Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1918. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1918
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über ein invertiertes Bohrsches Modell.

Von **W. Lenz.**

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 1. Juni 1918.

Nachdem das Bohrmodell auf dem Gebiete der sichtbaren und der Röntgenspektren in den Untersuchungen von Sommerfeld,[1]) Epstein[2]) und Kossel[3]) so glänzende Erfolge gezeitigt hat, gewinnt es Interesse, zu ermitteln, welche Gebilde außer den hierbei in Frage kommenden Modellen im Rahmen des Bohrschen Rechenschemas theoretisch möglich sind. Als einfachste Abart des Bohrmodells bietet sich der Gedanke einer Inversion in der Weise, daß die Elektronen als die ruhenden, die positiven Kerne, etwa Wasserstoffkerne, als die umlaufenden Ladungen betrachtet werden. Ein Versuch in dieser Richtung zeigt sogleich, daß die Abmessungen derartiger invertierter Atommodelle gegenüber den Dimensionen der Atome verschwindend klein ausfallen. Es liegt daher der Gedanke nahe, zu untersuchen, ob und inwieweit diese invertierten Modelle zur Erklärung der Atomkerne herangezogen werden können. Von der Verfolgung dieses Gedankens darf unseres Erachtens der Umstand nicht abschrecken, daß man sich dabei auf ein Gebiet begibt, in dem der Bestand an gesicherten experimentellen Tatsachen äußerst gering ist. Denn es kann sich dabei nicht um die Erklärung von Einzelheiten handeln, sondern lediglich um die Grundfrage, ob und gegebenenfalls

---

1) Ann. d. Phys., Bd. 51, 1916, p. 1 und 125.

2) Ann. d. Phys., Bd. 50, 1916, p. 489.

3) Deutsche Phys. Ges., Bd. 16, 1914, p. 898 u. 953, Bd. 18, 1916, p. 339.

unter welchen einfachsten Hilfsannahmen der Rahmen des Bohrschen Rechenschemas im invertierten Modell ausreicht, um eine Erklärung komplexer Atomkerne möglich zu machen. Denn zu einer Auffassung der Atomkerne als komplexer Gebilde sind wir durch die Erscheinungen der Radioaktivität gezwungen, deren Ursprung wir nach unserer allgemeinen Kenntnis des Atombaues nur in den Kern verlegen können. Gilt diese Schlußfolgerung auch zunächst nur für die radioaktiven Elemente, so ist der Gedanke doch äußerst verlockend, auch die Kerne der übrigen Elemente als komplex zu betrachten. Man wird sich dabei von der Überlegung leiten lassen, daß dem einfachen Gesetz der Größe der Kernladung auch ein einfacher innerer Aufbau entspricht. Wir wollen uns im folgenden sogleich auf den einfachsten, aber auch ganz extremen Standpunkt stellen, daß die Kerne durchgängig aus Elektronen und Wasserstoffkernen aufgebaut sind.

Im § 1 werden zwei einfache Beispiele invertierter Modelle durchgerechnet. Die in § 2 durchgeführte Gegenüberstellung mit den Erfahrungstatsachen ergibt, daß die Inversion allein nicht zur Erklärung der Kernstruktur ausreichen kann. In § 3 wird die Frage geprüft, ob nicht die Annahme der Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes im Bereich der Kerndimensionen als ungerechtfertigt betrachtet werden muß, und ob sich unter Aufgabe dieses Gesetzes nicht die Möglichkeit ergibt, mit Hilfe der invertierten Modelle zu einer Erklärung der Kernstruktur zu gelangen.

§ 1. Zwei Beispiele zum invertierten Atommodell.

