Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1919. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1919
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua.

Von A. Rosenthal.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 11. Januar 1919.

Das Ziel der folgenden Überlegungen ist eine weitgehende Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes, die an den in der Analysis situs wichtigen Begriff des irreduziblen Kontinuums anknüpft. (Unter einem zwischen den Punkten a und b irreduziblen Kontinuum versteht man nach L. Zoretti bekanntlich ein Kontinuum, das kein a und b umfassendes Teilkontinuum enthält.) Die geschlossene Jordansche Kurve setzt sich aus zwei einfachen Kurvenbogen zusammen; diese sind beschränkte und zwischen ihren Endpunkten irreduzible Kontinua, die noch eine geeignete Nebenbedingung erfüllen, etwa kein Häufungskontinuum zu enthalten. Durch Weglassung dieser Nebenbedingung gelangt man also allgemein zu zwei beschränkten, zwischen den Punkten a und b irreduziblen Kontinuen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ der Ebene, die nur a und b gemeinsam haben. Die Vereinigung $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ kann nun allerdings beliebig viele, sogar unendlich viele Komplementärgebiete von $\mathfrak{C}$ in der Ebene bestimmen. Wir werden aber sehen, daß trotzdem stets *genau zwei* ausgezeichnete Komplementärgebiete von $\mathfrak{C}$ („Hauptgebiete") vorhanden sind, die nämlich von der *ganzen* Kurve $\mathfrak{C}$ begrenzt werden.

Die von $\mathfrak{C}$ hervorgerufene Teilung der Ebene hatte übrigens schon Herr L. Zoretti ins Auge gefaßt[1]). Aber der von ihm

---

[1]) L. Zoretti, Acta math. 36 (1912/13), p. 261/263.

hierüber aufgestellte Satz ist nicht ganz korrekt[1]), würde zudem auch bei einwandfreier Fassung nicht gerade viel besagen[2]) und sein Beweisgang ist nicht richtig[3]) (wie überhaupt in der betreffenden Abhandlung mancherlei Unrichtiges enthalten ist[4])).

---

1) Zorettis Satz lautet: „La réunion de deux continus irréductibles entre deux points qui sont leurs seuls points communs partage le plan en deux aires cantoriennes [= flächenhafte Kontinua] dont elle constitue l'ensemble des points frontières (c'est à dire non intérieurs)." Aber eine bestimmte derartige Teilung der Ebene in zwei flächenhafte Kontinua wird im allgemeinen durch $\mathfrak{C}$ nicht bewirkt; vielmehr kann eine solche Teilung (bei unendlich vielen Komplementärgebieten von $\mathfrak{C}$) noch auf unendlich vielfache Weise möglich sein; es kommt nämlich darauf an, in welcher Verteilung die übrigen Komplementärgebiete von $\mathfrak{C}$ den beiden „Hauptgebieten" hinzugefügt werden.

2) Abgesehen von der erwähnten Vieldeutigkeit: Ist $\mathfrak{K}$ ein linienhaftes Kontinuum der Ebene, dessen Komplementärmenge sich in zwei elementenfremde Mengen K_1 und K_2 zerlegen läßt, so daß $(K_1 + \mathfrak{K})$ und $(K_2 + \mathfrak{K})$ zwei flächenhafte Kontinua darstellen, deren Begrenzungen mit $\mathfrak{K}$ identisch sind, — dann braucht noch immer kein einziges Komplementärgebiet von $\mathfrak{K}$ zu existieren, das von dem ganzen $\mathfrak{K}$ begrenzt wird. Beispiel: Drei sich von außen paarweise berührende Kreise; die Vereinigung der drei Kreislinien sei $\mathfrak{K}$, die drei Kreisgebiete bilden zusammen K_1, die beiden Restgebiete K_2.

3) Der Kern des Beweises ist unrichtig, nämlich die Behauptung, daß die beiden dort durch Näherungspolygone konstruierten Kontinua D und D' keine inneren Punkte gemeinsam haben können. Der Fehlschluß befindet sich l. c., p. 262, Zeile 2—4 v. o. und Zeile 7—3 v. u. Man sieht den Sachverhalt deutlich an folgendem Beispiel: Zwei von den Punkten a und b ausgehende, sich um eine Kreislinie $\mathfrak{K}_0$ unendlich oft asymptotisch herumwindende Spiralen bilden zusammen mit $\mathfrak{K}_0$ ein zwischen a und b irreduzibles Kontinuum $\mathfrak{C}_1$, die Strecke ab ein zwischen a und b irreduzibles Kontinuum $\mathfrak{C}_2$; die Vereinigung von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ sei $\mathfrak{C}$. Dann kann man $\mathfrak{C}$ durch eine Folge von Polygonen D_ε (Seitenlänge $\leq \varepsilon$; ε nehme gegen 0 ab) approximieren, die abwechselnd $\mathfrak{K}_0$ ausschließen bzw. einschließen.

4) Z. B. der Satz, l. c. p. 258: „Toute portion continue d'un continu irréductible est elle-même irréductible entre deux de ses points" ist falsch. Gegenbeispiel: Das in 3) erwähnte irreduzible Kontinuum $\mathfrak{C}_1$ enthält den Kreis $\mathfrak{K}_0$, der zwischen keinen zwei seiner Punkte irreduzibel ist. — Ferner: l. c., p. 267 wird für den dreidimensionalen Raum

Alle unsere Betrachtungen werden sich in der Ebene abspielen. Unter 𝔊 werden wir im folgenden stets ein ebenes, einfach zusammenhängendes Gebiet verstehen, dessen Begrenzung B beschränkt ist und aus mehr als einem Punkt besteht.

In § 1—3 des folgenden werden zunächst einige allgemeine Sätze über die Teilung von 𝔊 durch in 𝔊 liegende „nicht abgeschlossene Kontinua" bzw. „lückenlos zusammenhängende Mengen" C gebracht. In § 1 wird insbesondere gezeigt, daß, wenn C eine punkthafte Menge von Randpunkten, mindestens aber zwei solche Punkte approximiert, dann in 𝔊 stets mindestens zwei Teilgebiete durch C bestimmt werden. § 2 enthält einige Hilfssätze über den Gebietsrand und § 3 vor allem den Satz: Wenn C zwei Punkte des Gebietsrandes approximiert und ein einziges Komplementärgebiet in der Ebene bestimmt, dann wird 𝔊 in genau zwei Teilgebiete durch C zerlegt, — woraus noch einige verwandte Sätze folgen. Die Anwendung auf irreduzible Kontinua ergibt dann in § 4 den oben erwähnten Hauptsatz und Verallgemeinerungen; zugleich wird durch ein einfaches Beispiel gezeigt, daß die Bedingung der Beschränktheit für den Hauptsatz und andere unserer Sätze wesentlich ist.

