$

$$2k\left[(y_1 - {}^1/_2)^2 - \frac{1}{2}\right] + x_1^2(1+\sqrt{2}) - z_1^2(\sqrt{2}-1).$$

Und aus β) wird endlich für $\operatorname{tg}\beta = {}^1/_k$ die Gleichung des hyperbolischen Paraboloides

$$x_1 + z_1 k - y z_1 (1 + k^2) = 0.$$

Führt man an dem Triëder von C die zugehörige Schraubenbewegung aus, und multipliziert zugleich den zugehörigen Vektor der Rektaszension jedesmal mit dem Faktor ϱ, so entsteht eine Fläche Σ, welche die sämtlichen auf diese Weise entstehenden Traktorien enthält, und die demgemäß von ihren Vektoren PQ berührt wird. Es ist zu vermuten, daß die so entstehenden Kurven Γ wieder Schraubenlinien sind, was sich in der Tat leicht bestätigen läßt (vgl. § II, S. 296).

Man kann endlich die Beziehung zwischen zwei zu demselben θ gehörenden Kurven Γ, welche vorhin betrachtet wurde, noch verallgemeinern. Auf Seite 4) sind als reduzierte Koordinaten des Punktes einer zu $\theta_1 = \frac{1}{z^1}$ gehörenden Kurve Γ_1 die durch θ_1 dividierten $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ bezeichnet; ihnen entsprechen nach 5a) die Koordinaten p_1, q_1, r_1 des auf PQ_1 gelegenen Punktes (Q_1) einer Kurve (Γ_1). Ebenso mögen zu dem auf irgend einer anderen Kurve (Γ_2) gelegenen Punkte (Q_2) als „reduzierte Koordinaten“ die p_2, q_2, r_2 gehören, wobei θ_1 den Wert θ_2 haben wird. Dann ist nach 5a)

$$\frac{1}{\theta_1} + p_1' - \frac{q_1}{\varrho} = 0, \quad q_1' + \frac{p_1}{r} + \frac{r_1}{\tau} = 0, \quad r_1' - \frac{q_1}{\tau} = 0$$

$$\frac{1}{\theta_2} + p_2' - \frac{q_2}{\varrho} = 0, \quad q_2' + \frac{p_2}{r} + \frac{r_2}{\tau} = 0, \quad r_2' - \frac{q_2}{\tau} = 0$$

und daraus folgt, daß die Differenzen

$$p_1 - p_2, \quad q_1 - q_2, \quad r_1 - r_2$$

reduzierte Koordinaten eines Punktes (Q) auf PQ sind, welche zu dem Divisor

$$\theta = \frac{\theta_1 \theta_2}{\theta_2 - \theta_1}$$

gehören.

Damit ist aber die Möglichkeit gegeben mittels der Werte θ_1 und θ_2 die zu irgend zwei Kurven Γ_1, Γ_2, gehören, eine neue Kurve Γ zu konstruieren.

§ II.

Krümmung, Torsion und charakteristisches Triëder der Kurven Γ.

Die Krümmung und Torsion der Kurven Γ lassen sich auf verschiedenen Wegen bestimmen. Aus den Gleichungen 1) des § I

1) $$X' = \Omega (X - x)$$

folgt durch Differentiation nach s, wenn

$$(PQ)^2 = p^2 + q^2 + r^2 = h^2$$

gesetzt wird,

2) $$X'' = (\Omega^2 + \Omega^1)(X - x) - a\,\Omega$$

und wegen der aus § 1, 5) folgenden Gleichung

$$\Omega (p^2 + q^2 + r^2) = pp' + qq' + rr' + p$$

oder

3) $$p = \Omega h^2 - h h^1$$

4) $$X''^2 + Y''^2 + Z''^2 = (\Omega^2 + \Omega^1)^2 h^2 + \Omega^2 - 2\,\Omega(\Omega^2 + \Omega^1) p$$

wobei nach § 1, 4)

$$p = \alpha (X - x) + \beta (Y - y) + \gamma (Z - z)$$

gesetzt ist. Nach 1) ist ferner, wenn das Bogenelement von Γ mit dS bezeichnet, und mit ds als positiv genommen wird

5) $$\frac{dS}{ds} = S' = \varepsilon\,\Omega h = |\,\Omega h\,|$$

wo ε das Vorzeichen von Ω ist. Hieraus ergibt sich nach 2)

$$S'' = \frac{dS^2}{ds^2} = \varepsilon\left\{h(\Omega^1 + \Omega^2) - \frac{p}{h}\,\Omega\right\}$$

also nach 4)

$$X''^2 + Y'' + Z''^2 - S''^2 = \Omega^2\,\frac{(p^2+r^2)}{h^2}.$$

Der Krümmungshalbmesser P von Γ ist demnach durch die Gleichung

I) $$P = \varepsilon\frac{\Omega h^3}{\sqrt{q^2+r^2}} = h^2\left|\frac{\Omega}{\sin i}\right| = \varepsilon\,\frac{(p^2+q^2+r^2)^{3/2}}{\sqrt{q^2+r^2}}\,\Omega$$

gegeben, wo i (wie in § I) der Winkel der Erzeugenden PQ von Γ mit der Tangente von C in P ist.

Zur Bestimmung des Torsionsradius T berechne man die Determinante Δ' der ersten, zweiten und dritten Differentialquotienten von X, Y, Z nach 1), 2), 4). Man erhält dann fast ohne jede Rechnung[1])

$$\Delta' = \frac{\Omega^3}{\varrho}\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}$$

woraus sich durch Multiplikation mit der Determinante des Triëders

$$\Delta' = \frac{r\cdot\Omega^3}{\varrho}$$

ergibt. Nach § I, B) und 5) hat man also

II) $$T = -\frac{\varrho}{r}\,\Omega\,(q^2+r^2)$$

und endlich

III) $$\frac{P}{T} = -\varepsilon\,\frac{r}{\varrho}\left(\frac{p^2+q^2+r^2}{q^2+r^2}\right)^{3/2}$$

---

[1]) Indem man 2) in die Form $X'' = -\alpha\,\Omega + \left(\frac{\Omega^2+\Omega'}{\Omega}\right)X'$ setzt, und ebenso bis X''' verfährt.

Setzt man hier die Werte von p, q, r, aus § I, 8) ein, so ergibt sich

$$\frac{P}{T} = -\frac{\varepsilon}{\varkappa^2 \delta}\sqrt{1+\varkappa^2(1+\delta^2)};$$

bei konstantem δ ist dies Verhältnis selbst konstant, jedoch mit δ veränderlich. Die in § I, S. 293 bestimmten Kurven Γ auf der Fläche Σ sind also in der Tat Schraubenlinien verschiedener Art, wie dort schon behauptet wurde.

§ III.

Zweiter Ansatz zur Bestimmung der durch C gelegten Flächen D.

In den beiden §§ I, II sind lineare Differentialgleichungen zur Bestimmung der Flächen D verwandt, weil so eine natürliche Zerlegung der Gesamtheit dieser Flächen erreicht wird. An und für sich ist aber die Einführung von Differentialgleichungen zunächst ganz überflüssig, da die Ermittelung der Kurven Γ, wie längst bekannt, sich als eine Enveloppenbildung ansehen läßt. Nur zur Bestimmung der ebenen Kurven Γ in der Ebene einer ebenen Kurve C wird man vielleicht zweckmäßiger Weise neben $r = 0$ die p und q zur Anwendung bringen.

Eine willkürliche Tangentenebene von C hat die Gleichung

$$1)\quad (X-x)(\xi+\lambda q_1)+(Y-y)(\eta+\mu q_1)+(Z-z)(\zeta+\nu q_1)=0$$

in der der Parameter $q_1 = -\operatorname{cotg}\varphi$ ist, wobei φ denjenigen Winkel bedeutet, um den man die Schmiegungsebene von C im positiven Sinne zu drehen hat, damit sie mit der Ebene 1) zusammenfällt.

Betrachtet man nun ξ, η, ζ; λ, μ, ν; q_1 als gegebene Funktionen von s, so ist die Charakteristik von 1), als Erzeugende die zur Kurve Γ gehört, nach den Frenetschen Formeln bestimmt durch die Gleichung 1) und

$$
\begin{aligned}
&(X-x)\left(\lambda\left(q_1'-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\xi}{\tau}q_1-\frac{\alpha}{\varrho}\right)\\
2)\qquad &+(Y-y)\left(\mu\left(q_1'-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\eta}{\tau}q_1-\frac{\beta}{\varrho}\right)\\
&+(Z-z)\left(\nu\left(q_1-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\zeta}{\tau}q_1-\frac{\gamma}{\varrho}\right)=0.
\end{aligned}
$$

Da die $X-y$, $Y-y$, $Z-z$ sich nach 1) und 2) verhalten wie die Koeffizienten von u, v, w der Determinante

$$
\begin{vmatrix}
\xi+\lambda q_1 & \eta+\mu q_1 & \zeta+\nu q_1\\
\lambda\left(q_1'-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\xi q_1}{\tau}-\frac{\alpha}{\varrho} & \mu\left(q_1'-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\eta q_1}{\tau}-\frac{\beta}{\varrho} & \nu\left(q_1'-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\zeta q_1}{\tau}-\frac{\gamma}{\varrho}\\
u & v & w
\end{vmatrix}
$$

so erhält man durch Multiplikation derselben mit der Determinante des Triëders von C sofort[1])

$$
\begin{aligned}
X-x&=\sigma\left(\Pi\alpha+\frac{\xi q_1-\lambda}{\varrho}\right)\\
\text{I)}\qquad Y-y&=\sigma\left(\Pi\beta+\frac{\eta q_1-\mu}{\varrho}\right)\\
Z-z&=\sigma\left(\Pi\gamma+\frac{\zeta q_1-\nu}{\varrho}\right)
\end{aligned}
$$

wo σ eine willkürliche Funktion von s und

$$
3)\qquad \Pi=\frac{1+q_1^2}{\tau}-q_1'
$$

gesetzt ist.

Aus § I, 4) folgt dann nach I) noch

$$
\begin{aligned}
p&=\sigma\Pi\\
\text{Ia)}\qquad q&=\frac{\sigma}{\varrho}q_1\\
r&=-\frac{\sigma}{\varrho}.
\end{aligned}
$$

[1]) Die Formeln I) sind, wie vorhin bemerkt, für den Fall $q_1=0$ nicht zu gebrauchen, wo es sich um ebene Kurven I' in der Ebene einer ebenen C handelt.

Differentiiert man die Gleichungen I, so folgt

$$4)\quad \frac{dX}{ds} = \alpha + \sigma'\left(\Pi\alpha + \frac{\xi q_1 - \lambda}{\varrho}\right) + \sigma\left(\Pi'\alpha + \Pi\frac{\xi}{\varrho} + \frac{\xi q_1'}{\varrho} - \left(\frac{\xi q_1 - \lambda}{\varrho^2}\right)\cdot\varrho'\right) - \sigma\left[\left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{\tau}\right)\frac{q}{\varrho} - \frac{\xi}{\tau\varrho}\right]$$

und, wenn man $\frac{dX}{ds}$ durch seinen Wert aus § I), 1) mit Benutzung von I) ersetzt, sodann die Koeffizienten von α, ξ, λ auf beiden Seiten vergleicht

$$5)\quad 1 + \sigma\left(\Pi' - \frac{q_1}{\varrho^2}\right) + (\sigma' - \sigma\Omega)\,\Pi = 0$$

$$\sigma\left(\frac{\Pi}{\varrho} + \frac{q_1'}{\varrho}\right) - \left(\frac{q_1}{\varrho^2}\varrho' + \frac{1}{\varrho\tau}\right) + (\sigma' - \sigma\Omega)\frac{q_1}{\varrho} = 0$$

$$\sigma\frac{\varrho'}{\varrho^2} - \frac{q_1\sigma}{\tau\varrho} - \left(\frac{\sigma' - \sigma\Omega}{\varrho}\right) = 0.$$

Unter der Voraussetzung, daß q_1 von Null verschieden ist, reduziert sich die zweite der Gleichungen 5) auf die dritte; (für $q_1 = 0$ ist sie aber von selbst (bei endlichem σ) erfüllt). Man erhält daher die beiden Gleichungen

$$6)\quad 1 + \sigma\left(\Pi' - \frac{q}{\varrho^2}\right) + \Pi(\sigma' - \sigma\Omega) = 0$$

$$\sigma\left(\frac{\varrho'}{\varrho} - \frac{q_1}{\tau}\right) - (\sigma' - \sigma\Omega) = 0,$$

aus denen sich durch Elimination von $\sigma' - \sigma\Omega$ die Gleichung

$$\text{II)}\quad 1 + \sigma\left(\Pi' - \frac{q_1}{\varrho^2} - \Pi\omega\right) = 0$$

ergibt, wenn man

$$7)\quad \frac{q_1}{\tau} - \frac{\varrho'}{\varrho} = \omega \text{ setzt.}$$

Da endlich nach 6), 7)

$$\sigma\omega + (\sigma' - \sigma\Omega) = 0,$$

so hat man noch

$$8)\quad \sigma' + \omega\sigma = \Omega\sigma.$$

Wird in 8) der Wert von $\sigma' + \omega\sigma$ mit w bezeichnet, und in die Gleichung 4) eingeführt, so erhält man:

III)
$$\frac{dX}{ds} = w\left(\Pi\alpha + \frac{q_1\xi - \lambda}{\varrho}\right)$$
$$\frac{dY}{ds} = w\left(\Pi\beta + \frac{q_1\eta - \mu}{\varrho}\right)$$
$$\frac{dZ}{ds} = w\left(\Pi\gamma + \frac{q_1\zeta - \nu}{\varrho}\right)$$

Aus III) hat man weiter für das Bogenelement dS

IV)
$$\frac{dS}{ds} = \eta w \sqrt{\Pi^2 + \frac{q_1^2 + 1}{\varrho^2}}$$

wo η das Vorzeichen von $w = \sigma' + \omega\sigma$ ist, falls, wie stets angenommen werden soll, dS mit wachsendem s positiv genommen wird, während

9)
$$D = \sqrt{\Pi^2 + \frac{q_1^2 + 1}{\varrho^2}}$$

stets positiv zu nehmen ist.

Aus den Gleichungen I) kann man ebenfalls P und T für die Kurven Γ bestimmen. Doch ist es nicht überflüssig, die betreffende Rechnung aufs neue durchzuführen, da sich so einerseits eine Kontrolle der in § II entwickelten Formeln ergibt, andererseits sich aber der von Interesse erscheinende Umstand herausstellt, daß der Ausdruck

$$\left(\frac{d^2X}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Z}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2S}{ds^2}\right)^2$$

ein vollständiges Quadrat ist.[1])

Man erhält nämlich durch eine Rechnung, die ich hier nicht weiter ausführe, für diesen Ausdruck den Wert

[1]) Sucht man umgekehrt zu einer als gegeben angesehenen Kurve Γ die Kurven C, so ergibt sich kein übersichtliches Resultat, da es sich dann um eine viel allgemeinere Frage handelt.

$$w^2 \cdot \frac{1+q_1^2}{\varrho^x}\left(\frac{\Pi' - \frac{q_1}{\varrho^2} - \Pi\omega}{\Pi^2 + \frac{1+q_1^2}{\varrho^2}}\right)^2 = w^2\left(\frac{1+q_1^2}{\sigma^2 \cdot \varrho^2 D^2}\right)$$

so daß

V) $$P = \varepsilon\eta \frac{D^3 \sigma \varrho w}{\sqrt{q_1^2+1}}$$

wird, während T aus der Gleichung

VI) $$T = w(1+q_1^2)$$

zu entnehmen ist. Diese Werte stimmen mit den früher erhaltenen in § II, I völlig überein.

Das einzige Werk, in dem (so weit mir bekannt ist) der Versuch gemacht ist, für die aus den rektifizierenden Ebenen (senkrecht zur Hauptnormale) von C gebildeten Kurven Γ P und T zu bestimmen, ist die „Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung" von W. Schell, 2. Aufl., Leipzig 1898, S. 79 ff., in welchem indessen nur der absolute Wert von T und überhaupt P und T durch nicht gerade übersichtliche geometrische Betrachtungen gefunden werden.[1])

Zur vollständigen Bestimmung des charakteristischen Triëders von Γ (mit Berücksichtigung der Vorzeichen) kann die folgende Rechnung dienen.