Als erstes Beispiel behandeln wir den einfachsten Fall, daß zwei Wasserstoffkerne von der Masse m und der Ladung e mit der Winkelgeschwindigkeit ω ein ruhendes Elektron umkreisen. Nennt man den Abstand der beiden Kerne $2r$, so kommt in bekannter Weise als Gleichgewichtsbedingung:

$$m r \omega^2 = \frac{e^2}{r^2} - \frac{e^2}{4r^2} = \frac{3}{4}\frac{e^2}{r^2}, \ldots \tag{1}$$

und als Quantenbedingung:

$$2\pi r \cdot m r \omega = n h, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Die Bohrbahnen besitzen also die Radien:

$$r_n = \frac{4}{3m}\left(\frac{nh}{2\pi e}\right)^2 = n^2 \cdot 3{,}85.10^{-12}, \ldots \tag{3}$$

wenn man für die in Frage kommenden Konstanten die von Sommerfeld[1]) aus der Feinstruktur der Wasserstofflinien errechneten Werte einsetzt. Entsprechend dem viel größeren Wert der Masse des Wasserstoffkerns gegenüber dem der Elektronenmasse schrumpfen die Dimensionen der invertierten Modelle auf etwa den 2000. Teil derjenigen der Atommodelle zusammen.

Bedeutet W_p die potentielle und W_k die kinetische Energie des Modells, so findet man mit Rücksicht auf (3) für die Gesamtenergie:

$$W = W_p + W_k = -\frac{3}{4}\frac{e^2}{r} = -\frac{1}{n^2} \cdot 4{,}4.10^{-8} \text{ erg.} \ldots \tag{4}$$

Es wäre also Röntgenstrahlung von der durch $h\nu = |W|$ bestimmten Schwingungszahl ν imstande, das Modell zu zersprengen, d. h. Strahlung von der Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{c \cdot h}{|W|} = 4{,}4.10^{-9} \text{ cm.}$$

Entsprechendes würde für die Wirkung schneller Kathodenstrahlen gelten.

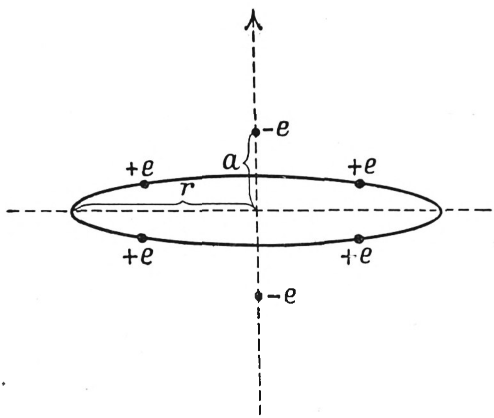
Um bestimmtere Vergleichsmöglichkeiten für das Spätere zu gewinnen, wollen wir noch ein zweites, den Eigenschaften des Heliumkerns möglichst angepaßtes Modell durchrechnen. (Das vorige Modell wäre ein zu Wasserstoff isotopes Element vom Atomgewicht 2 und der Kernladung 2 — 1 = 1.) Stellt man sich den Heliumkern aus Wasserstoffkernen aufgebaut vor, so wird man annehmen müssen, daß vier Wasserstoffkerne und zwei Elektronen an diesem Aufbau teilnehmen, damit Atom-

---

[1]) L. c. p. 93.

gewicht und Kernladung möglichst getroffen werden.[1]) Die Anordnung unseres invertierten Modells möge nun, wie in unten stehender Figur angedeutet, darin bestehen, daß die vier Wasserstoffkerne auf einem Kreis um die beiden ruhenden Elektronen rotieren. Der Radius des Kreises der Wasserstoffkerne werde mit r, der Abstand der beiden Elektronen mit $2a$ bezeichnet. Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann für das Elektron:

$$0 = \frac{e^2}{4a^2} - 4\frac{e^2}{a^2+r^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}, \ldots \qquad (5)$$



und für den Wasserstoffkern:

$$m r \omega^2 = 2\frac{e^2}{a^2+r^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}} - S_4\cdot\frac{e^2}{r^2}, \ldots \qquad (6)$$

wenn der Faktor S_4 in üblicher Weise die Abstoßung der drei Kerne auf den vierten mißt. Es ist

$$S_4 = \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{2}) = 0{,}957.$$

[1]) Vgl. E. Rutherford, Phil. Mag. 27, 1914, p. 488, wo indessen die gegenseitige Lage und Bewegung der Bausteine des Heliumkerns noch unbestimmt bleibt.