§ I. Minimalzahl der Teilgebiete bei gewissen Gebietsteilungen.

Herr C. Carathéodory hat die Struktur der Begrenzung B des Gebietes 𝔊 in allgemeiner Weise eingehend untersucht[1]) und er hat gezeigt, daß man diesen Rand B als eine Gesamt-

---

eine Definition einer „Linie" gegeben, nach welcher die Kugeloberfläche eine „Linie" wäre!

Bezüglich früherer Untersuchungen L. Zorettis über irreduzible Kontinua siehe die wertvollen kritischen Bemerkungen von L. E. J. Brouwer, Ann. Éc. Norm. (3) 27 (1910), p. 565/6 und Proc. Amsterdam Akad. 1911, p. 144/5.

[1]) C. Carathéodory, Math. Ann. 73 (1913), p. 323/370 [„Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete"]. — Ein ähnliches Ziel verfolgen auch die ungefähr gleichzeitigen Überlegungen des Herrn E. Study im § 8 seiner Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der

heit gewisser zyklisch geordneter, elementarer Gebilde auffassen kann, die er „Primenden"[1]) nennt. Herr P. Koebe[2]) bezeichnet sie recht zweckmäßig als „Randelemente", eine Bezeichnung, der wir uns hier anschließen wollen. Begriff und einfachste Eigenschaften dieser „Randelemente" werden im folgenden als bekannt vorausgesetzt.

Wir bemerken zunächst, daß (wie unmittelbar ersichtlich) die von irgend einer Menge M in $\mathfrak{G}$ approximierten Randpunkte und die von M in $\mathfrak{G}$ approximierten Randelemente stets abgeschlossene Mengen bilden.

Satz 1: Ein in $\mathfrak{G}$ gelegenes „nicht abgeschlossenes Kontinuum"[3]) *C, das irgend eine (selbstverständlich abgeschlossene), aus mindestens einem Punkt bestehende Menge von Randpunkten approximiert, zerlegt $\mathfrak{G}$ in mindestens zwei Teilgebiete, an deren Begrenzung die Ableitung $\overline{C}$ von C und der Rand B von $\mathfrak{G}$ gemeinsam teilnehmen, wenn mindestens zwei von C nicht approximierte Randelemente existieren, die im Zyklus durch von C approximierte Randelemente getrennt werden.*

Beweis: Da die Menge der von C approximierten Randelemente abgeschlossen ist, müssen die beiden nach Voraussetzung von C nicht approximierten Randelemente μ und ν zwei Intervallen M und N von Randelementen angehören, in die C nicht eindringt; daher enthalten M und N zwei Randelemente γ bzw. δ mit in γ bzw. δ von C nicht approximierten, erreichbaren Punkten c bzw. d. Diese γ und δ werden im Zyklus durch zwei von C approximierte Randelemente α und β getrennt. c (in γ) und d (in δ) verbinde man durch einen abgesehen von den Endpunkten ganz in $\mathfrak{G}$ verlaufenden ein-

Geometrie, 2. Heft: Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche (herausgegeben unter Mitwirkung von W. Blaschke), Leipzig und Berlin 1913.

[1]) Die Definition des Primende findet sich a. a. O., p. 336.

[2]) P. Koebe, J. f. Math. 145 (1915), p. 217.

[3]) Unter einem „nicht abgeschlossenen Kontinuum" C wird bekanntlich eine Menge verstanden, von der irgend zwei Punkte durch ein abgeschlossenes Teilkontinuum von C verbunden werden können.

fachen Streckenzug (Querschnitt) $\mathfrak{s}_{cd}$; durch $\mathfrak{s}_{cd}$ wird $\mathfrak{G}$ in genau zwei Teilgebiete $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ zerlegt. Da α und β durch γ und δ getrennt werden, so liegen (von einem gewissen Index ab) die Ketten von Teilgebieten von $\mathfrak{G}$, die α bzw. β darstellen, in $\mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{S}_2$. Daher liegen innerhalb $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ Punkte von C und deshalb muß $\mathfrak{s}_{cd}$ von C getroffen werden und zwar gilt dies für jeden derartigen c und d verbindenden Streckenzug. Durchläuft man $\mathfrak{s}_{cd}$ von c nach d, so gibt es auf $\mathfrak{s}_{cd}$ einen ersten zu $\bar{C}$ gehörenden Punkt s_C und einen letzten solchen Punkt s'_C. Nimmt man nun auf $\mathfrak{s}_{cd}$ in hinreichender Nähe von c und d, nämlich vor s_C und nach s'_C, zwei Punkte s_c bzw. s_d, so kann man s_c und s_d nicht durch einen Streckenzug in $\mathfrak{G}$ verbinden, ohne C zu treffen, da man sonst einen c und d verbindenden Streckenzug von der Art $\mathfrak{s}_{cd}$ erhalten würde, der keinen Punkt mit C gemeinsam hätte. Also s_c und s_d sind in zwei verschiedenen von C in $\mathfrak{G}$ bestimmten Teilgebieten $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ enthalten.

Übrigens sei hervorgehoben, daß alle hier und im folgenden vorkommenden Teilgebiete einfach zusammenhängend sind, da sie Komplementärgebiete eines Kontinuums, nämlich $(B + \bar{C})$, sind.

Aus dem Beweis von Satz 1 folgt unmittelbar:

Satz 2: Ein in $\mathfrak{G}$ gelegenes, „nicht-abgeschlossenes Kontinuum" C, das eine endliche oder abzählbare oder allgemeiner eine punkthafte[1]*) Menge von Randpunkten von $\mathfrak{G}$, mindestens aber zwei Randpunkte approximiert, zerlegt $\mathfrak{G}$ in mindestens zwei Teilgebiete (an deren Begrenzung die Ableitung $\bar{C}$ von C und der Rand B von $\mathfrak{G}$ gemeinsam teilnehmen).*

Beweis: Da die punkthafte, abgeschlossene Menge der von C approximierten Randpunkte in B nirgends dicht liegt, sind in jedem Intervall von Randelementen erreichbare Punkte vorhanden, die von C nicht approximiert werden; also sind die Voraussetzungen für die Punkte c und d im Beweis von Satz 1

[1]) Also eine (abgeschlossene) Menge von Randpunkten, die kein Kontinuum enthält.

erfüllt. (Oder: Mit Hilfe von Hilfssatz c des § 2 sieht man unmittelbar, daß die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt sind.)

Genau ebenso ergibt sich aus Satz 1:

Satz 3: Ein in $\mathfrak{G}$ gelegenes „nicht-abgeschlossenes Kontinuum" C, das genau einen Randpunkt, aber in mindestens zwei Randelementen von $\mathfrak{G}$ approximiert, zerlegt $\mathfrak{G}$ in mindestens zwei Teilgebiete (an deren Begrenzung $\overline{C}$ und B gemeinsam teilnehmen).

