Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1919. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1919
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über orthogonale Kurvensysteme in der Ebene.

Von **Max Lagally.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 1. März 1919.

1. Orthogonale Kurvensysteme in der Ebene werden im allgemeinen in der Weise eingeführt, daß die eine Kurvenschar als gegeben betrachtet und die andere, die der Orthogonal-Trajektorien, durch die Forderung der Orthogonalität bestimmt wird. Unter den Klassen von Orthogonal-Systemen, bei denen beide Kurvenscharen von vornherein als gleichberechtigt auftreten, ist die der Isothermen-Systeme bei weitem die wichtigste.

Die folgende Untersuchung stellt sich auf den Standpunkt der gleichzeitigen Einführung der beiden Kurvenscharen. Es wird ein Weg angegeben, auf dem es gelingt, unendlich viele Klassen von orthogonalen Kurvensystemen aufzustellen; zugleich ergibt sich die Möglichkeit einer systematischen Aufzählung, indem jede dieser Klassen durch zwei ganze Zahlen, die „Rangzahlen“ der Klasse, gekennzeichnet ist.

Bezogen auf zwei beliebige Systeme von Kurven u und v stellen sich die rechtwinkligen Punktkoordinaten in der Ebene durch

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v)$$

dar. Das Linienelement der Ebene ist

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2; \quad F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}; \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2;$$

die Orthogonalitäts-Bedingung ist $F = 0$.

Man kann stets eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung (Laplacesche Gleichung) einer Funktion $\vartheta\,(u, v)$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial v} + a_0\,(u, v)\,\frac{\partial \vartheta}{\partial u} + b_0\,(u, v)\,\frac{\partial \vartheta}{\partial v} = 0$$

aufstellen, welche x, y und 1 zu partikulären Integralen hat. Durch Multiplikation der beiden Gleichungen für $\vartheta = x$ und $\vartheta = y$ mit x bzw. y und Addition ergibt sich nach vereinfachender Zusammenfassung

$$\frac{\partial^2 (x^2 + y^2)}{\partial u\, \partial v} + a_0\,(u, v)\,\frac{\partial\,(x^2 + y^2)}{\partial u} + b_0\,(u, v)\,\frac{\partial\,(x^2 + y^2)}{\partial v} = 2\,F.$$

Wenn also $F = 0$ ist, und nur in diesem Fall, ist $x^2 + y^2$ ein 4. partikuläres Integral der Laplaceschen Gleichung.

Zwischen den 4 Integralen

$$\vartheta_1 = x; \quad \vartheta_2 = y; \quad \vartheta_3 = 1; \quad \vartheta_4 = x^2 + y^2$$

besteht die quadratische Beziehung

$$\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 = \vartheta_3\,\vartheta_4.$$

Diese ändert ihre Form nicht bei Einführung homogener Koordinaten

$$x_1 = \varrho\, x; \quad x_2 = \varrho\, y; \quad x_3 = \varrho;$$

und des entsprechenden 4. Integrals $x_4 = \varrho\,(x^2 + y^2)$, welche einer allgemeineren Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} + a\,(u, v)\,\frac{\partial \theta}{\partial u} + b\,(u, v)\,\frac{\partial \theta}{\partial v} + c\,(u, v)\,\theta = 0$$

genügen. Bei Einführung „tetrazyklischer“ Koordinaten

$$\theta_1 = \varrho x; \; \theta_2 = \varrho y; \; \theta_3 = \varrho\,\frac{1 - x^2 - y^2}{2}; \; \theta_4 = -i\varrho\,\frac{1 + x^2 + y^2}{2}$$

nimmt die quadratische Beziehung folgende Normalform an

$$\sum_1^4{}^{\nu}\, \theta_\nu^2 = 0.$$

Die tetrazyklischen Koordinaten der Punkte der Ebene, bezogen auf ein Orthogonalsystem von Parameterkurven, sind 4 partikuläre Integrale einer Laplaceschen Gleichung.

2. In einer Abhandlung „Beitrag zur Laplaceschen Cascaden-Methode“, die in den Mathematischen Annalen erscheint, habe ich mich allgemein mit Systemen von n Integralen einer Laplaceschen Gleichung beschäftigt, welche einer quadratischen Nebenbedingung genügen. Die Ergebnisse dieser Arbeit, die unter der besonderen Annahme $n = 4$ für die folgende Untersuchung grundlegend sind, seien in Kürze angeführt:

Aus einer Laplaceschen Gleichung

$$E = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a(u, v)\frac{\partial z}{\partial u} + b(u, v)\frac{\partial z}{\partial v} + c(u, v)z = 0$$

können durch Anwendung der Laplaceschen Transformation nach u und nach v

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial v} + az; \quad \frac{\partial z_1}{\partial u} + bz_1 = hz$$

$$z_{-1} = \frac{\partial z}{\partial u} + bz; \quad \frac{\partial z_{-1}}{\partial v} + az_{-1} = kz$$

zwei neue Laplacesche Gleichungen $E_1 = 0$ in z_1 und $E_{-1} = 0$ in z_{-1} abgeleitet werden, deren Integration mit der Integration von $E = 0$ äquivalent ist. Dabei bedeuten h und k die „Invarianten“ der Ausgangsgleichung:

$$h = \frac{\partial a}{\partial u} + ab - c; \quad k = \frac{\partial b}{\partial v} + ab - c.$$

Die Laplacesche Transformation ist entweder nach beiden Seiten hin unbegrenzt fortsetzbar, oder sie bricht bei der p. bzw. $-q$. Transformierten ab.

In diesem Fall läßt sich das allgemeine Integral der letzten Transformierten E_p bzw. E_{-q} auf die Form bringen:

$$z_p = U(u) + \int \beta(u, v)\psi(v)\,dv; \quad z_{-q} = V(v) + \int \alpha(u, v)\varphi(u)\,du,$$

wo $U(u)$, $\varphi(u)$, $V(v)$, $\psi(v)$ willkürliche Funktionen von u bzw. v allein bedeuten, $\alpha(u, v)$ und $\beta(u, v)$ dagegen bestimmte Funktionen von u und v. Ein unwesentlicher Faktor, der allen partikulären Integralen gemeinsam ist, ist weggelassen. Die Ausgangsgleichung heißt dann „vom Rang $p+1$ hinsichtlich u bzw. $q+1$ hinsichtlich v".