Aus (5) folgt $r = a\sqrt{16^{2}/_{3} - 1}$ und daher aus (6):

$$\left.\begin{aligned} m r^3 \omega^2 &= a e^2, \\ a = \tfrac{1}{8}(16^{2}/_{3} - 1)^{3}/_{2} - S_4 &= 0{,}58 \end{aligned}\right\} \ldots \qquad (7)$$

Unter Hinzunahme der Quantenbedingung (2) findet man hieraus:

$$r = \frac{1}{a m}\left(\frac{n h}{2 \pi e}\right)^2 = n^2 \cdot 4{,}9 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{cm} \ldots \qquad (8)$$

Der Vergleich mit (3) lehrt, daß sich die Dimensionen des Modells bei Hinzunahme von Wasserstoffkernen und Elektronen langsam vergrößern.

Die potentielle Energie W_p des Modells gewinnt man am bequemsten aus (7) durch die Überlegung, daß das Modell für jeden Radius r im Gleichgewicht ist, wenn man an den festgehaltenen vier Wasserstoffkernen je die radial gerichtete Kraft $m r \omega^2$ anbringt. Es ist also wegen (7)

$$W_p = 4 \int_{\infty}^{r} \frac{a e^2}{r^2}\, d r = -4 a \frac{e^2}{r};$$

unter Hinzunahme der kinetischen Energie $W_k = 4 m r^2 \omega^2 / 2 = 2 a e^2 / r$ kommt für die gesamte Energie des Modells:

$$W = -2 a \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{n^2} \cdot 5{,}45 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{erg.} \ldots \qquad (9)$$

Die beiden betrachteten Modelle tragen nach außen hin eine bzw. zwei positive Elementarladungen. Eine merkwürdige Konsequenz ergibt sich aus der Inversion, wenn die nach außen hin wirksame Ladung gleich Null ist. Ein solcher Fall wäre die Inversion des Modells zum Wasserstoffmolekül. Die Dimensionen des invertierten Modells verhalten sich zu denen des ursprünglichen wie die Elektronenmasse zur Masse des Wasserstoffkerns. Man gelangt so zu einem chemisch vollkommen trägen Gas, dessen Moleküle vermöge ihrer kleinen Dimensionen fähig sein müßten, alle Körper zu durchdringen.

Abgesehen von allen Erfahrungstatsachen kann man gegen die Existenz unserer invertierten Modelle ihre teilweise In-stabilität geltend machen. Jedoch trifft sie dieser Einwand unseres Erachtens in nicht höherem Maße als das Bohrsche Wasserstoffmolekül, das durch die Arbeiten Debyes über die Dispersion eine starke Stütze gefunden hat.

§ 2. Gegenüberstellung mit den Erfahrungstatsachen.

Ausdehnung der Kerne. Nach den jüngsten Untersuchungen von Debye[1]) und einer soeben erschienenen Arbeit von Sommerfeld[2]) darf man annehmen, daß es gelingt, die Röntgenspektren unter Annahme eines punktförmigen Kerns zu erklären. Da der hierbei in Frage kommende innerste Elektronenring des Atoms bei den schwersten der untersuchten Elemente auf etwa 10^{-10} cm an den Kern herantritt, so müssen die Kerndimensionen, falls man an einem komplexen Kernaufbau festhält, gegen diesen Ringhalbmesser jedenfalls sehr klein sein. Auf einem älteren und mehr direkten Wege gelangt Rutherford[3]) zu bestimmteren Angaben hinsichtlich der Kernabmessungen. In seinen grundlegenden Arbeiten, die uns den Weg in das Innere des Atoms eröffneten und in Bohrs Atommodell so glänzende Früchte gezeitigt haben, errechnet er aus der Zerstreuung der α-Strahlen beim Durchgang durch dünne Metallfolien eine obere Grenze für die Abmessungen des Atomkerns. Er findet für Gold den Wert 3.10^{-12} cm. Für die hier mehr interessierenden Kerne von Wasserstoff und Helium findet C. G. Darwin[4]) als obere Grenze des Radius $1{,}7.10^{-13}$ cm. Da die zu diesen Werten führende theoretische Überlegung die Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes zur Voraussetzung hat, so können wir die obigen Grenzradien mit den Radien der invertierten Modelle vergleichen. Wie oben gezeigt wurde, erhalten bei unseren Modellen schon die einfachsten Gebilde Abmessungen, die oberhalb dieser Grenzen liegen. Auf Grund

