

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

---

1919. Heft II

Mai- bis Julisitzung

---

München 1919

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



## Isoplanatische Korrektion und Proportionalitäts-Bedingung.

(Zur Bedeutung der Abbeschen Sinusbedingung bei sphärisch nicht korrigierten Systemen endlicher Öffnung.)

Von F. Staebke.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 17. Mai 1919.

Die von einem beliebigen Objektpunkt ausgehenden kugelförmigen Wellenflächen werden nach dem Durchgang durch ein beliebig zusammengesetztes, endlich geöffnetes optisches System in Wellenflächen deformiert, die im allgemeinen keine Kugelflächen mehr sind. Die Normalen zu dieser Wellenflächenschar erzeugen die beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche; die Normalen sind die in den Bildraum austretenden Lichtstrahlen, die beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche bilden die zum ursprünglichen Objektpunkt gehörende Brennfläche, die als sein optisches Bild zu betrachten ist.

Ist das optische System ein zu einer gemeinsamen optischen Achse zentriertes System von Rotationsflächen, so pflegt man die beiden Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche als die *tangentiale (meridionale)* und die *sagittale (äquatorale)* Schale der Brennfläche zu bezeichnen.

Liegt ferner der Objektpunkt auf der optischen Achse, so degeneriert die sagittale Schale in ein Stück der optischen Achse, während die tangentielle Schale eine Rotationsfläche wird.

Im allgemeinen werden die beiden Schalen der bildseitigen Brennfläche ihre Form ändern, wenn man von einem axialen Objektpunkt zu einem unendlich benachbarten übergeht.

Unter „*isoplanatischer Korrektion*“ oder „*Isoplanasie*“ sei derjenige Korrektionszustand verstanden, bei welchem sich die *Form* der bildseitigen Brennfläche beim Übergang von einem axialen Objektpunkt zu einem unendlich benachbarten der nämlichen achsensenkrechten Objektebene nicht ändert, sondern wobei nur eine *Lagen-Änderung* eintritt; diese kann wegen der allseitigen Symmetrie nur in einer (unendlich kleinen) Drehung der Brennfläche um einen im Endlichen oder im Unendlichen gelegenen Punkt der optischen Achse („*Dreh-Zentrum*“) bestehen. Bei der isoplanatischen Korrektion ist also eine *endliche Öffnung*, aber eine *unendlich kleine Hauptstrahlneigung* vorausgesetzt<sup>1)</sup>.

1) Die Möglichkeit der oben definierten Isoplanasie ist von Herrn S. Finsterwalder schon im Jahre 1891 erkannt worden, wenigstens innerhalb des Bereiches der Näherung 3. Ordnung, wie sie durch die Seidelschen Formeln dargestellt wird. Sie tritt dann ein, wenn zwischen den 5 Ausdrücken, welche die Bildfehler innerhalb dieser Näherung darstellen, die Beziehung  $S(1)S(3) - (S(2))^2 = 0$  bei  $S(1) \neq 0$  besteht. Letztere Ungleichung sagt aus, daß der Kugelgestaltfehler in der Achse nicht gehoben ist. Es gilt dann der Satz, daß die Brennflächen, die zu leuchtenden Punkten einer zur optischen Achse senkrechten Objektebene gehören, kongruente Drehflächen mit einer Neilschen Parabel als Meridian sind, deren Spitzen auf einer Kugel mit dem Mittelpunkt auf der optischen Achse liegen und deren Drehachsen nach einem bestimmten Punkt dieser Achse konvergieren, der der günstigste Blendenort (Austrittspupille) ist. Unter Voraussetzung einer kreisförmigen Blende an dieser Stelle sind die Brennflächen der verschiedenen leuchtenden Punkte der Objektebene auch in Bezug auf die Begrenzung kongruent. Kommen noch die Bedingungen  $S(2) = 0$  (Sinusbedingung) und  $S(4) = 0$  hinzu, so liegen die Spitzen der Brennflächen in einer Ebene. Mit  $S(1) = 0$  arten die kongruenten Brennflächen in Punkte aus; es tritt dann eine scharfe, aber noch verzeichnete Abbildung der Objektebene auf. Vergleiche die Abhandlung von S. Finsterwalder „Die von optischen Systemen größerer Öffnung und größeren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder“. Abhandlungen der K. B. Akad. der Wiss., II. Kl., 17. Bd., 3. Abt., § 3. Der Unterschied in der Voraussetzung der soeben genannten und der vorliegenden Abhandlung besteht im Wesentlichen darin, daß in der ersten Öffnung und Gesichtsfeld von gleicher Größenordnung innerhalb der vernachlässigten Fehler 5. Ordnung vorausgesetzt werden, während in der andern die Öffnung endlich, das Gesichtsfeld unendlich klein ge-

Abgesehen von einigen wenigen Sonderfällen, die wegen der Unmöglichkeit, wichtige andere Bildfehler zu beheben, fast durchweg praktisch eine untergeordnete Bedeutung haben (z. B. Reflexion eines fernen Achsenpunktes an einem Rotationsparaboloid, Stellung des Objekts im Mittelpunkt oder aplanatischen Punkt einer brechenden Kugel u. dgl.) wird die sphärische Korrektion eines Achsenpunkts niemals eine mathematisch vollkommene sein, d. h. es wird fast allgemein eine Brennfläche entstehen. Eine Untersuchung, unter welchen Umständen beim Herausgehen aus der optischen Achse keine Formänderung der Brennfläche eintritt (die nur eine Bildverschlechterung gegenüber der Bildmitte mit sich bringen kann), wird daher praktisch von Wichtigkeit sein.

Das Objekt wird gewöhnlich als aberrationsfrei angenommen; da die Aberrationsfreiheit nur als ein spezieller Fall der isoplanatischen Korrektion, mit der Eintrittspupille als Dreh-Zentrum, zu betrachten ist, sei allgemein auch für das Objekt nicht Aberrationsfreiheit, sondern nur isoplanatische Korrektion vorausgesetzt, weil dies eine Vereinheitlichung der mathematischen Behandlung erlaubt.

*Die vorliegende Arbeit untersucht die Bedingung dafür, daß auch die Korrektion des Bildraums isoplanatisch wird.*

Zur optischen Abbildung (d. h. zur Abbildung auf Grund des Snelliusschen Brechungsgesetzes) des Objektraums in den Bildraum dient hiebei der für ein zentriertes System von Rotationsflächen giltige **Satz von Lippich**<sup>1)</sup>:

Gegeben sei ein die optische Achse schneidender Strahl des Objektraums und ein zu diesem windschiefer, unendlich benachbarter Strahl. Projiziert man den letzteren auf den Tangential- und Sagittal-

dacht wird. In Bezug auf das Gesichtsfeld kommt nur die Gaußsche Näherung mit Vernachlässigung der Größen 3. Ordnung in Betracht.

<sup>1)</sup> F. Lippich, Über Brechung und Reflexion unendlich dünner Strahlensysteme an Kugelflächen, Wiener Denkschr. 1878, 38, 163—192.

schnitt des ersteren und bestimmt man die optischen Bilder dieser Projektionen im Tangential- bzw. Sagittalschnitt des Bildraums, so sind diese Bilder die Projektionen des optischen Bildes des windschiefen Strahls.

Die optischen Bilder der Projektionen des windschiefen Strahls werden dabei durch Anwendung des Helmholtzschen Satzes auf den Tangential- und Sagittalschnitt bestimmt.

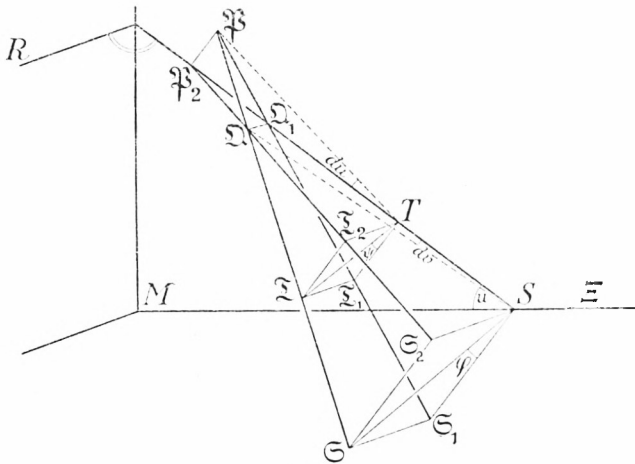


Fig. 1

In Fig. 1 sind die hiedurch eintretenden Verhältnisse dargestellt. Der die optische Achse  $M\mathcal{E}$  unter dem endlichen Öffnungswinkel  $u$  schneidende Strahl  $TS$  ist zunächst mit seinem „Tangentialschnitt“  $M\mathcal{T}S$  in die Zeichenebene gelegt, der „Sagittalschnitt“  $R\mathcal{T}S$  ist hiezu senkrecht zu denken.  $T$  sei der „tangentielle Bildpunkt“ auf dem Strahl  $TS$ , d. h. der Punkt, in welchem die Gerade  $TS$  die Meridiankurve der tangentialen Schale der Brennfläche berührt.  $S$  sei der „sagittale Bildpunkt“ auf dem Strahl  $TS$ , d. h. der Punkt, in welchem die Gerade  $TS$  die degenerierte sagittale Schale der Brennfläche (optische Achse) schneidet.

Der unendlich benachbarte windschiefe Strahl  $T\mathfrak{E}$  sei durch die Punkte  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$  gegeben, in welchen er den Tangential- und Sagittalschnitt durchsetzt. Projiziert man diese Punkte nach  $\mathfrak{P}_2$  und  $\mathfrak{Q}_1$  auf den ursprünglichen Strahl  $TS$ , so erhält man die tangentielle Projektion  $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1$  und die sagittale Projektion  $\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}$  des windschiefen Strahls.

In den Punkten  $T$  und  $S$  sind auf dem ursprünglichen Strahl senkrechte Ebenen errichtet und mit dem windschiefen Strahl und seinen Projektionen zum Schnitt gebracht. Es liegen also

- die Punkte  $\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_1TS$  auf dem ursprünglichen Strahl
- „ „  $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}T\mathfrak{E}$  „ „ windschiefen „
- „ „  $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_1T\mathfrak{E}_1S_1$  auf der Tangentialprojektion des windschiefen Strahls
- „ „  $\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}\mathfrak{E}_2S_2$  auf der Sagittalprojektion des windschiefen Strahls.