Diese Sätze lassen sich noch verallgemeinern durch Heranziehung des folgenden Begriffes, der von den Herren N. J. Lennes[1]) und F. Hausdorff[2]) herrührt: Eine Punktmenge M wird von N. J. Lennes „connected", von F. Hausdorff „zusammenhängend" genannt, wenn sie sich nicht in zwei nicht leere, elementenfremde, „in M abgeschlossene" Teilmengen spalten läßt; dabei heißt eine Teilmenge A von M „in M abgeschlossen", wenn jeder in M enthaltene Häufungspunkt von A auch Punkt von A ist. Zur Unterscheidung von dem üblichen Cantorschen Begriff „zusammenhängend" wollen wir für den Begriff von Lennes und Hausdorff die Bezeichnung „lückenlos zusammenhängend" gebrauchen.

Satz 1a, 2a, 3a: Die Sätze 1, 2, 3 bleiben richtig, wenn man das in $\mathfrak{G}$ gelegene, „nicht-abgeschlossene Kontinuum" C verallgemeinernd durch eine in $\mathfrak{G}$ gelegene, „lückenlos zusammenhängende Menge" C^* ersetzt.

Denn: die Beweise behalten wörtlich ihre Giltigkeit.

§ 2. Hilfssätze über den Gebietsrand.

Unter C werde in diesem Paragraphen stets ein in $\mathfrak{G}$ gelegenes nicht-abgeschlossenes Kontinuum oder gleich allgemeiner eine in $\mathfrak{G}$ gelegene lückenlos zusammenhängende Menge verstanden.

Hilfsatz a: C approximiert in einem Randelement ϱ, gegen das überhaupt Punktfolgen von C konvergieren, entweder einen

---

1) N. J. Lennes, Amer. J. of math. 33 (1911), p. 303.

2) F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, p. 244.

einzelnen Punkt oder ein ganzes Kontinuum; und zwar enthält diese in ϱ von C approximierte Punktmenge sämtliche Hauptpunkte von ϱ.

Beweis: Wir stellen ϱ durch eine Kette von Teilgebieten $\mathfrak{G}^{(1)}$, $\mathfrak{G}^{(2)}$ . . ., $\mathfrak{G}^{(n)}$ . . . dar, die ausgeschnitten werden durch eine Kette von konzentrischen Kreisschnitten $\mathfrak{k}^{(1)}$, $\mathfrak{k}^{(2)}$ . . ., $\mathfrak{k}^{(n)}$ . . ., deren Mittelpunkt irgend ein Hauptpunkt r von ϱ ist. Man wähle den Index n_0 so groß, daß nicht alle Punkte von C in $\mathfrak{G}^{(n_0)}$ liegen; dann wird für $m \geq n_0$ jedes $\mathfrak{k}^{(m)}$ von C getroffen. Vereinigt man nun $\mathfrak{k}^{(m)}$ mit dem Durchschnitt D_m von C und $\mathfrak{G}^{(m)}$, so erhält man eine lückenlos zusammenhängende Menge C_m. [Denn: andernfalls wäre eine Zerlegung von C_m in zwei „in C_m abgeschlossene", elementenfremde Mengen möglich, von denen die eine ganz innerhalb $\mathfrak{G}^{(m)}$ gelegen wäre, was eine ebensolche Zerlegung von C zur Folge hätte.] Dann ist auch die Vereinigung K_m von D_m mit allen $\mathfrak{k}^{(\mu)}$ für $\mu \geq m$ eine lückenlos zusammenhängende Menge. Durch Hinzufügung der fehlenden Häufungspunkte zu K_m erhält man ein (abgeschlossenes) Kontinuum $\overline{K_m}$. Läßt man nun den Index m beständig wachsen, so ergibt sich eine absteigende Folge von ineinander geschachtelten Kontinuen $\overline{K_m}$, $\overline{K_{m+1}}$, $\overline{K_{m+2}}$ . . ., $\overline{K_{m+\nu}}$ . . .; der Durchschnitt D einer solchen Folge ist bekanntlich ein einzelner Punkt oder ein (abgeschlossenes) Kontinuum. Zugleich sehen wir, daß jeder Hauptpunkt r von ϱ zu D gehört.

Da bekanntlich ein Randelement entweder einen einzigen erreichbaren Hauptpunkt oder ein Kontinuum von nicht erreichbaren Hauptpunkten besitzt[1]), so folgt aus Hilfsatz a (wenn man noch berücksichtigt, daß die von C approximierte Menge von Randpunkten abgeschlossen ist):

Hilfsatz b: Wenn C höchstens endlich oder abzählbar unendlich viele Randpunkte oder allgemeiner eine punkthafte Menge von Randpunkten approximiert, dann ist jeder dieser Randpunkte in jedem Randelement, in dem er von C approximiert

---

[1]) C. Carathéodory, a. a. O., p. 362.

wird, ein erreichbarer Punkt. C approximiert also in keinem Randelement mehr als einen Punkt.

Daraus folgt:

Hilfsatz c: Unter denselben Bedingungen bilden die von C approximierten Randelemente eine nirgends dichte Menge.

Beweis: Lägen die approximierten Randelemente in einem Intervall $\varDelta$ von Randelementen überall dicht, so müßten (wegen der Abgeschlossenheit der approximierten Randelemente) alle Randelemente von $\varDelta$ durch C approximiert werden; dies gälte also (nach Hilfsatz b) für alle erreichbaren und deshalb überhaupt für sämtliche Punkte von $\varDelta$, im Widerspruch mit der Voraussetzung über C.

Hilfsatz d: Zwei Randelemente α_1 und α_2, in denen Punkt a ein erreichbarer Punkt ist, und zwei Randelemente β_1 und β_2, in denen ein anderer Punkt b erreichbarer Punkt ist, können sich gegenseitig nicht trennen.

Beweis: Von einem innern Punkt q aus ziehe man in $\mathfrak{G}$ zwei einfache Wege[1] $\mathfrak{w}_a^1$ und $\mathfrak{w}_a^2$, die a in α_1 bzw. α_2 erreichen, ebenso zwei einfache Wege $\mathfrak{w}_b^1$ und $\mathfrak{w}_b^2$, die b in β_1 bzw. β_2 erreichen. $\mathfrak{w}_a^1$, $\mathfrak{w}_a^2$, $\mathfrak{w}_b^1$, $\mathfrak{w}_b^2$ mögen außer q keinen innern Punkt gemeinsam haben. $(\mathfrak{w}_a^1 + \mathfrak{w}_a^2)$ bildet ein einfaches geschlossenes Polygon (mit eventuell unendlich vielen Seiten), welches die Ebene in zwei Gebiete $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ teilt. Wären nun $\mathfrak{w}_a^1$ und $\mathfrak{w}_a^2$ durch $\mathfrak{w}_b^1$ und $\mathfrak{w}_b^2$ getrennt, so läge etwa $\mathfrak{w}_b^1$ in $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{w}_b^2$ in $\mathfrak{E}_2$; dann müßte ihr gemeinsamer Endpunkt, nämlich b, gleichzeitig in $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ liegen, was unmöglich ist.