[1]) Physik. Zeitschr., Bd. 18, 1917, p. 276.
[2]) Physik. Zeitschr., Bd. 19, 1918, p. 297.
[3]) Phil. Mag. 27, 1914, pag. 488.
[4]) Phil. Mag. 27, 1914, pag. 499.

unserer Annahme eines durchgängigen Aufbaus der Kerne aus Wasserstoffkernen müßten diese Abmessungen für die schwereren Elemente noch bedeutend größer werden. Obwohl hier im Aufbau des Modells ein großer Spielraum gelassen ist, dürfte aus den Beispielen des vorigen Paragraphen doch hervorgehen, daß man unter Beibehaltung der bisher gemachten Annahmen nicht die erforderlichen kleinen Kerndimensionen erreichen wird.

Energie der Kerne. Ähnliche unzureichende Ergebnisse erhält man bei Betrachtung der energetischen Verhältnisse. Die oben erörterte Unbeständigkeit des ersten der invertierten Modelle gegen kurzwellige Röntgenstrahlen gilt ebenso für das zweite Modell. Umgekehrt kann man aus der tatsächlichen Beständigkeit der Atomkerne schließen, daß die Energie des Kerns wesentlich kleiner sein muß, als die Summe der Einzelenergien seiner Teile. Dieser Energieverkleinerung bei der Kernbildung entspricht eine Massendifferenz in der Weise, daß die Masse des Kerns kleiner sein muß als die Gesamtmasse der Teilkerne im Zustand völliger Trennung. Unter diesem Gesichtspunkt wollen wir die Atomgewichte der leichtesten Elemente betrachten, die auf Sauerstoff = 16 bezogen folgendermaßen lauten:

H	*He*	*Li*	*Be*	*B*	*C*	*N*	*O*	*F*
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,008	4,00	6,94	9,1	11,0	12,00	14,01	16,00	19,0

(Die Zahlen der ersten Horizontalreihe bedeuten die Kernladungszahl)

In der Gruppierung der Atomgewichte um die ganzen Zahlen hat man von jeher den Ausdruck einer Gesetzmäßigkeit des Aufbaus der Elemente erblickt; es kann daraus zweifellos eine Stütze für die Hypothese eines Kernaufbaus aus Wasserstoffkernen abgeleitet werden. Ein tiefergehendes Argument für diese Auffassung kann aus dem Vergleich der Atomgewichte mit dem entsprechenden ganzzahligen Vielfachen der Wasserstoffzahl entnommen werden. Denn die Werte $n \cdot 1{,}008$ sind — mit Ausnahme von *Be* — überall größer als das Atomgewicht des betreffenden Elements. Bei einem

Aufbau aus Wasserstoffkernen müßte also in Übereinstimmung mit unseren obigen Überlegungen Masse, d. h. Energie abgegeben worden sein; die Masse der am Aufbau teilnehmenden Elektronen kann dabei, wie eine Überschlagsrechnung lehrt, vernachlässigt werden. Die Ausnahme bei *Be*, ebenso wie die zahlreichen Unstimmigkeiten bei den schwereren Elementen, können vielleicht ihren Grund im Vorhandensein von Isotopen haben.