Ferner sei bezeichnet

$$\begin{aligned}
 T\mathfrak{E} &= \delta\tau, & S\mathfrak{E} &= \delta\sigma, \\
 \sphericalangle \mathfrak{P}_2T\mathfrak{P} &= du, & \sphericalangle \mathfrak{Q}_1S\mathfrak{Q} &= dv, \\
 \sphericalangle T\mathfrak{E}T\mathfrak{E}_1 &= \psi, & \sphericalangle S\mathfrak{E}S\mathfrak{E}_1 &= \varphi.
 \end{aligned}$$

Dabei sind  $\psi$  und  $\varphi$  diejenigen endlichen Winkel, welche die windschiefen Lote  $T\mathfrak{E}$  und  $S\mathfrak{E}$  mit den im Tangentialschnitt (Meridianebene) der Brennfläche gelegenen Loten  $T\mathfrak{E}_1$  und  $S\mathfrak{E}_1$  bilden.

Die Verhältnisse im Bildraum (nach einer beliebigen Zahl von Brechungen an zentrierten Rotationsflächen) seien in gleicher Weise, nur mit gestrichenen Buchstaben dargestellt. Die Brechungsindizes des Objekt- und Bildraums seien  $n$  bzw.  $n'$ .

Dann ist nach dem Helmholtzschen Satz für den Tangentialschnitt

$$n \cdot \text{arc}(\mathfrak{P}_2T\mathfrak{P}) \cdot T\mathfrak{E}_1 = n' \cdot \text{arc}(\mathfrak{P}'_2T'\mathfrak{P}') \cdot T'\mathfrak{E}'_1$$

oder  $n \cdot du \cdot (\delta\tau \cdot \cos\psi) = n' \cdot du' \cdot (\delta\tau' \cdot \cos\psi')$  (1)

Hiebei sei bemerkt, daß der gesamte Tangentialschnitt in einer ungebrochen durch das ganze System verlaufenden Ebene liegt.

Für den Sagittalschnitt hat man nach dem gleichen Satz

$$n \cdot \text{arc}(\Omega_1 S \Omega) \cdot S \mathfrak{S}_2 = n' \cdot \text{arc}(\Omega'_1 S' \Omega') \cdot S' \mathfrak{S}'_2$$

oder 
$$n \cdot dv \cdot (\delta \sigma \cdot \sin \varphi) = n' \cdot dv' \cdot (\delta \sigma' \cdot \sin \varphi').$$

Da man die Änderungen  $dv$  bzw.  $dv'$  des sagittalen Öffnungswinkels als eine kleine Drehung um die optische Achse um einen für das ganze System gleichen Winkel  $d\gamma$  auffassen kann, so muß sein

$$\begin{aligned} \Omega_1 S \cdot dv &= \Omega \Omega_1 = \Omega_1 S \cdot \sin u \cdot d\gamma \\ \Omega'_1 S' \cdot dv' &= \Omega' \Omega'_1 = \Omega'_1 S'_1 \cdot \sin u' \cdot d\gamma \end{aligned}$$

und hieraus

$$dv : dv' = \sin u : \sin u'.$$

Dann ergibt sich als Helmholtzsche Gleichung für den Sagittalschnitt

$$n \cdot \sin u \cdot (\delta \sigma \cdot \sin \varphi) = n' \cdot \sin u' \cdot (\delta \sigma' \cdot \sin \varphi') \quad (2)$$

Sind die Projektionen des Bildraums nach diesen Gleichungen (1) und (2) bestimmt, so ist nach dem Lippichschen Satz der windschiefe Strahl  $\mathfrak{T}' \mathfrak{S}'$  des Bildraums das optische Bild des windschiefen Strahls  $\mathfrak{T} \mathfrak{S}$  des Objektraums.

Es soll nun dem Tangentialschnitt  $MTS$ , der in Fig. 1 einer bequemerem Anschauung zuliebe in die Zeichenebene gedreht war, eine allgemeinere Lage gegeben werden. In Fig. 2 ist demgemäß als Zeichenebene die durch das ganze System ungebrochen verlaufende Schnittebene gewählt, in welcher die Drehung der Brennfläche des axialen Punkts zum unendlich benachbarten der nämlichen achsensenkrechten Ebene erfolgt; d. h. dieser neue Punkt ist hiebei — ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit — in die Zeichenebene gelegt. Als Koordinatenanfangspunkt ist im Objekt- und Bildraum das Drehzentrum gewählt. Die Drehungswinkel in beiden Räumen sind mit  $d\vartheta$  bzw.  $d\vartheta'$  bezeichnet.

Der den Strahl  $TS$  enthaltende Tangentialschnitt  $MTS$  soll mit der Zeichenebene den endlichen Winkel  $\alpha$  einschließen; der Sagittalschnitt  $RTS$  ist wieder senkrecht hierauf zu denken.

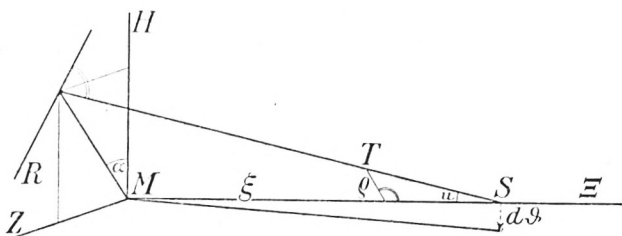


Fig. 2

Die Lote  $T\mathfrak{X}_1$  und  $S\mathfrak{S}_1$  liegen wieder im Tangentialschnitt  $M\mathfrak{T}\mathfrak{S}$ ; die windschiefen Lote  $T\mathfrak{X}$  und  $S\mathfrak{S}$  liegen wieder in Normalebene zu  $T\mathfrak{S}$  und bilden mit den Loten  $T\mathfrak{X}_1$  und  $S\mathfrak{S}_1$  die endlichen Winkel  $\psi$  und  $\varphi$ . Es sollen nun die Neigungswinkel  $\eta_1 \eta_2 \eta_3$  bestimmt werden, welche das windschiefe Lot  $T\mathfrak{X}$  (und später auch das Lot  $S\mathfrak{S}$ ) gegen die Koordinatenachsen bildet.

Mit  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$  seien zunächst die Neigungen der parallelen Strecken  $T\mathfrak{X}_1$  und  $S\mathfrak{S}_1$  gegen die Achsen bezeichnet, und in der Hilfsfigur 3a durch die Neigungen der Geraden  $AB$  dargestellt, wobei  $AB \parallel T\mathfrak{X}_1 (\parallel S\mathfrak{S}_1)$  gezogen und  $AB = 1$  gesetzt ist. Dann stellt  $AB B_{23}$  die Ebene des Tangentialschnitts  $M\mathfrak{T}\mathfrak{S}$  der Fig. 2 dar, es ist also

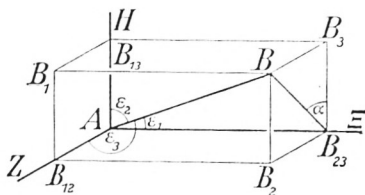


Fig. 3a

$$\sphericalangle B A B_{23} = \frac{\pi}{2} - u$$

und  $\sphericalangle B B_{23} B_3 = \alpha$

zu setzen. Dann ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \cos \varepsilon_1 &= A B_{23} = \sin u \\ \cos \varepsilon_2 &= A B_{13} = B B_{23} \cdot \cos \alpha = \sin \varepsilon_1 \cos \alpha = \cos u \cos \alpha \\ \cos \varepsilon_3 &= A B_{12} = B B_{23} \cdot \sin \alpha = \sin \varepsilon_1 \sin \alpha = \cos u \sin \alpha \end{aligned} \right\} (3)$$

In ähnlicher Weise soll ein vom Punkt  $A$  ausgehender Parallelstrahl zum windschiefen Lot  $T\mathfrak{X}$  dargestellt werden,



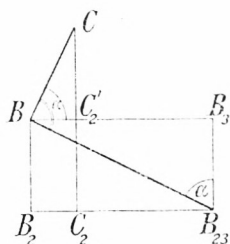


Fig. 3b

der in einer zum Tangentialschnitt  $ABB_{23}$  längs  $AB$  senkrechten Ebene liegt und mit dem Parallelstrahl  $AB$  zu  $T\mathfrak{E}_1$  den Winkel  $\psi$  einschließt. Dieser Strahl treffe die Ebene  $BB_3B_{23}$  im Punkte  $C$ ; die in dieser Ebene entstehenden Verhältnisse sind in der Hilfsfigur 3 b dargestellt.

Wegen  $BC \perp BB_{23}$  wird

$$\sphericalangle CBB_3 = \alpha.$$

Da  $AB = 1$  gesetzt war, wird  $BC = \operatorname{tg} \psi$

$$CC_2 = \sin \alpha \operatorname{tg} \psi$$

$$B_2C_2 = \cos \alpha \operatorname{tg} \psi.$$

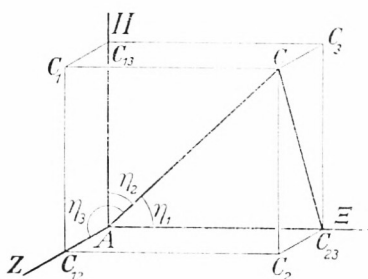


Fig. 3c

Fig. 3c gibt die für den Punkt  $C$  entstehenden Verhältnisse an, wobei die Neigungen von  $AC$  gegen die Achsen die gesuchten Werte von  $\eta_1 \eta_2 \eta_3$  sind.

Hiebei wird

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi} = \frac{1}{\cos \psi}$$

und

$$AC_{23} = AB_{23} = \cos \varepsilon_1$$

$$AC_{13} = AB_{13} + CC_2 = \cos \varepsilon_2 + \sin \alpha \operatorname{tg} \psi$$

$$AC_{12} = AB_{12} - B_2C_2 = \cos \varepsilon_3 - \cos \alpha \operatorname{tg} \psi,$$

also

$$\cos \eta_1 = \frac{AC_{23}}{AC} = \cos \varepsilon_1 \cos \psi$$

$$\cos \eta_2 = \frac{AC_{13}}{AC} = \cos \varepsilon_2 \cos \psi + \sin \alpha \sin \psi$$

$$\cos \eta_3 = \frac{AC_{12}}{AC} = \cos \varepsilon_3 \cos \psi - \cos \alpha \sin \psi$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichungen (3)

$$\left. \begin{aligned} \cos \eta_1 &= \sin u \cos \psi \\ \cos \eta_2 &= \cos u \cos \alpha \cos \psi + \sin \alpha \sin \psi \\ \cos \eta_3 &= \cos u \sin \alpha \cos \psi - \cos \alpha \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die tangentielle Schale der Brennfläche sei als Rotationsfläche durch die Gleichungen gegeben (vgl. hiezu Fig. 2)

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(w) \\ \eta &= \varrho(w) \cdot \cos \alpha \\ \zeta &= \varrho(w) \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

wobei die Abszisse  $\xi$  und der Radius  $\varrho$  beliebige Funktionen eines Parameters  $w$  sind.