Setzt man nach IV)

$$\frac{dS}{ds} = \eta\omega D,$$

so ist nach III)

$$\eta\frac{dX}{dS} = \left(\Pi\alpha + \frac{q_1\xi - \lambda}{\varrho}\right)\frac{1}{D}.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{d\frac{1}{D}}{ds} = -\frac{1}{D^3}\left\{\Pi\cdot\left(\Pi' - \Pi\omega - \frac{q_1}{\varrho^2}\right) + \omega D^2\right\} = \frac{\Pi}{D^3\sigma} - \frac{\omega}{D}$$

[1]) Krümmung und Torsion der Filarevoluten einer Kurve sind übrigens ebenfalls längst bekannt.

folgt:

$$\eta \frac{d^2X}{dSds} = \frac{1}{D^3}\left\{\frac{q_1^2+1}{\varrho^2}\alpha - \xi\frac{q_1-\lambda}{\varrho}\Pi\right\}\left(\Pi' - \frac{q_1}{\varrho^2} - \Pi\omega\right)$$

oder:

$$\frac{d^2X}{dS^2} = -\frac{1}{\sigma}\left\{\frac{\left(\frac{q_1^2+1}{\varrho^2}\right)\alpha - \frac{\xi q_1-\lambda}{\varrho}\Pi}{wD^4}\right\},$$

so daß

$$10)\qquad \left(\frac{d^2X}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Y}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Z}{dS^2}\right)^2 = \frac{q_1^2+1}{\varrho^2\sigma^2w^2D^6},$$

d. h. wie vorhin:

$$P = \varepsilon\eta\frac{\sigma\varrho D^3}{\sqrt{q_1^2+1}}$$

wird, und es ist also:

$$\frac{d^2X}{dS^2} = -\left\{\frac{\frac{q_1^2+1}{\varrho}\alpha - (\xi q_1-\lambda)\Pi}{P\cdot\sqrt{q_1^2+1}\,D}\right\}\varepsilon\eta.$$

Nach den Frenetschen Formeln ergeben sich hieraus für die Cosinus ξ', η', ζ' der Hauptnormale gegen die Axen der $x\ y\ z$ die Werte

$$\text{A)}\qquad \begin{aligned}
\xi_1 &= -\varepsilon\eta\left\{\frac{\frac{q_1^2+1}{\varrho}\alpha - (\xi q_1-\lambda)\Pi}{D\sqrt{q_1^2+1}}\right\}\\
\eta_1 &= -\varepsilon\eta\left\{\frac{\frac{q_1^2+1}{\varrho}\beta - (\eta q_1-\mu)\Pi}{D\sqrt{q_1^2+1}}\right\}\\
\zeta_1 &= -\varepsilon\eta\left\{\frac{\frac{q_1^2+1}{\varrho}\gamma - (\zeta q_1-\nu)\Pi}{D\sqrt{q_1^2+1}}\right\}
\end{aligned}$$

und für die Cosinus α_1, β_1, γ_1 der Tangente von Γ

$$\text{B)} \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\eta}{D}\left(\Pi\alpha + \frac{q_1\xi - \lambda}{\varrho}\right) \\ \beta_1 &= \frac{\eta}{D}\left(\Pi\beta + \frac{q_1\eta - \mu}{\varrho}\right) \\ \gamma_1 &= \frac{\eta}{D}\left(\Pi\gamma + \frac{q_1\zeta - \nu}{\varrho}\right) \end{aligned}$$

so wie endlich durch Unterdeterminantenbildung als Cosinus der Binormale von Γ

$$\text{C)} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= \varepsilon\frac{\xi + \lambda q_1}{\sqrt{q_1^2+1}} \\ \mu_1 &= \varepsilon\frac{\eta + \mu q_1}{\sqrt{q_1^2+1}} \\ \nu_1 &= \varepsilon\frac{\zeta + \nu q_1}{\sqrt{q_1^2+1}}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man also die Richtungen der Tangente, Hauptnormale und Binormale der Kurven C und Γ durch t, h, b; t_1, h_1, b_1 so hat man auch dem Vorzeichen nach:

$$\text{IV)} \qquad \begin{aligned} \cos(t_1 t) &= \eta\frac{\Pi}{D}, & \cos(h_1 t) &= -\frac{\varepsilon\eta\sqrt{q_1^2+1}}{\varrho D} \\ \cos(t_1 h) &= \eta\frac{q_1}{\varrho D}, & \cos(h_1 h) &= +\frac{\varepsilon\eta\Pi q_1}{D\sqrt{1+q_1^2}} \\ \cos(t_1 b) &= -\frac{\eta}{\varrho D}, & \cos(h_1 b) &= -\frac{\varepsilon\eta\Pi}{D\sqrt{1+q_1^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(b_1 t) &= 0 \\ \cos(b_1 h) &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{q_1^2+1}} \\ \cos(b_1 b) &= \frac{\varepsilon q_1}{\sqrt{q_1^2+1}}. \end{aligned}$$

Die Formeln IV) geben zu manchen Fragen Veranlassung. Soll z. B. $\cos(t_1 t) = \text{konst} = \cos A$ sein, so hat man die Gleichung

$$\frac{1+q_1^2}{\tau} - q_1' = \frac{\operatorname{cotg} A}{\varrho}\sqrt{q_1^2+1}$$

die durch die Substitution $2q_1 = \frac{1}{z} - z$ in die Riccatische Gleichung

$$7) \qquad z' + \frac{1+z^2}{2\tau} - \frac{z}{\varrho}\operatorname{cotg} A = 0$$

übergeht, welche für die Kurve C charakteristisch ist.[1]) Bei konstantem q_1 sind selbstverständlich $\cos(b_1 b)$ konstant.

Ebenso folgt für $\cos(h_1 t) = \text{konst} = \cos B$ die Gleichung

$$\frac{1+q_1^2}{\tau} - q_1' = \frac{\operatorname{tg} B}{\varrho}\sqrt{q_1^2+1}$$

welche auf 7) zurückkommt, wenn an Stelle von $\operatorname{cotg} A$ B geschrieben wird.

Man hat ferner

$$\frac{\cos(h_1 h)}{\cos(h_1 b)} = \frac{\cos(t_1 h)}{\cos(t_1 b)} = -\frac{\cos(b_1 b)}{\cos(b_1 h)} = -q_1$$

und

$$-\frac{\cos(t_1 h)}{\cos(h_1 t)} = \frac{\cos(h_1 h)}{\cos(t_1 h)} = \frac{\cos(h_1 b)}{\cos(t_1 b)} = \frac{\varepsilon \Pi \varrho}{\sqrt{q^2+1}}.$$

Die Bedingung

$$\frac{\varepsilon \Pi \varrho}{\sqrt{q_1^2+1}} = m = \text{konst}$$

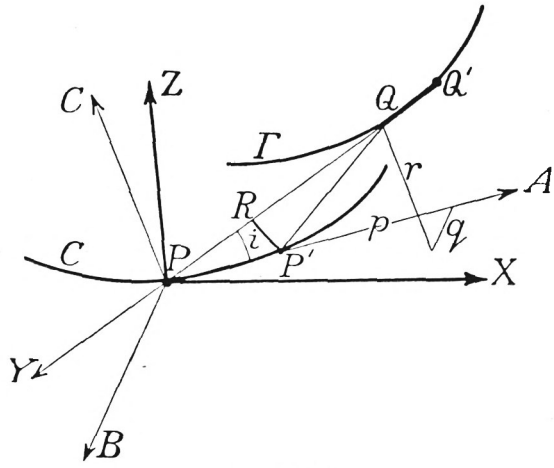
führt ebenfalls zu der für alle Schraubenlinien durch Quadratur lösbaren Gleichung 7).

[1]) Vgl. die Anmerkung [1]) zu § V.

§ IV.

Geometrische Herleitung der Gleichungen des § III für P und T.

Die grundlegenden Formeln des § III für P und T sowie andere geometrische Beziehungen lassen sich auch leicht durch direkte Betrachtung herleiten. Sind PA, PB, PC die Kanten des Triëders von C, $PP'Q$ die Schmiegungsebene und δ der Kontingenzwinkel PQP' von Γ, (vgl. die Figur 1)



Figur 1.[1])

so ist

$$P\delta = dS$$

falls

$$dS = D\,ds\,|\,w\,|$$

das Bogenelement von Γ ist. Aus dem Dreiecke PQP' hat man

$$PP' : PQ = \sin\delta : \sin(i + \delta),$$

oder, wenn statt $\sin\delta$ einfach δ, statt $\sin(i + \delta)$ aber $\sin i$ gesetzt wird,

[1]) $P'R$ ist der mit QP' um Q beschriebene Kreisbogen; ebenso bei Figur 2.

$$P = \frac{dS}{ds} \cdot \frac{PQ}{\sin i} = |w| \frac{\sin i}{D}.$$

Da endlich aus der Figur unmittelbar

$$\sin i = \frac{\sqrt{q^2 + r^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

so ergibt sich nach § III, I und § I, 4

$$P = \frac{D^3 \sigma \varrho w \varepsilon}{\sqrt{1 + q_1^2}}$$

wie in § II, V.

Zur Bestimmung von T kann man sich der Beziehung bedienen, daß die Binormale von Γ, deren Schmiegungsebene mit der von C zusammenfällt, die Richtungscosinus hat:

$$\cos A = \frac{\xi + \lambda q_1}{\sqrt{1 + q_1^2}}$$

$$\cos B = \frac{\eta + \mu q_1}{\sqrt{1 + q_1^2}}$$

$$\cos C = \frac{\zeta + \nu q_1}{\sqrt{1 + q_1^2}}$$

Hieraus ergibt sich dann

$$\frac{1}{T^2} = \left\{ \left(\frac{d\cos A}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos B}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos C}{ds}\right)^2 \right\} \left(\frac{ds}{dS}\right)^2$$

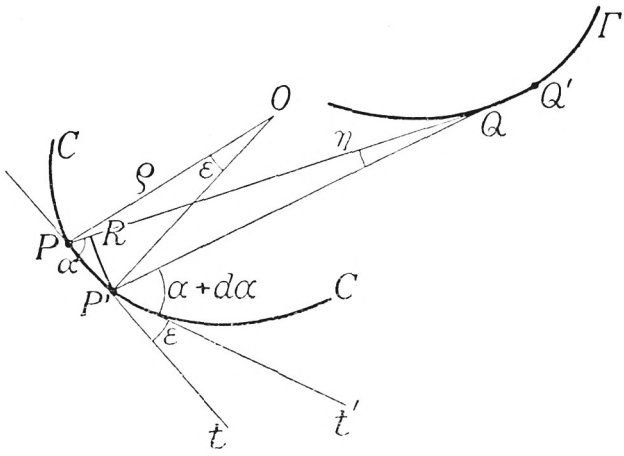
$$= \left(\frac{ds}{dS}\right)^2 \frac{D^2}{(1 + q_1^2)^2}$$

oder, wenn für $\frac{dS}{ds}$ sein Wert eingesetzt wird

$$T^2 = w^2 (1 + q_1^2)^2.$$

Aber auf diesem Wege wird nur der absolute Wert von T gefunden, der sich allerdings in ganz anderer Form für die rektifizierende D-Fläche schon bei Schell angegeben findet, während die vollständige Bestimmung von T die vorhin geführte Rechnung erfordert.

Für eine ebene Kurve C, die in ihrer Ebene betrachtet wird, lassen sich diese geometrischen Betrachtungen noch weiter ausführen.



Figur 2.

Ist die Erzeugende PQ von Γ (vgl. Figur 2) unter dem Winkel a gegen die Tangente t von C in P geneigt, so ist für die Kontingenzwinkel ε und η von C und Γ

1)
$$ds = \varepsilon\varrho$$
$$\eta = da + \varepsilon$$

ferner

$$P'R = QR = (PQ - ds\cos a)(da + \varepsilon) = \sin a\, ds$$

oder

$$PQ(da + \varepsilon) = \sin a\, ds$$

also auch

2)
$$\frac{da}{ds} + \frac{1}{\varrho} = \frac{\sin a}{PQ}.$$

Bezeichnet man das Bogenelement QQ' von Γ mit dS, und setzt $PQ = f(s)$, wo f eine gegebene Funktion von s ist, so folgt für $P'Q = RQ$

$$PQ + d(PQ) = P'Q + dS = PQ - ds\cos\alpha + dS$$

oder

$$3) \qquad f'(s) = \frac{dS}{ds} - \cos\alpha.$$

Setzt man noch nach 1)

$$\eta P = (d\alpha + \varepsilon) P = dS$$

so ist

$$\frac{dS}{ds} = \left(\frac{d\alpha}{ds} + \frac{1}{\varrho}\right) P = \frac{\sin\alpha}{f(s)} P$$

also nach 3)

$$4) \qquad \frac{\sin\alpha\, P}{f(s)} = (f's + \cos\alpha)$$

so ist $PQ = \varrho\sin\alpha$ d. h. PQ nur um den konstanten Faktor $\sin\alpha$ von ϱ verschieden, was übrigens auch geometrisch unmittelbar erhellt.

Die Gleichung 2) geht durch die Substitution $z = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ in die Riccatische Gleichung über:

$$\frac{d\xi}{ds} + \frac{1+z^2}{2\varrho} - \frac{1}{f(s)} = 0.$$

Diese letztere ist von Darboux (Léçons sur la théorie générale des surfaces I, S. 113) durch analytische Rechnung hergeleitet. Sie ergibt sich übrigens nebst 4) unmittelbar aus den Gleichungen des § I, 5 für $r = 0$. Setzt man nämlich

$$1 + p' - \frac{q}{\varrho} = p\Omega$$

$$q' + \frac{p}{\varrho} = q\Omega$$

und

$$p = f\cos\alpha, \quad q = f\sin\alpha$$

so erhält man sofort

$$\sin\alpha = f\left(\frac{d\alpha}{ds} + \frac{1}{\varrho}\right)$$

$$\cos\alpha + f' = f\Omega$$

und aus § II, I folgt dann auch die Gleichung 4).

§ V.

Zylinder, Kegelflächen und Minimalflächen D durch eine Kurve C.

Sind x, y, z, die Koordinaten einer Kurve C, so kann man unmittelbar die Gleichungen der durch C gelegten Kegel, Zylinder und Minimalflächen angeben. Anders aber steht es, wenn C nur durch ihre natürlichen Variabelen ϱ, τ gegeben ist, wie in unseren Betrachtungen überall vorausgesetzt wird.

Soll zunächst ein Zylinder mit der Axenrichtung $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ entstehen, so ist

$$1) \qquad \begin{aligned} X - x &= R\cos A \\ Y - y &= R\cos B \\ Z - z &= R\cos C. \end{aligned}$$

Andererseits ist aber nach § III, 1) nach Abkürzung durch das Σ-Zeichen

$$2) \qquad \begin{aligned} &\Sigma(X-x)(\xi + \lambda q_1) = 0 \\ &\Sigma(X-x)\left(-\left(\frac{\alpha}{\varrho}+\frac{\lambda}{\tau}\right)+\frac{\xi}{\tau}q_1+\lambda q_1'\right) = 0 \end{aligned}$$

oder, wenn man 1) in 2) einsetzt, und statt $\cos A, \ldots$ einfach $A \ldots$ schreibt,

$$\Sigma(\xi A) + q_1 \Sigma(\lambda A) = 0$$

$$\frac{q_1}{\tau}\Sigma(\xi A) + \left(q_1' - \frac{1}{\tau}\right)\Sigma(\lambda A) - \frac{1}{\varrho}\Sigma(\alpha A) = 0.$$

Hieraus folgt, wenn $\tau \neq \infty$,

$$3) \qquad q_1 \Sigma(\lambda A) + \Sigma(\xi A) = 0$$

$$4) \qquad \Pi\Sigma(\lambda A) + \frac{1}{\varrho}\Sigma(\alpha A) = 0.$$

Durch Differentiation von 4) entsteht aber mit Hilfe von 3), 4) die Gleichung

$$\left(\Pi' - \omega\Pi - \frac{q}{q^2}\right)\Sigma(\lambda A) = 0$$

oder da bei der Annahme $\tau \neq \infty$ der zweite Faktor nicht Null sein kann, die Bedingung $\sigma = \infty$, welche nur durch Integration der für C charakteristischen Riccatischen Gleichung, die hier in der Form

$$\Pi' - \omega\Pi - \frac{q_1}{\varrho^2} = 0$$

erscheint, gelöst werden kann.

Soll dagegen die Fläche D ein Kegel mit der Spitze c_1, c_2, c_3 werden, so hat man

$$X = c_1, \quad Y = c_2, \quad Z = c_3$$

oder nach § III, 1)

$$5) \qquad -q_1 = \frac{\Sigma\xi\,(c-x)}{\Sigma\lambda\,(c-x)}.$$

Durch Differentiation von 5) entsteht mit Hülfe von 5)

$$6) \qquad -\Pi = \frac{1}{\varrho}\frac{\Sigma a\,(c-x)}{\Sigma\lambda\,(c-x)}$$

und hieraus auf dieselbe Weise mit Benutzung von 5), 6)

$$7) \qquad \Pi' - \frac{q_1}{\varrho^2} - \Pi\omega = \frac{1}{\varrho}\frac{1}{\Sigma\lambda\,(c-x)}$$

und durch nochmalige Differentiation von 7) mittels 5), 6), 7)

$$\left(\Pi' - \frac{q_1}{\varrho^2} - \Pi\omega\right)' - \omega\left(\Pi' - \frac{q_1}{\varrho^2} - \Pi\omega\right) = 0$$

oder für

$$1 + \sigma\left(\Pi' - \Pi\omega - \frac{q_1}{\varrho^2}\right) = 0$$

endlich

$$\frac{\sigma' + \omega\sigma}{\sigma^2} = 0$$

oder, falls $\sigma \neq \infty$, wie bei den D-Zylindern, $w = 0$. Dies war freilich zu erwarten, da ja in diesem Falle nach § III, III) $\frac{dX}{ds}, \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}$ gleich Null werden; unter den hier gemachten Voraussetzungen ist aber die Differentialgleichung dritter Ord-

nung $\omega = 0$ zu lösen, was wieder nur mittels der Riccatischen Gleichung möglich wird.