Wir wollen am Beispiel des Heliums noch zahlenmäßig nachprüfen, ob die aus Vorstehendem sich ergebende Energiedifferenz ausreicht, um die Stabilität des Kerns gegenüber zerstörenden Einflüssen zu gewährleisten. Dem Massenunterschied $\Delta m = 4\, m_H - m_{He} = (4.1{,}008 - 4{,}00)\, m_H$ entspricht eine Energieabnahme:

$$W = -c^2 \Delta m \sim -4{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ erg.} \;\ldots \tag{10}$$

Die Kernstruktur wäre demnach noch gegenüber den schnellsten α-Strahlen beständig.

Ergibt sich hieraus auch die Möglichkeit, den Heliumkern aus Wasserstoffkernen aufgebaut zu denken, so zeigt doch ein Vergleich von (10) und (9), daß die obige Behandlung der invertierten Modelle zu einer Erklärung dieser Struktur nicht ausreicht. Es ist auch schwerlich anzunehmen, daß man durch anderen Aufbau des Modells die in (10) geforderte Energie auch nur annähernd erreichen kann.

§ 3. Über das Coulombsche Gesetz.

Ehe man nach diesem Sachverhalt den Gedanken eines Kernaufbaus nach Art der invertierten Modelle überhaupt aufgibt, muß man sich fragen, ob die im Vorangehenden mit der Übernahme des Bohrschen Rechenschemas stillschweigends gemachten Annahmen unbedingt aufrecht erhalten werden müssen: die Methode der Quantentheorie und das Coulombsche Gesetz. Während man der Quantentheorie nach der glänzenden Bestätigung auf dem Gebiet der Spektren universelle Gültigkeit zuzuschreiben geneigt ist, hat man für die Aufrechterhaltung des Coulombschen Gesetzes in den für uns in Frage kommenden geringen Entfernungen vom Mittelpunkt der Ladungen keinen unmittelbar zwingenden Grund. Es lassen sich im Gegenteil Gründe für eine Abänderung dieses Gesetzes im Bereich der Kerndimensionen anführen.

In Ermangelung detaillierterer Kenntnisse wird man eine Dimensionsbetrachtung zu Rate ziehen, um beurteilen zu können, wo für die Gültigkeit des Gesetzes eine mögliche Grenze liegt. Wir haben also aus den bekannten Daten des Elektrons bzw. des positiven (Wasserstoff-)Kerns einen Ausdruck ϱ von der Dimension einer Länge zu bilden. Hierzu kommen in erster Linie in Frage die Ladung e, die Masse m und die Lichtgeschwindigkeit c, woraus eindeutig entsteht:

$$\varrho \sim \frac{e^2}{m c^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \qquad (11)$$

Man erkennt darin bis auf einen Zahlenfaktor diejenige Größe, die man als Radius des Elektrons zu bezeichnen pflegt, falls m die Elektronenmasse und e die Elementarladung darstellt. Bei Einsetzen dieser Zahlenwerte kommt $\varrho \sim 2.10^{-13}$ cm, ein Wert, der mit den Grenzradien C. G. Darwins nahezu übereinstimmt. Die Relativitätstheorie hat die Spekulationen über Gestalt und Ladungsverteilung des Elektrons gegenstandslos gemacht. Dürfte es unseren heutigen Vorstellungen über die Natur der Elementarladung nicht eher entsprechen, die Größe ϱ — bis auf einen Zahlenfaktor — als eine Art Grenze der Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes aufzufassen? In diesem Falle könnten unsere obigen Modelle eine Modifikation im Sinne einer Annäherung an die im vorigen Paragraphen erörterten empirischen Eigenschaften der Kerne erfahren. Eine Schwierigkeit für diese Auffassung besteht allerdings darin, daß (11) bei Einsetzen der Masse des Wasserstoffkerns einen etwa 2000 mal kleineren Zahlenwert erhält. Im Folgenden werden wir mit dem ϱ aus Gl. (11) für m = Elektronenmasse operieren.

