

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

---

1918. Heft II

Mai- bis Julisitzung

---

München 1918

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



## Über die Feinstruktur der $K_\beta$ -Linie.

Von A. Sommerfeld.

Vorgetragen in der Sitzung am 1. Juni 1918.

In einer Arbeit, die ich der K. Akademie Anfang 1916 vorlegte, wurde die Feinstruktur der Wasserstoffspektren entwickelt. Als Bahnen des Wasserstoffelektrons treten nicht nur Kreise, sondern auch gewisse Ellipsen auf (gequantelte Kepler-Ellipsen); die einquantige Bahn ist einfach (Kreisbahn), die zweiquantige doppelt (Kreis- oder Ellipsenbahn), die dreiquantige dreifach (Kreis oder Ellipse von geringerer oder von größerer Exzentrizität etc.). Aus der doppelten Natur der zweiquantigen Bahn ergibt sich insbesondere das Dublett der Balmerischen Serie.

Schon damals wurde eine Anwendung auf die Feinstruktur der Röntgenspektren gemacht. Der  $K$ -Ring (innerster einquantiger Elektronenring im Atom) ist seiner Natur nach einfach, nämlich notwendig kreisförmig. Der  $L$ -Ring (zweiter zweiquantiger Elektronenring) ist entweder kreisförmig oder elliptisch. Er gibt daher zu einem Dublett Veranlassung, welches wegen der Größe der wirksamen Kernladung bei den schweren Elementen eine millionenfach größere Trennung besitzt wie beim Wasserstoff. Dieses Dublett wurde an mehreren Stellen der  $L$ -Serie nachgewiesen (zwischen  $L_\alpha$  und  $L_\beta$ ,  $L_\gamma$  und  $L_\delta$ ,  $L_\epsilon$  und  $L_\eta$ ,  $L_\zeta$  und  $L_\theta$ ) und tritt auch in der  $K$ -Serie auf (zwischen  $K_\alpha$  und  $K_{\alpha'}$ ). In der Tat ist der  $L$ -Ring nicht nur Endbahn für die Linien der  $L$ -Serie, sondern auch Anfangsbahn für die Linien  $K_\alpha$ ,  $K_{\alpha'}$  der  $K$ -Serie.

Bezüglich der rechnerischen Behandlung wurde damals vorausgesetzt, daß jede Bahn nur von einem Elektron beschrieben würde. Diese Vorstellung war nur eine vorläufige und muß im Anschluß an die Erfordernisse des periodischen Systems ersetzt werden durch die Annahme, daß jeder Ring mehrfach von Elektronen besetzt ist. Dabei sind bei dem elliptischen  $L$ -Ring die Elektronen nicht auf ein und derselben Ellipse zu verteilen, sondern auf einem „Ellipsenverein“, einem Systeme gleicher und symmetrisch gestellter Ellipsen, derart, daß die Elektronen des Vereins jederzeit die Ecken eines regulären (bald sich verengernden, bald sich erweiternden) Polygons bilden. Nachdem inzwischen auch die Messungen der Röntgenspektren an Reichhaltigkeit und Genauigkeit zugenommen haben, darf man behaupten, daß man in dem vorhandenen Beobachtungsmaterial bereits die Mittel in der Hand hat, um die Topologie des Atominneren zu erforschen, d. h. die Verteilung der Elektronen auf die einzelnen Atomringe aus den Beobachtungen zu berechnen.

Zu dem Ende habe ich kürzlich<sup>1)</sup> eine strenge Formel für die Energie eines beliebigen Ringsystems entwickelt. Bei  $n$  komplanaren Ringen handelt es sich um ein mechanisches System von  $n$  Freiheitsgraden; die Unbekannten des Systems, die  $n$  Ringradien, werden durch die mechanischen Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Sind  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  die Besetzungszahlen der aufeinander folgenden Ringe  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$  die „wirksamen Kernladungen“, wobei

$$(1) \quad Z_n = Z - p_1 - p_2 - \dots - p_{n-1} - s_n$$

und  $Z$  die wirkliche Kernladung ist, die durch die Elektronenzahlen  $p_1, \dots, p_{n-1}$  der inneren Ringe und durch den Bruchteil  $s_n$  der Elektronen des  $k^{\text{ten}}$  Ringes abgeschirmt wird, so ist die Energie des Ringsystems einfach gegeben durch

$$(2) \quad -\frac{W}{Nh} = \sum_1^n p_n \frac{Z_n^2}{\kappa^2}.$$

<sup>1)</sup> Physikal. Zeitschr., Bd. 19, 1918, p. 297.