Da endlich

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = w^2\left(\Pi^2 + \frac{q_1^2+1}{e^2}\right)$$

so ergeben sich die Minimalkurven Γ, wenn entweder der erste oder der zweite Faktor Null ist. Im ersten Falle aber degeneriert die Kurve Γ in einem Punkt, wie soeben gezeigt wurde. Die eigentliche Lösung erfolgt daher durch Betrachtung der Gleichung

$$\Pi^2 + \frac{q_1^2+1}{\varrho^2} = 0$$

oder

$$\text{I)} \qquad \frac{1+q_1^2}{\tau} - q_1' = i\frac{\sqrt{q_1^2+1}}{\varrho} = \Pi,$$

die wieder auf die Riccatische Gleichung

$$z' + \frac{1+z^2}{2\tau} - \frac{iz}{\varrho} = 0$$

führt. Aus Gleichung I) oder

$$\Pi' = \frac{i q_1 q_1'}{\varrho\sqrt{1+q_1^2}} - i\sqrt{1+q_1^2}\,\frac{\varrho'}{\varrho^2}$$

folgt aber mit Hülfe von I)

$$\Pi' = i q_1 \frac{\sqrt{1+q_1^2}}{\varrho\tau} + \frac{q_1}{\varrho^2} - i\sqrt{1+q_1^2}\,\frac{\varrho'}{\varrho^2} = \frac{q_1}{\varrho^2} + \Pi\omega$$

oder $\sigma = \infty$. Auf diesem Wege entstehen also nur die Minimal-Zylinder D.[2]) Aber die Gleichung I) hat noch die singuläre Lösung $q_1 = i$, welcher der bestimmte

[1]) Dies ist gerade die Gleichung, von der die Integration der natürlichen Gleichung der Kurve C abhängt. Vgl Darboux, Lecons sur la théorie générale, I, S. 9 u. 21; Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig 1910, S. 15 u. 80.

[2]) Für die allgemeinen Schraubenlinien C lassen sich daher diese Zylinder sofort angeben.

Wert $\sigma = \frac{\varrho^2}{q_1} = -i\varrho^2$ entspricht. Für die Minimal-Kurven hat man daher

$$X - x = (\xi + i\lambda)\varrho$$
$$Y - y = (\eta + i\mu)\varrho$$
$$Z - z = (\zeta + i\nu)\varrho$$

oder auch

$$p = 0, \quad q = \varrho, \quad r = i\varrho.$$

Nach § II erhält man für die Krümmung und Torsion der Minimalkurven D den Wert Null, während das Verhältnis dieser beiden Zahlen gleich i wird, was sich auch durch Grenzübergang, bei dem zuerst q_1 konstant, und dann gleich i gesetzt wird, bestätigen läßt.

§ VI.

Die zu den Filarevoluten und der rektifizierenden Fläche von C gehörigen Kurven Γ.

Die Filarevoluten von C entstehen bekanntlich, wenn die Erzeugende PQ von Γ senkrecht auf der Tangente von C steht, also p oder nach § III, Ia $\Pi = 0$ ist. Alsdann ist

1) $$q_1 = \operatorname{tg}\left(\int\frac{ds}{\tau} + c_1\right) = \operatorname{tg}\psi$$

und, da jetzt nach § III, II) $\sigma = \frac{\varrho^2}{q_1}$ wird

2) $$P = \varepsilon\eta\sigma\varrho\frac{(q_1^2+1)^{3/2}}{\sqrt{q_1^2+1}}w = \frac{\varepsilon\eta w}{q_1}(1+q_1^2)$$
$$T = w(1+q_1^2)$$

so daß die durch Einfachheit ausgezeichnete Formel

3) $$\frac{P}{T} = \frac{\varepsilon\eta}{q_1}$$

entsteht; w hat übrigens den Wert $\frac{\varrho}{q_1}\left(\varrho' - \frac{\varrho}{q_1\tau}\right)$.

Unter den Filarevoluten einer Raumkurve kann sich also nie eine Schraubenlinie befinden. Denn dann müßte q_1 konstant sein, was eben nach 1) ausgeschlossen ist.

Ist die Krümmung von C konstant, so folgt aus dem angegebenen Werte von w für T der Ausdruck

$$T = -\frac{\varrho^2}{q_1^2 \tau}$$

d. h. die zur Filarevolute gehörige Kurve Γ ist immer im entgegengesetzten Sinne wie C gewunden.

Wir bemerken ferner, daß für die Filarevolute

$$q = \frac{\sigma q_1}{\varrho} = \varrho$$

wird. Dies liefert den längst bekannten Satz, daß die Projektion des Punktes Q auf die Schmiegungsebene von C in P mit dem Krümmungsmittelpunkt von C zusammenfällt, aus dem die Konstruktion der „Polardeveloppabelen" folgt.[1])

Die Entfernung $PQ = h$ ist für die Kurve Γ allgemein durch die aus § III, I) folgende Gleichung

$$h^2 = \sigma^2 D^2$$

bestimmt.[2]) Für die Filarevolute wird daher

$$\sigma = \frac{h \varrho \varepsilon}{\sqrt{1+q_1^2}} = h \varrho \varepsilon \cos\psi$$

oder

$$r = -\frac{\sigma}{\varrho} = -\varepsilon h \cos\psi$$

womit der Punkt Q in der einfachsten Weise konstruiert ist, da in dem bei O rechtwinkligen Dreieck PQO für O als Krümmungsmittelpunkt von C der Winkel bei Q gleich ψ ist.

[1]) Von weiteren, hier anschließenden Fragen deute ich nur noch an: Kann eine der hier betrachteten Kurven Γ konstanter Krümmung oder Torsion sein? Dazu muß die natürliche Gleichung von C eine gewisse leicht angebbare Form besitzen; ich gehe auf die Betrachtungen nicht ein, da wegen des verwickelten Charakters von C sich kein anschauliches Resultat ergibt.

[2]) Siehe indessen die Bemerkung zu S. 297.

Es sei jetzt C eine ebene Kurve. Dann ist $\Pi = -q_1'$, also $\Pi = 0$ mit konstantem q_1, mithin

$$\frac{P}{T} = \frac{\varepsilon\eta}{q_1}.$$

Die Kurve Γ ist daher (im Raum) eine Schraubenlinie mit der variabeln Torsion

$$T = \varrho\varrho' \frac{1+q_1^2}{q_1}.$$

Aber diesem geometrisch evidenten bekannten Satze kann man eine weit größere Ausdehnung geben, indem man den folgenden Satz beweist, der bisher nicht bemerkt zu sein scheint, obwohl er auch durch geometrische Betrachtungen zu erkennen ist:

Für jede Schraubenlinie C bilden die aus $q_1 = \text{const.}$ entspringenden Kurven Γ wieder eine Schraubenlinie.

Setzt man nämlich $\tau = \varrho k$, so ist

$$\Pi = \frac{1+q_1^2}{k\varrho}, \quad \omega = \frac{1}{\varrho}\left\{\frac{q_1}{k} - \varrho'\right\}$$

$$\Pi' = -\frac{(1+q_1^2)\varrho'}{k\varrho^2}.$$

Die Gleichung § III, II) für σ liefert

$$\sigma = \frac{k^2\varrho^2}{q_1(1+q_1^2+k^2)}$$

und hieraus folgt

$$\frac{P}{T} = \frac{k^2\{(1+q_1^2)+k^2\}^{3/2}}{q[(1+q_1^2)+k^2]}\varepsilon\eta = \frac{k^2\varepsilon\eta}{q_1}\sqrt{1+q_1^2+k^2}$$

d. h. es ist die Kurve Γ eine Schraubenlinie, deren Steigungswinkel von q_1 abhängig ist.

Die Filarevolute endlich wird zum Kegel, und Γ reduziert sich auf dessen Spitze, wenn

$$w = \frac{\varrho\varrho'}{q_1} - \frac{\varrho^2}{q_1^2\tau} = 0$$

oder

$$q_1 = \frac{\varrho}{\tau\varrho'}$$

ist. Ist nun die Raumkurve C nicht von konstanter Krümmung, so ergibt sich durch Einsetzen dieses Wertes von q_1 in die Bedingung $\Pi = 0$

$$\varrho + \tau \frac{d}{ds}(\varrho' \tau) = 0$$

die bekannte Bedingung dafür, daß C eine sphärische Kurve ist, wie hier noch bemerkt sein möge.

Auch für die rektifizierende Fläche von C ergeben sich neue Eigenschaften. Sie entsteht für $q = 0$, d. h. als Umhüllungsgebilde der Tangentenebenen von C senkrecht zur Schmiegungsebene, wobei natürlich C als Raumkurve vorausgesetzt wird. Es ist dann

$$\Pi = \frac{1}{\tau}, \quad D = \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\varrho^2}, \quad \omega = -\frac{\varrho'}{\varrho},$$

$$\frac{\Pi}{D} = \cos i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\varrho}\right)^2}}.$$

Die in der rektifizierenden Ebene gelegene Erzeugende PQ von Γ macht also für die Schraubenlinien C konstanten Winkel mit der Tangente von C im Punkte P.

Zugleich wird $$\sigma = -\frac{\varrho}{\frac{d\left(\frac{\varrho}{\tau}\right)}{ds}}$$

also, wenn zur Abkürzung $\frac{\varrho}{\tau} = \theta$ gesetzt wird,

$$\frac{\sigma}{\varrho} = -\frac{1}{\theta'}.$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\frac{\sigma'}{\varrho} - \frac{\sigma \varrho'}{\varrho^2} = \frac{\sigma' + \omega \sigma}{\varrho} = \frac{\omega}{\varrho} = \frac{\theta''}{\theta'^2}$$

und darnach wird

$$T = \varrho \frac{\theta''}{\theta'^2}$$

$$P = \left| \frac{\theta''}{\theta'^3} (1 + \theta^2)^{3/2} \right|.$$

Der Ausdruck für P ist dadurch von Interesse, daß in ihm nur das Verhältnis der beiden Krümmungen von C vorkommt. Daraus folgt der Satz:

Die zu den rektifizierenden Flächen von Kurven C mit demselben Verhältnis $\theta = \frac{\varrho}{\tau}$ in entsprechenden Punkten gleicher Bogenlänge gehörenden Kurven Γ haben sämtlich denselben Krümmungshalbmesser P, während die Torsion T dem Krümmungshalbmesser von C proportional ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß θ' nicht selbst Null, also C eine Schraubenlinie ist, für welchen Fall σ unendlich wird. Ist aber $\frac{\varrho}{\tau}$ eine lineare Funktion von s, so wird die Kurve Γ in einen im Endlichen gelegenen Punkt degenerieren, da jetzt $w = 0$ wird.

§ VII.

Das Problem der Traktorien.

Als Huygenssche Traktorie einer Kurve C im Raum (vgl. den Brief von Huygens an Leibniz vom 17. Sept. 1693, Gerhardt, Briefwechsel von Leibniz, Bd. II, S. 161) kann man diejenige Kurve Γ bezeichnen, welche von den Endpunkten Q eines unausdehnsamen Fadens PQ gebildet wird, dessen Anfangspunkt P auf der Kurve C gleitet, und der beständig in seiner eigenen Richtung PQ geradlinig gespannt erhalten bleibt; allerdings hat Huygens dabei wohl nur an die Traktorie oder Traktrix einer ebenen Kurve in ihrer eigenen Ebene gedacht.

Sie wird zur Traktorie im allgemeineren Sinne, wenn $PQ = h$ eine beliebige Funktion $f(s)$ von s ist, gebildet von den Orthogonaltrajektorien der mit dem Radius $f(s)$ um die

Punkte P von C beschriebenen Kugeln. G. Loria hat in seinem Werke (Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Leipzig 1911, S. 187 ff.[1]) die Gleichung der Huygensschen Traktorie des Kreises in seiner Ebene auf ziemlich umständlichem Wege nach A. Bordoni (1820) reproduziert. Er scheint dabei aber übersehen zu haben, daß Darboux bereits 1887 in den Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. I, S. 113 das Problem für die allgemeinen Traktorien einer ebenen Kurve in ihrer eigenen Ebene auf die Lösung einer Riccatischen Gleichung durch eine sehr einfache analytische Betrachtung reduziert hat, da er nur ganz beiläufig bemerkt, „daß die Auffindung der Traktrix im allgemeinen die Auflösung von Differentialgleichungen und mindestens Quadraturen" verlange.

Aber Darboux hat zugleich in den Leçons sur les systèmes orthogonaux, Paris 1898, S. 41 das allgemeine Problem der Traktorien einer Kurve C im Raum behandelt und gezeigt, daß dasselbe ebenfalls die Lösung von zwei Riccatischen, übrigens ineinander transformierbaren Gleichungen, erfordert, ohne allerdings die Beziehung seines Orthogonalproblems von Kugeln zu dem Traktorienproblem zu erwähnen, noch auch irgend eine Anwendung hinzuzufügen. Ich werde im folgenden an Stelle der Darbouxschen Gleichungen einfachere entwickeln, die nur von den natürlichen Variabeln der Kurve C abhängen.[2])

Als allgemeinstes Traktorienproblem kann man endlich, wie hier noch bemerkt sein möge, das zur Gleichung

$$f(p, q, r) = 0$$

gehörige bezeichnen.

Als Differentialgleichung der allgemeinen Traktorien $h = f(s) = f$ erscheint nach den Gleichungen I, II des § III die nicht lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für q_1

[1]) Deutsche Ausgabe von F. Schütte.

[2]) Siehe § X, Formel IV.

$$\Pi^2 + \frac{q_1^2 + 1}{\varrho} = f^2 \left(\Pi' - \Pi\omega - \frac{q_1}{\varrho^2} \right)^2,$$

die zunächst keine weitere Behandlung erkennen läßt. Ich werde nun zeigen, daß dieselbe durch eine lineare homogene Differentialgleichung vierter Ordnung ersetzt werden kann. Aus den Gleichungen 5a) des § III für $z = 1/\theta$

$$pz = p_1, \quad qz = q_1, \quad rz = r_1 \text{ [1)]}$$

1) $$z + p_1' - \frac{q_1}{\varrho} = 0, \quad q_1' + \frac{p_1}{\varrho} + \frac{r_1}{\tau} = 0, \quad r_1' - \frac{q_1}{\tau} = 0$$

und der Bedingung

2) $$p^2 + q^2 + r^2 = f^2 = (p_1^2 + q_1^2 + r_1^2)\frac{1}{z^2}$$

folgt durch Multiplikation von 1) mit den p_1, q_1, r_1 und Addition

3) $$p_1 = -f(fz)',$$

4) $$q_1 = (r_1'\tau), \quad p_1 = -\varrho\left[\frac{r_1}{\tau} + (\tau_1' r')\right] \text{ oder}$$

5) $$z = \left\{\varrho\left(\frac{r_1}{\tau} + (r_1'\tau)'\right)\right\}' + \frac{r_1'\tau}{\varrho},$$

also, wenn man 5) mit f multipliziert, nach 3) und 4)

I $$\varrho\left[\frac{r_1}{\tau} + (r_1'\tau)'\right] = f\left(f\left\{\varrho\left[\frac{r_1}{\tau} + (r_1'\tau)'\right]\right\}' + f\frac{r_1'\tau}{\varrho}\right)'.$$

Dies ist eine lineare homogene Differentialgleichung vierter Ordnung für r_1. Durch Multiplikation mit dem integrierenden Faktor

6) $$\left\{\varrho\left[\frac{r_1}{\tau} + (r_1'\tau)'\right]\right\}' + \frac{r_1'\tau}{\varrho} = z$$

erhält man als erstes Integral von I die nicht lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

7) $$\varrho^2\left(\frac{r_1}{\tau} + r_1'\tau\right)^2 + r_1^2 + (r_1'\tau)^2 = f^2\left\{\varrho\left[\frac{r_1}{\tau} + (r_1'\tau)'\right]\right\}' + \frac{r_1'\tau}{\varrho}\Big\}^2 + \text{const},$$

[1)] Das hier eingeführte q_1 darf nicht mit der im § III definierten Variabeln q_1 verwechselt werden.

also nach 3), 4), 5), 6) die Gleichung

$$p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = f^2 z^2 + \text{const.}$$

Es genügt also nicht jede Lösung von I auch den Gleichungen 1) und 2). Sondern den 4 Integrationskonstanten von I sind solche Werte zu erteilen, daß die Konstante in 7) den Wert Null erhält. Dies ist aber ein immer ausführbarer Prozeß, und damit ist die Lösung der Aufgabe auf die Gleichung I zurückgeführt.[1])

Anstatt der Gleichung I für r_1 kann man auch die für z entwickeln, was ebenfalls zur Lösung führt, da alsdann p_1 nach 3), q_1 und r_1 nach 1) bekannt sind. Setzt man demgemäß

$$\begin{aligned} p_1 &= -f(fz)' \\ q_1 &= \varrho\,[z - (f(fz)')'] \\ r_1 &= \tau\,\{f(fz)' - (\varrho\,[z - (f(fz)')'])'\}, \end{aligned}$$

so liefert die Substitution dieser Werte in die letzte der Gleichungen 1)

$$\frac{\varrho}{\tau}\,[z - (f(fz)')'] + \left[\tau\,\{(\varrho\,[z - (f(fz)')'])' - \frac{f(fz)'}{\varrho}\right]' = 0,$$

welche Gleichung wieder ein quadratisches erstes Integral liefert, dessen Konstante Null sein muß.