Bei der Dürftigkeit der Unterlagen an gesicherten experimentellen Tatsachen wäre der Versuch verfrüht, auf Grund des Obigen ein bestimmtes neues Gesetz an Stelle des Coulombschen setzen zu wollen. Diese Frage gehört vor allem in das Gebiet der modernen Versuche, die Elektrodynamik in das „Innere" des Elektrons fortzusetzen. Wir wollen jedoch noch kurz betrachten, welche Aussagen sich im Rahmen des Vorstehenden über eine eventuelle Abänderung des Coulombschen Gesetzes machen lassen.

Hierzu wollen wir an Stelle des Coulombschen Gesetzes das Kraftgesetz $F = \frac{e^2}{r^2} \cdot f\left(\frac{\varrho}{r}\right)$ einführen und zwei Fälle unterscheiden.

a) $r \gg \varrho$. Für große Radien muß das Gesetz in das Coulombsche übergehen, also $f(0) = 1$. Die Abweichung vom Coulombschen Gesetz muß noch bis in den Bereich der äußeren Elektronen des Atoms ($r \sim 10^{-8}$ cm) äußerst gering sein, falls die so glänzend bestätigte Feinstruktur der Wasserstofflinien nicht gestört werden soll. Daher kann f in ϱ/r für kleines Argument jedenfalls nicht linear sein.

b) $r \sim \varrho$ und $r < \varrho$. Gegen die Annahme eines linearen Verlaufs von f bei großem Argument spricht der Umstand, daß für ein Kraftgesetz $1/r^3$ die Quantenbedingung keine bestimmten Werte für die Radien liefert; r fällt aus der Rechnung ganz heraus. Daß jedoch für großes Argument die Abweichungen vom Coulombschen Gesetz sehr erheblich werden müssen, erkennt man aus Folgendem.

Unabhängig von der Gestalt des Gesetzes, sofern nur radiale Symmetrie herrscht, können wir mit Hilfe der Quantentheorie jedenfalls die kinetische Energie des Modells in Abhängigkeit vom Radius des Umlaufs angeben. Mit Rücksicht auf die Quantenbedingung (2) finden wir:

$$W_k = 4 \cdot \tfrac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{n h}{2\pi r}\right)^2.$$

Da die potentionelle Energie W_p negatives Vorzeichen besitzt, so finden wir für den Absolutwert der Gesamtenergie:

$$|W| = |W_p| - \frac{2}{m}\left(\frac{n h}{2\pi r}\right)^2 \quad \ldots \qquad (12)$$

Hierin wären die aus dem Kraftgesetz zu errechnenden Radien der Bohrbahnen einzuführen. Als Ersatz für die mangelnde Kenntnis dieser Radien möge uns der Grenzradius C. G. Darwins dienen. Schon für diesen Radius wird der zweite Term in (12) größer als der Energiewert (10). Die potentielle Energie muß also nach abnehmenden Radien einen viel steileren Anstieg zeigen als die Coulombsche.

Den beiden Bedingungen für große und kleine ϱ/r würde z. B. eine Funktion $f = e^{\beta x^2}$, $x = \frac{\varrho}{r}$ mit $\beta \sim 1$ genügen.

Sollten unsere Vorstellungen das Wesentliche der Kerneigenschaften treffen, so könnten Anhaltspunkte für das abgeänderte Gesetz von einer Verfeinerung der Beobachtungen an Röntgenspektren erwartet werden. Denn hierbei treten die in Frage kommenden Elektronen, besonders bei den schwereren Elementen, so nahe an den Kern heran, daß ein vom Coulombschen abweichender Verlauf des Anziehungsgesetzes sich bemerkbar machen könnte.

Sollte sich dagegen unser Erklärungsversuch der Atomkerne als gänzlich verfehlt erweisen, so bliebe immerhin die Frage offen, welche Rolle den invertierten Modellen in der Natur zukommt.

Im Felde, den 27. Mai 1918.