Bezeichnet man abkürzend

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dw} &= \xi^* \\ \frac{d\varrho}{dw} &= \varrho^* \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

so wird für die Tangente an die Meridiankurve

$$\operatorname{tg}(-u) = \frac{\varrho^*}{\xi^*},$$

$$\left. \begin{aligned} \text{also} \quad \sin u &= \frac{-\varrho^*}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \\ \text{und} \quad \cos u &= \frac{\xi^*}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Mithin erhält man schließlich

$$\left. \begin{aligned} \cos \eta_1 &= -\varrho^* \cdot \frac{\cos \psi}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \\ \cos \eta_2 &= (\xi^* \cos \alpha + \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \sin \alpha \operatorname{tg} \psi) \cdot \frac{\cos \psi}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \\ \cos \eta_3 &= (\xi^* \sin \alpha - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cos \alpha \operatorname{tg} \psi) \cdot \frac{\cos \psi}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Dieses sind also die Achsenneigungen des windschiefen Lotes  $T\mathfrak{X}$ , welches in einer Normalebene zum Strahl  $TS$  verläuft und mit dem Tangentialschnitt  $M\mathfrak{T}S$  (und daher auch mit der Meridian-Normalen  $T\mathfrak{X}_1$ ) einen Winkel  $\psi$  einschließt. Die Achsenneigungen des windschiefen Lotes  $S\mathfrak{S}$  erhält man durch Vertauschung von  $\psi$  mit  $\varphi$ .

Für die Anwendbarkeit des Helmholtzschen Satzes ist notwendige und hinreichende Voraussetzung, daß die Strecke  $\delta\tau = T\mathfrak{X}$  als kleines Objekt aufgefaßt werden kann, das heißt, daß nicht nur der Punkt  $T$ , sondern auch der Punkt  $\mathfrak{X}$  Objektpunkte sind. Es muß daher bei isoplanatischer Korrektion der Punkt  $\mathfrak{X}$  auf der gedrehten objektseitigen Brennfläche liegen, und der windschiefe Strahl  $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$  eine Erzeugende dieser gedrehten Brennfläche sein. Die nämlichen Überlegungen (mit gestrichenen Buchstaben) gelten für den Bildraum.

Für jede Neigung  $\psi$  ist ein Punkt  $\mathfrak{X}$  als unendlich naher Durchstoßpunkt des vom Punkte  $T$  unter den Neigungen  $\eta_1 \eta_2 \eta_3$  ausgehenden Strahls mit der gedrehten Brennfläche bestimmt, oder: zu jeder Neigung  $\psi$  gehört eine Erzeugende der gedrehten Brennfläche, die als der unendlich benachbarte windschiefe Strahl  $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$  aufzufassen ist.

Wie groß diese Neigung  $\psi$  gewählt werden muß, bleibe vorerst dahingestellt; denkt man sich dem Winkel  $\psi$  alle möglichen Werte erteilt, so ist die richtige Neigung  $\psi$ , und daher auch der richtige windschiefe Strahl  $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$  mit Sicherheit darunter. Es ist also zunächst  $\delta\tau = T\mathfrak{X}$  als Funktion von  $\psi$  darzustellen.

Der Punkt  $T$  der ursprünglichen Brennfläche sei gemäß (5) durch gewisse Parameterwerte  $w$  und  $a$  gegeben; der unendlich benachbarte Punkt  $\mathfrak{X}$  auf der gedrehten Brennfläche muß dann die Parameterwerte

$$\left. \begin{aligned} w &= w + dw \\ a &= a + da \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

haben. Der Koordinatenanfangspunkt ist gemäß Fig. 2 in das Dreh-Zentrum gelegt; der Drehungswinkel ist mit  $d\vartheta$  bezeichnet.

Bei Drehung um die  $Z$ -Achse hat die gedrehte Brennfläche die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi + \eta d\vartheta = \xi + \rho \cos a \delta\vartheta \\ y &= \eta - \xi d\vartheta = \rho \cos a - \xi d\vartheta \\ z &= \zeta = \rho \sin a, \end{aligned} \right.$$

also der Punkt  $\mathfrak{X}$  mit den Parameterwerten  $w$  und  $\alpha$  die Koordinaten

$$\xi_{w, \alpha} = \xi(w) + \varrho(w) \cos \alpha \, d\vartheta$$

$$\eta_{w, \alpha} = \varrho(w) \cos \alpha - \xi(w) \, d\vartheta$$

$$\zeta_{w, \alpha} = \varrho(w) \sin \alpha.$$

Setzt man für  $w$  und  $\alpha$  die Werte aus (9) ein, und entwickelt nach dem Taylorschen Satz, so hat man, wenn man wieder die Bezeichnungen  $\xi^*$  und  $\varrho^*$  aus Gleichung (6) einführt, und statt  $\xi(w)$  und  $\varrho(w)$  abkürzend  $\xi$  und  $\varrho$  schreibt

$$\xi_{w, \alpha} = (\xi + \xi^* dw) + (\varrho + \varrho^* dw) (\cos \alpha - \sin \alpha \, d\alpha) \, d\vartheta$$

$$\eta_{w, \alpha} = (\varrho + \varrho^* dw) (\cos \alpha - \sin \alpha \, d\alpha) - (\xi + \xi^* dw) \, d\vartheta$$

$$\zeta_{w, \alpha} = (\varrho + \varrho^* dw) (\sin \alpha + \cos \alpha \, d\alpha)$$

und nach Vernachlässigung höherer Glieder

$$\xi_{w, \alpha} = \xi + \xi^* dw + \varrho \cos \alpha \, d\vartheta$$

$$\eta_{w, \alpha} = \varrho \cos \alpha + \varrho^* \cos \alpha \, dw - \varrho \sin \alpha \, d\alpha - \xi \, d\vartheta$$

$$\zeta_{w, \alpha} = \varrho \sin \alpha + \varrho^* \sin \alpha \, dw + \varrho \cos \alpha \, d\alpha;$$

hieraus ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \delta \xi &= \xi_{w, \alpha} - \xi_{w, \alpha} = \xi^* dw + \varrho \cos \alpha \, d\vartheta \\ \delta \eta &= \eta_{w, \alpha} - \eta_{w, \alpha} = \varrho^* \cos \alpha \, dw - \varrho \sin \alpha \, d\alpha - \xi \, d\vartheta \\ \delta \zeta &= \zeta_{w, \alpha} - \zeta_{w, \alpha} = \varrho^* \sin \alpha \, dw + \varrho \cos \alpha \, d\alpha \end{aligned} \right\} (10)$$

und

$$\left. \begin{aligned} (T\mathfrak{X})^2 &= \delta \tau^2 = \delta \xi^2 + \delta \eta^2 + \delta \zeta^2 \\ &= (\xi^{*2} + \varrho^{*2}) dw^2 - 2(\xi \varrho^* - \varrho \xi^*) \cos \alpha \, dw \, d\vartheta \\ &\quad + (\varrho^2 \cos^2 \alpha + \xi^2) d\vartheta^2 + 2\varrho \xi \sin \alpha \, d\alpha \, d\vartheta + \varrho^2 d\alpha^2 \end{aligned} \right\} (11)$$

Wenn man noch in Analogie zu (6) die Bezeichnungen einführt

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dw} &= \vartheta^* \\ \frac{d\alpha}{dw} &= \alpha^* \end{aligned} \right\} (12)$$

so erhält man schließlich

$$\left. \begin{aligned} \delta \xi &= (\xi^* + \vartheta^* \cdot \varrho \cos a) \cdot d w \\ \delta \eta &= (\varrho^* \cdot \cos a - \alpha^* \cdot \varrho \sin a - \vartheta^* \cdot \xi) \cdot d w \\ \delta \zeta &= (\varrho^* \cdot \sin a + \alpha^* \cdot \varrho \cos a) \cdot d w \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Damit diese Größen die Koordinatenänderungen zwischen  $T$  und  $\mathfrak{X}$  sind, müssen die Gleichungen bestehen

$$\frac{\delta \xi}{\cos \eta_1} = \frac{\delta \eta}{\cos \eta_2} = \frac{\delta \zeta}{\cos \eta_3} \quad (14)$$

Hieraus sind die Werte  $d w$  und  $d a$  als Funktionen von  $\psi$  und  $d \vartheta$  zu bestimmen.