Besteht zwischen n Integralen von $E=0$ eine quadratische Bedingung

$$\sum_1^n{}^{\nu} z_\nu^2 = 0,$$

so genügen die n Integrale $z_{i\nu}$ von $E_i=0$, welche durch i-malige Transformation aus z_ν hervorgehen, und die entsprechenden n Integrale $z_{-i\nu}$ von $E_{-i}=0$ für beliebiges i folgendem Gleichungssystem

$$\sum_1^n{}^{\nu} z_{i,\nu} z_{-i,\nu} = 0 \quad \sum_1^n{}^{\nu} z_{i,\nu} \frac{\partial z_{-i,\nu}}{\partial u} = 0 \quad \sum_1^n{}^{\nu} \frac{\partial z_{i,\nu}}{\partial u} z_{-i,\nu} = 0 \quad \sum_1^n{}^{\nu} \frac{\partial z_{i,\nu}}{\partial u} \frac{\partial z_{-i,\nu}}{\partial v} = 0$$

$$\sum_1^n{}^{\nu} z_{i,\nu} \frac{\partial z_{-i,\nu}}{\partial v} = 0 \quad \sum_1^n{}^{\nu} \frac{\partial z_{i,\nu}}{\partial v} z_{-i,\nu} = 0 \quad \sum_1^n{}^{\nu} \frac{\partial z_{i,\nu}}{\partial v} \frac{\partial z_{-i,\nu}}{\partial u} = 0$$

welches seinerseits für das Bestehen der quadratischen Bedingung notwendig und hinreichend ist.

Um zu Integralen zu gelangen, die in geschlossener Form angebbar sind, ist vorausgesetzt, daß $E=0$ hinsichtlich u von endlichem Rang $p+1$ ist. Dann ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit des Bestehens einer quadratischen Beziehung zwischen einer Anzahl n von linear unabhängigen partikulären Integralen, daß sie auch hinsichtlich v von endlichem Rang $q+1$ ist.

Wählt man die Bezeichnungen so, daß

$$q \geqq p$$

ist, so ist n an die Bedingung geknüpft:

$$n \geqq q - p + 2.$$

Das allgemeine Integral von $E=0$ kann in folgende Form gebracht werden:

$$z = \begin{vmatrix} U\,U' & \ldots & U^{(p)}\,V\,V' & \ldots & V^{(q)} \\ x_1\,x_1' & \ldots & x_1^{(p)}\,y_1\,y_1' & \ldots & y_1^{(q)} \\ x_2\,x_2' & \ldots & x_2^{(p)}\,y_2\,y_2' & \ldots & y_2^{(q)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m\,x_m' & \ldots & x_m^{(p)}\,y_m\,y_m' & \ldots & y_m^{(q)} \end{vmatrix}.$$

Dabei bedeutet U eine willkürliche Funktion von u allein, V von v allein; $x_1, x_2 \ldots, x_m$ sind bestimmte Funktionen von u allein, $y_1, y_2 \ldots, y_m$ von v allein. Außerdem ist

$$m = p + q + 1.$$

Durch Transformation der quadratischen Bedingung in sich läßt sich eine Normierung der Integrale erreichen, derart, daß ein Teil von ihnen nur eine willkürliche Funktion U, der Rest nur eine willkürliche Funktion V enthält; also

$$\sum_1^s{}^\nu \begin{vmatrix} U_\nu\,U_\nu' \ldots U_\nu^{(p)} & 0\;0 \ldots 0 \\ x_1\,x_1' \ldots x_1^{(p)} & y_1\,y_1' \ldots y_1^{(q)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_m\,x_m' \ldots x_m^{(p)} & y_m\,y_m' \ldots y_m^{(q)} \end{vmatrix}^2 + \sum_1^t{}^\nu \begin{vmatrix} 0\;0 \ldots 0 & V_\nu\,V_\nu' \ldots V_\nu^{(q)} \\ x_1\,x_1' \ldots x_1^{(p)} & y_1\,y_1' \ldots y_1^{(q)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_m\,x_m' \ldots x_m^{(p)} & y_m\,y_m' \ldots y_m^{(q)} \end{vmatrix}^2 = 0.$$

Dabei ist $\qquad s + t = n.$

s und t selbst genügen den Bedingungen

$$s \geqq p - q + 2; \quad t \geqq q - p + 2,$$

aus denen sich noch $n \geqq 4$ ergibt. Der im folgenden in geometrischen Anwendungen behandelte Fall $n = 4$ ist also der einfachste, bei welchem die allgemeine Theorie noch zur Geltung kommt.

Es handelt sich jetzt um die Aufsuchung von geeigneten n partikulären Integralen. Die s Funktionen $U_\nu(u)$ und die m Funktionen $x_\mu(u)$ müssen das System von $p + 1$ Gleichungen

$$\sum_1^s{}^\nu\, U_\nu^{(\varkappa)2} + \sum_1^m{}^\mu\, x_\mu^{(\varkappa)2} = 0; \quad (\varkappa = 0, 1 \ldots, p)$$

erfüllen; ein analoges System die t Funktionen $V_\nu(v)$ und m Funktionen $y_\mu(v)$

$$\sum_1^t{}^\nu\, V_\nu^{(\lambda)2} + \sum_1^m{}^\mu\, y_\mu^{(\lambda)2} = 0; \quad (\lambda = 0, 1 \ldots, q).$$

Ein derartiges Gleichungssystem, das vereinfacht in der Form

$$\sum_1^N{}' A_\nu^{(\varkappa)2} = 0; \quad (\varkappa = 0, 1 \ldots k)$$

geschrieben sein möge, läßt sich durch schrittweise Reduktion auflösen. Wenn ϱ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet, so genügen N Funktionen B_ν, die mit A_ν durch die Gleichungen $A_\nu = \varrho\, B_\nu$ verbunden sind, denselben Gleichungen wie die A_ν:

$$\sum_1^N{}' B_\nu^{(\varkappa)2} = 0; \quad (\varkappa = 0, 1 \ldots k)$$

Durch geeignete Wahl von ϱ läßt sich erreichen, daß

$$B_{N-1} = \frac{i}{2}\left(1 + \sum_1^{N-2}{}' B_\nu^2\right); \quad B_N = \tfrac{1}{2}\left(1 - \sum_1^{N-2}{}' B_\nu^2\right)$$

wird; dadurch wird die erste Gleichung formal zur Identität, und in allen folgenden verringert sich die Zahl der Summanden um 2; das Gleichungssystem reduziert sich also auf ein System, das eine Gleichung weniger als das Ausgangssystem und in jeder Gleichung 2 Summanden weniger enthält:

$$\sum_1^{N-2}{}' B_\nu^{(\varkappa)2} = 0; \quad (\varkappa = 1, 2 \ldots k).$$

Hat man diese Reduktion so oft durchgeführt, daß nur mehr eine Gleichung übrig bleibt, so erfordert die Bestimmung der Größen A_ν nur Quadraturen.