Dabei ist der  $k^{\text{te}}$  Ring als  $k$ -quantig angenommen;  $N$  bedeutet die Rydbergsche Zahl; von der Relativitätskorrektur, die sich leicht einfügen läßt, ist abgesehen. Außerdem ist abgesehen von den Wechselwirkungsgliedern der Form

$$(3) \quad -\frac{1}{2} \sum_{j < \kappa} \sum p_j p_\kappa \frac{\kappa^6}{j^4} \frac{Z_\kappa^3}{Z_j^3}.$$

Es wird gezeigt, daß diese zwar im Einzelnen nicht klein sind, aber in der Summe sich größtenteils aufheben und in der Differenz zwischen Anfangs- und Endbahn bei der heutigen Beobachtungsgenauigkeit praktisch zu vernachlässigen sind. Daraus folgt im Besonderen, daß die vorliegenden Beobachtungen noch nicht zu entscheiden gestatten, ob die Ringe komplanar oder gegeneinander geneigt sind. In der Tat beeinflußt die gegenseitige Neigung der Ringe nur ihre Wechselwirkung und diese kommt in den Beobachtungen praktisch nicht zum Ausdruck.

Im Folgenden möchte ich eine Anwendung der Formel (2) auf die Struktur der Linie  $K_\beta$  geben. Diese Linie entsteht beim Übergang eines Elektrons aus dem  $M$ -Ring in den  $K$ -Ring und kann durch das Schema dargestellt werden

$$\begin{array}{rcc} & K & L & M \\ \text{Endzustand} & + \left( \begin{array}{ccc} p & q & r-1 \end{array} \right) \\ \text{Anfangszustand} & - \left( \begin{array}{ccc} p-1 & q & r \end{array} \right) \end{array}$$

$p, q, r$  steht für  $p_1, p_2, p_3$ , d. h. für die normalen Besetzungszahlen des  $K$ -,  $L$ -,  $M$ -Ringes. Das vorangestellte Vorzeichen gibt an, ob die betreffende Elektronenzahl in den ersten positiven oder den zweiten negativen Term der Schwingungszahl  $\nu$  eingeht.

Den Hauptbeitrag zur Energiedifferenz zwischen Anfangs- und Endzustand liefert offenbar der  $K$ - und  $M$ -Ring, in denen eine Änderung der Elektronenzahl eintritt. Dieser Hauptbeitrag geht, allgemein gesprochen, mit  $Z^2$ . Aber auch der  $L$ -Ring nimmt auf die Energiebilanz des  $K_\beta$ -Vorganges Einfluß, nämlich mit dem Betrage

$$\frac{q}{4} ((Z - p - s_q)^2 - (Z - p + 1 - s_q)^2)$$

oder, nach der Formel  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  zusammengezogen

$$(4) \quad -\frac{q}{2} (Z - p + \frac{1}{2} - s_q).$$

Der Beitrag des  $L$ -Ringes zu  $K_\beta$  ist also nur von der Ordnung  $Z$ .

Um den Ursprung dieses Beitrages deutlich vor Augen zu haben, stelle man sich den  $L$ -Ring im Anfangs- und Endzustande vor. Im Anfangszustande ist die Kernladung durch  $p - 1$ , im Endzustande durch  $p$  Elektronen abgeschirmt. Im Anfangszustande steht der  $L$ -Ring also unter größeren Kräften wie im Endzustande: er expandiert bei der Erzeugung von  $K_\beta$  und verbraucht daher Energie. Dem entspricht das negative Zeichen von (4).

Bei den bisherigen Versuchen,  $K_\beta$  aus der Vorstellung mehrfach besetzter Ringe abzuleiten, ist diese Mitwirkung des  $L$ -Ringes übersehen worden.