Durch Substitution von (8) und (13) in (14) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi^* + \vartheta^* \cdot \varrho \cos a}{-\varrho^*} &= \frac{\varrho^* \cdot \cos a - \alpha^* \cdot \varrho \sin a - \vartheta^* \cdot \xi}{\xi^* \cdot \cos a + \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \sin a \operatorname{tg} \psi} \\ &= \frac{\varrho^* \cdot \sin a + \alpha^* \cdot \varrho \cos a}{\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst als erste Bedingungsgleichung für die Werte  $\vartheta^*$  und  $\alpha^*$  unter Berücksichtigung des 1. und 3. Ausdrucks

$$\xi^{*2} \cdot \sin a - \xi^* \cdot \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi + \xi^* \vartheta^* \cdot \varrho \sin a \cos a - \vartheta^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \varrho \cos^2 a \operatorname{tg} \psi + \varrho^{*2} \cdot \sin a + \alpha^* \varrho^* \cdot \varrho \cos a = 0$$

oder

$$\begin{aligned} \vartheta^* \cdot (\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi) \cdot \varrho \cos a + \alpha^* \varrho^* \cdot \varrho \cos a \\ = \xi^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi - (\xi^{*2} + \varrho^{*2}) \sin a \end{aligned}$$

oder schließlich

$$\left. \begin{aligned} \vartheta^* \cdot (\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi) + \alpha^* \varrho^* \\ = \frac{\xi^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\varrho} - \frac{(\xi^{*2} + \varrho^{*2}) \cdot \operatorname{tg} a}{\varrho} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Als zweite Bedingungsgleichung für die Werte  $\vartheta^*$  und  $\alpha^*$  erhält man unter Berücksichtigung des 2. und 3. Ausdrucks in den Gleichungen (15)

$$\begin{aligned}
& \xi^* \varrho^* \cdot \sin a \cos a - \varrho^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos^2 a \operatorname{tg} \psi \\
& - a^* (\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi) \cdot \varrho \sin a \\
& - \vartheta^* (\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi) \cdot \xi \\
& - \xi^* \varrho^* \cdot \sin a \cos a - \varrho^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \sin^2 a \operatorname{tg} \psi \\
& - a^* (\xi^* \cdot \cos a + \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \sin a \operatorname{tg} \psi) \cdot \varrho \cos a = 0
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
& - \varrho^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi - a^* \xi^* \cdot \varrho \\
& - \vartheta^* (\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi) \cdot \xi = 0
\end{aligned}$$

oder schließlich

$$\left. \begin{aligned}
& \vartheta^* (\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi) + a^* \cdot \frac{\xi^* \varrho}{\xi} \\
& = - \frac{\varrho^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\xi}
\end{aligned} \right\} (17)$$

Schreibt man abkürzend

$$\Theta^* = \vartheta^* (\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi) \quad (18)$$

so heißen die beiden Bedingungsgleichungen (16) und (17)

$$\Theta^* + a^* \cdot \varrho^* = \frac{\xi^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\varrho} - \frac{(\xi^{*2} + \varrho^{*2}) \cdot \operatorname{tg} a}{\varrho} \quad (19)$$

und

$$\Theta^* + a^* \cdot \frac{\xi^* \varrho}{\xi} = - \frac{\varrho^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\xi} \quad (20)$$

Berechnet man hieraus  $\Theta^*$  und  $a^*$ , so erhält man

$$\begin{aligned}
\Theta^* \cdot \left( \frac{\xi^* \varrho}{\xi} - \varrho^* \right) &= \frac{\xi^{*2} \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\xi} - \frac{(\xi^{*2} + \varrho^{*2}) \xi^* \cdot \operatorname{tg} a}{\xi} \\
+ \frac{\varrho^{*2} \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\xi} &= - \frac{(\xi^{*2} + \varrho^{*2}) (\xi^* \operatorname{tg} a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \operatorname{tg} \psi)}{\xi}
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
& \vartheta^* (\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi) (\xi^* \varrho - \varrho^* \xi) \\
& = - \frac{(\xi^{*2} + \varrho^{*2}) (\xi^* \cdot \sin a - \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \cos a \operatorname{tg} \psi)}{\cos a}
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich nach Weglassung des konstanten Faktors in der Klammer

$$\frac{d\vartheta}{dw} = \vartheta^* = - \frac{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}{(\xi^* \varrho - \varrho^* \xi) \cdot \cos a}$$

und schließlich als Wert für  $dw$

$$dw = \frac{(\xi \varrho^* - \varrho \xi^*) \cos a}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot d\vartheta. \quad (21)$$

Ebenso erhält man aus (19) und (20) für  $a^*$

$$a^* \cdot \left( \frac{\xi^* \varrho}{\xi} - \varrho^* \right) = - \frac{\varrho^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\xi} \\ - \frac{\xi^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\varrho} + \frac{(\xi^{*2} + \varrho^{*2}) \cdot \operatorname{tg} a}{\varrho}$$

oder

$$a^* \cdot (\xi^* \varrho - \varrho^* \xi) = - \frac{\varrho \varrho^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\varrho} \\ - \frac{\xi \xi^* \sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg} \psi}{\varrho} + \frac{(\xi^{*2} + \varrho^{*2}) \cdot \xi \operatorname{tg} a}{\varrho};$$

hieraus

$$\frac{da}{dw} = a^* = - \frac{(\xi^{*2} + \varrho^{*2}) \left( \frac{\xi \xi^* + \varrho \varrho^*}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \cdot \operatorname{tg} \psi - \xi \cdot \operatorname{tg} a \right)}{(\xi^* \varrho - \varrho^* \xi) \cdot \varrho}.$$

Nun war

$$\frac{d\vartheta}{dw} = - \frac{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}{(\xi^* \varrho - \varrho^* \xi) \cdot \cos a},$$

also erhält man als Wert für  $da$

$$da = \left( \frac{\xi \xi^* + \varrho \varrho^*}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \cdot \operatorname{tg} \psi - \xi \cdot \operatorname{tg} a \right) \cdot \frac{\cos a}{\varrho} \cdot d\vartheta \quad (22)$$

Durch (21) und (22) sind die Parameterwerte

$$w = w + dw$$

$$a = a + da$$

für Gleichung (9) gefunden; die Werte für  $dw$  und  $da$  sind somit in Gleichung (11) einzusetzen.

Man erhält

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\delta\tau}{d\vartheta}\right)^2 &= (\xi^{*2} + \varrho^{*2}) \cdot \frac{(\xi\varrho^* - \varrho\xi^*)^2 \cdot \cos^2 a}{(\xi^{*2} + \varrho^{*2})^2} \\
 &\quad - 2(\xi\varrho^* - \varrho\xi^*)^2 \cdot \frac{\cos^2 a}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} + (\varrho^2 \cos^2 a + \xi^2) \\
 &\quad + 2\varrho\xi \sin a \cdot \left( \frac{\xi\xi^* + \varrho\varrho^*}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \cdot \operatorname{tg} \psi - \xi \operatorname{tg} a \right) \cdot \frac{\cos a}{\varrho} \\
 &\quad + \left( \frac{\xi\xi^* + \varrho\varrho^*}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \cdot \operatorname{tg} \psi - \xi \cdot \operatorname{tg} a \right)^2 \cdot \cos^2 a \\
 &= - \frac{(\xi\varrho^* - \varrho\xi^*)^2 \cdot \cos^2 a}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} + \varrho^2 \cos^2 a + \xi^2 \\
 &\quad + \frac{2\xi(\xi\xi^* + \varrho\varrho^*)}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \cdot \operatorname{tg} \psi \sin a \cos a \\
 &\quad - 2\xi^2 \sin^2 a + \frac{(\xi\xi^* + \varrho\varrho^*)^2}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg}^2 \psi \cos^2 a \\
 &\quad - \frac{2\xi(\xi\xi^* + \varrho\varrho^*)}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \cdot \operatorname{tg} \psi \sin a \cos a + \xi^2 \sin^2 a \\
 &= - \frac{(\xi\varrho^* - \varrho\xi^*)^2 \cdot \cos^2 a}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} + \varrho^2 \cos^2 a + \xi^2 \cos^2 a \\
 &\quad + \frac{(\xi\xi^* + \varrho\varrho^*)^2}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot \operatorname{tg}^2 \psi \cos^2 a \\
 &= \frac{\cos^2 a}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot [-\xi^2 \varrho^{*2} + 2\xi\xi^* \varrho\varrho^* - \varrho^2 \xi^{*2} + \varrho^2 \xi^{*2} \\
 &\quad + \varrho^2 \varrho^{*2} + \xi^2 \xi^{*2} + \xi^2 \varrho^{*2} + (\xi\xi^* + \varrho\varrho^*)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \psi] \\
 &= \frac{\cos^2 a}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}} \cdot (\xi\xi^* + \varrho\varrho^*)^2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \psi) \\
 &= \frac{\cos^2 a}{\cos^2 \psi} \cdot \frac{(\xi\xi^* + \varrho\varrho^*)^2}{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}
 \end{aligned}$$

und hieraus  $\delta\tau \cdot \cos \psi = \frac{\xi\xi^* + \varrho\varrho^*}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} \cdot \cos a \cdot d\vartheta$  (23)

Der Wert  $\delta\tau$  ist hiebei das in Gleichung (1) auftretende windschiefe Lot  $T\mathfrak{E}$  des Objektraums, dessen Größe bei iso-



planatischer Korrektur hiedurch in ihrer Abhängigkeit von der Neigung  $\psi$  bestimmt ist. Da seine tangentielle Projektion  $\delta\tau \cdot \cos \psi$  von der Neigung  $\psi$  unabhängig wird, so erhält man also für alle Neigungen  $\psi$  den nämlichen Wert der Tangentialprojektion, d. h.: für die Anwendung der Gleichung (1) bleibt die Wahl des Winkels  $\psi$  ohne jeden Einfluß.

Es sollen nun die Werte  $\xi$ ,  $\xi^*$ ,  $\varrho$ ,  $\varrho^*$  der Meridiankurve der tangentialen Brennfläche durch die Werte der sphärischen Aberration ausgedrückt werden. In

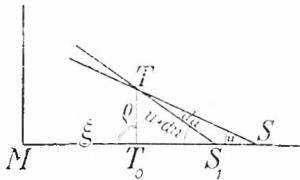


Fig. 4

Fig. 4 ist aus Gründen der Anschaulichkeit die Meridiankurve der Fig. 2 in die Zeichenebene gelegt. Im tangentialen Bildpunkt  $T$  (Punkt der Meridiankurve bzw. der Brennfläche) schneiden sich die konsekutiven Strahlen mit den Neigungen  $u$  und  $u + du$ . Sein Fußpunkt sei  $T_0$ ; dann ist  $MT_0 = \xi$  und  $TT_0 = \varrho$ .

Die Achsenschnittpunkte der beiden konsekutiven Erzeugenden seien  $S$  und  $S_1$ . Bezeichnet man den Abstand des Punktes  $S$  vom Drehpunkt  $M$  mit  $\mathfrak{A}$ , so ist  $MS = \mathfrak{A}$  und  $MS_1 = \mathfrak{A} + d\mathfrak{A}$ . (In der Fig. 4 ist  $S_1S = -d\mathfrak{A}$  zu setzen.)

Die Achsenschnittpunkte der beiden konsekutiven Erzeugenden seien  $S$  und  $S_1$ . Bezeichnet man den Abstand des Punktes  $S$  vom Drehpunkt  $M$  mit  $\mathfrak{A}$ , so ist  $MS = \mathfrak{A}$  und  $MS_1 = \mathfrak{A} + d\mathfrak{A}$ . (In der Fig. 4 ist  $S_1S = -d\mathfrak{A}$  zu setzen.)