3. Im Fall $n = 4$ ergeben die allgemeinen Beziehungen zwischen n, p, q, s, t:

$$4 \geqq q - p + 2; \quad q - p \leqq 2; \quad q \geqq p$$
$$s = p - q + 2; \quad t = q - p + 2.$$

Demnach zerfallen die ebenen Orthogonalsysteme in drei verschiedene Typen, je nachdem $q - p$ den Wert 0, 1 oder 2 hat. Führt man noch die „Rangzahlen“

$$r_1 = p + 1; \quad r_2 = q + 1$$

ein, so sind die drei Typen durch folgende Zahlen charakterisiert:

$$\begin{array}{lllll} \text{I. } q = p; & r_1 = p + 1; & r_2 = p + 1; & s = 2; & t = 2 \\ \text{II. } q = p + 1; & r_1 = p + 1; & r_2 = p + 2; & s = 1; & t = 3 \\ \text{III. } q = p + 2; & r_1 = p + 1; & r_2 = p + 3; & s = 0; & t = 4. \end{array}$$

Legt man also der Zahl p alle ganzzahligen positiven Werte (einschließlich 0) bei, so ergibt eine Aufzählung aller ebenen Orthogonalsysteme drei nebeneinander herlaufende Reihen. Die drei Typen werden im folgenden allgemein untersucht und die Ergebnisse zur Aufzählung der einfachsten Fälle und zur Kennzeichnung ihrer geometrischen Eigenschaften verwendet.

4. Die tetrazyklischen Koordinaten sollen in rein geometrischer Weise durch stereographische Projektion der Kugel eingeführt werden; der Übergang zu einer Reihe räumlicher Betrachtungen, die bei der folgenden Untersuchung ebener Orthogonal-Systeme nicht zu umgehen sind, vollzieht sich dann in natürlichster Weise.

Projiziert man einen Punkt (X, Y, Z) der Einheitskugel $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ aus dem Südpol $(0, 0, -1)$ stereographisch in die Äquatorebene $(Z = 0)$, so sind die Koordinaten des Bildpunkts (x, y)

$$x = \frac{X}{1 + Z}; \quad y = \frac{Y}{1 + Z}$$

oder in homogener Form (a ist, wie im folgenden ϱ_0 und ϱ, ein Proportionalitäts-Faktor)

$$a x = X; \quad a y = Y; \quad a = 1 + Z.$$

Hiezu tritt zufolge der Gleichung der Einheitskugel die 4. Gleichung

$$a\,(x^2 + y^2) = 1 - Z.$$

Unter Verzicht auf die Realität der Darstellung bringt man durch die Substitution

$$\theta_1 = \varrho_0 X; \quad \theta_2 = \varrho_0 Y; \quad \theta_3 = \varrho_0 Z; \quad \theta_4 = -\varrho_0 i$$

die Gleichung der Einheitskugel auf die Normalform (3)

$$\sum_1^4 {}_\nu\, \theta_\nu^2 = 0;$$

durch Auflösung der homogenen Formeln für die stereographische Projektion ergeben sich die „tetrazyklischen Punktkoordinaten" der Ebene (2):

$$\theta_1 = \varrho x; \quad \theta_2 = \varrho y; \quad \theta_3 = \varrho \frac{1 - x^2 - y^2}{2}; \quad \theta_4 = -\varrho i \frac{1 + x^2 + y^2}{2}$$

$$(\theta_3 + i\theta_4 = \varrho).$$

Bei dieser Einführung kann man die tetrazyklischen Koordinaten θ_ν $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ nach Wahl als Punktkoordinaten auf der Kugel oder in der Ebene auffassen; die Rückkehr zu den rechtwinkligen Koordinaten vollzieht sich für die Kugelpunkte und für die Punkte ihres ebenen stereographischen Bildes mittels der Formeln:

$$X = \frac{\theta_1}{i\theta_4}; \quad Y = \frac{\theta_2}{i\theta_4}; \quad Z = \frac{\theta_3}{i\theta_4}$$

$$x = \frac{\theta_1}{\theta_3 + i\theta_4}; \quad y = \frac{\theta_2}{\theta_3 + i\theta_4}; \quad \left(x^2 + y^2 = \frac{-\theta_3 + i\theta_4}{\theta_3 + i\theta_4}\right).$$

Ein Kreis auf der Kugel wird als Schnitt der Kugelfläche mit einer Ebene in tetrazyklischen Koordinaten durch eine lineare Gleichung gegeben; ebenso also auch ein Kreis in der Ebene:

$$\sum_1^4{}^\nu \varphi_\nu \theta_\nu = 0.$$

Bei Einführung rechtwinkliger Koordinaten in der Ebene ergibt sich

$$x^2 + y^2 - \frac{2\varphi_1}{\varphi_3 + i\varphi_4} x - \frac{2\varphi_2}{\varphi_3 + i\varphi_4} y - \frac{\varphi_3 - i\varphi_4}{\varphi_3 + i\varphi_4} = 0.$$

Bezeichnet man die Mittelpunktskoordinaten des Kreises in der Ebene mit a, b, die Potenz des Anfangspunktes mit T^2, so ergibt sich die geometrische Bedeutung der „tetrazyklischen Kreiskoordinaten" $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$:

$$\varphi_1 = \sigma a; \quad \varphi_2 = \sigma b; \quad \varphi_3 = \sigma \frac{1 - T^2}{2}; \quad \varphi_4 = -i\sigma \frac{1 + T^2}{2}$$

$$(\varphi_3 + i\varphi_4 = \sigma)$$

σ ist ein Proportionalitäts-Faktor; der Kreisradius[1]) R ergibt sich aus

$$\sqrt{\sum_1^4{}^{\nu}\,\varphi_\nu^2} = \sigma R.$$

Eine lineare Gleichung zwischen den φ_ν

$$\sum_1^4{}^{\nu}\,c_\nu\,\varphi_\nu = 0$$

sagt aus, daß die Ebene (φ) durch einen Punkt (c) hindurchgeht. Alle so definierten Kreise liegen also in den Ebenen eines Bündels mit dem Träger (c); sie schneiden den Kreis, in dem die Polarebene von (c) die Kugel trifft, als „Grundkreis" senkrecht. In der Ebene stellt eine lineare Gleichung zwischen tetrazyklischen Kreiskoordinaten somit die Gleichung eines Kreisnetzes dar.

Ein besonderes Kreisnetz $\varphi_3 + i\varphi_4 = 0$ bilden alle Geraden der Ebene.

Zwei lineare Gleichungen zwischen den φ_ν bestimmen die Kreise eines Büschels.

5. Der Laplaceschen Transformation legt Darboux[2]) folgende geometrische Deutung unter: $\theta_\nu\,(\nu = 1, 2, 3, 4)$ (ohne quadratische Beziehung) seien die homogenen Punktkoordinaten einer Fläche F, auf der die Kurven u und v der Laplaceschen Gleichung zufolge ein konjugiertes System bilden. Legt man in den Punkten von F die Tangenten an die Kurven u, so entsteht eine Strahlenkongruenz, deren erste Brennfläche F ist; die Koordinaten $\theta_{1,\nu}\ (\nu = 1, 2, 3, 4)$ der zweiten Brennfläche F_1 gehen durch die Laplacesche Transformation

$$\theta_{1\,\nu} = \frac{\partial\theta_\nu}{\partial v} + a\,\theta_\nu$$

aus denen der ersten hervor. F wird längs jeder Kurve v von den Ebenen einer abwickelbaren Fläche berührt, deren

[1]) Die durch Einführung des imaginären Radius als 5. Koordinate entstehenden „pentazyklischen Kreiskoordinaten" kommen hier nicht in Betracht.