Um auch die zu I analoge lineare Gleichung für z zu erhalten, setze man nach den Gleichungen 2 b) und 4) des § I

$$\alpha) \quad (c_1 - \int \alpha z\,ds)^2 + (c_2 - \int \beta z\,ds)^2 + (c_3 - \int \gamma z\,ds)^2 = z^2 f^2$$

oder nach den in 5 c) dort eingeführten Abkürzungen

$$A^2 + B^2 + C^2 = z^2 f^2.$$

Diese „Integralgleichung für z" läßt sich durch wiederholte Differentiation nach s vereinfachen. Man erhält so zunächst

$$\beta) \qquad A\alpha + B\beta + C\gamma = -f(fz)'$$

und weiter

---

[1]) Da eine der Konstanten durch die drei anderen ausgedrückt wird, enthalten die Verhältnisse der p_1, q_1, r_1 gegen z, oder die p, q, r noch zwei Konstanten, wie es sein muß.

$\gamma)$ $$A\xi + B\eta + C\zeta = [z - (f(fz)')']\varrho$$

$\delta)$ $$A\lambda + B\mu + C\nu = \tau\left(\frac{f}{\varrho}(fz)' - \{\varrho[z - (f(fz)')']\}'\right).$$

Die Summe der Quadrate von $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$ liefert dann wieder die Gleichung $\alpha)$. Durch Differentiation von $\delta)$ erhält man jetzt nach $\gamma)$

II) $$\varrho[z - f(fz)'] = \tau\left[\tau\frac{f}{\varrho}(fz)' - \{\varrho[z - (f(fz)')']\}'\right]'$$

als lineare homogene Gleichung vierter Ordnung für z, welche das erste Integral

III) $$(f(fz)')^2 + \varrho^2[z - (f(fz)')]^2 + \tau^2\left[\frac{f}{\varrho}(fz)' - \{\varrho[z - (f(fz)')']\}'\right]^2 = f^2 \cdot z^2$$

haben muß.

Für eine ebene Kurve C folgt aus $p^2 + q^2 + r^2 = f^2$ und den Gleichungen 5) des § I für $\tau = \infty$

$$\frac{q}{r} = \varrho\left[\frac{1}{r} + \left(\frac{p}{r}\right)'\right],$$

$$\frac{p}{r} = -\varrho\left(\frac{q}{r}\right)' = -\varrho\left[\varrho\left(\frac{1}{r} + \left(\frac{p}{r}\right)'\right)\right]'.$$

Da außerdem $\frac{p}{r} = -f\left(\frac{f}{r}\right)'$, so hat man für $z = \frac{1}{r}$ die auch aus II) für $\tau = \infty$ folgende lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung für z

II a) $$\varrho(\varrho[z - (f(fz)')'])' = f(fz)',$$

deren Integral

II b) $$\varrho^2[z - (f(fz)')']^2 + f^2(fz)'^2 = f^2 z^2 + \text{const}$$

mit $p^2 + q^2 + r^2 = f^2$ übereinstimmt, wenn die Konstante gleich -1 genommen wird. Um dies aus einem Beispiel zu zeigen, das später vollständiger behandelt wird, sei $f = h$, $\varrho = \text{const}$. Die Gleichung II a) ist dann

$$-h^2 z' + \varrho^2(z' - h^2 z''') = 0$$

und hat für $z' = \zeta$ und $\alpha = \frac{\sqrt{\varrho^2 - h^2}}{\varrho h}$ das Integral

$$\zeta = e^{\alpha s} c_1 + e^{-\alpha s} c_2, \quad z = \frac{e^{\alpha s} c_1 - e^{-\alpha s} c_2 + c_3}{\alpha},$$

so daß

$$\frac{p}{r} = -h^2 z' = e^{\alpha s} c_1 + e^{-\alpha s} c_2,$$

$$\frac{q}{r} = \varrho (z - h^2 z'') = \varrho \left[(e^{\alpha s} c_1 - e^{-\alpha s} c_2) \gamma + \frac{c_3}{\alpha} \right]$$

wird, wenn $\gamma = \frac{1 - \alpha^2 h^2}{\alpha}$ ist.

Bildet man jetzt die Gleichung

$$\frac{p^2 + q^2}{r^2} = \frac{f^2}{r^2} - 1,$$

so heben sich die s enthaltenden Glieder fort und es bleibt als Gleichung zwischen den drei Konstanten c_1, c_2, c_3

$$c_3^2 = \frac{1}{\varrho^2 h^2} - 4 \frac{c_1 c_2 h^2}{\varrho^2 - h^2}.$$

Dabei ist $\varrho \neq h$ vorausgesetzt. Für $\varrho = h$ wird

$$\zeta = c_1 s + c_2, \quad z = \frac{c_1 s^2}{2 h^2} + \frac{c_1 s}{n} + c_3$$

und es ist jetzt zu setzen

$$(c_1^2 + c_2^2 - 2 c_1 c_3) h^2 + 1 = 0.^{1})$$

---

[1]) Soll die ebene C in ihrer Ebene betrachtet werden, so ist $r = 0$. Setzt man dann $pz = p_1$, $qz = q_1$, so wird

$$z + p_1^1 - \frac{q_1}{\varrho} = 0, \quad q_1^1 + \frac{p_1}{\varrho} = 0$$

und es folgt wieder die Gleichung II b, in der die Konstante jetzt gleich Null zu nehmen ist. Für $z = e^{\int \zeta ds}$ ist dann

$$(fz)' = z(f' + f\zeta) = z\psi; \quad (f(fz)')' = z(f\psi' + \psi^2),$$

also wird II b

$$\varrho (1 - \psi' f - \psi^2) = f \sqrt{1 - \psi^2}$$

Für die homogene Bedingung

8) $$ap + bq + cr = 0,$$

in der a, b, c Funktionen von s sind, folgt aus § III, Ia

8a) $$a\Pi\varrho + bq_1 + c = 0.$$

Dies ist für $a \neq 0$ eine Riccatische Gleichung für q_1. Sie zeigt, daß in der dem Punkte P zugeordneten Ebene 8) je vier Erzeugende PQ_1, PQ_2, PQ_3, PQ_4, denen die Kurven Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 entsprechen, ein konstantes Doppelverhältnis haben, so daß also aus irgend drei partikulären Lösungen von 8) durch diese Doppelverhältniseigenschaft jede weitere Lösung abgeleitet werden kann, was übrigens geometrisch selbstverständlich ist. Ist aber $a = 0$, so folgt aus 8a) q_1 selbst. Daß aber in der Ebene $bq + cr = 0$, welche jetzt die Tangente von C enthält, nur eine einzige Kurve Γ vorhanden ist, folgt aus den Gleichungen 5a) des § I. Denn man hat jetzt

$$z + p_1' - \frac{q_1}{\varrho} = 0, \quad q_1' + \frac{p_1}{\varrho} + \frac{r_1}{\tau} = 0, \quad r_1' - \frac{q_1}{\tau} = 0,$$

also zur Bestimmung von r_1 die Gleichung

$$b(r_1'\tau) + cr_1 = 0,$$

welche r_1 bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, der dann auch in

$$q_1 = r_1'\tau, \quad p_1 = -\varrho\left[\frac{r_1}{\tau} + (r_1'\tau)'\right]$$

und z auftritt, so daß die p, q, r selbst völlig bestimmt sind. Die allgemeinere Gleichung

9) $$ap + bq + cr = 1,$$

in der a, b, c Funktionen von s sind, liefert für den Fall einer Raumkurve C $(\tau \neq \infty)$ und

---

und diese Gleichung wird durch die Substitution $(-\psi = (1+\psi)\varphi^2$ in die Riccatische Gleichung

$$2\varrho(\varphi + \varphi' f) = f(1+\varphi^2)$$

verwandelt, was allerdings viel einfacher in 2) § IV erreicht wurde.

$$z + p_1' - \frac{q_1}{\varrho} = 0, \quad q_1 = r_1' \tau, \quad p_1 = -\varrho \left[\frac{r_1}{\tau} + (r_1' \tau)'\right]$$

die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung für r_1

$$\text{IV)} \quad -a\left(\varrho\left[\frac{r_1}{\tau} + (r_1'\tau)'\right]\right) + b r_1' \tau + c r_1 = \frac{r_1 \tau}{\varrho} + \left(\varrho\left[\frac{r_1}{\tau} + (r_1'\tau)'\right]\right)',$$

so daß die Lösungen p, q, r von den Verhältnissen der drei linear homogenen Konstanten in dem Integrale von IV) abhängen. Ist aber $\tau = \infty$, so hat man $r_1 = \text{konst} = c_1$, $p_1 = -\varrho q_1'$, $z = \frac{q_1}{\varrho} + (\varrho q_1)'$, und es folgt aus 9) die nicht homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$-a(\varrho q_1') + b q_1 + c c_1 = \frac{q_1}{\varrho} + (\varrho q_1'),$$

deren Auflösung wieder die p, q, r von zwei linear nicht homogen auftretenden Konstanten abhängig macht.[1])

Dies erkennt man auch geometrisch. Denn die Gleichung 9) ordnet jedem Punkte P jetzt eine ($a \neq 0$) nicht durch ihn gehende Ebene zu. Zieht man in der zu $s = s_0$ gehörigen Ebene E_0, welche dem Punkte P_0 entspricht, eine willkürliche Gerade, so wird jeder auf ihr gewählte Punkt Q_0 eine Richtung $P_0 Q_0$ bestimmen, welche die konsekutive Ebene E_0' zu dem benachbarten Punkte P_0' in dem zu Q_0 benachbarten Punkte Q_0' schneidet; Q_0 und Q_0' sind dann benachbarte Punkte einer Kurve Γ. Damit ist eine Differentialkonstruktion der Gesamtheit aller durch 9) gegebenen Kurven Γ gegeben, deren analytische Bestimmung aus IV) folgt; die zu vier in gerader Linie gewählten Punkten Q_0', Q_0^2, Q_0^3, Q_0^4 Kurven Γ haben wieder die Eigenschaft konstanten Doppelverhältnisses für die Strahlen PQ_0', PQ^2, PQ^3, PQ^4.

---

[1]) Die Gleichung 9) gibt je nach den Werten der a, b, c zu einer großen Zahl weiterer Fragen Veranlassung, die hier nicht ausgeführt werden können.

§ VIII.

Über die Invarianten gewisser Differentialgleichungen n-Ordnung, die durch eine lineare homogene Differentialgleichung $n+1$-Ordnung lösbar sind.

Solche Differentialgleiehungen sind in den vorigen Paragraphen mehrfach hervorgetreten. Eine lineare homogene $D_n = 0$

$$z^{(n)} A_{n_1} + z^{(n-1)} A_{n-1} + \cdots + z A_0 = 0^1)$$

geht durch die Substitution

1) $$z = e^{\int \sigma_1 ds}$$

in eine nicht lineare $D_{n-1} = 0$ über, deren Form im allgemeinen nicht einfach ist, deren Integral σ_1 jetzt als Quotient der die Verhältnisse von n linear homogenen Konstanten c_1, $c_2 \ldots c_n$ enthaltenden Ausdrücke $z' : z$ erscheint, und diese D_{n-1} als eine Verallgemeinerung der Riccatischen Gleichung kennzeichnet.

Es handelt sich jetzt umgekehrt um die Frage: Wann läßt sich die gegebene $D_{n-1} = 0$ durch die Substitution 1) auf eine lineare homogene $D_n = 0$ reduzieren?

Aus der Gleichung

2) $$A z'' + B z' + C z = 0$$

wird nach 1)

3) $$A(\sigma_1^2 + \sigma_1') + B\sigma_1 + C_1 = 0.$$

Setzt man umgekehrt in der willkürlich gegebenen Gleichung, in der natürlich A_1 und B_1 nicht Null sind

4) $$A_1 \sigma^2 + B_1 \sigma' + C_1 \sigma + D_1 = 0$$

an Stelle von σ

5) $$\sigma = \lambda \sigma_1,$$

so geht sie über in

---

[1]) Die Buchstaben A, B, C ... bedeuten im folgenden Funktionen der unabhängigen Variabeln s.

$$A_1\lambda^2\sigma_1^2 + B_1(\lambda\sigma_1' + \lambda'\sigma_1) + C_1\lambda\sigma_1 + D_1 = 0,$$

also in die Form 3), wenn

$$A_1\lambda^2 = B_1\lambda = A$$
$$C_1\lambda + B_1\lambda' = B, \quad D_1 = C.$$

Diese Gleichungen lassen sich durch $\lambda = \frac{B_1}{A_1}$ immer erfüllen. Das entspricht dem bekannten Verfahren, die Riccatische Gleichung in Zusammenhang mit der linearen homogenen $D_2 = 0$ zu bringen, denn die Lösung von 3) ist jetzt von der Form

$$\sigma_1 = \frac{A_1\sigma}{B_1} = \frac{A_1 z'}{B_1 z}.$$

Ebenso geht nun die Gleichung

6) $$Az''' + Bz'' + Cz' + Dz = 0$$

durch 1) in

7) $$A(\sigma_1'' + 3\sigma_1\sigma_1' + \sigma_1^3) + B(\sigma_1' + \sigma_1^2) + C\sigma_1 + D = 0$$

über. Umgekehrt wird die willkürlich gegebene Gleichung

8) $$A_1\sigma'' + B_1\sigma\sigma' + C_1\sigma^3 + D_1\sigma' + E_1\sigma^2 + F\sigma + G = 0$$

in die Form 7) durch 5) transformiert, wenn die 7 Gleichungen

$$A_1\lambda = A, \quad B_1\lambda\lambda' + E_1\lambda^2 = B$$
I) $$B_1\lambda^2 = 3A, \quad 2A_1\lambda' + D_1\lambda = B$$
$$C_1\lambda^3 = A, \quad A_1\lambda'' + D_1\lambda' + F\lambda^2 = C, \quad G = D$$

bestehen. Da die beiden letzten Bedingungen nur die Koeffizienten D und C bestimmen, handelt es sich hier um die Verträglichkeit der fünf ersteren. Sie erfordert, daß

$$\lambda = \frac{3B_1}{A_1} = \frac{B_1}{3C_1}$$

oder

A) $$9A_1C_1 = B_1^2$$

und ferner

$$6A_1 d\left(\frac{A_1}{B_1}\frac{}{ds}\right) + 3D_1\frac{A_1}{B_1} = 9B_1\frac{A_1}{B_1}\frac{d}{ds}\left(\frac{A_1}{B_1}\right) + 9E_1\left(\frac{A_1}{B_1}\right)^2$$

oder

B) $$A_1' B_1 - B_1' A = D_1 B_1 - 3 E_1 A_1$$

sei. Wählt man, worin keine Beschränkung liegt, A gleich Eins, so ergibt sich als allgemeine Form der D_2, welche auf eine lineare homogene D_3 zurückgeführt werden kann

$$\sigma'' + B\sigma\sigma' + \frac{B^2}{9}\sigma^3 + D\sigma' + \left(\frac{DB + B'}{3}\right)\sigma^2 + F\sigma + G = 0$$

oder

$$\sigma'' + B\sigma\sigma' + \frac{B'}{3}\sigma^2 + \frac{B^2}{9}\sigma^3 + D\left(\sigma' + \frac{B\sigma^2}{3}\right) + F\sigma + G = 0,$$

in der jetzt B, D, F, G beliebige Funktionen von s sind. Setzt man noch $B = 3\beta$, so hat man

$$\sigma'' + 3\beta\sigma\sigma' + \beta'\sigma^2 + \beta^2\sigma^3 + D(\sigma' + \beta\sigma^2) + F\sigma + G = 0$$

und kann die Richtigkeit der Behauptung durch direkte Substitution von z bestätigen.[1])

---

[1]) Als Beispiel betrachte man die Gleichung

1) $$ap + bq + cr = 1.$$

Setzt man nach Ia, § III

$$1 + \sigma\left(\Pi' - \Pi\omega - \frac{q_1}{\varrho^2}\right) = 0$$

$$p = \left(\frac{1 + q_1^2}{\tau} - q_1'\right)\sigma$$

$$q = q_1\frac{\sigma}{\varrho}, \quad r = -\frac{\sigma}{\varrho},$$

so wird vermöge der Substitution

$$q_1 = -\frac{r_1'\tau}{r_1}$$

$$\Pi = \frac{1}{\tau} + \frac{r_1''}{r_1}\tau + \frac{r_1'}{r_1}\tau'$$

und da in $\Pi' - \Pi\omega - \frac{q_1}{\varrho^2}$ die Glieder mit

$$\frac{r''r_1'\tau}{r_1^2} \text{ und } \left(\frac{r_1'}{r_1}\right)^2\tau'$$

sich ebenfalls herausheben, die Gleichung 1) oder

$$a\Pi - b\frac{r_1'}{r_1}\tau - \frac{c}{\varrho} = -\left(\Pi' - \Pi\omega - \frac{q_1}{\varrho^2}\right)$$

in eine lineare homogene $D_3 = 0$ übergehen, was nicht unmittelbar zu ersehen war.

Es ist zu vermuten, daß die beiden notwendigen und hinreichenden Bedingungen A) und B) für die Koeffizienten von 8) Invarianten sind in Bezug auf solche Transformationen, die entweder die abhängige Variable σ durch eine Substitution von der Form $\sigma = \mu\sigma_1$ oder die unabhängige s durch eine Funktion s_1 derselben von s ersetzen.