Dann folgt aus dem Dreieck  $TSS_1$  nach dem trigonometrischen Sinus-Satz

$$TS = - \frac{d\mathfrak{A}}{du} \cdot \sin u$$

und die Gleichung der Meridiankurve der tangentialen Brennflächen-Schale wird

$$\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{A} - TS \cdot \cos u \\ \varrho &= TS \cdot \sin u \end{aligned}$$

oder unter Berücksichtigung des Wertes für  $TS$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \mathfrak{A} + \frac{d\mathfrak{A}}{du} \cdot \sin u \cos u \\ \varrho &= - \frac{d\mathfrak{A}}{du} \cdot \sin^2 u \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Nach Gleichung (7) hatte man für die Meridiankurve

$$\frac{\varrho^*}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} = \sin u$$

$$\frac{\xi^*}{\sqrt{\xi^{*2} + \varrho^{*2}}} = \cos u.$$

Setzt man diese Werte und die Werte für  $\xi$  und  $\varrho$  aus Gleichung (24) in Gleichung (23) ein, so erhält man

$$\delta \tau \cdot \cos \psi = \left[ \mathfrak{A} \cos u + \frac{d\mathfrak{A}}{du} \sin u \cos^2 u + \frac{d\mathfrak{A}}{du} \sin^3 u \right] \cdot \cos a \cdot d\vartheta$$

$$= \left[ \mathfrak{A} \cos u + \frac{d\mathfrak{A}}{du} \sin u \right] \cdot \cos a \cdot d\vartheta = \frac{d[\mathfrak{A} \sin u]}{du} \cdot \cos a \cdot d\vartheta.$$

Dann wird die linke Seite der Gleichung (1)

$$n \cdot du \cdot (\delta \tau \cdot \cos \psi) = n \cos a \cdot d[\mathfrak{A} \sin u] \cdot d\vartheta \quad (25)$$

Dies ist die Invariante der Helmholtzschen Gleichung für den Fall der isoplanatischen Korrektion des *Tangentialschnittes*.

Für den *Sagittalschnitt* erhält man als Gleichung der Meridiankurve  $\varrho = 0$ ,  $\varrho^* = 0$ , daher wird Gleichung (10)

$$\delta \xi = \xi^* d\psi$$

$$\delta \eta = -\xi d\vartheta$$

$$\delta \zeta = 0,$$

also nach Gleichung (14)

$$\cos \eta_3 = 0,$$

woraus sich nach Gleichung (4), da bei der sagittalen Schale  $\varphi$  statt  $\psi$  zu setzen ist,

$$\operatorname{tg} \varphi = \cos u \operatorname{tg} a \quad (26)$$

ergibt. Dann erhält man aus Gleichung (4)

$$\cos \eta_1 = \frac{\sin u}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\sin u}{\sqrt{1 + \cos^2 u \operatorname{tg}^2 a}}$$

$$\cos \eta_2 = \frac{\cos u \cos a + \cos u \sin a \operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \cos^2 u \operatorname{tg}^2 a}} = \frac{\cos u}{\cos a \cdot \sqrt{1 + \cos^2 u \operatorname{tg}^2 a}}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gleichung (14) ergibt sich

$$\frac{\xi^* \cdot dw}{\sin u} \cdot \sqrt{1 + \cos^2 u \operatorname{tg}^2 a} = \frac{-\xi \cdot d\vartheta}{\cos u} \cdot \cos a \cdot \sqrt{1 + \cos^2 u \operatorname{tg}^2 a}$$

und hieraus

$$dw = - \frac{\xi}{\xi^*} \cdot \operatorname{tg} u \cos a \cdot d\vartheta.$$

Dann wird

$$\begin{aligned} (S\mathfrak{E})^2 &= \delta\sigma^2 = \delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2 \\ &= \xi^2 \operatorname{tg}^2 u \cos^2 a \cdot d\vartheta^2 + \xi^2 \cdot d\vartheta^2 \\ &= \xi^2 (1 + \operatorname{tg}^2 u \cos^2 a) \cdot d\vartheta^2. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß wegen Gleichung (26)

$$\sin \varphi = \frac{\cos u \operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \cos^2 u \operatorname{tg}^2 a}}$$

wird, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta\sigma \cdot \sin \varphi &= \xi \cdot \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 u \cos^2 a}{1 + \cos^2 u \operatorname{tg}^2 a}} \cdot \cos u \operatorname{tg} a \cdot d\vartheta \\ &= \xi \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 u + \sin^2 u \cos^2 a}{\cos^2 a + \cos^2 u \sin^2 a}} \cdot \sin a \cdot d\vartheta \\ &= \xi \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin^2 u \sin^2 a}{1 - \sin^2 a \sin^2 u}} \cdot \sin a \cdot d\vartheta \end{aligned}$$

oder

$$\delta\sigma \cdot \sin \varphi = \xi \sin a \cdot d\vartheta \quad (27)$$

Aus der Form dieser Gleichung für den Sagittalschnitt folgt auf Grund analoger Überlegungen wie bei Gleichung (23), daß für die Anwendung der Gleichung (2) die Wahl des Winkels  $\varphi$  ohne jeden Einfluß ist.

Um auch hier die Werte der sphärischen Aberration einzuführen, ist zu bedenken, daß für die sagittale Schale der Brennfläche  $\xi = \mathfrak{A}$  wird.

Dann ist die linke Seite der Gleichung (2)

$$n \cdot \sin u \cdot (\delta\sigma \cdot \sin \varphi) = n \cdot \sin u \cdot \mathfrak{A} \sin a \cdot d\vartheta$$

oder

$$n \cdot \sin u \cdot (\delta\sigma \cdot \sin \varphi) = n \sin a \cdot [\mathfrak{A} \sin u] \cdot d\vartheta \quad (28)$$

Dies ist die Invariante der Helmholtzschen Gleichung für den Fall der isoplanatischen Korrektion des *Sagittalschnittes*.

Die nämlichen Gleichungen (25) und (28), nur mit gestrichenen Buchstaben, gelten bei isoplanatischer Korrektion des Bildraums auch für diesen.

Soll nun die vermöge der Helmholtzschen Gleichung (d. h. auf Grund des Snelliusschen Brechungsgesetzes) vermittelte Abbildung für beide Schalen der Brennfläche isoplanatisch sein, so ergibt sich aus den Gleichungen (1) und (2) unter Weglassung der konstanten Faktoren  $\cos a$  bzw.  $\sin a$

$$\left. \begin{aligned} n \cdot d[\mathfrak{A} \sin u] \cdot d\vartheta &= n' \cdot d[\mathfrak{A}' \sin u'] \cdot d\vartheta' \\ n \cdot [\mathfrak{A} \sin u] \cdot d\vartheta &= n' \cdot [\mathfrak{A}' \sin u'] \cdot d\vartheta' \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Das optische Bild einer der gedrehten objektseitigen Brennfläche angehörnden Erzeugenden (von der Neigung  $u$  und der vom Drehpunkt gemessenen Schnittweite  $\mathfrak{A}$ ) wird eine der gedrehten bildseitigen Brennfläche angehörende Erzeugende (von der Neigung  $u'$  und der vom Drehpunkt gemessenen Schnittweite  $\mathfrak{A}'$ ), wenn beide Gleichungen (29) erfüllt sind. Es muß also sein

$$\frac{d[\mathfrak{A} \sin u]}{\mathfrak{A} \sin u} = \frac{d[\mathfrak{A}' \sin u']}{\mathfrak{A}' \sin u'}$$

Soll diese Beziehung für *alle* Erzeugenden gelten, so ist zu integrieren, wodurch sich

$$\frac{\mathfrak{A}' \sin u'}{\mathfrak{A} \sin u} = \text{const.} \quad (30)$$

ergibt. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten dient die Überlegung, daß Gleichung (30) auch für die paraxialen Werte Giltigkeit haben muß. Bezeichnet man

$$\lim_{u'=0} \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}' \quad \text{und} \quad \lim_{u=0} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$$

(wobei zum Unterschied von den fett gedruckten, mit Aberrationen behafteten Werten  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}'$  die paraxialen Grenzwerte durch gewöhnlichen Druck gekennzeichnet sind) und

berücksichtigt man, daß die paraxialen Öffnungswinkel  $du$  und  $du'$  werden, so folgt

$$\lim_{u=u'=0} \left[ \frac{\mathfrak{A}' \sin u'}{\mathfrak{A} \sin u} \right] = \frac{\mathfrak{A}' du'}{\mathfrak{A} du} = \text{const.}$$

Dann ergibt sich durch Einsetzen in die beiden identisch gewordenen Gleichungen (29)

$$n \cdot \mathfrak{A} du \cdot d\vartheta = n' \cdot \mathfrak{A}' du' \cdot d\vartheta'$$

$$\text{oder} \quad n \cdot dr \cdot d\vartheta = n' \cdot dr' \cdot d\vartheta' \quad (31)$$

wobei  $dr = \mathfrak{A} du$  und  $dr' = \mathfrak{A}' du'$  die paraxialen Blendenhalbmesser in den Dreh-Zentren  $M$  und  $M'$  sind.

Gleichung (31) ist nichts anderes als der Helmholtzsche Satz für Paraxial-Strahlen; sämtliche darin vorkommenden Größen sind daher als optisch konjugiert aufzufassen. Da das objektseitige Dreh-Zentrum  $M$  als Eintritts-Pupille des Systems vorausgesetzt wurde, muß das bildseitige Dreh-Zentrum  $M'$  die Austritts-Pupille sein.

Die wichtigen paraxialen Größen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}'$ , welche mit- hin die paraxialen Entfernungen eines Objekt- oder Bildpunktes von der zugehörigen Pupille angeben, sollen als (objektseitige bzw. bildseitige) „Strahlungsweite“ bezeichnet werden.

Das Verhältnis

$$\frac{\mathfrak{A}' du'}{\mathfrak{A} du} = \frac{dr'}{dr} \quad (32)$$

gibt die Linear-Vergrößerung in den Pupillen an, wodurch die Integrations-Konstante bestimmt ist. Dann lautet die Bedingungs-Gleichung (30)

$$\frac{\mathfrak{A}' \sin u'}{\mathfrak{A} \sin u} = \frac{dr'}{dr} = \text{const.} \quad (33)$$

Dabei stellen die Größen  $\mathfrak{A} \sin u$  bzw.  $\mathfrak{A}' \sin u'$  die Lote dar, die aus den Pupillenmitten auf einander optisch konjugierte, endlich geneigte Strahlen gefällt sind. Diese Lotlängen sollen als „Pupillenlote“ bezeichnet werden.