[2]) Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, II. Bd., S. 16 u. f.

Rückkehrkante die entsprechende Kurve v auf F_1 bildet; ebenso bestimmen die Tangenten einer Kurve u von F eine abwickelbare Fläche, deren Rückkehrkante eben diese Kurve u ist und deren Ebenen F_1 längs der entsprechenden Kurve u berühren.

In gleicher Weise kann man F zur ersten Brennfläche einer Kongruenz machen, die von den Tangenten der Kurven v von F gebildet ist. Die Koordinaten der 2. Brennfläche werden dann durch die Laplacesche Transformation

$$\theta_{-1,\nu} = \frac{\partial \theta_\nu}{\partial u} + b\,\theta_\nu \text{ erhalten.}$$

Beide Transformationen lassen sich fortsetzen, indem man wieder F_1 bzw. F_{-1} zur ersten Brennfläche einer Strahlenkongruenz macht, die auf F_2 bzw. F_{-2} führt usf. Ist die zu F gehörige Laplacesche Gleichung vom Range $i+1$ hinsichtlich einer der beiden Veränderlichen, bricht also die Reihe der Transformierten nach i Operationen ab, so artet die mit F_i als erster Brennfläche konstruierte Kongruenz in der Weise aus, daß ihre 2. Brennfläche eine (im allgemeinen doppelt gekrümmte) Kurve wird.

Der Satz, daß eine Laplacesche Gleichung, welche vier durch eine quadratische Beziehung verbundene Integrale besitzt und welche hinsichtlich der einen Veränderlichen von endlichem Rang r_1 ist, auch hinsichtlich der anderen Veränderlichen von endlichem Rang r_2 ist, wobei $|r_2 - r_1| \leq 2$ ist, hat also folgenden geometrischen Sinn. Die beiden Kurvenscharen eines Orthogonalsystems auf der Kugel dienen als Ausgang zweier Reihen von Strahlen-Kongruenzen, deren 1. Brennfläche in beiden Fällen die Kugel ist. Wenn die eine Reihe nach einer endlichen Anzahl von r_1 Operationen auf eine in eine Kurve ausgeartete letzte Brennfläche führt, so gilt das gleiche für die 2. Reihe nach einer endlichen Anzahl von r_2 Operationen, wobei $|r_2 - r_1| \leq 2$ ist (vgl. Fig. S. 140).

6. Es sei jetzt $P_i(z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}, z_{i,4})$ ein Punkt einer Brennfläche F_i, die nach i Operationen aus der Kugel hervorgeht,

ebenso $P_{-i}(z_{-i,1}, z_{-i,2}, z_{-i,3}, z_{-i,4})$ der entsprechende Punkt einer Brennfläche F_{-i}, die ebenfalls nach i Operationen, aber unter Verwendung der anderen Kurvenschar, aus der Kugel erhalten wird. Wegen $\sum_1^4{}^\nu z_{i,\nu}\, z_{-i,\nu} = 0$ liegt P_{-i} in der Polarebene von P_i und umgekehrt. Die Ebenen-Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 der Tangentialebene von F_i in P_i sind durch die drei Gleichungen bestimmt:

$$\sum_1^4{}^\nu \xi_\nu z_{i,\nu} = 0; \quad \sum_1^4{}^\nu \xi_\nu \frac{\partial z_{i,\nu}}{\partial u} = 0; \quad \sum_1^4{}^\nu \xi_\nu \frac{\partial z_{i,\nu}}{\partial v} = 0.$$

Wegen

$$\sum_1^4{}^\nu z_{i,\nu}\, z_{-i,\nu} = 0; \quad \sum_1^4{}^\nu \frac{\partial z_{i,\nu}}{\partial u} z_{-i,\nu} = 0; \quad \sum_1^4{}^\nu \frac{\partial z_{i,\nu}}{\partial v} z_{-i,\nu} = 0$$

ist
$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = z_{-i,1} : z_{-i,2} : z_{-i,3} : z_{-i,4}.$$

Die Ebenenkoordinaten von F_i sind also den Punktkoordinaten von F_{-i} proportional und umgekehrt.

Die Flächen F_i und F_{-i} liegen in Bezug auf die Ausgangskugel polar. F_{-i} wird von den Polarebenen der Punkte von F_i umhüllt; die Punkte von F_{-i} sind die Pole der Tangentialebenen von F_i.

Sowohl F_i als F_{-i} werden durch $z_{i,\nu}$ und $z_{-i,\nu}$ in doppelter Weise, in Punkt- und Ebenen-Koordinaten, dargestellt. Diese Dualität gilt ohne Zwang, so lange F_i und F_{-i} ∞^2 Punkte und ∞^2 Tangentialebenen besitzen; für die Endglieder der Reihen von Brennflächen, bei denen ein Ausarten in eine Kurve oder abwickelbare Fläche eintritt, sind besondere Betrachtungen nötig.

Die gleiche Polarreziprozität gilt für zwei Strahlenkongruenzen, welche F_i und F_{i+1} bzw. F_{-i} und F_{-i-1} zu Brennflächen haben. Insbesondere sind die beiden Strahlensysteme, welche die Kugel selbst zur ersten Brennfläche haben, zur Kugel polar; entsprechende Strahlen sind aufeinander senkrechte Tangenten der Kugel.

Auf Grund dieser allgemeinen geometrischen Überlegungen werden nun die oben aufgestellten 3 Typen gesondert behandelt.

7. I. Typus. $q = p$; $s = 2$; $t = 2$.

Die tetrazyklischen Koordinaten der Kugelpunkte sind

$$\theta_\nu = \begin{vmatrix} U_\nu & U_\nu' & \dots & U_\nu^{(p)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(p)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \dots & x_m^{(p)} & y_m & y_m' & \dots & y_m^{(p)} \end{vmatrix} \qquad (\nu = 1,2)$$

$$\theta_\pi = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & V_\pi & V_\pi' & \dots & V_\pi^{(p)} \\ x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(p)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \dots & x_m^{(p)} & y_m & y_m' & \dots & y_m^{(p)} \end{vmatrix} \qquad (\pi = 3, 4)$$

Dabei ist $m = 2p + 1$.

p Laplacesche Transformationen im positiven Sinne ergeben die homogenen Punktkoordinaten von F_p, zugleich homogene Ebenenkoordinaten von F_{-p}:

$$\theta_{p,\nu} = \begin{vmatrix} U_\nu & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(2p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & y_m & y_m' & \dots & y_m^{(2p)} \end{vmatrix} = U_\nu \Delta(y) \quad \theta_{p,\pi} = \begin{vmatrix} 0 & V_\pi & V_\pi' & \dots & V_\pi^{(2p)} \\ x_1 & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(2p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & y_m & y_m' & \dots & y_m^{(2p)} \end{vmatrix}$$