Der  $L$ -Ring ist aber seiner Natur nach doppelt: In einem Teil der Atome wird er als Kreisring ausgebildet sein, in einem anderen (kleineren) Teil als Ellipsenverein. Während der bisher berechnete Beitrag des  $L$ -Ringes beiden Konstitutionen desselben gemeinsam ist, unterscheiden sie sich in ihren relativistischen Beiträgen. Der Unterschied in der Energie: Kreisminus Ellipsenbahn beträgt für ein Elektron bei der wirkamen Kernladung  $Z_2$ , wie ich früher gezeigt habe, unter Vernachlässigung höherer Potenzen der kleinen Größe  $\alpha = 2\pi e^2/hc$ :

$$\frac{\alpha^2 Z_2^4}{2^4}.$$

Die Differenz dieses Unterschiedes zwischen Anfangs- und Endzustand ( $Z_2 = Z - p + 1 - s_q$  bzw.  $Z_2 = Z - p - s_q$ ) ergibt in unserem Falle von  $q$  Elektronen als Schwingungsdifferenz:

$$(5) \quad \frac{\Delta\nu}{N} = q \frac{\alpha^2}{2^4} \{ (Z - p - s_q)^4 - (Z - p + 1 - s_q)^4 \}.$$

Wir rechnen sie um nach der Formel

$$a^4 - b^4 = (a - b) (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

und ersetzen die rechte Seite bei nahezu gleichen Werten von  $a$  und  $b$  durch

$$4(a - b) \left( \frac{a + b}{2} \right)^3.$$

Dadurch entsteht aus (5)

$$(6) \quad \frac{\Delta \nu}{N} = -q \frac{a^2}{4} (Z - p + \frac{1}{2} - s_q)^3.$$

In gleicher Weise gerechnet ergibt sich für die Schwingungsdifferenz der Linien ( $K_\alpha$ ,  $K_{\alpha'}$ )

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\Delta \nu}{N} = \frac{a^2}{2^4} \{ q(Z - p - s_q)^4 - (q + 1)(Z - p + 1 - s_q)^4 \} \\ \approx -\frac{a^2}{16} (Z - p + \frac{1}{2} - s_q)^4. \end{cases}$$

Unser  $K_\beta$ -Dublett hat also dasselbe Vorzeichen wie das  $K_\alpha$ -Dublett; bei beiden liegt die schwächere Linie (Ellipsenbahn) nach der Seite der kleineren Schwingungszahlen (größeren Wellenlängen). Als Größenverhältnis ergibt sich

$$\frac{\Delta \nu_\beta}{\Delta \nu_\alpha} = \frac{4q}{Z - p + \frac{1}{2} - s_q}.$$

Bei großen Werten der Ordnungszahl  $Z$  ist  $\Delta \nu_\beta$  jedenfalls kleiner als  $\Delta \nu_\alpha$ , bei kleinen Werten von  $Z$  kann  $\Delta \nu_\beta$  größer ausfallen, falls die Besetzungszahl  $q$  des  $L$ -Ringes beträchtlich ist (z. B. wird  $q = 8$  durch das periodische System der Elemente nahe gelegt). Zur zuverlässigen Bestimmung dieser Zahl würde der Vergleich beider Dubletts ein vorzügliches Mittel geben, das viel unmittelbarer und sicherer wäre als die Bestimmung von  $q$  aus den Darstellungen von  $K_\alpha$  oder  $L_\alpha$ . In Wellenlängen gemessen, ist, wie ich früher hervorgehoben habe, das  $L$ -Dublett und das ihm gleiche (oder annähernd gleiche)  $K_\alpha$ -Dublett konstant in der Reihe der Elemente. Dagegen

nimmt das  $K_\beta$ -Dublett, in Wellenlängen gemessen (vgl. die verschiedene Potenz von  $Z$  in (6) und (7)) beim Fortschreiten zu größeren  $Z$  ab. Man wird dieses Dublett daher am ehesten bei den leichteren Atomen finden können.

Herr Manne Siegbahn, an den ich mich als erfolgreichsten Beobachter der Röntgenspektren kürzlich wegen der Struktur von  $K_\beta$  gewandt hatte, schreibt mir hierzu aus Lund unter dem 25. Mai d. J.: „Wie ich schon vor einiger Zeit auf meinen Platten gesehen habe, ist die  $K_\beta$ -Linie in der Tat doppelt, und zwar habe ich dies bis jetzt bei  $Fe$  und  $Co$  gefunden. Die Dispersion genügte nicht, um die zwei Linien in 1. Ordnung vollständig zu trennen. Der Dublettastand ist daher kleiner als derjenige von ( $K_\alpha$ ,  $K_{\alpha'}$ ). Die schwächere Linie liegt nach den größeren Wellenlängen hin. Messungen hoffe ich Ihnen in der nächsten Zeit mitteilen zu können.“

---

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1918

Band/Volume: [1918](#)

Autor(en)/Author(s): Sommerfeld Arnold

Artikel/Article: [Über die Feinstruktur der K-beta-Linie 367-372](#)