Wir bemerken: Eine Folge von Randelementen mit dem erreichbaren Punkt a und eine Folge von Randelementen mit dem erreichbaren Punkt b können gegen dasselbe Randelement konvergieren, wie sehr einfache Beispiele zeigen.

Trotzdem gilt:

Hilfsatz e: Wenn C eine punkthafte Menge von Randpunkten approximiert, dann können Randelemente, in denen C

[1] Unter einem „einfachen Weg" verstehen wir, wie meist üblich, einen einfachen Streckenzug endlicher oder unendlicher Streckenzahl mit höchstens einem Häufungspunkt der Strecken auf dem Gebietsrand.

den Punkt a approximiert, und Randelemente, in denen C den davon verschiedenen Punkt b approximiert, nicht gegen dasselbe Randelement konvergieren.

Denn: Wäre ϱ ein solches gemeinsames Häufungs-Randelement, dann müßte C in ϱ gleichzeitig die Punkte a und b approximieren, im Widerspruch mit Hilfsatz b.

Es sei bemerkt, daß diese Hilfsätze a, b, c und e nicht mehr allgemein für ein in $\overline{\mathfrak{G}}$ gelegenes abgeschlossenes Kontinuum $\overline{C}$ gelten (wobei unter $\overline{\mathfrak{G}}$ der durch Hinzufügung des Randes aus $\mathfrak{G}$ entstehende Bereich verstanden wird); man kann sich hievon durch geeignete Beispiele überzeugen.

§ 3. Teilung in genau zwei Teilgebiete.

In Anknüpfung an § 1 und unter Verwendung des § 2 wollen wir nun in einem allgemeinen Fall nachweisen, daß eine Teilung des Gebietes in genau zwei Teilgebiete stattfindet.

Satz 4: Sei C eine lückenlos zusammenhängende Menge, die ganz in $\mathfrak{G}$ gelegen ist und nur die beiden Randpunkte a und b approximiert, die ferner in der Ebene ein einziges Komplementärgebiet bestimmt[1]*; dann wird $\mathfrak{G}$ durch C in genau zwei verschiedene einfach zusammenhängende Teilgebiete zerlegt.*

Beweis: Satz 2a sagt bereits aus, daß mindestens zwei solche Teilgebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ durch C in $\mathfrak{G}$ bestimmt werden; es ist also nur noch zu zeigen, daß es höchstens zwei Teilgebiete sind. Aus den Hilfsätzen b, d und e ergibt sich, daß die Randelemente, in denen C den Punkt a approximiert, und die Randelemente, in denen C den Punkt b approximiert, getrennt werden durch zwei Intervalle von Randelementen A_1 und A_2, in die C nicht eindringt. Nimmt man beim Beweis von Satz 1 die Randelemente γ und δ in A_1 bzw. A_2 an, so sieht man, daß A_1 bzw. A_2 an der Begrenzung von $\mathfrak{G}_1$ bzw.

[1] Wir sagen kurz, daß C ein einziges Komplementärgebiet (bzw. m solche) bestimmt, wenn die Komplementärmenge) der Ableitung $\overline{C}$ von C aus einem einzigen Gebiet (bzw. aus m solchen) besteht.

$\mathfrak{G}_2$ teilnehmen. Wäre also noch ein weiteres (von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ verschiedenes) Teilgebiet $\mathfrak{H}$ vorhanden, das durch C in $\mathfrak{G}$ bestimmt wird, so müßte jedes an der Begrenzung von $\mathfrak{H}$ teilnehmende und von C nicht approximierte Intervall von Randelementen von $\mathfrak{G}$ zwischen zwei Randelementen liegen, in denen C den gleichen Punkt (a bzw. b) approximiert. Es sei nun q ein innerer Punkt von $\mathfrak{H}$, q_1 ein innerer Punkt von $\mathfrak{G}_1$. Man könnte q mit q_1 nicht in $\mathfrak{G}$ verbinden, ohne C zu überschreiten. Da aber C in der Ebene nur ein einziges Komplementärgebiet bestimmt, so muß sich q mit q_1 in der Ebene verbinden lassen, ohne C und sogar ohne die Ableitung $\bar{C}$ von C zu treffen: etwa mit Hilfe des Streckenzuges $\mathfrak{s}$ (der von q nach q_1 durchlaufen werde). Es sei s der erste Punkt von $\mathfrak{s}$, der Randpunkt von $\mathfrak{H}$ ist und die Eigenschaft hat, daß nach ihm $\mathfrak{s}$ nicht wieder nach $\mathfrak{H}$ zurückkehrt. s gehört nun entweder einem von C nicht approximierten Randelement ϱ von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ an oder (wenn das nicht der Fall ist) einem Randelement α_1' von $\mathfrak{G}$, in dem C den erreichbaren Punkt, sagen wir a, approximiert; wir unterscheiden demgemäß zwei Fälle.

Im ersten Fall ist ϱ in einem (von C nicht approximierten) Intervall $\varDelta$ von Randelementen von $\mathfrak{G}$ enthalten, das durch zwei Randelemente α_1 und α_2 abgeschlossen wird, in denen C denselben (erreichbaren) Punkt, sagen wir a, approximiert. $\varDelta$ ist zugleich Intervall von Randelementen von $\mathfrak{H}$; dabei entsprechen den α_1 und α_2 in $\mathfrak{H}$ die Randelemente $\tilde{\alpha}_1$ und $\tilde{\alpha}_2$. In diesen ist a ein für $\mathfrak{H}$ erreichbarer Punkt; denn: aus der Folge der zu a konzentrischen Kreisschnitte $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2 \ldots, \mathfrak{k}_n \ldots$, die in $\mathfrak{G}$ etwa gegen α_1 konvergieren, entsteht in $\mathfrak{H}$ (von einem gewissen Index ab) eine Folge von Teilkreisschnitten $\tilde{\mathfrak{k}}_1, \tilde{\mathfrak{k}}_2 \ldots, \mathfrak{k}_n \ldots$, die in $\mathfrak{H}$ gegen $\tilde{\alpha}_1$ konvergieren und deren Endpunkte je in $\varDelta$ bzw. C liegen; verläuft nun ein a in $\tilde{\alpha}_1$ approximierender Streckenzug $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{H}$ stets in hinreichender Nähe von C, so wird $\mathfrak{a}$ nur den Punkt a approximieren.