Ebenso ergeben p Transformationen im negativen Sinn die homogenen Punktkoordinaten von F_{-p}, zugleich homogene Ebenenkoordinaten von F_p:

$$\theta_{-p,\nu} = \begin{vmatrix} U_\nu & U_\nu' & \dots & U_\nu^{(2p)} & 0 \\ x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(2p)} & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \dots & x_m^{(2p)} & y_m \end{vmatrix} \qquad \theta_{-p,\pi} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & V_\pi \\ x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(2p)} & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \dots & x_m^{(2p)} & y_m \end{vmatrix} = - V_\pi \Delta(x).$$

Zwischen den so bestimmten Koordinaten bestehen folgende Gleichungen:

$$\theta_{p,1} U_2 - \theta_{p,2} U_1 = 0; \quad \theta_{-p,3} V_4 - \theta_{-p,4} V_3 = 0.$$

Hieraus folgt in Punktkoordinaten (x, y, z):

$$x_p U_2 - y_p U_1 = 0; \quad z_{-p} V_4 - V_3 = 0$$

und in Ebenenkoordinaten (ξ, η, ζ)

$$\xi_{-p} U_2 - \eta_{-p} U_1 = 0; \quad \zeta_p V_4 - V_3 = 0.$$

Daraus ergeben sich folgende geometrische Eigenschaften für die transformierten Flächen F_p und F_{-p}:

Auf F_p liegen die Kurven u in Ebenen, die ein Büschel mit der z Achse als Achse bilden; längs der konjugierten Kurven v wird F_p von Kegeln berührt, deren Spitzen die z Achse erfüllen.

F_{-p} wird längs der Kurven u von Zylindern berührt, die zur xy Ebene parallel sind; die konjugierten Kurven v liegen in zur xy Ebene parallelen Ebenen.

Eine weitere Laplacesche Transformation ergibt

$$\theta_{p+1,\nu} = 0; \quad \theta_{p+1,\pi} = \begin{vmatrix} V_\pi & V_\pi' & \ldots & V_\pi^{(2p+1)} \\ y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(2p+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m & y_m' & \ldots & y_m^{(2p+1)} \end{vmatrix} = \psi_\pi(v)$$

$$\theta_{-p-1,\nu} = \begin{vmatrix} U_\nu & U_\nu' & \ldots & U_\nu^{(2p+1)} \\ x_1 & x_1' & \ldots & x_1^{(2p+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \ldots & x_m^{(2p+1)} \end{vmatrix} = \varphi_\nu(u); \quad \theta_{-p-1,\pi} = 0.$$

F_{p+1} und F_{-p-1} arten also, wie auch die geometrische Betrachtung der Strahlensysteme, welche F_p und F_{-p} zur ersten Brennfläche haben, unmittelbar ersehen läßt, in die z Achse bzw. die ∞ ferne Gerade der xy Ebene aus. Es mag darauf hingewiesen werden, daß die besondere Lage dieser beiden Geraden eine Folge der gewählten Normierung der tetrazyklischen Koordinaten ist; ohne diese würden sich zwei beliebige, zur Ausgangskugel polare Gerade ergeben.

F_{p-1} und F_{-p+1} sind die ersten Brennflächen in den Strahlensystemen, welche F_p und F_{-p} zu zweiten Brennflächen haben. Die Tangenten einer Kurve v von F_p berühren auf F_{p-1} die Kurven u in den Punkten der entsprechenden Kurve v. Die Tangentialebenen von F_p in den Punkten einer Kurve v sind also Schmiegungsebenen der Kurven u auf F_{p-1} in den Punkten einer Kurve v. Diese Schmiegungsebenen bilden folglich den Tangentialkegel, der F_p längs der Kurve v berührt, und dessen Spitze auf der Geraden F_{p+1} liegt. Der duale Satz sagt aus, daß die Punkte der Rückkehrkanten der F_{p-1} längs der Kurven v berührenden abwickelbaren Flächen, welche den Punkten einer Kurve u auf F_{p-1} entsprechen, die entsprechende Kurve u auf F_p erfüllen; sie liegen also in einer Ebene des Büschels, welches die Gerade F_{p+1} zum Träger hat. — Die gleichen Sätze gelten, mit Vertauschung von u und v, für F_{-p+1}.

8. II. Typus. $q = p + 1;\ s = 1;\ t = 3.$

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} U & U' & \dots & U^{(p)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(p)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(p+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \dots & x_m^{(p)} & y_m & y_m' & \dots & y_m^{(p+1)} \end{vmatrix}$$

$$\theta_\nu = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & V_\nu & V_\nu' & \dots & V_\nu^{(p+1)} \\ x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(p)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(p+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \dots & x_m^{(p)} & y_m & y_m' & \dots & y_m^{(p+1)} \end{vmatrix} \qquad (\nu = 2, 3, 4).$$

Dabei ist $m = 2p + 2$.

Wie bei I erhält man die homogenen Punktkoordinaten von F_p, zugleich homogene Ebenenkoordinaten von F_{-p}:

$$\theta_{p,1} = \begin{vmatrix} U & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(2p+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & y_m & y_m' & \dots & y_m^{(2p+1)} \end{vmatrix} = U\Delta(y); \quad \theta_{p,\nu} = \begin{vmatrix} 0 & V_\nu & V_\nu' & \dots & V_\nu^{(2p+1)} \\ x_1 & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(2p+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & y_m & y_m' & \dots & y_m^{(2p+1)} \end{vmatrix}$$

Ebenso die homogenen Punktkoordinaten von F_{-p}, zugleich homogene Ebenenkoordinaten von F_p:

$$\theta_{-p,1} = \begin{vmatrix} U & U' & \dots & U^{(2p)} & 0 & 0 \\ x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(2p)} & y_1 & y_1' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \dots & x_m^{(2p)} & y_m & y_m' \end{vmatrix}; \quad \theta_{-p,\nu} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & V_\nu & V_\nu' \\ x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(2p)} & y_1 & y_1' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \dots & x_m^{(2p)} & y_m & y_m' \end{vmatrix}$$

Bezeichnet man mit v_ν die adjungierten Funktionen der V_ν, setzt also

$$\sum_2^4{}^\nu v_\nu V_\nu = 0; \quad \sum_2^4{}^\nu v_\nu V_\nu' = 0,$$

so ist auch

$$\sum_2^4{}^\nu v_\nu \theta_{-p,\nu} = 0.$$

Diese Gleichung sagt in Punktkoordinaten aus: Auf F_{-p} liegen die Kurven v in Ebenen, die einen Zylinder mit zur x Achse parallelen Mantellinien bilden. In Ebenenkoordinaten: F_p wird längs der Kurven v von Kegeln berührt, deren Spitzen auf einer Kurve der Ebene $x = 0$ liegen.