Um dies zu zeigen, setze man zunächst, wo μ irgend eine Funktiou von s sei,

$$\sigma = \mu\sigma_1.$$

Man erhält dann, wenn die transformierten Koeffizienten durch Klammern bezeichnet werden

$$\begin{aligned} &(A_1) = A_1\mu, \quad (D_1) = 2A_1\mu' + D_1\mu \\ 9)\qquad &(B_1) = B_1\mu^2, \quad (E_1) = B_1\mu\mu' + E_1\mu^2 \\ &(C_1) = C_1\mu^3. \end{aligned}$$

Es wird alsdann, wenn man

$$J_1 = 9A_1C_1 - B_1^2 \text{ setzt,}$$

$$C)\qquad (J_1) = (9AC - B^2)\mu^4 = \mu^4 J_1.$$

Setzt man ferner nach B)

$$J_2 = A_1'B_1 - B_1'A - D_1B_1 + 3E_1A_1$$

$$(J_2) = (A_1')(B_1) - (B_1')(A_1) - (D_1)(B_1) + 3(E_1)(A_1)$$

oder so ergibt sich für die rechte Seite von (J_2) nach 9)

$$(A_1'\mu + A_1\mu')B_1\mu^2 - (B_1'\mu^2 + 2B_1\mu\mu')\mu A_1$$
$$- (2A_1\mu' + D_1\mu)B_1\mu^2 + 3A_1\mu(B_1\mu\mu' + E_1\mu^2) \text{ oder}$$

$$D)\qquad (J_2) = \mu^3 J_2.$$

Führt man, um den zweiten Teil der Behauptung zu beweisen, an Stelle von s eine neue Variable s_1 ein, welche Funktion von s ist, so ist

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\sigma}{ds_1}s_1'$$

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2} = \frac{d^2\sigma}{ds_1^2}s_1'^2 + \frac{d\sigma}{ds_1}s_1'',$$

wo rechter Hand die Differentialquotienten von ss_1 nach geschrieben sind. Es ergeben sich dann die — wieder durch Einklammerung bezeichneten — transformierten Koeffizienten

$$(A_1) = A_1 s'^3, \quad (D_1) = D_1 s_1' + A_1 s_1''$$
$$(B_1) = B_1 s', \quad (E_1) = E$$
$$(C_1) = C_1.$$

Da endlich

$$\frac{dl(A_1)}{ds_1} = A_1' s_1' + 2 A_1 s_1''$$
$$\frac{d(B_1)}{ds_1} = B_1' + B_1 \frac{s_1''}{s_1'},$$

so erhält man leicht

$$(J_1) = J_1 \sigma_1'^2$$
$$(J_2) = J_2 \sigma_1'^2,$$

so daß hier z. B. $J_1 : J_2$ eine absolute Invariante ist.

Für eine lineare homogene $D_4 = 0$ gestaltet sich die Betrachtung wie folgt: Ist

10) $A z'''' + B z''' + C z'' + D z' + E z = 0$ eine $D_4 = 0$,

so entsteht durch die Transformation $z = e^{\int \sigma_1 ds}$ aus 10)

11) $$A\sigma_1^4 + 6A\sigma_1^2\sigma_1' + 4A\sigma_1\sigma_1'' + 3A\sigma_1'^2 + A\sigma_1''' + B\sigma_1^3 + 3B\sigma_1\sigma_1' + B\sigma_1'' + C\sigma_1^2 + C\sigma_1' + D\sigma_1 + E = 0.$$

Ist umgekehrt eine $D_5 = 0$ von der Form

12) $$A_1\sigma^4 + B_1\sigma^2\sigma' + C_1\sigma\sigma'' + D_1\sigma'^2 + E_1\sigma''' + F_1\sigma^3 + G_1\sigma\sigma' + H\sigma'' + J_1\sigma^2 + K_1\sigma' + L_1\sigma + M_1 = 0$$

gegeben, so wird sie durch die Substitution $\sigma = \lambda\sigma_1$ auf die Form 11) gebracht, wenn die Gleichung

12a) $$\begin{aligned} &A_1\sigma_1^4\lambda^4 + \sigma_1'\sigma_1^2 B_1\lambda^3 + \sigma_1\sigma_1'' C_1\lambda^2 + \sigma_1'^2 D_1\lambda^2 + \sigma_1''' E_1\lambda \\ &+ \sigma_1^3(B_1\lambda^2\lambda' + F_1\lambda^3) + \sigma_1\sigma_1'(2C_1\lambda\lambda' + 2D_1\lambda\lambda' + G_1\lambda^2) \\ &+ \sigma_1''(B_1\lambda + 3E_1\lambda_1') + \sigma_1^2(D\lambda'^2 + G_1\lambda\lambda' + J_1\lambda^2 + C_1\lambda\lambda'') \\ &+ \sigma_1'(3E_1\lambda'' + 2H\lambda' + K_1\lambda) + \sigma_1(E_1\lambda''' + H_1\lambda'' \\ &+ K_1\lambda' + L_1\lambda) + M_1 = 0 \end{aligned}$$

mit 11) übereinstimmt.

Dazu sind die 12 Gleichungen

$$A_1\lambda^4 = A, \qquad B_1\lambda^2\lambda' + F_1\lambda^3 = B,$$
$$B_1\lambda^3 = 6A, \qquad 2\lambda\lambda'(C_1 + D_1) + G_1\lambda^2 = 3B,$$
$$C_1\lambda^2 = 4A, \qquad H_1\lambda + 3E_1\lambda' = B,$$
$$D_1\lambda^2 = 3A,$$

12 b) $$E_1\lambda = A,$$
$$D_1\lambda'^2 + G_1\lambda\lambda' + J_1\lambda^2 + G_1\lambda\lambda'' = C$$
$$3E_1\lambda'' + 2H_1\lambda' + K_1\lambda = C$$
$$E_1\lambda''' + H_1\lambda'' + K_1\lambda' + L_1\lambda = D, \quad M_1 = E$$

erforderlich, und dazu sind die Gleichungen

13) $$\lambda\frac{A_1}{B_1} = {}^1/_6, \quad \lambda\frac{B_1}{C_1} = {}^3/_2, \quad \frac{C_1}{D_1} = {}^4/_3, \quad \lambda\frac{D_1}{E_1} = 3$$
$$\frac{B_1\lambda\lambda' + F_1\lambda^2}{2(D_1 + C_1)\lambda' + G_1\lambda} = {}^1/_3, \quad \frac{B_1\lambda^2\lambda' + F_1\lambda^3}{H_1\lambda + 3E_1\lambda'} = 1,$$
$$D_1\lambda'^2 + G_1\lambda\lambda' + J_1\lambda^2 + G_1\lambda\lambda'' = 3E_1\lambda'' + 2H_1\lambda' + K_1\lambda$$

notwendig und hinreichend. Es entstehen demnach sechs Bedingungen zwischen den Koeffizienten A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, J_1, K_1, L_1, welche wieder Invarianten in Bezug auf jede Transformation, die entweder σ_1 durch $\mu\sigma_2$ oder die unabhängige Variable s durch eine Funktion von s ersetzt, sind.

Ersetzt man zunächst σ_1 durch $\mu\sigma_2$, so werden die transformierten Koeffizienten (A_1), (B_1), . . . nach 12 a)

$$(A_1) = A\mu^4, \quad (F_1) = B_1\mu^2\mu' + F_1\mu^3$$
$$(B_1) = B_1\mu^3, \quad (G_1) = 2(C_1 + D_1)\mu\mu' + G_1\mu^2$$
$$(C_1) = C_1\mu^2, \quad (H_1) = H_1\mu + 3E_1\mu'$$
$$(D_1) = D_1\mu^2, \quad (J_1) = D_1\mu'^2 + G_1\mu\mu' + J_1\mu^2 + C_1\mu\mu''$$
$$(E_1) = E_1\mu, \quad (K_1) = 3E_1\mu'' + 2H_1\mu' + K_1\mu$$
(14) $$(L_1) = E_1\mu''' + H_1\mu'' + K_1\mu' + L_1\mu$$

Es wird aber nach 12 b) zunächst

$$B_1^2 - 9A_1C_1 = 0, \quad 4D_1 = 3C_1, \quad C_1B_1 - 24E_1A_1 = 0.$$

Setzt man diese Ausdrücke gleich J_1, J_2, J_3 und bestimmt nach 14) ihre Transformierten (J_1), (J_2), (J_3), so erhält man

$$(J_1) = \mu^6 J_1$$
$$(J_2) = \mu^2 J_2$$
$$(J_3) = \mu^5 J_3.$$

Die erste der drei weiteren Bedingungen 12 b) wird zufolge des Ausdruckes von $\lambda = {}^1/_6 \frac{B_1}{A_1}$ nach Fortlassung überflüssiger Faktoren und Benutzung von $C_1 = 9 \frac{B_1^2}{A_1}$

$$\frac{2}{9} \frac{B_1^2}{A_1} \frac{d}{ds}\left(\frac{B_1}{A_1}\right) + F_1 \frac{B_1^2}{A_1^2} - 2 G_1 \frac{B_1}{A_1} = 0.$$

Setzt man jetzt

$$J_4 = {}^2/_9 B_1 \frac{d}{ds}\left(\frac{B_1}{A_1}\right) + F_1 \frac{B_1}{A_1} - 2 G_1,$$

so erhält man nach 14)

$$(J_4) = \mu^2 J_4$$

und in derselben Weise für

$$J_5 = \frac{1}{72} \frac{B_1^2}{A_1} \frac{d}{ds}\left(\frac{B_1}{A_1}\right) + \frac{F_1 B_1^2}{36 A_1^2} - H_1$$
$$(J_5) = \mu J_5.$$

Die letzte Invariante ist auf dieselbe Weise zu behandeln, was ich hier nicht weiter ausführe. Ebensowenig gehe ich auf die Betrachtung der ganz speziellen Invarianten ein, die für ein beliebiges n auftreten. Denn zur Bestimmung von der n-Ableitung $z^{(n)}$ hat man für

$$z = e^{f(s)} = e^f, \quad f = \int \sigma \, ds$$

in der Gleichung

$$z + \frac{h}{1} z' + \frac{h^2}{2!} z'' + \cdots = z e^{h\left(f' + \frac{h}{2!} f'' + \frac{h^2}{3!} f''' + \cdots\right)}$$

den mit $n!$ multiplizierten Koeffizienten von h^n auf der rechten Seite zu nehmen. Da nun

$$(a_1 + a_2 + \cdots a_m)^p = \Sigma p! \frac{a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_m^{\lambda_m}}{\lambda_1! \, \lambda_2! \ldots \lambda_m!}$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_m = p,$$

so entsteht der Faktor von h^n rechts dadurch, daß

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_m = p$$
$$\lambda_2 + 2\lambda_3 + \cdots (m-1)\lambda_m = n - p,$$

oder

$$1) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_m = p$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots m\lambda_m = n$$

ist, so daß $m \leqq n$ und

$$2) \quad z^{(n)} = \frac{dz^n}{ds^n} = z\,n! \sum_{\lambda} \frac{\left(\frac{\sigma}{1!}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{\sigma'}{2!}\right)^{\lambda_2}\left(\frac{\sigma''}{3!}\right)^{\lambda_3}\cdots\left(\frac{\sigma^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda_n}}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,\ldots\,\lambda_n!}$$

unter den Bedingungen 1) wird. Dadurch wird die allgemeine Form von $z^{(n)}$ aber von den für ganze positive λ zu lösenden Gleichungen 1) abhängig und $z^{(n)}$ setzt sich aus Gliedern zusammen, welche eine größere Zahl von zu gewissen Potenzen erhobenen Ableitungen von σ durch Multiplikation vereinigt erhalten, so daß die Ermittelung der Bedingungen für die Koeffizienten der $D_{n-1} = 0$ nicht mehr so einfach ist, wie in den Fällen, wo $n < 6$ ist, bei denen immer nur zwei Ableitungen der σ miteinander multipliziert auftreten.

§ IX.

Die Huygensschen Traktorien der gemeinen Schraubenlinie.

Aus der Gleichung I des § VII folgt für $f = h = \text{konst.}$ und ϱ, τ als Konstanten die lineare homogene $D_4 = 0$

$$1) \quad r'''' + r''\left(\frac{\varrho^2 + \tau^2}{\tau^2\varrho^2} - \frac{1}{h^2}\right) = \frac{r}{\tau^2 h^2}.$$

Setzt man $\qquad r = \sin(\varepsilon s + c_1),$

so ergibt sich die charakteristische Gleichung für ε

$$2) \quad \varepsilon^4 - \varepsilon^2\left(\frac{\varrho^2 + \tau^2}{\varrho^2\tau^2} - \frac{1}{h^2}\right) = \frac{1}{\tau^2 h^2}$$

mit den Wurzeln für ε^2

$$3) \quad \varepsilon_1^2 = {}^1/_2\left(a - \sqrt{a^2 + \frac{4}{h^2\tau^2}}\right), \quad \varepsilon_2^2 = {}^1/_2\left(a + \sqrt{a^2 + \frac{4}{h^2\tau^2}}\right),$$

wobei $a = \frac{\varrho^2 + \tau^2}{\varrho^2 \tau^2} - \frac{1}{h^2} = \frac{\delta}{\varrho^2 \tau^2} - \frac{1}{h^2}, \quad \delta = \varrho^2 + \tau^2,$

von denen $\varepsilon_2^2 = \varkappa_2^2$ positiv, $\varepsilon_1^2 = -\varkappa_1^2$ aber negativ ist. Wird jetzt der Wert von r

4) $$r = c_2 \sin(\varkappa_2 s + \gamma_2) + c_1 \sin(i\varkappa_1 s + \gamma_1)$$

in die Bedingungsgleichung 7) des § VII eingesetzt, die unter den angegebenen Voraussetzungen die Gestalt

A) $$r^2 \frac{\delta^2}{\tau^2} + r'^2 \left(\tau^2 - \frac{h^2 \delta^2}{\varrho^2 \tau^2}\right) + 2rr'' \varrho^2 + r''^2 \tau^2 \varrho^2 - 2h^2 r' r''' \delta - h^2 r''^2 \tau^2 \varrho^2 = \text{konst.}$$

annimmt, so hat man nur den konstanten Teil auf der linken Seite gleich Null zu setzen, um die zur wirklichen Lösung erforderliche Beziehung zwischen den Konstanten c_1, c_2 zu erhalten.

Es soll aber hier zugleich der Kontrolle wegen gezeigt werden, daß die mit den trigonometrischen Teilen in s behafteten Glieder links sich gegenseitig aufheben.

Setzt man nach 4)

$$r = c_2 \sin u_2 + c_1 \sin u_1, \quad u_2 = \varkappa_2 s + \gamma_2, \quad u_1 = i\varkappa_1 s + \gamma_1,$$

so ist

$$\begin{aligned} r' &= c_2 \varkappa_2 \cos u_2 + i c_1 \varkappa_1 \cos u_1 \\ r'' &= -c_2 \varkappa_2^2 \sin u_2 + c_1 \varkappa_1^2 \sin u_1 \\ r''' &= -c_2 \varkappa_2^3 \cos u_2 + i c_1 \varkappa_1^3 \cos u_1 \\ r'''' &= c_2 \varkappa_2^4 \sin u_2 + c_1 \varkappa_1^4 \sin u_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} r^2 &= c_2^2 \sin^2 u_2 + 2 c_1 c_2 \sin u_1 \sin u_2 + c_1^2 \sin^2 u_1 \\ r'^2 &= c_2^2 \varkappa_2^2 \cos^2 u_2 + 2 i c_1 c_2 \varkappa_1 \varkappa_2 \cos u_1 \cos u_2 - c_1^2 \varkappa_1^2 \cos^2 u_1 \\ r''^2 &= c_2^2 \varkappa_2^4 \sin^2 u_2 - 2 c_1 c_2 \varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \sin^2 u_1 \sin^2 u_2 + c_1^2 \varkappa_1^4 \cos^2 u_1 \\ r' r''' &= -c_2^2 \varkappa_2^4 \cos^2 u_2 + i c_1 c_2 \varkappa_2 \varkappa_1^3 \cos u_1 \cos u_2 \\ &\quad - i c_1 c_2 \varkappa_1 \varkappa_2^3 \cos u_1 \cos u_2 - c_1^2 \varkappa_1^4 \cos^2 u_1 \quad 5) \\ r'''^2 &= c_2^2 \varkappa_2^6 \cos^2 u_2 - 2 i c_1 c_2 \varkappa_1^3 \varkappa_2^3 \cos u_1 \cos u_2 - c_1^2 \varkappa_1^6 \cos^2 u_1 \\ rr'' &= -c_2^2 \varkappa_2^2 \sin^2 u_2 + c_1^2 \varkappa_1^2 \sin^2 u_1 + c_1 c_2 (\varkappa_1^2 - \varkappa_2^2) \sin u_1 \sin u_2. \end{aligned}$$

Ordnet man hiernach den Ausdruck A, indem man zunächst den konstanten Teil aufsucht, also für $\cos^2 u_2$ $1 - \sin^2 u_2$,

$\cos^2 u_1 = 1 - \sin^2 u_1$ setzt, so ergibt sich, da von den sinus und cosinus unabhängige Glieder nach 5) nur aus den Werten für r', $r^{I} r^{III}$, $r^{III 2}$ entspringen

$$6) \qquad (c_2^2 \varkappa_2^2 - c_1^2 \varkappa_1^2)\left(\tau^2 - \frac{h^2 \delta^2}{\tau^2 \varrho^2}\right) + 2 h^2 \delta (c_1^2 \varkappa_1^4 + c_2^2 \varkappa_2^4) - h^2 \{c_2^2 \varkappa_2^6 - c_1^2 \varkappa_1^6\} \tau^2 \varrho^2.$$