Im zweiten Falle gehört s einem (α_1' entsprechenden) Randelement $\tilde{\alpha}_1'$ von $\mathfrak{H}$ an. Also gibt es eine Folge von inneren

Punkten von $\mathfrak{H}$, die gegen s in $\tilde{a}_1'$ konvergieren, und deshalb eine gegen s in $\tilde{a}_1'$ konvergierende Folge von erreichbaren Randpunkten $e_1, e_2 \ldots, e_n \ldots$ von $\mathfrak{H}$ und daher auch von $\mathfrak{G}$; und zwar gehören diese erreichbaren Randpunkte $e_1, e_2 \ldots, e_n \ldots$ zu einer gegen $\tilde{a}_1'$ konvergierenden Folge von Randelementen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots, \varepsilon_n \ldots$ von $\mathfrak{H}$ (und $\mathfrak{G}$). Ein von ε_n und ε_{n+1} begrenztes, a_1' nicht enthaltendes Intervall von Randelementen von $\mathfrak{G}$ sei mit Δ_n bezeichnet. Verbindet man in $\mathfrak{H}$ e_n (von ε_n) mit e_{n+1} (von ε_{n+1}) durch einen einfachen Streckenzug (Querschnitt) $\mathfrak{f}_n$ (der also von C nicht getroffen wird), so wird durch $\mathfrak{f}_n$ aus $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ ein Teilgebiet $\mathfrak{D}_n$ abgeschnitten, in welches C nicht eindringt und an dessen Begrenzung Δ_n teilnimmt. Also alle Δ_n und sämtliche e_n mit den zugehörigen Randelementen ε_n von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ werden von C nicht approximiert; deshalb ist $\tilde{a}_1'$ (bzw. a_1') Endelement eines von C nicht approximierten Intervalls Δ' von Randelementen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$. Daher muß (wie oben) a in $\tilde{a}_1'$ erreichbarer Punkt sein. Ferner muß es in $\mathfrak{H}$ ein zweites Endelement $\tilde{a}_2'$ von Δ' geben, das aus dem Endelement a_2' von Δ' in $\mathfrak{G}$ durch Eindringen von C entsteht; und zwar muß C in a_2' nach dem obigen denselben Punkt a approximieren, so daß a auch erreichbarer Punkt von $\tilde{a}_2'$ in $\mathfrak{H}$ ist.

In beiden Fällen kann man also in $\mathfrak{H}$, etwa von q aus, einfache Wege $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ ziehen, die in $\tilde{a}_1$ (bzw. $\tilde{a}_1'$) und $\tilde{a}_2$ (bzw. $\tilde{a}_2'$) den Punkt a erreichen und außer a und q keinen Punkt gemeinsam haben. Das Polygon (mit eventuell unendlich vielen Seiten) $\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2)$ zerlegt die Ebene in zwei Teilgebiete $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$. Da nun auf dem Rande von $\mathfrak{G}$ Δ (bzw. Δ') durch a_1 und a_2 (bzw. a_1' und a_2') von Δ_1 getrennt wird, also Δ (bzw. Δ') und Δ_1 sich in $\mathfrak{G}$ mit verschiedenen Seiten von $\mathfrak{r}$ verbinden lassen, so liegen s und q_1 in verschiedenen Gebieten $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$. Es ist daher nicht möglich, s mit q_1 zu verbinden, ohne $\mathfrak{r}$ zu überschreiten, d. h. (bei Vermeidung von a), ohne in $\mathfrak{H}$ einzudringen, was im Widerspruch mit der obigen Aussage über $\mathfrak{f}$ steht. Demnach ist die Existenz von $\mathfrak{H}$ mit der Voraussetzung über C nicht verträglich. w. z. b. w.

Aus Satz 4 folgt nun:

Satz 5: Sei C eine lückenlos zusammenhängende Menge, die in $\mathfrak{G}$ gelegen ist und genau die beiden Randpunkte a und b approximiert, und gehöre die Begrenzung B von $\mathfrak{G}$ einem einzigen Komplementärgebiet von C an; dann werden in $\mathfrak{G}$ durch C genau zwei Teilgebiete bestimmt, an deren Begrenzung (abgesehen von a und b) die Ableitung $\overline{C}$ von C und B gemeinsam teilnehmen. (Eventuell sind noch andere von $\overline{C}$ allein begrenzte Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ vorhanden.)

Zusatz: Bestimmt C in der Ebene m Komplementärgebiete, so wird $\mathfrak{G}$ durch C insgesamt in $(m+1)$ Teilgebiete zerlegt.

Beweis: Wenn C nur ein einziges Komplementärgebiet in der Ebene bestimmt, dann haben wir den Fall des Satzes 4. Andernfalls bestimmt C außer dem Komplementärgebiet $\mathfrak{E}_0$, in welchem B liegt, noch andere Komplementärgebiete $\mathfrak{E}_n$ $(n = 1, 2 \ldots)$. Diese $\mathfrak{E}_n$ liegen, wie C, ganz innerhalb $\mathfrak{G}$; denn man kann jeden Punkt eines $\mathfrak{E}_n$ mit C verbinden, ohne B zu überschreiten. Vereinigt man also diese $\mathfrak{E}_n$ mit $\overline{C}$ unter Weglassung von a und b, so erhält man wieder eine lückenlos zusammenhängende Menge C^*, die nun die Voraussetzungen des Satzes 4 erfüllt.

Aus Satz 5 und Zusatz ergibt sich unmittelbar:

Satz 6: Es seien in der Ebene zwei beschränkte, lückenlos zusammenhängende Mengen C_1 und C_2 vorgelegt, die beide genau zwei Punkte a und b gleichzeitig approximieren und von denen jedes in einem einzigen Komplementärgebiet des andern liegt, dann bestimmt die Vereinigungsmenge $(\overline{C}_1 + \overline{C}_2)$ der Ableitungen von C_1 und C_2 in der Ebene genau zwei Komplementärgebiete, die (abgesehen von a und b) zugleich von Punkten von $\overline{C}_1$ und $\overline{C}_2$ begrenzt werden.

Bestimmen C_1 bzw. C_2 in der Ebene m_1 bzw. m_2 Komplementärgebiete, so teilt $(\overline{C}_1 + \overline{C}_2)$ die Ebene insgesamt in $(m_1 + m_2)$ Teilgebiete[1].