Eine weitere Transformation ergibt:

$$\theta_{p+1,1} = 0; \quad \theta_{p+1,\nu} = \begin{vmatrix} V_\nu & V_\nu' & \dots & V_\nu^{(2p+2)} \\ y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(2p+2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m & y_m' & \dots & y_m^{(2p+2)} \end{vmatrix} = \psi_\nu(v)$$

$$\theta_{-p-1,1} = \begin{vmatrix} U & U' & \dots & U^{(2p+1)} & 0 \\ x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(2p+1)} & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \dots & x_m^{(2p+1)} & y_m \end{vmatrix}; \quad \theta_{-p-1,\nu} = V_\nu \Delta(x).$$

F_{p+1} ist die von den Kegelspitzen gebildete Kurve der Ebene $x = 0$:

$$x = 0; \quad y : z : \sqrt{-1} = \psi_2 : \psi_3 : \psi_4.$$

F_{-p-1} ist der zur x Achse parallele Zylinder; seine Mantellinien sind:

$$y : z : \sqrt{-1} = V_2 : V_3 : V_4.$$

Die Schmiegungsebenen der Kurven u in den Punkten einer Kurve v von F_p gehen durch zwei konsekutive Punkte der Kurve F_{p+1}, bilden also ein Büschel, dessen Träger eine Tangente von F_{p+1} ist.

Dualer Satz: die Punkte der Rückkehrkanten der F_{-p} längs der Kurven u berührenden abwickelbaren Flächen, welche den Punkten einer Kurve v von F_{-p} entsprechen, liegen auf einer Geraden, nämlich einer Mantellinie v des Zylinders F_{-p-1}.

Die Ebenen, welche F_p längs einer Kurve v berühren, sind die Schmiegungsebenen der Kurven u auf F_{p-1} in den Punkten einer Kurve v. Diese gehen also durch einen festen Punkt, nämlich durch die Spitze des Kegels, welcher F_p längs der Kurve v berührt.

Dual: die Punkte der Rückkehrkanten der F_{-p+1} längs der Kurven u berührenden abwickelbaren Flächen, welche den Punkten einer Kurve v von F_{-p+1} entsprechen, liegen in einer Ebene, die den Zylinder F_{-p-1} berührt.

9. III. Typus. $q = p + 2;\ s = 0;\ t = 4.$

Die tetrazyklischen Koordinaten der Kugelpunkte sind:

$$\theta_\nu = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & V_\nu & V_\nu' & \ldots & V_\nu^{(p+2)} \\ x_1 & x_1' & \ldots & x_1^{(p)} & y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(p+2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \ldots & x_m^{(p)} & y_m & y_m' & \ldots & y_m^{(p+2)} \end{vmatrix} \quad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Dabei ist $m = 2p + 3$.

Wie bei I. und II. ergeben p Transformationen nach beiden Seiten:

$$\theta_{p,\nu} = \begin{vmatrix} 0 & V_\nu & V_\nu' & \ldots & V_\nu^{(2p+2)} \\ x_1 & y_1 & y_1' & \ldots & y_1^{(2p+2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & y_m & y_m' & \ldots & y_m^{(2p+2)} \end{vmatrix}; \quad \theta_{-p,\nu} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & V_\nu & V_\nu' & V_\nu'' \\ x_1 & x_1' & \ldots & x_1^{(2p)} & y_1 & y_1' & y_1'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \ldots & x_m^{(2p)} & y_m & y_m' & y_m'' \end{vmatrix}.$$

Dabei sind $\theta_{p,\nu}$ die homogenen Punktkoordinaten von F_p und Ebenenkoordinaten von F_{-p}; $\theta_{-p,\nu}$ die Punktkoordinaten von F_{-p} und Ebenenkoordinaten von F_p.

Bezeichnet man wieder mit v_ν die adjungierten Funktionen der V_ν, definiert also v_ν ($\nu = 1, 2, 3, 4$) durch die 3 Gleichungen:

$$\sum_1^4{}^\nu v_\nu V_\nu = 0; \quad \sum_1^4{}^\nu v_\nu V'_\nu = 0; \quad \sum_1^4{}^\nu v_\nu V''_\nu = 0,$$

aus denen durch Differentiation folgende zwei erhalten werden:

$$\sum_1^4{}^\nu v'_\nu V_\nu = 0; \quad \sum_1^4{}^\nu v'_\nu V'_\nu = 0,$$

so ist auch

$$\sum_1^4{}^\nu v_\nu \theta_{-p,\nu} = 0,$$

also: Auf F_{-p} liegen die Kurven v in Ebenen; diese umhüllen eine abwickelbare Fläche; F_p wird längs der Kurven v von Kegeln berührt, die Spitzen erfüllen eine Raumkurve.

Eine weitere Transformation ergibt:

$$\theta_{p+1,\nu} = \begin{vmatrix} V_\nu & V'_\nu & \dots & V_\nu^{(2p+3)} \\ y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(2p+3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m & y'_m & \dots & y_m^{(2p+3)} \end{vmatrix} = \psi_\nu(v); \quad \theta_{-p-1,\nu} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & V_\nu & V'_\nu \\ x_1 & x'_1 & \dots & x_1^{(2p+1)} & y_1 & y'_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x'_m & \dots & x_m^{(2p+1)} & y_m & y'_m \end{vmatrix}$$

Jetzt ist

$$\sum_1^4{}^\nu v_\nu \theta_{-p-1,\nu} = 0; \quad \sum_1^4{}^\nu v'_\nu \theta_{-p-1,\nu} = 0.$$

Also ist in Punktkoordinaten F_{-p-1} die von den Geraden gebildete Regelfläche, in denen die Ebenen der Kurven v von F_{-p} von den ∞ benachbarten geschnitten werden, d. h. F_{-p-1} ist die von den Ebenen der Kurven v von F_{-p} umhüllte abwickelbare Regelfläche.

Dual: F_{p+1} ist die von den Spitzen der F_p in den Kurven v berührenden Kegel gebildete Raumkurve.

Ihre Punktkoordinaten gibt $\theta_{p+1,\nu}$:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \psi_1 : \psi_2 : \psi_3 : \psi_4.$$

Das sind zugleich die Ebenenkoordinaten von F_{-p-1}.