Sind Objekt- und Bildpunkt sphärisch korrigiert, so geht Gleichung (33) in die Abbesche Sinusbedingung über.

Die Bedingungs-Gleichung (33) läßt sich in folgendem Satz aussprechen:

### Proportionalitäts-Bedingung (1. Form)

„Eine zur Eintritts-Pupille isoplanatische Korrektion des Objektraums wird im Bildraum zur Austritts-Pupille für eine beliebige endliche Öffnung isoplanatisch, wenn die Pupillenlote optisch konjugierter Strahlen für alle dazwischen liegenden Öffnungen konstantes Verhältnis, nämlich gleich der Linear-Vergrößerung in den Pupillen, besitzen.“

Da bei der isoplanatischen Korrektion der durch die Spitze der Brennfläche gehende Strahl nach der Drehung stets wieder nach der nämlichen Pupille hinzielt, so müssen gemäß der Definition der Koma die isoplanatischen Pupillen endlicher Öffnung zugleich die komafreien Pupillen kleiner Öffnungen und schwacher Neigungen sein.  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{X}'$  sind zugleich auch die „komafreien Strahlungsweiten“. Ist also die Proportionalitäts-Bedingung für *endliche* Öffnungen nicht erfüllt, so gestattet wenigstens der Grenzwert für kleine Öffnungen die Berechnung der *komafreien Strahlungsweiten* und *-Pupillen*.

Die Bedeutung der Proportionalitäts-Bedingung ruht darin, daß sie sich nur auf die Korrektion eines Achsenpunktes bezieht, die Isoplanasie dagegen auf die Korrektion einer kleinen achsen-senkrechten *Ebene*.

Aus der obigen (ersten) Form der Proportionalitäts-Bedingung ist auch das zugrunde liegende allgemeine optische Gesetz klar ersichtlich.

Denkt man sich einestheils  $\mathfrak{X}$  als beliebige Funktion von  $u$  und andernteils  $\mathfrak{X}'$  als beliebige Funktion von  $u'$  gegeben, so ist durch diese Funktionen die Form der objektseitigen und bildseitigen Brennfläche vollständig bestimmt. Greift man im Bildraum einen Strahl von der Neigung  $u'$  heraus, so ist dem hiezu gehörenden Pupillenlot vermöge der Proportionalitäts-

Bedingung eine bestimmte Lotlänge im Objektraum und dadurch eine bestimmte Neigung  $u$  im Objektraum zugeordnet. Da mit dem Strahlenkegel des Objektraums zugleich auch die Energiewerte der objektseitigen Strahlung gegeben zu denken sind, so fordert die Proportionalitäts-Bedingung einen bestimmten Zusammenhang zwischen der Strahlendichte auf den Wellenflächen des Objektraums mit der Strahlendichte auf den Wellenflächen des Bildraums, und ist somit eine rein energetische Bedingung. Die Proportionalitäts-Bedingung macht also über die Form der Wellen- und Brennflächen keinerlei Vorschrift.

Um die Proportionalitäts-Bedingung auf eine für die Durchrechnung bequemere Form zu bringen, führt man statt der von den Pupillen gemessenen „Strahlungsweiten“  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\mathfrak{A}'$ ,  $\mathfrak{A}'$  die auf den ersten und letzten Linsenscheitel bezogenen „Schnittweiten“  $s$ ,  $s$  bzw.  $s'$ ,  $s'$  ein, wobei wieder die schwach gedruckten Buchstaben die paraxialen Werte, die fett gedruckten die zu endlichen Öffnungen gehörenden, mit Aberrationen behafteten Werte vorstellen sollen.

Drückt man die sphärische Längsaberration durch beide Arten von Größen aus, so ergibt sich

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{A} = s - s \text{ und } \mathfrak{A}' - \mathfrak{A}' = s' - s'$$

$$\begin{aligned} \text{und hieraus} \quad & \mathfrak{A} = \mathfrak{A} + (s - s) \quad \} \\ \text{sowie} \quad & \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}' + (s' - s') \quad \} \end{aligned} \quad (34)$$

Als Wert für die Linearvergrößerung in den Pupillen erhält man nach bekannten Formeln

$$\frac{dr'}{dr} = \frac{\mathfrak{A}' du'}{\mathfrak{A} du} = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{s}{f'_s} \quad (35)$$

Dabei ist abkürzend

$$f'_s = \frac{s'_1 \cdot s'_2 \cdot s'_3 \cdots s'_{k-1} \cdot s'_k}{s_2 \cdot s_3 \cdot s_4 \cdots s_k} \cdot s'_k \quad (36)$$

gesetzt, wobei

$s_1, s_2, s_3 \dots s_k$  die paraxialen Schnittweiten vor den Brechungen  
 $s'_1, s'_2, s'_3 \dots s'_k$  „ „ „ nach „ „

sind. Da bisher die Flächen-Indizes unterdrückt waren, ist  $s_1$  mit  $s$  und  $s'_k$  mit  $s'$  identisch. Die Größe  $f'_s$  sei wegen der Ähnlichkeit der Formel (36) mit der Brennweitenformel als „Pseudobrennweite“ bezeichnet.

Dann wird Gleichung (33) unter Berücksichtigung der Gleichungen (34), (35) und (36)

$$\frac{[\mathfrak{A}' + (s' - s')] \sin u'}{[\mathfrak{A} + (s - s)] \sin u} = \frac{\mathfrak{A}' \cdot s}{\mathfrak{A} \cdot f'_s};$$

hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathfrak{A}' (f'_s \sin u' - s \sin u) + \mathfrak{A} (s' - s') f'_s \sin u' \\ - \mathfrak{A}' (s - s) s \sin u = 0 \end{aligned}$$

oder 
$$\frac{(s' - s') f'_s \sin u'}{\mathfrak{A}'} = \frac{(s - s) s \sin u}{\mathfrak{A}} + (s \sin u - f'_s \sin u')$$

und 
$$f'_s = \frac{s' - s'}{s \sin u - f'_s + \frac{s - s}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{s \sin u}{\sin u'}}$$

oder schließlich

$$f'_s = \frac{s' - s'}{s \sin u - \left(1 + \frac{s - s}{\mathfrak{A}}\right) \sin u'} - f'_s \tag{37}$$

Hiebei sind  $s - s$  und  $s' - s'$  die sphärischen Längsaberrationen des Objekt- bzw. Bildraums;

$$\frac{s \sin u}{\sin u'} - f'_s$$

ist der Fehler gegen die Abbesche Sinusbedingung („Fehler gegen die Pseudobrennweite“) bei aberrationsfreiem Objekt in einer rechnerisch bequemen Form.

Die Formel (37) enthält den Blendenort nicht explizit, da er auf der rechten Seite noch im Nenner eingeht. Bildet man sich jedoch verschiedene konjugierte Wertepaare  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}'$ , so lassen sich (unter Berücksichtigung kleinerer Öffnungen) durch eine rasch zum Ziel führende Näherung in einfachster Weise zunächst die komafreien Strahlungsweiten  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A}'$  finden; es ist



dann noch zu untersuchen, inwieweit bei diesen Werten der Proportionalitäts-Bedingung für endliche Öffnungen Genüge geleistet wird.

Es liegt nahe, den Nenner

$$\frac{s \sin u}{\sin u'} \left( 1 + \frac{s-s'}{\mathfrak{A}} \right) - \mathfrak{f}'_s$$

als „Fehler gegen die Sinusbedingung (Fehler gegen die Pseudobrennweite) bei isoplanatischer Korrektion des Objektpunktes“ zu definieren, und die rechte Seite der Gleichung (37) als „Fehlerverhältnis“ zu bezeichnen. Für die linke Seite der Gleichung (37) war in einem früheren Aufsatz<sup>1)</sup> der Ausdruck „Blendenfaktor“ eingeführt worden. Die Proportionalitäts-Bedingung läßt sich dann in folgende, für numerische Rechnung bequeme Form fassen:

1) F. Staebble, Über den Zusammenhang von Koma und Sinusbedingung bei sphärisch nicht korrigierten Systemen, Zeitschr. f. Instr. 27, S. 173, 1907. In diesem Aufsatz kommt der Verfasser unter Voraussetzung eines aberrationsfreien Objekts zu einem für das Seidelsche Gebiet giltigen Ergebnis, das sich mit dem zweiten Satz der Proportionalitäts-Bedingung (2. Form) durchaus deckt. Ferner ergibt sich aus den dort entwickelten Beziehungen folgende, innerhalb des Seidelschen Gebietes gültige Transformations-Formel:

Setzt man analog der obigen Formel (36) für  $\mathfrak{f}'_s$

$$\mathfrak{f}'_x = \frac{x'_1 \cdot x'_2 \cdot x'_3 \cdot \dots \cdot x'_{k-1}}{x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_k} \cdot x'_k$$

(wobei die  $x_i, x'_i$  die Schnittweiten eines beliebig gewählten Blendenorts sind), und führt man die abgekürzten Bezeichnungen ein

$$\begin{aligned} \text{Sph} &= \sum \left( \frac{h_r}{h_1} \right)^4 Q_{rs}^2 \Delta \frac{1}{n s} = - \frac{2 n'}{\mathfrak{f}'_s{}^2 (s u)^2} \{s' - s'\} \\ \text{Sinb} &= - \frac{2 n'}{\mathfrak{f}'_s{}^2 (s u)^2} \left\{ \frac{s \sin u}{\sin u'} - \mathfrak{f}'_s \right\} \\ \text{Kom} &= \sum \left( \frac{h_r}{h_1} \right)^3 \frac{y_r}{y_1} Q_{rs} Q_{vx} \Delta \frac{1}{n s}, \end{aligned}$$

wobei von den Reihenentwicklungen in den geschwungenen Klammern nur die quadratischen Glieder  $(s u)^2$  mitzunehmen sind, so folgt unter Berücksichtigung der Seidelschen Eliminationsformel

**Proportionalitäts-Bedingung (2. Form).**

„Die Isoplanasie des Objektraums bleibt im Bildraum bis zu solchen Öffnungen erhalten, als das Fehlerverhältnis konstant bleibt. Der Grenzwert des Fehlerverhältnisses für kleine Öffnungen ergibt (auch bei Nichterfüllung der isoplanatischen Korrektion größerer Öffnungen) den Blendenfaktor der komafreien Austrittspupille, wodurch die letztere bestimmt ist.“