---

[1]) In Satz 6 ist als Spezialfall die *folgende Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes* enthalten: *Bestimmen die beiden elementen-*

Bemerkung: Gemäß Satz 5 genügt es für Satz 6, wenn eine der beiden Mengen C_1 und C_2 beschränkt ist. Dagegen gilt Satz 6 nicht mehr, wenn C_1 und C_2 beide nicht beschränkt sind, wie das Beispiel in § 4 zeigt.

§ 4. Über irreduzible Kontinua.

Satz 7: Ist C_1 ein Kontinuum, das die Punkte a und b enthält, ist ferner $\mathfrak{C}_2$ ein zwischen a und b irreduzibles Kontinuum, das mit C_1 nur die beiden Punkte a und b gemeinsam hat, dann kann $\mathfrak{C}_2$ nur in einem einzigen Komplementärgebiet von C_1 liegen.

Beweis: Angenommen, daß $\mathfrak{C}_2$ in mindestens zwei Komplementärgebiete $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2 \ldots$ von C_1 eindringe. Wird dann mit T_1 das zu $\mathfrak{H}_1$ komplementäre Kontinuum der Ebene bezeichnet, wird ferner unter $(\mathfrak{C}_2 \mathfrak{H}_1)$ bzw. $(\mathfrak{C}_2 T_1)$ der Durchschnitt von $\mathfrak{C}_2$ mit $\mathfrak{H}_1$ bzw. T_1 verstanden, dann kann wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{C}_2$ keine der beiden abgeschlossenen, a und b umfassenden Mengen $((\mathfrak{C}_2 \mathfrak{H}_1) + a + b)$ und $(\mathfrak{C}_2 T_1)$ ein Kontinuum sein. Also zerfallen $((\mathfrak{C}_2 \mathfrak{H}_1) + a + b)$ in die beiden nicht leeren, abgeschlossenen, elementenfremden Teilmengen $\mathfrak{C}^1_*$ und $\mathfrak{C}^2_*$, $(\mathfrak{C}_2 T_1)$ in die beiden nicht leeren, abgeschlossenen, elementenfremden Teilmengen $\mathfrak{C}^1_{**}$ und $\mathfrak{C}^2_{**}$. Jede dieser vier Teilmengen muß einen der Punkte a, b enthalten; denn andernfalls würde die betr. Menge und der Rest von $\mathfrak{C}_2$ eine Zerlegung von $\mathfrak{C}_2$ in zwei abgeschlossene, elementenfremde Teilmengen darstellen. Es enthalten also etwa $\mathfrak{C}^1_*$ und $\mathfrak{C}^1_{**}$ den Punkt a, $\mathfrak{C}^2_*$ und $\mathfrak{C}^2_{**}$ den Punkt b. Dann müßte $\mathfrak{C}_2$ in die beiden nicht leeren, abgeschlossenen, elementenfremden Teilmengen $(\mathfrak{C}^1_* + \mathfrak{C}^1_{**})$ und $(\mathfrak{C}^2_* + \mathfrak{C}^2_{**})$ zerfallen. Also ist unsere Annahme unmöglich: $\mathfrak{C}_2$ liegt deshalb in einem einzigen Komplementärgebiet von C_1.

---

fremden, beschränkten, lückenlos zusammenhängenden Mengen C_1 und C_2 je ein einziges Komplementärgebiet in der Ebene und approximieren beide zugleich genau die zwei Punkte a und b, dann wird die Ebene durch $(\overline{C}_1 + \overline{C}_2)$ in genau zwei Teilgebiete zerlegt.

Aus Satz 7 folgt unmittelbar:

Satz 8: Sind die beiden Kontinua $\mathfrak{C}_1$ *und* $\mathfrak{C}_2$ *zwischen* a *und* b *irreduzibel und haben sie außer* a *und* b *keinen Punkt gemeinsam, dann liegt* $\mathfrak{C}_1$ *in einem einzigen Komplementärgebiet von* $\mathfrak{C}_2$ *und* $\mathfrak{C}_2$ *in einem einzigen Komplementärgebiet von* $\mathfrak{C}_1$.

Es sei bemerkt, daß das in Satz 8 ausgezeichnete Komplementärgebiet von $\mathfrak{C}_2$ (bzw. $\mathfrak{C}_1$) von dem ganzen Kontinuum $\mathfrak{C}_2$ (bzw. $\mathfrak{C}_1$) begrenzt wird [wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{C}_2$ (bzw. $\mathfrak{C}_1$) und weil a und b der Begrenzung des betreffenden Gebietes angehören].

Ähnlich wie Satz 7 ergibt sich noch der folgende

Hilfsatz f: Ist $\mathfrak{C}$ *ein zwischen den Punkten* a *und* b *irreduzibles Kontinuum, so ist die nach Weglassung von* a *und* b *entstehende Menge* $\mathfrak{C}^*$ *eine lückenlos zusammenhängende Menge*[1]).

Beweis: Angenommen, $\mathfrak{C}^*$ wäre nicht lückenlos zusammenhängend, dann wäre eine Zerlegung von $\mathfrak{C}^*$ in zwei nicht leere, in $\mathfrak{C}^*$ abgeschlossene, elementenfremde Teilmengen $\mathfrak{C}_1^*$ und $\mathfrak{C}_2^*$ möglich. Wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{C}$ könnte dann keine der beiden abgeschlossenen Mengen $(\mathfrak{C}_1^* + a + b)$ und $(\mathfrak{C}_2^* + a + b)$ ein Kontinuum sein. Es zerfiele also $(\mathfrak{C}_1^* + a + b)$ in die beiden nicht leeren, abgeschlossenen, elementenfremden Teilmengen $\mathfrak{C}_1^1$ und $\mathfrak{C}_1^2$, $(\mathfrak{C}_2^* + a + b)$ in die beiden nicht leeren,

---

[1]) Hilfsatz f wäre nicht mehr richtig, wenn man darin den Begriff „lückenlos zusammenhängende Menge" durch den engeren Begriff „nicht abgeschlossenes Kontinuum" ersetzen würde. Beispiel: Das für $-\frac{1}{\pi} \leq x \leq +\frac{1}{\pi}$ durch $y = f(x)$ dargestellte, zwischen a und b irreduzible Kontinuum, wobei unter a der Punkt $x = -\frac{1}{\pi}$, $y = 0$, unter b der Punkt $x = +\frac{1}{\pi}$, $y = 0$ verstanden werde:

$$y = f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{|x| - \frac{1}{\pi}}\right) & \text{für } -\frac{1}{\pi} < x < +\frac{1}{\pi} \\ -1 \leq y \leq +1 & \text{für } x = \pm\frac{1}{\pi}. \end{cases}$$

abgeschlossenen, elementenfremden Teilmengen $\mathfrak{C}_2^1$ und $\mathfrak{C}_2^2$. Jede dieser vier Teilmengen müßte einen der Punkte a, b enthalten; denn andernfalls würde die betreffende Menge und der Rest von $\mathfrak{C}$ eine Zerlegung von $\mathfrak{C}$ in zwei abgeschlossene, elementenfremde Teilmengen darstellen. Also enthielten etwa $\mathfrak{C}_1^1$ und $\mathfrak{C}_2^1$ den Punkt a, ebenso $\mathfrak{C}_1^2$ und $\mathfrak{C}_2^2$ den Punkt b. Dann zerfiele $\mathfrak{C}$ in die beiden abgeschlossenen, elementenfremden Mengen $(\mathfrak{C}_1^1 + \mathfrak{C}_2^1)$ und $(\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2)$. Die gemachte Annahme ist daher unmöglich; $\mathfrak{C}^*$ muß demnach lückenlos zusammenhängend sein.