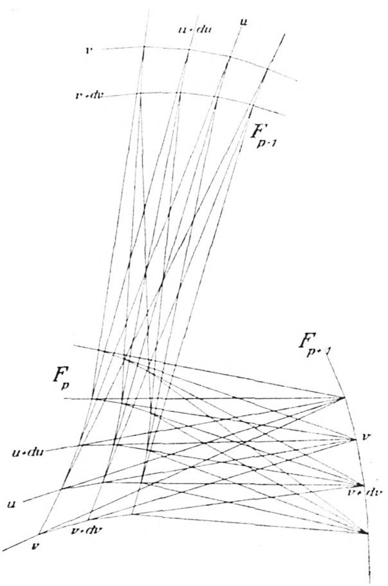
Unter Verwendung des Punktes als Raumelement läßt F_{-p-1} noch eine Transformation zu:

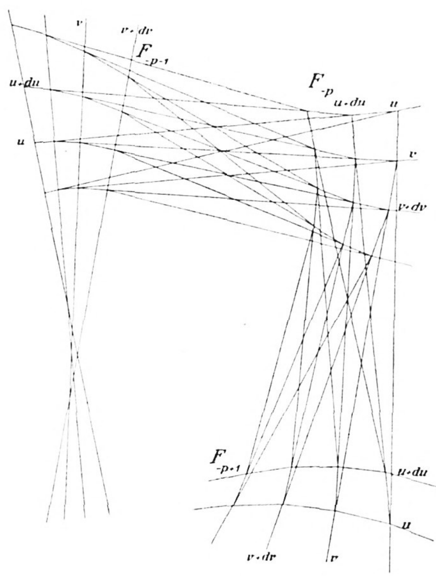
$$\theta_{-p-2,\nu} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & V_\nu \\ x_1 & x_1' & \ldots & x_1^{(2p+2)} & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & x_m' & \ldots & x_m^{(2p+2)} & y_m \end{vmatrix} = V_\nu \, \Delta(x).$$

F_{-p-2} ist die Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche F_{-p-1}; ihre Punktkoordinaten sind:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = V_1 : V_2 : V_3 : V_4.$$

Die Schmiegungsebenen der Kurven u von F_p längs einer Kurve v enthalten je eine Mantellinie zweier konsekutiver Kegel; sie bilden also ein Büschel, dessen Träger durch zwei konsekutive Kegelspitzen geht, mithin eine Tangente von F_{p+1} ist.





Dual: die Punkte der Rückkehrkanten der F_{-p} längs der Kurven u berührenden abwickelbaren Flächen, welche den Punkten einer Kurve v von F_{-p} entsprechen, erfüllen eine Gerade, nämlich eine Erzeugende v der abwickelbaren Fläche F_{-p-1}.

Die Schmiegungsebenen der Kurven u von F_{p-1} längs einer Kurve v sind die Tangentialebenen von F_p längs einer Kurve v, bilden also einen Kegel; die Spitzen der Kegel v erfüllen die Raumkurve F_{p+1}.

Dual: die Punkte der Rückkehrkanten der F_{-p+1} längs der Kurven u berührenden abwickelbaren Flächen, welche den Punkten einer Kurve v von F_{-p+1} entsprechen, erfüllen die ebene Kurve v von F_{-p}; die Ebenen bilden die abwickelbare Fläche F_{-p-1}.

Es ist bemerkenswert, daß die Typen I. und II. geometrisch als Spezialfälle von III. erscheinen, während sie das analytisch nicht sind.

10. Der Aufstellung der einfachsten Orthogonalsysteme der Kugel, welche den 3 Typen angehören, seien einige geometrisch evidente Sätze über Kurvensysteme auf der Kugel vorausgeschickt:

A) Wenn die Schmiegungsebenen der Kurven u der Kugel in den Schnittpunkten mit einer Kurve v einen Kegel bilden, so schneiden die Schmiegungskreise der Kurven u den Berührkreis des Rotationskegels, der von gleicher Spitze aus berührend an die Kugel gelegt werden kann, senkrecht, gehören also einem Kreisnetz an.

B) Dual: Wenn die Punkte der Rückkehrkanten der die Kugel längs der Kurven u berührenden abwickelbaren Flächen, welche den Schnittpunkten mit einer Kurve v entsprechen, in einer Ebene E liegen, so gehen die Ebenen der Schmiegungskreise der Kurven u durch den Pol dieser Ebene, bilden also einen Kegel; die Schmiegungskreise gehören folglich einem Netz an, dessen Grundkreis der Schnittkreis der Kugel mit der Polarebene der Kegelspitze, also der Ebene E ist.

C) Wenn die Schmiegungsebenen der Kurven u der Kugel in den Schnittpunkten mit einer Kurve v ein Büschel bilden, so bilden die Schmiegungskreise ein Kreisbüschel durch die beiden Punkte, in denen der Träger des Ebenenbüschels die Kugel trifft.

D) Dual: Wenn die Punkte der Rückkehrkanten der die Kugel längs der Kurven u berührenden abwickelbaren Flächen, welche den Schnittpunkten mit einer Kurve v entsprechen, auf einer Geraden g liegen, so gehen die Schmiegungsebenen der Kurven u durch die konjugierte Gerade h. Die Schmiegungskreise bilden also ein Büschel durch die beiden Punkte, in denen h die Kugel trifft; die Nullkreise des Büschels sind die Schnittpunkte von g mit der Kugel.

11. Es folgt nun eine Besprechung der einfachsten Orthogonalsysteme; von jedem Typus werden die beiden ersten der zugehörigen Reihe behandelt. Charakterisiert man ein Kurvensystem durch Zusammenstellung der beiden Rangzahlen $\{r_1, r_2\}$, so bezieht sich die Aufzählung auf folgende Fälle:

$$\text{I. } \{1,1\} \text{ und } \{2,2\}; \quad \text{II. } \{1,2\} \text{ und } \{2,3\};$$
$$\text{III. } \{1,3\} \text{ und } \{2,4\}.$$

I. Typus; $\{1, 1\}$; $p = q = 0$.

Die tetrazyklischen Koordinaten sind

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} U_1 & 0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}; \quad \theta_2 = \begin{vmatrix} U_2 & 0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}; \quad \theta_3 = \begin{vmatrix} 0 & V_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}; \quad \theta_4 = \begin{vmatrix} 0 & V_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}.$$

Die Flächen F_p und F_{-p} sind mit der Kugel F_0 identisch; es ergeben sich die bekannten Eigenschaften der orthogonalen Kreisbüschel. Die Kurven u sind eben, also Kreise, und liegen in den Ebenen eines Büschels mit der Z Achse als Träger; längs dieser Kreise u wird die Kugel von Kreiszylindern berührt, deren Mantellinien der XY Ebene parallel sind. Längs der Kurven v, die Kreise in Ebenen parallel zur XY Ebene sind, wird die Kugel von Kegeln berührt, deren Spitzen die Z Achse erfüllen. Eine projektive Transformation des Raumes, welche die Kugel in sich überführt, gibt die allgemeinsten orthogonalen Kreisbüschel; auf den Grenzfall der berührenden Büschel sei nicht näher eingegangen.

I. Typus; $\{2, 2\}$; $p = q = 1$.

Die tetrazyklischen Koordinaten sind

$$\theta_{1,2} = \begin{vmatrix} U_{1,2} & U'_{1,2} & 0 & 0 \\ x_1 & x'_1 & y_1 & y'_1 \\ x_2 & x'_2 & y_2 & y'_2 \\ x_3 & x'_3 & y_3 & y'_3 \end{vmatrix}; \quad \theta_{3,4} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & V_{3,4} & V'_{3,4} \\ x_1 & x'_1 & y_1 & y'_1 \\ x_2 & x'_2 & y_2 & y'_2 \\ x_3 & x'_3 & y_3 & y'_3 \end{vmatrix}.$$

Die Flächen F_{p-1} und F_{-p+1} sind mit der Kugel F_0 identisch. Die Schmiegungsebenen der Kurven u in den Punkten einer Kurve v bilden einen Kegel, dessen Spitze auf der Z Achse liegt. Die Schmiegungskreise der Kurven u in den Punkten einer Kurve v gehören also einem Netz an, dessen Grundkreis in einer Parallelebene zur XY Ebene liegt. Ebenso gehören die Schmiegungskreise der Kurven v in den Punkten einer Kurve u einem Netz an, dessen Grundkreis ein größter Kreis ist, der von einer durch die Z Achse gehenden Ebene auf der Kugel ausgeschnitten wird.