Gleichung (37) läßt sich auch in der Form schreiben

$$\frac{s' - s'}{\mathfrak{A}'} = \frac{s \sin u}{\sin u'} \left( 1 + \frac{s - s'}{\mathfrak{A}} \right) - \hat{f}'_s \quad (38)$$

Das gibt in Worten die

**Proportionalitäts-Bedingung (3. Form).**

„Die Isoplanasie des Objektraums bleibt im Bildraum bis zu solchen Öffnungen erhalten, als die sphärische Abweichung in Prozenten der Strahlungsweite gleich dem Fehler gegen die Pseudobrennweite in Prozenten der Pseudobrennweite ist. Findet diese Übereinstimmung nur für kleine Öffnungen statt, so sind die zugehörigen Pupillen die komafreien Pupillen.“

Die Einführung der „Pseudobrennweite“ ist für rechnerische Zwecke sehr bequem, immerhin ermangelt diese Größe einer physikalischen Bedeutung. Führt man die von den Haupt-

$$Q_{1x} - Q_{1s} = \frac{h_k}{h_1} \cdot \frac{y_k}{y_1} \cdot (Q_{kx} - Q_{ks})$$

nach Einsetzen in die dortige Gleichung (17) die für jeden beliebigen Objekts- und Blendenort giltige *Transformationsformel*

$$\hat{f}'_x \cdot \text{Kom} = \hat{f}'_s \cdot \text{Sph} - \mathfrak{A}' \cdot \text{Sinb}$$

Dabei sind die Summen Sph und Sinb vom Blendenort, der nur in die Komma-Summe, sowie in die Koeffizienten  $\hat{f}'_x$  und  $\mathfrak{A}'$  eingeht, vollständig unabhängig.

ebenen gerechneten Gaußschen Objekt- und Bildweiten  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}'$  ein, so besteht die Beziehung

$$\frac{du'}{du} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'},$$

daher ist wegen Gleichung (35)

$$\frac{s}{f_s} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'} \quad (39)$$

zu setzen. Dann läßt sich Gleichung (38) auch schreiben

$$\frac{s' - s}{\mathfrak{A}'} = \frac{\frac{\mathfrak{A} \sin u}{\sin u'} \left( 1 + \frac{s - s'}{\mathfrak{A}} \right) - \mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}'} \quad (40)$$

Der Zähler des zweiten Bruches stellt dabei die Abbessche Sinusbedingung als „Fehler gegen die (Gaußsche) Bildweite“ dar; dieser Fehler gegen die Bildweite in Prozenten der Bildweite ist numerisch gleich dem Fehler gegen die Pseudobrennweite in Prozenten der Pseudobrennweite. Statt des „Fehlers gegen die Schnittweite“  $s' - s$  könnte auch der numerisch gleiche „Fehler gegen die Strahlungsweite“  $\mathfrak{A}' - \mathfrak{A}$  eingeführt werden.

Dann läßt sich die Proportionalitäts-Bedingung in folgender, für *graphische Darstellungen* vorteilhaften Form ausdrücken:

#### Proportionalitäts-Bedingung (4. Form).

„Die sphärische Abweichung (Fehler gegen die Strahlungsweite) ist in Prozenten der Strahlungsweite, der Fehler gegen die Bildweite in Prozenten der Bildweite darzustellen, (wobei der prozentuale Fehler gegen die Bildweite zahlenmäßig gleich dem prozentualen Fehler gegen die Pseudobrennweite ist). Aus dem Zusammenfallen beider Kurven für kleine Öffnungen ersieht man die Komakorrektur für schwache Neigungen; aus dem Zusammenfallen beider Kurven für große Öffnungen die isoplanatische Korrektur des Bildes, falls das Objekt für die entsprechende Eintritts-Pupille isoplanatisch korrigiert war.“

## Spezial-Fälle.

a) Ist der Objektpunkt *aberrationsfrei*, so wird in dem Ausdruck für den Fehler gegen die Sinusbedingung in Gleichung (37), (38) und (40) der in Klammern stehende Faktor

$$1 + \frac{s - s'}{\mathfrak{A}} = 1$$

und die komafreie Austritts-Pupille ergibt sich explizit.

b) Liegt das Objekt im *Unendlichen*, so wird

$$s \sin u = h$$

gleich der Einfallshöhe  $h$ , während die Pseudobrennweite, Gaußsche Bildweite und bildseitige Brennweite identisch werden.

Es wird also dann  $f'_s = \mathfrak{A}' = f'$ .

Die Brennweite des Objektraums ist dabei noch beliebig, d. h. die Brechungs-Indizes im Objekt- und Bildraum können verschieden sein; durch Gleichsetzen der beiden tritt keine weitere Vereinfachung ein.

Dem „*Blendenfaktor*“  $\mathfrak{A}'/f'_s$  liegt im allgemeinen keine physikalische Bedeutung zugrunde; nach Gleichung (35) wird er jedoch mit der Linearvergrößerung in den Pupillen identisch, wenn

$$\mathfrak{A} = s$$

d. h. wenn die Eintritts-Pupille im ersten Linsenscheitel, oder wenn das Objekt im Unendlichen liegt.

Auf eine merkwürdige Ähnlichkeit der Proportionalitäts-Bedingung mit der Aufhebung der *chromatischen Vergrößerungs-Differenz* sei an dieser Stelle hingewiesen: In Fig. 5 sei  $M'$  die Austritts-Pupille des Systems,  $S'$  der axiale Bildpunkt und  $S'_\lambda$  der entsprechende Punkt für eine zweite Farbe. Ebenso seien  $P'$  und  $P'_\lambda$  unendlich benachbarte außeraxiale Bildpunkte, welche zur Neigung

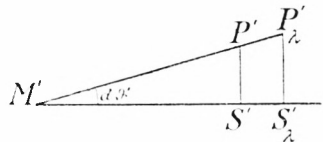


Fig. 5

$d\vartheta'$  des Bildraums gehören. Die Austritts-Pupille sei für beide Farben als fest angenommen, während für die Eintritts-Pupille die hiedurch bedingte chromatische Aberration bestehen soll.

Die chromatische Vergrößerungs-Differenz ist dann behoben, wenn die Punkte  $P'$  und  $P'_\lambda$  von  $M'$  aus gesehen auf einer Geraden liegen. Führt man wieder die paraxialen Strahlungsweiten  $\mathfrak{A}'$  und  $\mathfrak{A}'_\lambda$  ein und bezeichnet man die unendlich kleinen Bildhöhen mit  $H'$  bzw.  $H'_\lambda$ , so ist

$$\begin{aligned} M' S' &= \mathfrak{A}', & M' S'_\lambda &= \mathfrak{A}'_\lambda \\ S' P' &= H', & S' P'_\lambda &= H'_\lambda \end{aligned}$$

zu setzen. Soll die Vergrößerungs-Differenz behoben sein, so muß wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke die Beziehung bestehen

$$\frac{\mathfrak{A}'_\lambda}{\mathfrak{A}'} = \frac{H'_\lambda}{H'} \quad (41)$$

Nun ist bekanntlich die Linearvergrößerung des Bildes gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} \frac{H'}{H} &= \frac{n}{n'} \cdot \frac{f'_s}{s} \\ \frac{H'_\lambda}{H_\lambda} &= \frac{n_\lambda}{n'_\lambda} \cdot \frac{(f'_s)_\lambda}{s_\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Dann wird Gleichung (41)

$$\frac{\mathfrak{A}'_\lambda}{\mathfrak{A}'} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{n_\lambda}{n'_\lambda} \cdot \frac{s}{s_\lambda} \cdot \frac{H_\lambda}{H} \cdot \frac{(f'_s)_\lambda}{f'_s}$$

Ist das Objekt aberrationsfrei, so wird

$$s = s_\lambda \text{ und } H = H_\lambda,$$

während für die Eintritts-Pupille gegenüber der als fest angenommenen Austritts-Pupille chromatische Aberration bestehen kann. Ferner sei hier die Voraussetzung gemacht, daß Objekt- und Bildraum gleichen Brechungs-Index haben sollen. Dann wird

$$\frac{\mathfrak{A}'_\lambda}{\mathfrak{A}'} = \frac{(f'_s)_\lambda}{f'_s}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{A}'_2 - \mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}'} = \frac{(f'_s)_2 - f'_s}{f'_s} \quad (43)$$

das ergibt in Worten die

### Proportionalitäts-Bedingung für die chromatische Korrektion:

„Zur Aufhebung der chromatischen Vergrößerungsdifferenz für eine zweite Farbe muß hiefür die chromatische Längsaberration in Prozenten der Strahlungsweite gleich dem chromatischen Fehler der Pseudobrennweite in Prozenten der Pseudobrennweite sein.“

Die Bedingung für Aufhebung der chromatischen Vergrößerungsdifferenz wird also unter den angegebenen Voraussetzungen (aberrationsfreies Objekt, gleicher Brechungs-Index im Objekt- und Bildraum) der 3. Form der Proportionalitäts-Bedingung analog. Für den praktisch wichtigsten Fall (fernese Objekt) tritt auch die Analogie mit der 4. Form ein.

Eine Gegenüberstellung zweier einfacher Beispiele diene zur Erläuterung der Proportionalitäts-Bedingung.

1. Einzelne brechende Kugelfläche: Hier muß die komafreie Pupille im Kugelmittelpunkt liegen, weil durch ihn (und nur durch ihn) alle, die kaustische Spitze tragenden Strahlen gehen. Da für diese Pupille jede zur brechenden Kugelfläche konzentrische Objektfläche in eine ebensolche Bildfläche abgebildet wird, und da hiebei die Form der Brennfläche stets die nämliche bleibt, so muß für diese Pupille auch ein achsensenkrechtcs Objektlement ohne Formänderung der Brennfläche in ein achsensenkrechtcs Bildelement abgebildet werden. Der Kugelmittelpunkt ist also nicht nur *komafreie* Pupille, sondern nach unserer Definition auch *isoplanatische* Pupille; es muß also für ihn die Proportionalitäts-Bedingung in allen angegebenen Formulierungen erfüllt sein, und zwar gleichgiltig, ob das Objekt aberrationsfrei ist oder nicht. Es müssen daher sowohl die Pupillenlote konstantes Verhältnis

besitzen, als auch das Verhältnis der sphärischen Abweichung zur Sinusbedingung für die ganze Öffnung konstant sein.