Aus Satz 8, Hilfsatz f und Satz 6 folgt nun:

Satz 9: Ist $\mathfrak{C}$ die Vereinigungsmenge von zwei beschränkten, zwischen den Punkten a und b irreduziblen Kontinuen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, die außer a und b keinen Punkt gemeinsam haben, dann gibt es in der Ebene genau zwei Komplementärgebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ von $\mathfrak{C}$, an deren Begrenzung (von a und b abgesehen) zugleich $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ beteiligt sind.

Die übrigen von $\mathfrak{C}$ eventuell bestimmten Komplementärgebiete werden (von a und b abgesehen) von Punkten von $\mathfrak{C}_1$ oder von $\mathfrak{C}_2$ allein begrenzt.

Wir zeigen nun, daß diese beiden ausgezeichneten Gebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ von dem ganzen Kontinuum $\mathfrak{C}$ begrenzt werden:

An der Begrenzung von $\mathfrak{G}_1$ (analog für $\mathfrak{G}_2$) nimmt, gemäß dem Anfang des Beweises von Satz 4, ein Intervall A_1 von ganz aus Punkten von $\mathfrak{C}_1$ bestehenden Randelementen teil, das in $\mathfrak{G}_1$ von zwei Randelementen α und β abgeschlossen wird, in denen a bzw. b erreichbare Punkte sind. Fügt man zu A_1 seine in α und β enthaltenen Häufungspunkte hinzu, so erhält man ein a und b umfassendes Kontinuum $\bar{A}_1$ (denn $\bar{A}_1$ ist die abgeschlossene, zusammenhängende Menge, die entsteht, wenn man zu den in $\mathfrak{G}_1$ erreichbaren Punkten von A_1 alle Häufungspunkte hinzunimmt). $\bar{A}_1$ besteht durchweg aus Punkten von $\mathfrak{C}_1$ und ist deshalb wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{C}_1$ mit $\mathfrak{C}_1$ identisch. Ebenso ergibt sich, daß ganz $\mathfrak{C}_2$ an der Begrenzung von $\mathfrak{G}_1$ (bzw. $\mathfrak{G}_2$) teilnimmt.

Wir sind so zu dem folgenden Ergebnis gelangt:

Hauptsatz: Ist $\mathfrak{C}$ die Vereinigungsmenge von zwei beschränkten, zwischen den Punkten a und b irreduziblen Kontinuen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$, die außer a und b keinen Punkt gemeinsam haben, dann bestimmt $\mathfrak{C}$ in der Ebene stets genau zwei Komplementärgebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, die von dem ganzen Kontinuum $\mathfrak{C}$ begrenzt werden.

Die übrigen von $\mathfrak{C}$ eventuell bestimmten Komplementärgebiete werden (von a und b abgesehen) von Punkten von $\mathfrak{C}_1$ oder von $\mathfrak{C}_2$ allein begrenzt.

Ist C irgend ein Kontinuum in der Ebene, so wollen wir jedes Komplementärgebiet von C, dessen Begrenzung mit dem ganzen Kontinuum C identisch ist, als (von C bestimmtes) „Hauptgebiet" bezeichnen, jedes andere (also nur von einem Teil von C begrenzte) Komplementärgebiet von C als „Nebengebiet". Dann erhalten wir die folgende *andere Fassung des Hauptsatzes:*

$\mathfrak{C}$ bestimmt in der Ebene stets genau zwei Hauptgebiete. Die etwa vorhandenen Nebengebiete werden von $\mathfrak{C}_1$ oder von $\mathfrak{C}_2$ allein begrenzt.

Wir fügen noch einige Bemerkungen an:

$\mathfrak{C}$ kann beliebig viele, sogar abzählbar unendlich viele Nebengebiete bestimmen. Denn dies gilt schon für das einzelne irreduzible Kontinuum $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$; einfaches Beispiel: man füge n solche irreduzible Kontinua, wie $\mathfrak{C}_1$ in Fußnote 3 auf Seite 92, aneinander bzw. abzählbar unendlich viele solche Kontinua mit einem einzigen Häufungspunkt.

Ferner sei hervorgehoben, daß ein einzelnes beschränktes, zwischen a und b irreduzibles Kontinuum $\mathfrak{C}_1$ in der Ebene mehr als ein Hauptgebiet bestimmen kann, wie merkwürdige Beispiele von L. E. J. Brouwer[1]) zeigen. Andererseits gibt es zwischen a und b irreduzible Kontinua $\mathfrak{C}_0$, die überhaupt kein Hauptgebiet bestimmen; es kann nämlich sein, daß kein

[1]) L. E. J. Brouwer, Math. Ann. 68 (1909/10), p. 423/6 und Proc. Amsterdam. Akad. 1911, p. 139/145.

Komplementärgebiet von $\mathfrak{C}_0$ gleichzeitig a und b auf seiner Begrenzung enthält; einfaches Beispiel: Sei K_0 eine Kreislinie; von einem äußeren Punkt a aus lege man eine asymptotisch um K_0 sich windende Spirale S_a, von einem innern Punkt b eine andere K_0 von innen approximierende Spirale S_b; die Vereinigung $\mathfrak{C}_0$ von S_a, S_b, K_0 ist zwischen a und b irreduzibel. Natürlich kann ein derartiges irreduzibles Kontinuum $\mathfrak{C}_0$ niemals die Rolle von $\mathfrak{C}_1$ oder $\mathfrak{C}_2$ in unserm Hauptsatz spielen. — Also für ein irreduzibles Kontinuum gilt keineswegs immer die Verallgemeinerung des Satzes, daß ein einfacher (Jordanscher) Kurvenbogen ein einziges Hauptgebiet bestimmt.

Im Satz 9 und im Hauptsatz kann man mit einer etwas geringeren Voraussetzung über $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ auskommen: man braucht (vgl. Schlußbemerkung zu Satz 6) nur von einem der beiden Kontinua $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ die Beschränktheit vorauszusetzen.