Da nach 2)

$$6a) \qquad \varkappa_2^2 - \varkappa_1^2 = \frac{\delta}{\varrho^2 \tau^2} - \frac{1}{h^2}, \quad \varkappa_1^2 \varkappa_2^2 = \frac{1}{\tau^2 h^2}$$

$$\varkappa_2^4 = \varkappa_2^2\left(\frac{\delta}{\varrho^2 \tau^2} - \frac{1}{h^2}\right) + \frac{1}{\tau^2 h^2}, \quad \varkappa_1^4 = -\varkappa_1^2\left(\frac{\delta}{\varrho^2 \tau^2} - \frac{1}{h^2}\right) + \frac{1}{\tau^2 h^2},$$

so geht 6) in den gleich Null zu setzenden Ausdruck 7)

$$7) \qquad \begin{aligned} & c_2^2 \varkappa_2^2\left(\tau^2 - \frac{h^2 \delta^2}{\tau^2 \varrho^2} + \varkappa_2^2 (\tau^2 \varrho^2 + h^2 \delta) - \varrho^2\right) \\ & - c_1^2 \varkappa_1^2\left(\tau^2 - \frac{h^2 \delta^2}{\tau^2 \varrho^2} - \varkappa_1^2 (\tau^2 \varrho^2 + h^2 \delta) - \varrho^2\right) \end{aligned}$$

über. Ich werde jetzt zeigen, daß das Produkt der beiden Faktoren von $(c_2^2 \varkappa_2^2$ und $- c_1^2 \varkappa_1^2$ in 7) nämlich

$$\left(\tau^2 - \frac{h^2 \delta^2}{\tau^2 \varrho^2} - \varrho^2\right)^2 + (\tau^2 \varrho^2 + h^2 \delta)\left(\tau^2 - \frac{h^2 \delta^2}{\tau^2 \varrho^2} - \varrho^2\right)(\varkappa_2^2 - \varkappa_1^2) - \varkappa_1^2 \varkappa_2^2 (\tau^2 \varrho^2 + h^2 \delta)^2$$

einen negativen Wert hat. Setzt man nämlich hier die Werte für $\varkappa_1^2 \varkappa_2^2$ und $\varkappa_2^2 - \varkappa_1^2$ aus 6a) ein, so erhält man

$$\left(\tau^2 - \frac{h^2 \delta^2}{\tau^2 \varrho^2} - \varrho^2\right)^2 + (\tau^2 \varrho^2 + h^2 \delta)\left(\tau^2 - \frac{h^2 \delta^2}{\tau^2 \varrho^2} - \varrho^2\right)\left(\frac{\delta}{\varrho^2 \tau^2} - \frac{1}{h^2}\right) - \frac{1}{\tau^2 h^2}(\tau^2 \varrho^2 + h^2 \delta)^2$$

und dies reduziert sich durch die Ausrechnung auf

$$-\left[\tau^4\left(\frac{h}{\varrho} - \frac{\varrho}{h}\right)^2 + 2\tau^2 (h^2 + \varrho^2) + h^2 \varrho^2\right] = -\lambda^2.$$

Die Bedingung für das Verschwinden von 7) ist daher, wenn man die beiden Faktoren von $c_2^2 \varkappa_1^2$ und $- c_1^2 \varkappa_1^2$ mit P

und Q bezeichnet, die nach dem eben bewiesenen auch nicht Null sein können

$$PQ = -\lambda^2$$

und überdies P eine reelle Zahl ist

$$c_2^2 \varkappa_2^2 P^2 + c_1^2 \varkappa_1^2 \lambda^2 = 0.$$

Demnach ist

$$c_1 \varkappa_1 = i c_2 \varkappa_2 M \text{ für } M = P : \lambda$$

und es wird

$$r = c_2 \sin(\varkappa_2 s + \gamma_2) + i c_2 \varkappa_2 M \sin i(\varkappa_1 s + \gamma_1).$$

Dieser Ausdruck wird aber, wenn man γ_1 rein imaginär $= i\gamma$ wählt, in den reellen Wert

$$r = c_2 \left\{ (\sin \varkappa_2 s + \gamma_2) + \varkappa_2 \frac{M}{2} (e^{\varkappa_1 s + \gamma} - e^{-\varkappa_1 s + \gamma}) \right\}$$

übergehen. Die Traktorien selbst sind transzendent, da r aus trigonometrischen und Exponentialfunktionen zusammengesetzt ist.

Es ist endlich noch zu verifizieren, daß die übrigen mit den trigonometrischen Funktionen behafteten Teile in A) sich aufheben. Da entstehen zunächst Glieder mit $\sin^2 u_1 = z^2$. Nun enthält

r'^2	den	Faktor	$\varkappa_2^2 c_2^2 (1 - z^2)$
rr''	„	„	$-\varkappa_2^2 c_2^2 z^2$
r''^2	„	„	$\varkappa_2^4 c_2^2 z^2$
$r'r'''$	„	„	$-\varkappa_2^4 c_2^2 (1 - z^2)$
r'''^2	„	„	$\varkappa_2^6 c_2^2 (1 - z^2)$.

Darnach folgt aus A) für den Faktor von z^2 der Ausdruck

$$\varkappa_2^2 \left(\frac{\delta}{\tau^2} - \left(\tau^2 - \frac{h^2 \delta^2}{\varrho^2 \tau^2} \right) \right) - 2 \varkappa_2^2 \varrho^2 + \tau^2 \varrho^2 \varkappa_2^4 - 2 h^2 \delta \varkappa_2^4 + h^2 \tau^2 \varrho^2 \varkappa_2^6,$$

der in der Tat gleich Null ist. Setzt man nämlich

$$\varkappa_2^6 = \varkappa_2^4 \left(\frac{\delta}{\varrho^2 \tau^2} - \frac{1}{h^2} \right) + \frac{\varkappa_2^2}{\tau^2 h^2},$$

so erhält man für denselben

$$1+\frac{\varrho^2}{\tau^2}-\varkappa_2^2\tau^2+\varkappa_2^2\frac{h^2\delta^2}{\varrho^2\tau^2}-h^2\left(\frac{\delta^2\varkappa_2^2}{\varrho^2\tau^2}-h^2\right)-\frac{\varrho^2+\tau^2}{\tau^2}-\varkappa_2^2\varrho^2,$$

in dem sich das erste und fünfte, sowie auch alle übrigen Glieder aufheben.

Daß auch die Faktoren von $\sin u_1 \sin u_2$ und $\cos u_1 \cos u_2$ in A) fortfallen, läßt sich ebenfalls leicht erkennen. So entspringt z. B. das Glied mit $\cos u_1 \cos u_2 = w$

r'^2	mit	dem	Faktor	$2ic_1c_2\varkappa_1\varkappa_2$
$r'r'''$	„	„	„	$ic_1c_2\varkappa_1\varkappa_2(\varkappa_1^2-\varkappa_2^2)$
r'''^2	„	„	„	$-2ic_1c_2\varkappa_1^3\varkappa_2^3$

und aus A) folgt dann als mit w multipliziertes Glied

$$2ic_1c_2\left\{\varkappa_1\varkappa_2\left(\tau^2-\frac{h^2\delta^2}{\varrho^2\tau^2}\right)-h^2\delta(\varkappa_1^2-\varkappa_2^2)\varkappa_1\varkappa_2+\varkappa_1^3\varkappa_2^3\tau^2\varrho^2h^2\right\},$$

welches ebenfalls gleich Null ist.

Hierdurch ist die Aufgabe vollständig gelöst, da auch

$$z=r_1'''\tau\varrho+r_1'\frac{\delta}{\tau\varrho}$$

wird, und also p, q, r durch Verhältnisse von Ausdrücken mit trigonometrischen und Exponentialfunktionen von s, welche noch zwei Konstanten γ enthalten, gegeben sind.

§ X.

Das allgemeine Problem der Traktorien.

Aus den drei Gleichungen 5) des § I

$$1+p'-\frac{q}{\varrho}=p\Omega$$

1)
$$q'+\frac{p}{\varrho}+\frac{r}{\tau}=q\Omega$$

$$r'-\frac{q}{\tau}=r\Omega$$

und

2)
$$p^2+q^2+r^2=f^2,$$

wo f eine gegebene Funktion von s ist, kann man durch Elimination von Ω drei Gleichungen für p, q, r erhalten. Setzt man dann in der aus

3) $$p + ff' = f^2\Omega$$

folgenden Gleichung den Wert von Ω der Reihe nach in die Gleichungen 1) ein, so erhält man, wenn zur Abkürzung

$$\frac{p}{f} = \sigma_1, \quad \frac{q}{f} = \sigma_2, \quad \frac{r}{f} = \sigma_3$$

gesetzt wird, wodurch die Richtungscosinus der Erzeugenden PQ von Γ gegen die Axen des Triëders von C eingeführt werden, aus der ersten

I) $$\frac{1-\sigma_1^2}{f} + \sigma_1' - \frac{\sigma_2}{\varrho} = 0$$

und ebenso aus den beiden anderen

II) $$\sigma_2' + \frac{\sigma_1}{\varrho} + \frac{\sigma_3}{\tau} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{f} = 0,$$

III) $$\sigma_3' - \frac{\sigma_2}{\tau} - \frac{\sigma_1\sigma_3}{f} = 0.$$

Die Gleichungen I), II), III) besitzen das partikuläre Integral

4) $$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 1.$$

Durch Multiplikation derselben mit σ_1, σ_2, σ_3 und Addition erhält man in der Tat

$$\sigma_1\sigma_1' + \sigma_2\sigma_2' + \sigma_3\sigma_3' + \frac{\sigma_1}{f}\{1-(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)\} = 0$$

oder

$$\frac{d\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)}{ds}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-1} = \frac{\sigma_1}{f},$$

deren Integral

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 1 = c\,e^{\int \frac{\sigma_1}{f}\,ds}$$

zeigt, daß 4) gilt, so wie die Konstante c gleich Null gewählt

wird, so daß eine der Gleichungen unter dieser Voraussetzung überflüssig, und alsdann auch 2) erfüllt ist.

Ich setze jetzt, um 4) identisch zu erfüllen,

$$5) \qquad \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{x+y}{x-y} \\ \sigma_2 &= \frac{1-xy}{x-y} \\ \sigma_3 &= i\left(\frac{1+xy}{x-y}\right). \end{aligned}$$

Trägt man die Werte

$$\begin{aligned} \sigma_1' &= \frac{2(y'x - yx')}{(x-y)^2} \\ \sigma_2' &= \frac{x'(y^2-1) + y'(1-x^2)}{(x-y)^2} \\ \sigma_3' &= \frac{i(y'(x^2+1) - x'(y^2+1)}{(x-y)^2} \end{aligned}$$

in die Gleichungen I), III) ein, so erhält man

$$\text{Ia)} \qquad y'x - yx' - \frac{2xy}{f} - \frac{(1-xy)(x-y)}{2\varrho} = 0,$$

$$\text{IIIa)} \qquad \begin{aligned} &(x^2+1)y' - (y^2+1)x' - (1+xy)\frac{(x+y)}{f} \\ &\quad + i(1-xy)\frac{(x-y)}{\tau} = 0. \end{aligned}$$

Bestimmt man aus Ia), IIIa) die Werte der y', x', so erhält man endlich die beiden Riccatischen Gleichungen, von denen die eine durch die Substitution $y = -\frac{1}{x}$ in die andere übergeht

$$\text{IV)} \qquad \begin{cases} y' - \frac{1}{f}y - \frac{1}{2\varrho}(y^2+1) - \frac{i(y)}{\tau} = 0 \\ x' - \frac{1}{f}y + \frac{1}{2\varrho}(x^2+1) + \frac{i(x)}{\tau} = 0. \end{cases}$$

Zugleich sind durch Auflösung derselben, als deren besonderer Vorzug angesehen werden kann, daß sie nur von

den Größen ϱ, τ, f in der einfachsten Weise abhängig sind, σ_1, σ_3 und endlich auch σ_2 gegeben. Ferner ergibt sich der bemerkenswerte Satz, daß für den Fall der allgemeinen Schraubenlinie, wenn zugleich

$$f = a\varrho + b\tau$$

mit a, b als Konstanten angenommen wird, das Problem der Traktorien durch Quadratur vollständig gelöst wird[1]).

Aus den Gleichungen II), III) erhält man noch durch Elimination von f

$$\sigma_2' \sigma_3 - \sigma_3' \sigma_2 + \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\varrho} + \frac{\sigma_3^2 + \sigma_2^2}{\tau} = 0$$

oder

V) $$\frac{d}{ds}\left(\operatorname{arctg} \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) + \frac{1}{\tau} + \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\varrho(\sigma_3^2 + \sigma_2^2)} = 0,$$

also eine von der Funkton f gänzlich unabhängige Gleichung zwischen den drei Richtungscosinus σ_1, σ_2, σ_3, die in den folgenden Paragraphen immer durch $\cos i$, $\cos j$, $\cos k$ bezeichnet werden sollen.

Ist z. B. $\dfrac{\cos j}{\cos k}$ gleich einer Konstanten k, so folgt aus V)

$$\frac{\cos i}{\cos \varkappa} = -\frac{\varrho}{\tau}(1 + k^2),$$

was wieder für die Schraubenlinien einen allerdings sehr einfachen Satz enthält. Ist umgekehrt

$$\frac{\cos i}{\cos \varkappa} = \gamma \cdot \tau \text{ konst},$$

so folgt aus V)

$$\frac{1}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right)\right) + \frac{\gamma}{\varrho} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right)^2} = 0,$$

was wieder für

[1]) Vielleicht ist es nicht ohne Interesse, diese Lösung mit der des § IX zu vergleichen.

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{\cos j}{\cos \varkappa} = \operatorname{tg} \theta$$

auf die Riccatische Gleichung

$$\frac{d\theta}{ds} + \frac{x}{\varrho} \cos^2 \theta + \frac{1}{\tau} = 0$$

führt.

So einfach und übersichtlich nun auch die durch die Gleichungen IV) gegebene Lösung erscheint, so sind dieselben für wirkliche Konstruktionen doch nicht sofort verwendbar, weil die σ_1, σ_2, σ_3 erst aus den x, y nach 5) zu entnehmen sind, und der Durchgang durchs Imaginäre ebenfalls besonders zu untersuchen ist. Es wird daher nicht überflüssig sein, wenn im folgenden einige einfache Aufgaben wieder mittels der Unbekannten q_1 behandelt werden.

§ XI.

Die Traktorien der ebenen Kurven C.

Aus den Gleichungen 5a) des § I hat man für eine ebene Kurve C

1) $$z + p_1' - \frac{q_1}{\varrho} = 0, \quad q' + \frac{p'}{\varrho} = 0, \quad r_1' = 0$$

und $$pz = p_1, \quad qz = q_1, \quad r_1 = \text{konst} = c.$$

Hieraus folgt für

2) $$p^2 + q^2 + r^2 = f^2 \text{ oder } p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = f^2 z^2$$

die Gleichung für q_1

I) $$(\varrho q_1')^2 + c^2 + q_1^2 = \frac{f^2}{\varrho^2} [q_1 + \varrho (\varrho q_1')']^2$$

nebst $$p_1 = -\varrho q_1', \quad z = \frac{q_1}{\varrho} + (\varrho q_1')'.$$

Durch Multiplikation von I) mit q_1' entsteht die Gleichung

II) $$\varrho q_1' = f \frac{d}{ds} \sqrt{q_1^2 + c^2 + (\varrho q_1')^2}$$

und diese ist unter der Voraussetzung $q_1' \neq 0$ mit I) völlig äquivalent. Gleichung II) wird durch Quadratur integriert, wenn $f = \varrho\varphi(q)$ ist, insbesondere also bei konstantem ϱ (Fall des Kreises) und für $f = h$, oder für $f = \varrho/k$.

In letzterem Falle $f = \varrho/k$ folgt aus II)

$$3) \qquad \frac{dq_1}{\sqrt{q_1^2(k^2-1) + 2kc_1q_1 + c_1^2 - c^2}} = \frac{ds}{\varrho}$$

mit den willkürlichen Konstanten c_1 und $c = r_1$. Ist zunächst $k^2 = 1$, so hat man für

$$\sigma = \left(\int \frac{ds}{\varrho} + c_2\right),$$

wo c_2 eine neue Konstante

$$q_1 = \frac{c_1^2\sigma^2 + c^2 - c_1^2}{2kc_1}$$

$$p_1 = -c_1\sigma$$

$$z = \frac{c_1^2\sigma^2 + c^2 + c_1^2}{2kc_1\varrho},$$

also:

$$A) \qquad \begin{cases} p = -\dfrac{2\varrho c_1^2 k\sigma}{N} \\ q = \dfrac{(c_1^2\sigma^2 + c^2 - c_1^2)\varrho}{N} \\ r = \dfrac{2cc_1k\varrho}{N}; \quad N = c_1^2\sigma^2 + c^2 + c_1^2. \end{cases}$$

Für $c = 0$, d. h. für die Kurven Γ in der Ebene der gegebenen c folgt aus I) die singuläre Lösung

$$q_1 = -\frac{c_1}{2k}, \quad z = -\frac{c_1}{2k\varrho},$$

also: $$q = \varrho, \quad p = 0, \quad r = 0,$$

d. h. die Kurve Γ ist dann die Evolute von C. Ist zweitens $k^2 < 1$, so hat man für

B)
$$\begin{cases} \sigma = \sqrt{1-k^2}\left(\int \frac{ds}{\varrho} + c_2\right) \\ p = -\varrho \frac{\sqrt{1-k^2}\sqrt{M}\cos\sigma}{N} \\ q = \varrho \frac{(k c_1 + \sin\sigma\sqrt{M})}{N} \\ r = c\varrho \frac{1-k^2}{N}, \end{cases}$$

wobei
$$N = k(c_1 + k\sin\sigma\sqrt{M})$$
$$M = c_1^2 - c^2(1-k^2)^{1})$$

gesetzt ist. Für $c_1^2 = c^2$ wird dagegen
$$M = c_1^2 k^2, \quad N = c_1 k(c_1 + k^2\sin\sigma),$$

also:
$$p = -\frac{\varrho(\sqrt{1-k^2})\cos\sigma}{1 \pm k^2\sin\sigma}$$
$$q = \pm\frac{\varrho(1 \pm \sin\sigma)}{1 + k^2\sin\sigma}$$
$$r = \pm\frac{\varrho(1-k^2)}{\varkappa(1 \pm k^2\sin\sigma)}; \quad \frac{q}{p} = -\frac{\cos\sigma\sqrt{1-k^2}}{(1 \pm \sin\sigma)}.$$

Endlich hat man noch aus I) in diesem Falle die singuläre Lösung
$$c^2 = q_1^2\frac{1-k^2}{k^2},$$

also:
$$p_1 = 0, \quad z = \frac{1}{\varrho}\frac{ck}{\sqrt{1-k^2}}$$

oder
$$p = 0$$
$$q = \varrho$$
$$r = \varrho\frac{\sqrt{1-k^2}}{k};$$

es entsteht also eine Filarevolute von C dadurch, daß für

[1]) M darf nicht gleich Null gesetzt werden, wenn reelle Kurven I' entstehen sollen.