Durch eine projektive Transformation des Raumes, welche die Kugel in sich überführt, ergibt sich ein etwas allgemeineres Orthogonalsystem: die Grundkreise der beiden Scharen von Kreisnetzen bilden allgemeine orthogonale Kreisbüschel.

II. Typus; $\{1, 2\}$; $p = 0$; $q = 1$.

Die tetrazyklischen Koordinaten sind

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} U & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & y'_1 \\ x_2 & y_2 & y'_2 \end{vmatrix}; \quad \theta_\nu = \begin{vmatrix} 0 & V_\nu & V'_\nu \\ x_1 & y_1 & y'_1 \\ x_2 & y_2 & y'_2 \end{vmatrix} \quad (\nu = 2, 3, 4).$$

Die Flächen F_p und F_{-p} sind mit der Kugel F_0 identisch.

Die Kurven v sind Kreise. Ihre Ebenen bilden einen Zylinder mit zur X Achse parallelen Mantellinien; die Spitzen der Kegel, welche die Kugel in den Kreisen v berühren, bilden eine Kurve in der YZ Ebene. Unter den Kurven u befindet sich ein Kreis, nämlich der in der YZ Ebene liegende Hauptkreis; er ist (bei der projektiven Umformung) Grundkreis eines Netzes, dem die Kreise v angehören. Die Schmiegungskreise der Kurven u in den Punkten eines Kreises v bilden ein Büschel, dem der Grundkreis des Netzes angehört.

II. Typus; $\{2, 3\}$; $p = 1$; $q = 2$.

Die tetrazyklischen Koordinaten sind

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} U & U' & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_1' & y_1 & y_1' & y_1'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_4 & x_4' & y_4 & y_4' & y_4'' \end{vmatrix}; \quad \theta_\nu = \begin{vmatrix} 0 & 0 & V_\nu & V_\nu' & V_\nu'' \\ x_1 & x_1' & y_1 & y_1' & y_1'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_4 & x_4' & y_4 & y_4' & y_4'' \end{vmatrix} \quad (\nu = 2, 3, 4).$$

Die Flächen F_{p-1} und F_{-p+1} sind mit der Kugel F_0 identisch.

Die Schmiegungskreise der Kurven u längs einer Kurve v gehören einem Netz an, dessen Grundkreis in einer auf der YZ Ebene senkrechten Ebene liegt. Die Grundkreise dieser Netze v gehören also selbst einem Netz an, dessen Grundkreis der in der YZ Ebene liegende Hauptkreis ist.

III. Typus; $\{1, 3\}$; $p = 0$; $q = 2$.

Die tetrazyklischen Koordinaten sind

$$\theta_\nu = \begin{vmatrix} 0 & V_\nu & V_\nu' & V_\nu'' \\ x_1 & y_1 & y_1' & y_1'' \\ x_2 & y_2 & y_2' & y_2'' \\ x_3 & y_3 & y_3' & y_3'' \end{vmatrix} \quad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Die Flächen F_p und F_{-p} sind mit der Kugel identisch.

Die Kurven v sind Kreise, deren Ebenen an keine Bedingung geknüpft sind. Die Schmiegungskreise der

Kurven u in den Punkten eines Kreises v bilden ein Büschel, das dadurch bestimmt ist, daß es außer dem Kreis v auch noch seinen benachbarten senkrecht schneidet.

III. Typus; $\{2, 4\}$; $p = 1$; $q = 3$.

Die tetrazyklischen Koordinaten sind

$$\theta_\nu = \begin{vmatrix} 0 & 0 & V_\nu & V_\nu' & V_\nu'' & V_\nu''' \\ x_1 & x_1' & y_1 & y_1' & y_1'' & y_1''' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5 & x_5' & y_5 & y_5' & y_5'' & y_5''' \end{vmatrix} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Die Flächen F_{p-1} und F_{-p+1} sind mit der Kugel F_0 identisch.

Die Schmiegungskreise der Kurven u in den Punkten einer Kurve v gehören einem Netz an.

12. Bei der stereographischen Projektion der Kugel in die Ebene bleiben Kreise, Büschel, Netze erhalten; die Schmiegungskreise gehen in Krümmungskreise über. — Die Aufzählung soll in der Weise erfolgen, daß die drei Typen ineinander eingereiht werden. Die Rangzahlen r_1 werden der Größe nach geordnet, ebenso die zu jedem r_1 möglichen Rangzahlen r_2; also in folgender Reihenfolge:

$$\{1, 1\};\ \{1, 2\};\ \{1, 3\};\ \{2, 2\};\ \{2, 3\};\ \{2, 4\};\ \ldots$$

Dann ergeben sich für die aufgezählten Klassen von Orthogonalsystemen folgende Eigenschaften:

$\{1, 1\}$: Die Kurven v bilden ein Kreisbüschel, die Kurven u das dazu orthogonale Kreisbüschel.

$\{1, 2\}$: Die Kurven v sind Kreise, die einem Netz angehören; die Krümmungskreise der Kurven u in den Punkten eines Kreises v bilden ein Büschel, dem der Grundkreis des Netzes angehört.

$\{1, 3\}$: Die Kurven v sind Kreise; die Krümmungskreise der Kurven u in den Punkten eines Kreises v bilden ein Büschel.

$\{2, 2\}$: Die Krümmungskreise der Kurven u in den Punkten einer Kurve v gehören einem Netz an, ebenso die Krümmungskreise der Kurven v in den Punkten einer Kurve u; die Grundkreise der beiden Scharen von Kreisnetzen bilden orthogonale Kreisbüschel.

$\{2, 3\}$: Die Krümmungskreise der Kurven u längs einer Kurve v gehören einem Netz an; die Grundkreise dieser Netze gehören selbst einem Netz an.

$\{2, 4\}$: Die Krümmungskreise der Kurven u in den Punkten einer Kurve v gehören einem Netz an.

Die Isothermensysteme treten bei dieser Aufzählung nicht als eine geschlossene Klasse auf, sondern verteilen sich auf sämtliche Klassen des I. Typus. Mit Ausnahme der Klasse $\{1, 1\}$, die nur ein einziges und zwar isothermes Orthogonalsystem enthält, gehört jedoch zu jeder Klasse des I. Typus neben Isothermensystemen eine überwiegende Anzahl von nicht isothermen Orthogonalsystemen.