Würde aber für beide Kontinua $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ die Bedingung der Beschränktheit weggelassen, so wären Satz 9 und der Hauptsatz, ebenso Satz 6 in der Euklidischen Ebene nicht mehr richtig, wie folgendes Beispiel zeigt:

Es sei

$$\text{Punkt } a\text{: } x = -\frac{1}{\pi},\ y = 0; \quad \text{Punkt } b\text{: } x = +\frac{1}{\pi},\ y = 0;$$

$\mathfrak{C}_1$ werde dargestellt durch

$$y = \left|\frac{1}{x}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \quad \text{für} \quad -\frac{1}{\pi} \leqq x \leqq +\frac{1}{\pi},$$

wobei y für $x = 0$ alle Werte $\geqq 0$ annehme; $\mathfrak{C}_2$ werde dargestellt durch

$$y = \begin{cases} -\left|\frac{1}{x}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| - 1 & \text{für } -\frac{1}{2\pi} < x \leqq +\frac{1}{2\pi} \\ 2\pi|x| - 2 & \text{für } \frac{1}{2\pi} \leqq |x| \leqq \frac{1}{\pi}, \end{cases}$$

wobei y für $x = 0$ alle Werte $\leqq -1$ annehme.

Aus diesem Beispiel geht zugleich hervor, daß die Sätze 4 und 5 nicht allgemein giltig wären, wenn von dem Gebiet $\mathfrak{G}$

nicht vorausgesetzt worden wäre, daß seine Begrenzung B beschränkt sein soll.

Zum Schluß wollen wir noch eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes angeben, die dadurch entsteht, daß mehr als zwei irreduzible Kontinua zusammengefügt werden. Wir schicken die beiden folgenden Hilfsätze voraus:

Hilfsatz g: Sei $\mathfrak{C}_1$ *ein zwischen* a *und* b *irreduzibles Kontinuum und* $\mathfrak{C}_2$ *ein zwischen* b *und* c *irreduzibles Kontinuum; außer dem Punkt* b *sollen* $\mathfrak{C}_1$ *und* $\mathfrak{C}_2$ *keinen Punkt gemeinsam haben; dann ist die Vereinigungsmenge* $\mathfrak{C}'$ *von* $\mathfrak{C}_1$ *und* $\mathfrak{C}_2$ *ein zwischen* a *und* c *irreduzibles Kontinuum.*

Beweis: $\mathfrak{C}$ ist ein Kontinuum. Angenommen, es wäre nicht zwischen a und c irreduzibel; dann gäbe es in $\mathfrak{C}$ jedenfalls ein zwischen a und c irreduzibles Teilkontinuum $\mathfrak{C}_0$. Dann müßte $\mathfrak{C}_0$ den Punkt b enthalten, da andernfalls $\mathfrak{C}_0$ in die beiden nicht leeren, abgeschlossenen, elementenfremden Durchschnitte $(\mathfrak{C}_0\,\mathfrak{C}_1)$ und $(\mathfrak{C}_0\,\mathfrak{C}_2)$ zerfallen würde. Ferner könnten nicht beide Durchschnitte $(\mathfrak{C}_0\,\mathfrak{C}_1)$ und $(\mathfrak{C}_0\,\mathfrak{C}_2)$ ein Kontinuum sein, da sonst wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ das Teilkontinuum $\mathfrak{C}_0$ mit $\mathfrak{C}$ identisch wäre. Sei also etwa $(\mathfrak{C}_0\,\mathfrak{C}_1)$ kein Kontinuum; dann zerfällt diese Menge in zwei nicht leere, abgeschlossene, elementenfremde Teilmengen $\mathfrak{C}_*^{I}$ und $\mathfrak{C}_*^{II}$. Jede von diesen muß einen der Punkte a, b enthalten, da andernfalls die betreffende Menge und der Rest von $\mathfrak{C}_0$ eine Zerlegung von $\mathfrak{C}_0$ in zwei abgeschlossene, elementenfremde Mengen darstellen würde. Enthalte also $\mathfrak{C}_*^{I}$ den Punkt a und $\mathfrak{C}_*^{II}$ den Punkt b. Dann wäre $\mathfrak{C}_*^{I}$ und $(\mathfrak{C}_*^{II} + (\mathfrak{C}_0\,\mathfrak{C}_2))$ eine Zerlegung von $\mathfrak{C}_0$ in zwei abgeschlossene, elementenfremde Teilmengen. Also kann die Annahme, daß $\mathfrak{C}$ nicht zwischen a und c irreduzibel ist, nicht richtig sein.

Aus Hilfsatz g folgt sofort durch Schluß von n auf $n+1$:

Hilfsatz h: Es seien $a_1, a_2 \ldots a_m$ *endlich viele, verschiedene Punkte in der Ebene. Ferner sei* $\mathfrak{C}_k$ *ein irreduzibles Kontinuum zwischen* a_k *und* a_{k+1} *(für* $k = 1, 2 \ldots, m-1$*) und diese* $\mathfrak{C}_k$ *sollen, abgesehen von dem gemeinsamen Endpunkt* *zweier aufeinander folgender Kontinua, paarweise keine Punkte gemeinsam haben. Dann ist die Vereinigung* $\mathfrak{C}$ *aller* $\mathfrak{C}_k$ *ein zwischen* a_1 *und* a_m *irreduzibles Kontinuum.*

Nimmt man die Hilfsätze g und h mit dem Hauptsatz zusammen, so erhält man schließlich als Verallgemeinerung des Hauptsatzes:

Satz 10: Es seien $a_1, a_2 \ldots, a_m$ *endlich viele, verschiedene Punkte in der Ebene. Ferner sei* $\mathfrak{C}_k$ *ein irreduzibles Kontinuum zwischen* a_k *und* a_{k+1} *(für* $k = 1, 2 \ldots, m-1$*) und außerdem sei* $\mathfrak{C}_m$ *ein irreduzibles Kontinuum zwischen* a_m *und* a_1 *und alle diese* $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \ldots, \mathfrak{C}_m$ *sollen, abgesehen von dem gemeinsamen Endpunkt zweier (in zyklischer Ordnung) aufeinander folgender Kontinua, paarweise keine Punkte gemeinsam haben. Dann bestimmt die Vereinigungsmenge* $\mathfrak{C}$ *aller* $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \ldots, \mathfrak{C}_m$ *genau zwei Hauptgebiete und die eventuell vorhandenen Nebengebiete werden nur von Punkten je eines einzigen* $\mathfrak{C}_k$ *(*$k = 1, 2 \ldots m$*) begrenzt.*

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1919

Band/Volume: 1919

Autor(en)/Author(s): Rosenthal Arthur

Artikel/Article: Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua 91-109