Es ist also wegen

$$\mathfrak{A} = s - r, \quad \mathfrak{A}' = s' - r, \quad \mathfrak{f}'_s = s'$$

nach Gleichung (37) stets

$$\frac{s' - s'}{s \sin u \left(1 + \frac{s - s}{s - r}\right) - s'} = \text{const.} = \frac{s' - r}{s'} = \frac{n(s - r)}{n' s}$$

oder

$$\frac{s' - s'}{s \sin u \cdot \frac{s - r}{s - r} - s'} = \text{const.} = \frac{s' - r}{s'} = \frac{n(s - r)}{n' s} \quad (44)$$

Diese Formel kann auch als Kontroll-Formel bei der trigonometrischen Durchrechnung an jeder beliebigen sphärischen Fläche benützt werden, bietet jedoch nur scheinbar eine erhöhte Genauigkeit.

Während sich ein direkter Beweis für diese Gleichung (44) auf Grund der Durchrechnungsformeln leicht ergibt, ersieht man für die Pupillenlote (Proportionalitäts-Bedingung 1. Form) ohne weiteres, daß diese bezüglich des Einfall- und Brechungswinkels die gegenüberliegenden Katheten über dem Kugelradius als Hypotenuse sind. Die Pupillenlote verhalten sich daher für jede beliebige Öffnung (bei sphärisch beliebig korrigiertem Objektpunkt) wie die Sinusse der brechenden Winkel oder umgekehrt wie die Brechungsindizes, womit die Proportionalitäts-Bedingung in ihrer ersten Form bewiesen ist.

Liegt das Objekt aberrationsfrei im Unendlichen, so gilt die Proportionalitäts-Bedingung streng auch für jede Planconvex- (oder Konkav-)Linse beliebiger Dicke, die dem fernen Objekt die Planseite zukehrt.

Faßt man das zum Kugelmittelpunkt isoplanatische Bild wieder als Objekt für die Brechung an einer zweiten (dritten usw.) konzentrischen Kugelfläche auf, so folgt in gleicher Weise, daß die Isoplanasie bei beliebig vielen brechenden (oder spiegelnden) konzentrischen Kugelflächen bezüglich des gemein-

samen Mittelpunktes als Pupille erhalten bleiben muß. Von dieser Eigenschaft hat z. B. Sutton<sup>1)</sup> mit seiner *Panoramic lens* und F. Jentzsch<sup>2)</sup> mit seinem *konzentrischen Kondensator* Gebrauch gemacht. Rechnerisch kommt diese Beziehung bei all diesen Systemen in der Weise zum Ausdruck, daß der Fehler gegen die Sinusbedingung streng proportional der sphärischen Längsaberration wird.

2. Spiegelung an einem Rotations-Paraboloid: Hierbei schneiden sich parallel zur optischen Achse auftreffende (also von einem aberrationsfreien fernen Achsenpunkt ausgehende) Strahlen nach der Spiegelung streng im Brennpunkt; die sphärische Längsaberration ist also streng behoben. Denkt man sich die erzeugende Parabel in Polarkoordinaten bezüglich des Brennpunkts durch die bekannte Gleichung gegeben

$$r = \frac{p}{1 + \cos u'}$$

wobei  $u'$  die Achsenneigung des gespiegelten Strahls ist, so ersieht man unmittelbar, daß wegen

$$h = s \sin u = r \sin u'$$

und

$$\bar{f}'_s = s' = \frac{p}{2}$$

der Fehler gegen die Sinusbedingung

$$\frac{h}{\sin u'} - \bar{f}'_s = r - \frac{p}{2} > 0$$

und daher die Sinusbedingung nicht korrigiert sein kann. Als komafreie Strahlungsweite ergibt sich nach (37)  $\mathcal{W}' = 0$ , die komafreie Austritts-Pupille fällt mit dem Bild zusammen, so daß das scharfe (isoplanatische) Bild nur die Größe Null besitzt.

<sup>1)</sup> M. v. Rohr, Theorie und Geschichte des phot. Objektivs. Berlin, J. Springer, 1899, S. 171.

<sup>2)</sup> F. Jentzsch, Über Dunkelfeldbeleuchtung. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, XII. Jahrgang, Nr. 22, S. 981.



Im Zusammenhalt mit der bekannten Koma-Summe

$$\text{Kom} = \sum \left( \frac{h_r}{h_1} \right)^3 \frac{y_r}{y_1} Q_{r,s} Q_{r,x} A \frac{1}{n_s}$$

darf es nicht Wunder nehmen, daß beim ersten Beispiel die komafreie Pupille im Krümmungsmittelpunkt, beim zweiten dagegen in der Entfernung des halben Krümmungsradius (Brennpunkt) liegt, während in die Koma-Summe nur der Radius eingeht. Die Erklärung liegt darin, daß es sich bei der Parabel um eine nicht-sphärische Fläche handelt, während jene Koma-Summe für sphärische Flächen hergeleitet ist.

Zusammenfassend sei zum Schlusse Folgendes bemerkt:

Die Korrektur der Proportionalitäts-Bedingung ist für eine gleichmäßige Ausdehnung der Bildschärfe die *allerwichtigste Forderung*. Fehler gegen diese Bedingung sind es hauptsächlich, welche — trotz guter sphärischer Korrektur und günstig scheinender Erfüllung der Sinusbedingung — der brauchbaren Öffnung ein Ziel setzen. Zu Gunsten der Proportionalitäts-Bedingung muß daher unter Umständen auf die Korrektur der Sinusbedingung Verzicht geleistet werden. Eine Behebung der sogenannten „Brennweitenfehler“ (gleichgiltig, ob der sphärischen oder chromatischen) ist für die Ausdehnung des brauchbaren Bildes stets schädlich, wenn die (sphärischen oder chromatischen) Längsaberrationen nicht behoben sind. Eine Ausnahme ergibt sich — auf Grund der 3. Form der Proportionalitäts-Bedingung — nur für den Fall, daß die Austrittspupille ins Unendliche rückt, ein Fall, der z. B. durch die Wirkung der Feldlinse bei Okularen nahezu verwirklicht wird. Hierbei ist also auf die Korrektur der Längsaberrationen (falls diese nicht außerdem möglich ist) zu Gunsten der Behebung der „Brennweitenfehler“ zu verzichten.

Ebenso folgt z. B. aus der 3. Form der Proportionalitäts-Bedingung für photographische Objektive mit Vorderblende (sogenannte Landschaftslinsen), daß die Sinusbedingung kleinere Fehler als die sphärische Abweichung besitzen soll, während für sogenannte Teleobjektive die entgegengesetzte Korrekturens-

vorschrift eintritt; denn beide Objektivtypen verhalten sich gegensätzlich bezüglich der Lage der Hauptpunkte zur Blende. Bei Doppelobjektiven liegt die Blende stets nahe bei den Hauptpunkten, so daß hiefür — und *nur* hiefür — die empirische Konstruktionsregel, sphärische Abweichung und Sinusbedingung auf gleiche Fehlergrößen zu korrigieren, Giltigkeit hat.

Die vorliegende Untersuchung war auf ein zentriertes System von Rotationsflächen beschränkt. Läßt man die Beschränkung auf Rotationsflächen fallen, setzt jedoch voraus, daß für alle brechenden Flächen beide Koordinaten-Ebenen Symmetrie-Ebenen sein sollen (was z. B. bei zylindrischen und torischen Flächen der Fall ist), so gilt die Proportionalitäts-Bedingung mit ihren verschiedenen Formulierungen auch für jeden dieser beiden ebenen Hauptschnitte.

In der vorliegenden Arbeit wurden alle Entwicklungen *räumlich*, also für die *Brennfläche* (Rotationsfläche) durchgeführt. Beschränkt man sich von Anfang an darauf, nur die Verhältnisse innerhalb einer Meridian-*Ebene* dieser Brennfläche, also für eine ebene *Brennkurve* zu betrachten, so läßt sich naturgemäß die Herleitung der Proportionalitäts-Bedingung entsprechend den einfacheren Voraussetzungen bedeutend vereinfachen.<sup>1)</sup>

München, Optisches Werk Dr. Staebble & Co., Januar 1919.

<sup>1)</sup> Die vorliegende Arbeit geht auf Überlegungen zurück, welche ich gemeinsam mit unserm damaligen wissenschaftlichen Mitarbeiter Herrn Carl Stein im Jahre 1916 angestellt habe; für seine Anregungen sage ich ihm an dieser Stelle wärmsten Dank; im Juli 1916 lag die Arbeit, allerdings in einer wenig übersichtlichen Form, fertig vor. Im Januar 1919 habe ich sie einer Überarbeitung unterzogen und am 11. Februar 1919 Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. S. Finsterwalder mit der Bitte um Vorlage bei der bayer. Akademie der Wissenschaften eingereicht, nachdem ich sie am 3. Februar 1919 der Zeitschr. f. Instr. angeboten, aber wegen des in Aussicht gestellten späten Erscheinungstermins nicht zum Abdruck gegeben hatte.

Mit Schreiben vom 12. Februar 1919, das ich wenige Tage nach der Einreichung meiner Arbeit erhielt, teilte mir Herr Dr. Lihotzky

von Wien aus mit, daß er in den ersten Tagen des Februar einen Beweis für eine Verallgemeinerung der Sinusbedingung (entsprechend meiner Proportionalitäts-Bedingung in der 2. Form bei Beschränkung auf die Ebene und aberrationsfreies Objekt. D. Verf.) gefunden, und später, daß er ihn am 20. Februar bei der Wiener Akademie der Wissenschaften eingereicht habe.

Beide Arbeiten sind somit durchaus unabhängig von einander entstanden. Durch die hiesigen politischen Wirren hat sich die Vorlage meiner Arbeit in der Akademie-Sitzung bis 17. Mai verzögert, während die Lihotzkysche Arbeit bereits am 6. März 1919 der Wiener Akademie vorgelegt wurde; sie wird im 1. Heft 1919 der dortigen Sitzungsberichte (mathem.-naturw. Klasse) erscheinen.

München, im Juni 1919.

D. Verf.

---

Berichtigung: In der Fußnote auf S. 164 ist das Wort (Sinusbedingung) hinter  $S(2) = 0$  zu streichen.

---

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1919

Band/Volume: [1919](#)

Autor(en)/Author(s): Staebble Franz

Artikel/Article: [Isoplanatische Korrektion und Proportionalitäts-Bedingung. \(Zur Bedeutung der Abbeschen Sinusbedingung bei sphärisch nicht korrigierten Systemen endlicher Öffnung\) 163-196](#)