$k = \cos\alpha$ die Erzeugende PQ von Γ in der Normalebene von C den Winkel α bildet. Ist drittens $k^2 > 1$, so erhält man für

$$\sigma = \sqrt{k^2 - 1}\left(\int \frac{ds}{\varrho} + c_2\right)$$

für q_1 den Wert

$$q_1 = (e^{\sigma} + e^{-\sigma})\frac{\sqrt{c^2(k^2 - 1 + c_1^2} - 2kc_1}{2(k^2 - 1)}$$

und hieraus die zugehörigen Werte von p, q, r. In dem besonderen Falle $c = c_1 = 0$ aber ergibt sich

$$q_1 = e^{\sigma} c_0$$
$$p_1 = -q_1\sqrt{k^2 - 1}$$
$$z = \frac{q_1 k^2}{\varrho},$$

also:

$$q = \varrho/k^2$$
$$p = -\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k^2}\varrho.$$

Die Traktorien einer ebenen Kurve C in der Ebene von C, bei denen $h = \varrho/k$ ist, werden in diesem Falle dadurch erhalten, daß man für $k = 1/\sin\alpha$, $q/p = \pm\sin\alpha$ setzt, d. h. die Erzeugenden PQ unter dem Winkel α gegen die Normale von C zieht, was man auch durch eine einfache geometrische Betrachtung[1]) sofort bestätigt, man könnte diese Traktorien als „schiefe Evoluten" von C bezeichnen.

§ XII.

D-Flächen durch eine ebene Kurve C, deren Kurve Γ eine Schraubenlinie ist (*D*-Schraubenfläche).

Die allgemeine Aufgabe, durch eine gegebene Kurve C D-Flächen zu legen, deren Kurve Γ einen vorgeschriebenen Charakter besitzt, führt nicht zu einfachen Integrationsproblemen. Hier soll nur der Fall vollständiger be-

[1]) Vgl. die Figur 2 in § IV für den Fall $d\alpha = 0$.

trachtet werden, wo für einen Kreis C die Kurven Γ Schraubenlinien werden.

Da nach V), VI) des § III

$$\frac{P}{T} = \sigma\varrho\left(\frac{q_1'^2 + \dfrac{q_1^2+1}{\varrho^2}}{q_1^2+1}\right)^{3/2} = p\,^{1}),$$

wo p eine gegebene Konstante, und nach II) des § III

$$\sigma = \frac{\varrho^2}{(\varrho\,(\varrho\,q_1') + q_1)},$$

so ergibt sich für q_1 die Differentialgleichung

$$(\varrho\,(\varrho\,q_1')' + q_1)\,p = \left(\frac{(q_1'\varrho)^2 + q_1^2 + 1}{q_1^2+1}\right)^{3/2},$$

welche durch Multiplikation mit dem integrierenden Faktor q_1' die Form[2])

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\frac{(q_1'\varrho)^2 + q_1^2 + 1)}{((q/\varrho)^2 + q_1^2 + 1)^{3/2}} = \frac{1}{p}\frac{q_1'}{(q_1^2+1)^{3/2}}$$

annimmt, und durch Integration mit der Konstanten c/p die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\text{I)} \qquad \frac{dq_1\,(q_1 + c\sqrt{1+q_1^2})}{\sqrt{1+q_1^2}\,\sqrt{p^2 - (q_1 + c\sqrt{1+q_1^2})^2}} = \frac{ds}{\varrho}$$

liefert, deren Lösung je nach dem Werte von c sehr verschieden ausfällt.

Setzt man zunächst $c = 0$, so erhält man für $q_1^2 = z$ aus I)

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+z)\,(p^2 - z)}} = \frac{2\,ds}{\varrho},$$

also:

$$\text{II)} \qquad z = q_1^2 = \frac{p^2-1}{2} + \frac{p^2+1}{2}\sin(2w + c_1); \quad w = \int\frac{ds}{\varrho}.$$

---

[1]) Im folgenden ist zunächst ϱ als beliebige Funktion von s angenommen,

[2]) Die singuläre Lösung $q_1\,p = 1$ liefert als Kurve Γ hier nur den Punkt $X = 0$, $Y = 0$, $Z = \pm\varrho p$, wenn der Kreis die Gleichung

$$x = \varrho\cos s/\varrho$$
$$y = \varrho\sin s/\varrho \text{ hat.}$$

Aber auch bei beliebigem c ergibt sich noch ein elementares Integral. Setzt man nämlich

$$1 + q_1^2 = (z + q_1)^2, \quad q_1 = {}^1/_2\left(\frac{1}{z} - z\right),$$

so entsteht für $z^2 = \zeta$

$$\text{III)} \qquad -\frac{d\zeta}{\zeta}\,\frac{(\zeta(c-1)+(c+1))}{\sqrt{4p^2\zeta-(\zeta(c-1)+c+1)^2}} = \frac{2\,ds}{\varrho}.$$

Hieraus folgt für $C = 1$ die Gleichung

$$\frac{d\zeta}{\zeta\sqrt{p^2\zeta-1}} = -2\frac{ds}{\varrho}$$

oder für $\qquad \zeta p^2 = 1 + \eta^2$

$$\operatorname{arctg}\eta = w + c_1; \quad w = \int\frac{ds}{\varrho},$$

also: $\qquad \zeta = \dfrac{1}{p^2\cos^2(w+c_1)}$, oder

$$1) \qquad q_1 = {}^1/_2\left[p\cos(w+c_1) - \frac{1}{p\cos(w+c_1)}\right].$$

Vertauscht man in I) C mit $-c$, und gleichzeitig q_1 mit $-q_1$, so bleibt I) ungeändert. Es genügt daher, den Fall eines positiven C zu betrachten. Für $C = +1$ insbesondere hat man

$$2) \qquad \begin{aligned} &a) \quad q_1 = {}^1/_2\left(p\cos(w+c_1) - \frac{1}{p\cos(w+c_1)}\right)\\ &b) \quad \varrho q_1' = -{}^1/_2\sin(w+c_1)\left[p + \frac{1}{p\cos^2(w+c_1)}\right]\\ &c) \quad q_1'^2 + \frac{q_1^2+1}{\varrho^2} = \frac{1}{4\varrho^2}\left[p + \frac{1}{p\cos^2(w+c_1)}\right]^2\\ &d) \quad q_1^2 + 1 = {}^1/_4\left[p\cos(w+c_1) + \frac{1}{p\cos(w+c_1)}\right]^2. \end{aligned}$$

Die Differentiation von 2 b) liefert

$$\varrho(\varrho q_1')' = -{}^1/_2\cos(w+c_1)\left(p + \frac{1}{p\cos^2 w + c_1}\right) + \frac{\sin^2(w+c_1)}{p\cos^3(w+c_1)}$$

also nach 2 a)

$$\varrho(\varrho q_i') + q = -\frac{1}{p\cos^3(w+c_1)}$$

und daraus erhält man für σ die von ϱ' unabhängige Gleichung

3) $$\sigma = -\varrho^2 p\cos^3(w+c_1).$$

Es seien jetzt die Koordinaten x, y eines Punktes der ebenen Kurve C

$$x = -\int ds \sin\int\frac{ds}{\varrho}\,^{1})$$

$$y = +\int ds\cos\int\frac{ds}{\varrho},$$

also

4)
$$\begin{array}{lll} \alpha = -\sin w & \xi = -\cos w & \lambda = 0 \\ \beta = +\cos w & \eta = -\sin w & \mu = 0 \\ \gamma = 0 & \zeta = 0 & \nu = +1. \end{array}$$

Dann sind die Koordinaten X, Y, Z von Γ

5)
$$X = x + \sigma\left(\Pi\alpha + \frac{q_1\xi}{\varrho}\right)$$

$$Y = y + \sigma\left(\Pi\beta + \frac{q_1\eta}{\varrho}\right)$$

$$Z = -\frac{\sigma}{\varrho}.$$

Da $\Pi = -q_1'$, so folgt unter Berücksichtigung von 2 a), 3), 4) aus 5)

6) $$h^2 = (PQ)^2 = \frac{\sigma^2}{4\varrho^2}\left(p + \frac{1}{p\cos^2(w+c_1)}\right)^2 \text{ oder}$$

$$h = \frac{\sigma}{2\varrho}\left(p + \frac{1}{p\cos^2(w+c_1)}\right)$$

---

[1]) Das Zeichen — ist mit Rücksicht auf die Frenetschen Formeln gewählt.

$$X - x = \frac{\sigma}{2\varrho}\left(-p\cos c_1 + \frac{1}{p\cos^2(w+c_1)}\cos(2w+c_1)\right)$$

8) $$Y - y = \frac{\sigma}{2\varrho}\left(+p\sin c_1 + \frac{1}{p\cos^2(w+c_1)}\sin(2w+c_1)\right)$$

$$Z = -\frac{\sigma}{\varrho}.$$

Setzt man

$$\cos(2w_1 + c_1) = \cos 2(w + c_1)\cos c_1 + \sin 2(w + c_1)\sin c_1$$
$$\sin(2w_1 + c_1) = \sin 2(w + c_1)\cos c_1 - \cos 2(w + c_1)\sin c_1,$$

so folgt aus 8)

$$X - x = -h\cos c_1 + \frac{\sigma\cos c_1}{\varrho p} + \frac{\sigma}{\varrho p}\sin c_1\frac{\sin(w+c_1)}{\cos(w+c_1)}$$

9)

$$Y - y = +h\sin c_1 - \frac{\sigma}{\varrho p}\sin c_1 + \frac{\sigma}{\varrho p}\cos c_1\frac{\sin(w+c_1)}{\cos(w+c_1)}$$

oder wenn durch h dividiert wird, nach der dritten Gleichung 8)

$$\frac{X-x}{h} = -\cos c_1 - \frac{Z\cos c_1}{hp} - \frac{Z}{ph}\sin c_1\frac{\sin(w+c_1)}{\cos(w+c_1)}$$

10) $$Y - y = +\sin c_1 + \frac{Z\sin c_1}{hp} - \frac{Z}{ph}\cos c_1\frac{\sin(w+c_1)}{\cos(w+c_1)}$$

$$Z = -\frac{\sigma}{\varrho}.$$

Damit sind die Koordinaten X, Y, Z als Funktionen von s dargestellt, also die Aufgabe, durch eine beliebige ebene Kurve C für den Fall $C = +1$ eine Schrauben-D-Fläche zu legen, vollständig gelöst.

Zugleich erhält man aus 10)

$$\frac{X-x}{h}\cos c_1 - \frac{Y-y}{h}\sin c_1 + \frac{Z}{h\varrho} = -1,$$

mithin für die Richtungscosinus $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ der Erzeugenden PQ von Γ

$$\cos A\cos c_1 - \cos B_1\sin c_1 + \frac{\cos C}{p} = -A$$

oder, wenn $\lambda \cos c_1 = \cos\alpha$, $-\lambda \sin c_1 = \cos\beta$, $\frac{\lambda}{p} = \cos\gamma$, $\lambda^2 = \frac{p^2}{1+p^2}$ gesetzt wird,

$$\cos A\,c\,\alpha + \cos B\,c\,\beta + \cos C\,c\,\gamma = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

woraus hervorgeht, daß die Richtung von PQ mit der von der Konstanten c_1 abhängenden Richtung einen konstanten Winkel macht. Aus 10) erhält man

$$(X-x+\varrho\cos w) = \frac{pZ}{2}\cos c_1 + \varrho\cos c_1\cos(w+c_1)[\tfrac{1}{2}+\sin^2(w+c_1)] + \varrho\sin c_1\sin^3(w+c_1)$$

$$(Y-y+\varrho\sin w) = -\frac{pZ}{2}\sin c_1 - \varrho\sin c_1\cos(w+c_1[\tfrac{1}{2}+\sin^2(w+c_1)] + \varrho\cos c_1\sin^3(w+c_1)$$

oder

$$Z = p\varrho\cos^3(w+c_1)$$

$$(X-x+\varrho\cos w)\sin c_1 + (Y-y+\varrho\sin w)\cos c_1 = \varrho\sin^3(w+c_1)$$

$$(X-x)+\varrho\cos w)\cos c_1 - (Y-y)+\varrho\sin w)\sin c_1 = \frac{pZ}{2} + \varrho\cos(w+c_1)\,(\tfrac{1}{2}+\sin^2(w+c_1)$$

$$Z = +p\varrho\cos^3(w+c_1).$$

Nur für den Kreis, wo $x = \varrho\cos w$, $y = \varrho\sin w$ vereinfachen sich diese Gleichungen und liefern:

$$(X\sin c_1 + Y\cos c_1)^{2/3} + \left(\frac{Z}{p}\right)^{2/3} = \varrho^{2/3} \tag{11}$$

$$(X\sin c_1 - Y\sin c_1 = \frac{pZ}{2} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{Z}{p}\right)^{1/3}\varrho^{2/3} + \left(\frac{Z}{p}\right)^{1/3}(X\sin c_1 + Y\cos c_1)^{2/3}$$

insbesondere für eine Drehung des Koordinatensystems der X, Y um den Winkel $-c_1$

$$Y'^{2/3} + \left(\frac{Z}{p}\right)^{2/3} = \varrho^{2/3}$$

$$X' = \frac{pZ}{2} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{Z}{p}\right)^{1/3}\varrho^{2/3} + \left(\frac{Z}{p}\right)^{1/3}Y'^{2/3},$$

von denen die erste eine Ellipsen-Evolute resp. Astroide, die zweite eine algebraische Fläche liefert, so daß die Kurven Γ hier algebraisch sind.

Zu teilweise übersichtlicheren Resultaten führt der Fall $c = 0$. Aus der Gleichung II) folgt

$$q' = \frac{p^2+1}{2\varrho q_1}\cos(2w + c_1)$$

12)
$$q_1'' + \frac{q}{\varrho^2} + \frac{q'\varrho'}{\varrho} = -\frac{p^2}{q^3\varrho^2}$$

oder
$$\sigma = -\frac{q^3\varrho^2}{p^2}$$

13)
$$q_1'^2 + \frac{q_1^2+1}{\varrho^2} = \frac{(p^2+1)p^2}{2\varrho^2 q_1^2}(1+\sin(2w+c_1))$$
$$\frac{q_1^2+1}{\varrho^2} = \frac{p^2+1}{2\varrho^2}(1+\sin(2w+c_1)).$$

Es ist ferner nach § III, I)

$$X - x = \frac{\sigma}{2\varrho q_1}\{(p^2+1)(\sin w\cos(2w+c_1) + \cos w\sin(2w+c_1)$$
14)
$$-(p^2-1)\cos w\}$$
$$Y - y = \frac{\sigma}{2\varrho q_1}\{-(p^2+1)(\cos w\cos(2w+c_1) + \sin w\sin(2w+c_1)$$
$$-(p^2-1)\sin w\}$$ oder

$$X - x = -\frac{\sigma}{2\varrho q_1}((p^2+1)\sin(w+c_1) + (p^2-1)\cos w)$$
14 a)
$$Y - y = -\frac{\sigma}{2\varrho q_1}((p^2+1)\cos(w+c_1) + (p^2-1)\sin w)$$

und aus der nach der zweiten Gleichung 13) folgenden die Entfernung $h = PQ$ bestimmenden

15)
$$h = \frac{\sigma p\sqrt{p^2+1}}{\sqrt{2}\cdot\varrho q_1}(\sin(w+\gamma) + \cos(w+\gamma)$$

folgt, wenn man in 14 a) statt $w + c_1$ $w + \gamma$ einführt:

$$\cos A = -\frac{\sigma}{2\varrho q_1 h}\begin{cases}+(p^2+1)[\sin(w+\gamma)\cos\gamma + \cos(w+\gamma)\sin\gamma]\\+(p^2-1)[\cos(w+\gamma)\cos\gamma + \sin(w+\gamma)\sin\gamma]\end{cases}$$

$$\cos B = -\frac{\sigma}{2\varrho q_1 h}\begin{cases}+(p^2+1)[\cos(w+\gamma)\cos\gamma - \sin(w+\gamma)\sin\gamma]\\+(p^2-1)[\sin(w+\gamma)\cos\gamma - \cos(w+\gamma)\sin\gamma]\end{cases}$$

oder für

$$\begin{aligned}(p^2+1)\cos\gamma + (p^2-1)\sin\gamma &= a\\ (p^2+1)\sin\gamma + (p^2-1)\cos\gamma &= b\\ (p^2+1)\sin\gamma - (p^2-1)\cos\gamma &= a'\\ (p^2+1)\cos\gamma - (p^2-1)\sin\gamma &= b'\end{aligned}$$

$$\cos A = -\frac{\sigma}{2\varrho h q_1}(a\sin(w+\gamma) + b\cos(w+\gamma))$$

$$\cos B = -\frac{\sigma}{2\varrho h q_1}(a'\sin(w+\gamma) - b'\cos(w+\gamma))$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}p\sqrt{p^2+1}} = \frac{\sigma}{2\varrho h q_1}(\sin(w+\gamma) + \cos(w+\gamma)),$$

mithin durch Nullsetzen der Determinante dieser 3 Gleichungen

16) $$\cos A(a'+b') + \cos B(a-b) + \frac{1}{\sqrt{2}p\sqrt{p^2+1}}(ab'+ba') = 0.$$

Wegen

$$\begin{aligned}a - b &= 2(\cos\gamma - \sin\gamma)\\ a' + b' &= 2(\cos\gamma + \sin\gamma)\\ ab' + ba' &= 4p^2\end{aligned}$$

hat man nach 16)

$$\cos A(\cos\gamma + \sin\gamma) + B(\cos\gamma - \sin\gamma) + \frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+1}} = 0.$$

Setzt man

$$\begin{aligned}\lambda(\cos\gamma + \sin\gamma) &= \cos\varphi,\\ \lambda(\cos\gamma - \sin\gamma) &= \sin\varphi,\end{aligned} \qquad 2\lambda^2 = 1,$$

so wird

$$\cos A\cos\varphi + \sin B\sin\varphi = -\frac{p}{\sqrt{p^2+1}},$$

aus der wieder die Axenrichtung der Schraubenlinie zu ersehen ist.

Endlich kann man auch die Gleichung der Schraubenlinie Γ selbst bestimmen. Ich beschränke mich dabei auf den Fall des Kreises C, wo es ausreicht, $\gamma = 0$ zu nehmen. Unter dieser Voraussetzung folgt aus 14), wenn man zugleich für σ seinen Wert aus 13) einsetzt

$$X = \varrho \cos w + \frac{\varrho q_1^2}{2p^2}((p^2-1)\cos w + (p^2+1)\sin w)$$

$$Y = \varrho \sin w + \frac{\varrho q_1^2}{2p^2}((p^2+1)\cos w + (p^2-1)\cos w)$$

oder

$$(X+Y) = \varrho(1+q_1^2)(\cos w + \sin w)$$

$$(X-Y) = \varrho\left(1-\frac{q^2}{p^2}\right)(\cos w - \sin w).$$

Dreht man das Koordinatensystem der X, Y um 45^0 und bezeichnet die neuen Koordinaten durch X_1, Y_1, so ist

$$X+Y = x_1\nu_2, \quad X-Y = -y_1\nu_2,$$

also:

$$X'\nu_2 = \varrho(1+q_1^2)(\cos w + \sin w) = \varrho\left(\frac{1+p^2}{2}\right)(\cos w + \sin w)^3$$

$$-Y'\nu_2 = \varrho\left(1-\frac{q_1^2}{p^2}\right)(\cos w - \sin w) = \varrho\left(\frac{1+p^2}{2}\right)(\cos w - \sin w)^3$$

$$Z = -\frac{\sigma}{\varrho} = \frac{q_1^3\varrho}{p^2}.$$

Hieraus folgt

$$\left(\frac{X_1}{\varrho(p^2+1)}\right)^{2/3} + \left(\frac{Y_1}{\varrho(p^2+1)}\right)^{2/3} = 1$$

$$\left(\frac{Z}{\varrho}\right)^{2/3} p^{4/3} + (p^2+1)^{1/3}\left(\frac{X'}{\varrho}\right)^{2/3} = p^2,$$

womit die Kurve Γ völlig bestimmt ist.

Zur Auswertung des Integrals in Gleichung III) kann man folgenden Weg einschlagen. Setzt man $c-1=a$, $c+1=b$ und zerlegt die linke Seite in

$$-\int \frac{d\zeta\, a}{\sqrt{4p^2\zeta - (\zeta a + b)^2}} + \int \frac{d\zeta_1\, b}{\sqrt{4p^2\zeta_1 - (a+b\zeta_1)^2}},$$

wobei $\zeta_1 = 1/\zeta$ gesetzt ist, so erhält man für das erste resp. zweite Integral

$$-\arcsin\frac{a^2\zeta - (2p^2 - ab)}{2p\sqrt{p^2-ab}}, \quad \arcsin\frac{b^2\zeta_1 - (2p^2-ab)}{2p\sqrt{p^2-ab}}.$$

Setzt man

$$u = \frac{a^2\zeta - (2p^2 - ab)}{2p\sqrt{p^2 - ab}}, \quad v = \frac{b^2 - (2p^2 - a)}{2p\zeta\sqrt{p^2 - ab}},$$

so wird

$$\sqrt{1-u^2} = a\frac{\sqrt{4p^2\zeta - (a\zeta + b)^2}}{2p\sqrt{p^2 - ab}}, \quad \sqrt{1-v^2} = b\frac{\sqrt{4p^2\zeta - (a\zeta + b)^2}}{2p\zeta\sqrt{p^2 - ab}}$$

also die Differenz der beiden arc sin die Gleichung

$$(b - a\zeta)\frac{\sqrt{4p^2\zeta - (a\zeta + b)^2}}{2\zeta(p^2 - ab)} = \sin(2w + c)$$

liefern, in der noch

$$\zeta = z^2, \quad q_1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-\zeta}{\sqrt{\zeta}}\right)$$

zu setzen ist. Aber dieses Integral gibt für q_1 keine so einfache Lösung, wie in den vorigen beiden speziellen Eällen.

§ XIII.

Die Huygenssche Traktorie $f(s) = h$ für den Kreis.

Setzt man $w = \int \frac{ds}{\varrho}$, so ist die Tangente der ebenen Kurve C, deren Krümmungshalbmesser ϱ ist,

$$(X - x)\cos w + (Y - y)\sin w = 0$$

also die Gleichung der Ebene, deren D-Fläche die Traktorie bildet,

1) $$(X - x)\cos w + (Y - y)\sin w + q_1 Z = 0.$$

Daraus folgt

2) $$-(X - x)\sin w + (Y - y)\cos w + q_1' Z\varrho = 0$$

3) $$-(X - x)\cos w - (Y - y)\sin w + q_1'' Z\varrho^2 + q_1' Z\varrho' - \varrho = 0.$$

Die Summe der Quadrate von 1) und 2) liefert

4) $$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2 = Z^2[(\varrho q_1')^2 + q_1^2 + 1] = f(s)^2,$$

während aus 1), 3) folgt

$$Z(q_1''\varrho^2 + \varrho' q_1' + q) = \varrho \qquad \text{oder}$$

5) $$Z\left[\varrho \cdot \frac{d(q_1' \varrho)}{ds} + q_1\right] = \varrho$$

und aus 4), 5) die Differentialgleichung

6) $$f^2\left[\varrho \frac{d(\varrho q_1')}{ds} + q_1\right]^2 = \varrho^2 [q_1' \varrho)^2 + q_1^2 + 1].$$

Für C als Kreis mit dem Radius ϱ, $w = s/\varrho$, $x = \varrho \cos w$, $y = \varrho \sin w$, wird aus 1), 2), 5)

7) $$X \cos \frac{s}{\varrho} + Y \sin \frac{s}{\varrho} = \varrho - Z q_1$$
$$- X \sin \frac{s}{\varrho} + Y \cos \frac{s}{\varrho} = - Z \varrho q_1'$$

8) $$Z(\varrho^2 q_1'' + q_1) = \varrho,$$

also nach 7)

9) $$X^2 + Y^2 = (\varrho - Z q_1)^2 + Z^2 \varrho^2 q_1'^2.$$

Nun ist für $f = h$ nach 6)

10) $$\varrho^2 q_1'^2 = q_1^2 \left(\frac{\varrho^2}{h^2} - 1\right) + 2 q_1 c \frac{\varrho^2}{h} + \varrho^2 c^2 - 1$$

und durch Differentiation von 10) nach 8)

11) $$\varrho^2 q_1'' + q_1 = q_1 \left(\frac{\varrho^2}{h^2}\right) + c \frac{\varrho^2}{h} = \frac{\varrho}{Z},$$

also nach 9)

12) $$Z q_1 \varrho = h^2 \left(1 - \frac{c \varrho Z}{h}\right).$$

Setzt man in 9) die Werte von $q_1'^2$ und q_1 aus 10) und 12) ein, so erhält man nach Ausführung der Rechnung die Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2 Z \varrho c h = \varrho^2 - h^2,$$

also die Kugelfläche

13) $$X^2 + Y^2 + (Z - \varrho c h)^2 = \varrho^2 - h^2 + \varrho^2 c^2 h^2$$

mit dem auf der Z-Axe liegenden Mittelpunkte $Z_0 = \varrho c h$ und dem Radius $R = \sqrt{\varrho^2 - h^2 + \varrho^2 c^2 h^2}$. Dieser Radius ist sicher reell, wenn $h \leqq \varrho^2$ ist. Ist aber $h > \varrho$, so zeigt die aus 10) entspringende Gleichung

$$\frac{\varrho\, q_1 (h^2 - \varrho^2)}{\sqrt{-\left(q_1 \frac{(h^2-\varrho^2}{h} - c\varrho^2\right)^2 + \varrho^2 c^2 h^2 + \varrho^2 - h^2}} = \frac{ds}{\varrho}\sqrt{h^2-\varrho^2},$$

daß $\varrho^2 c^2 h^2 + \varrho^2 - h^2$ positiv sein muß, wenn überhaupt ein reeller Wert für q_1 entstehen soll[1]). Man hat daher den durch seine Einfachheit bemerkenswerten Satz, der sich auch geometrisch ableiten läßt:

Die räumlichen Huygensschen Traktorien eines Kreises liegen sämtlich auf Kugelflächen, deren Mittelpunkte auf der im Zentrum des Kreises auf dessen Ebene errichteten Normalen liegen.

Diese Kugelflächen 13) schneiden die XY-Ebene in dem System der konzentrischen Kreise

$$X^2 + Y^2 = h^2 - \varrho^2 + c^2 h^2 \varrho^2.$$

Übrigens hat man aus 8) und 12)

$$14) \qquad \begin{aligned} X &= (\varrho - Z q_1)\cos\left(\frac{s}{\varrho}\right) + Z\varrho\, q_1' \sin\left(\frac{s}{\varrho}\right) \\ Y &= (\varrho - Z q_1)\sin\left(\frac{s}{\varrho}\right) - Z\varrho\, q_1' \cos\left(\frac{s}{\varrho}\right) \\ Z &= \frac{h^2}{\varrho}\,\frac{1}{q_1 + hc}. \end{aligned}$$

Für $h < \varrho$ ist nun q_1 eine Exponentialfunktionen des Argumentes $w = \frac{s}{\varrho}\frac{\sqrt{\varrho^2 - h^2}}{h}$ enthaltender Ausdruck; für $h = \varrho$ eine quadratische Funktion von s/ϱ. Die Kurven Γ sind alsdann transzendent. Ist dagegen $h > \varrho$, so wird q_1 eine trigonometrische Funktion mit dem Argumente $w = \frac{s}{\varrho}\frac{\sqrt{h^2-\varrho^2}}{h} + c_2$. Auch hier ist im allgemeinen Γ transzendent; wenn aber $\frac{\sqrt{h^2-\varrho^2}}{h}$ eine rationale Zahl m/w ist, werden X, Y, Z nach 14) Funktionen von $\cos n\sigma$ und $\cos \sigma m$, $\cos \sigma = s/\varrho n$, d. h. rationale

[1]) Dadurch wird nicht etwa der Wert von h beschränkt, sondern der der Integrationskonstanten c.

Funktionen von $\sin\sigma$ und $\cos\sigma$, d. h. die Γ sind unicursale Kurven.

Da bei dieser Betrachtung $q_1 \neq 0$ vorausgesetzt wurde, gehört die Kugelfläche $X^2 + Y^2 + Z^2 = \varrho^2 - h^2$ nicht mehr zu den oben genannten, da hierbei die Traktrix des Kreises in seiner Ebene in Betracht kommt. Nach 2) § IV hat man für $p = h\cos\alpha$, $q = h\sin\alpha$ die Differentialgleichung

$$15) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin\alpha}{h} - \frac{1}{\varrho}, \quad \varrho = \text{konst.}$$

Für $\varrho\sin\alpha = h$ ergibt sich, wie übrigens schon im vorigen Paragraphen bemerkt wurde, als „singuläre" Lösung Γ das System der Kreise, die mit dem Radius $\sqrt{\varrho^2 - h^2}$ um den Mittelpunkt des Kreises C beschrieben sind; es sind das die Kreise, die für den Wert $C = 0$ von den vorhin betrachteten Kugelflächen aus der XY-Ebene ausgeschnitten werden, so lange $h \leq \varrho$ ist. Im allgemeinen ergeben sich aus der Gleichung 15) transzendente Kurven Γ, die mit den Kugelflächen 13) in keiner Beziehung stehen, die aber, wie die Integration von 15) zeigt, für ein rationales $\frac{\sqrt{h^2 - \varrho^2}}{h}$ in analoger Weise algebraisch werden.

§ XIV.

Schlussbemerkung.

In dem vorigen Paragraphen sind nur einige einfache Fälle behandelt, und man sieht, daß sich noch eine große Zahl von Untersuchungen der verschiedensten Art, für die hier nicht der Ort ist, anschließen läßt. Nur das folgende sei noch angedeutet.

Soll die Erzeugende PQ von Γ mit einer der Axen des Triëders von C der Reihe nach Winkel mit den Cosinus $\cos i$, $\cos j$, $\cos k$ einschließen, so hat man

$$1) \quad \cos i = \frac{\Pi}{D}, \qquad 2) \quad \cos j = \frac{q_1}{\varrho D}, \qquad 3) \quad \cos k = -\frac{1}{\varrho D},$$

$$\Pi = \frac{1 + q_1^2}{\tau} - q_1', \quad D = \sqrt{\Pi^2 + \frac{q_1^2 + 1}{\varrho^2}}.$$

Für den Fall, daß einer dieser Cosinus konstant sein soll, erhält man bei den Schraubenlinien durch Quadraturen integrierbare Gleichungen. Im allgemeinen liefert der Fall 1) eine Riccatische Gleichung.

Für eine ebene Kurve C hat man insbesondere

$$1\,a)\quad q_1' = \frac{\sqrt{q_1^2+1}}{\varrho}\operatorname{cotg} i, \qquad 2\,a)\quad q_1' = \frac{\sqrt{q_1^2\operatorname{tg}^2 j - 1}}{\varrho}$$

$$3\,a)\qquad q_1' = \frac{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 k - q_1^2}}{\varrho},$$

insbesondere für den Kreis nach den Gleichungen 7), 8) des vorigen Paragraphen

$$4)\qquad \begin{aligned} X\cos(s/\varrho) + Y\sin(s/\varrho) &= \varrho - Zq_1\\ -X\sin(s/\varrho) + Y\cos(s/\varrho) &= -Z\varrho\, q_1\\ Z(\varrho^2 q_1'' + q_1) &= \varrho. \end{aligned}$$

Für 1a) wird $q_1'' = q_1/\varrho^2 \operatorname{cotg}^2 i$, $Zq_1 = \varrho \sin^2 i$. Setzt man diese Werte in die Gleichungen 4) ein, so erhält man

$$X^2 + Y^2 - Z^2 \operatorname{cotg}^2 i = \varrho^2 \cos^2 i.$$

Die Kurven Γ liegen für $\operatorname{cotg} i = \text{const}$ auf einem Rotationshyperboloid.

Für 2a) wird $q_1'' = q_1/\varrho^2 \operatorname{tg}^2 j$; $Zq_1 = \varrho\cos^2 j$, also:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \varrho^2 \sin^2 j$$

und die Kurven I liegen für $\sin j = \text{const}$ auf einer Kugel, deren Mittelpunkt das Zentrum des Kreises C ist. In beiden Fällen 1a), 2a) sind sie transzendent[1]).

Im Falle 3a) wird $q_1'' = -q_1/\varrho^2$, also $Z = \infty$, man erhält dann nur Zylinder $X : Y : Z = \cos k \sin c_1 : \operatorname{cotg} k \cos c_1 : 1$, wo mit c_1 die Integrationskonstante bezeichnet ist.

[1]) Für die singulären Lösungen von 2a) und 3a), nämlich $q_1 = \operatorname{cotg} j$ $q_1 = \operatorname{cotg} k$ erhält man beidemal $X = Y = 0$, $Z = \varrho \operatorname{tg} j$ resp. $Z = \varrho \operatorname{tg} k$,

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1918

Band/Volume: 1918

Autor(en)/Author(s): Voss Aurel Edmund

Artikel/Article: Zur Theorie der Kurven im Raume 283-354