Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1919. Heft III
November- und Dezembersitzung

München 1919
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems.

Von **Hans Hamburger** (Berlin).

(Vorläufige Mitteilung.)[1])

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 15. November 1919.

§ I.

1. Es sei eine formale Potenzreihe der Form

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z_2} + \frac{c_2}{z_3} - \cdots \tag{1}$$

vorgelegt, über deren Konvergenz nichts vorausgesetzt wird. Man bilde aus ihren Koeffizienten die Hankelschen Determinanten

$$C_m = \begin{vmatrix} c_0, & c_1, & \ldots, & c_{m-1} \\ c_1, & c_2, & \ldots, & c_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-1}, & c_m, & \ldots, & c_{2m-2} \end{vmatrix}, \quad B_m = \begin{vmatrix} c_1, & c_2, & \ldots, & c_m \\ c_2, & c_3, & \ldots, & c_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_m, & c_{m+1}, & \ldots, & c_{2m-1} \end{vmatrix}$$

und mache die Voraussetzung, daß sämtliche c_m reell, C_m und B_m von Null verschieden sind. Dann läßt sich die Potenzreihe (1) formal durch ein einfaches Divisionsverfahren in einen Kettenbruch von der Gestalt

[1]) Die hier vorliegenden Resultate mit den ausgeführten Beweisen sind von der philosophischen Fakultät zu Berlin als Habilitationsschrift angenommen worden.

$$(2) \qquad S(z) = \cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}}$$

entwickeln, wo sämtliche a_ν reelle von Null verschiedene Zahlen bedeuten. Zu jeder Potenzreihe (1) existiert ein und nur ein solcher Kettenbruch (2) und umgekehrt[1]).

Bezeichnet man mit $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ den m-ten Näherungsbruch von $S(z)$, so ergibt sich unmittelbar aus der Gestalt des Kettenbruches: die $P_m(z)$ und $Q_m(z)$ sind Polynome in z und zwar sind $P_{2n}(z)$ und $P_{2n-1}(z)$ vom Grade $n-1$, $Q_{2n}(z)$ und $Q_{2n-1}(z)$ vom Grade n. Ferner ist für $z=0$

$$Q_{2n-1} = 0, \quad P_{2n-1} = 1, \quad Q_{2n} = 1.$$

Endlich läßt sich der Näherungsbruch $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ in eine für hinreichend große Werte von z konvergente Potenzreihe der Gestalt

$$\frac{P_m(z)}{Q_m(z)} = \frac{c_0^{(m)}}{z} - \frac{c_1^{(m)}}{z^2} + \frac{c_2^{(m)}}{z^3} - \cdots$$

entwickeln, und zwar wird, wie man auf Grund der Fundamentalformeln für Kettenbrüche

$$\frac{P_{m+1}(z)}{Q_{m+1}(z)} - \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} = \frac{(-1)^m}{Q_{m+1}(z)\,Q_m(z)} \text{ [2])}$$

leicht erkennt,

$$c_\nu^{(m)} = c_\nu \text{ für } \nu = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Durch die letzte Eigenschaft ist der Kettenbruch (2), wenn die Potenzreihe (1) vorgegeben ist, eindeutig bestimmt.

---

[1]) Vgl. etwa Oskar Perron, „Die Lehre von den Kettenbrüchen", Leipzig 1913, S. 301—307 und S. 375; in folgendem kurz mit Perron, Lehrbuch, zitiert.

[2]) Vgl. z. B. Perron, Lehrbuch, S. 382.

2. Macht man nunmehr die Voraussetzung

$$C_m > 0 \text{ für alle } m,$$

so werden sämtliche Koeffizienten a_{2n+1} positiv und umgekehrt folgt aus

$$a_{2n+1} > 0 \text{ für alle } n,$$

$$C_m > 0 \text{ für alle } m.$$

In diesem Falle sind die Nullstellen der Polynome $P_m(z)$ und $Q_m(z)$ sämtlich einfach und reell und es gelten die Partialbruchzerlegungen

$$(3) \qquad \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^n{}_\nu \frac{N_\nu^{(n)}}{z+\lambda_\nu^{(n)}}, \quad \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = \frac{M_0^{(n)}}{z} + \sum_1^n{}_\nu \frac{M_\nu^{(n)}}{z+\omega_\nu^{(n)}},$$

wobei die Zähler $M_\nu^{(n)}$ und $N_\nu^{(n)}$ sämtlich > 0 und die $\omega_\nu^{(n)}$, $\lambda_\nu^{(n)} \neq 0$ sind.

Stieltjes setzt nun bei seinen Untersuchungen noch außerdem

$$B_m > 0 \text{ für alle } m$$

voraus, was mit der Voraussetzung

$$a_{2n} > 0 \text{ für alle } n$$

oder auch mit der Voraussetzung

$$\omega_\nu^{(n)} > 0, \quad \lambda_\nu^{(n)} > 0 \text{ für alle } n \text{ und } \nu$$

gleichbedeutend ist[1]).

3. Nunmehr beweist Stieltjes durch passende Erweiterung bekannter Sternscher Konvergenzkriterien für Kettenbrüche[2]):

I. Divergiert die Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu a_\nu$, so konvergiert der Kettenbruch $S(z)$ in jedem abgeschlossenen Bereich der z-Ebene, der

[1]) T. J. Stieltjes, „Recherches sur les fractions continues". Ann. de la fac. des sc. de Toulouse, Bd. VIII und IX (1894 und 1895), im folgenden kurz mit Stieltjes VIII bzw. IX zit. Vgl. insbes. S. 10—12.

[2]) M. A. Stern, „Über die Kennzeichen der Konvergenz eines Kettenbruchs". Journ. für r. u. angew. Math., Bd. 37 (1848), S. 255—272. Stieltjes, VIII, S. 30—39 und S. 61—65. Perron, Lehrbuch, S. 234—235.

kein Stück der Achse der reellen negativen Zahlen enthält, gleichmäßig gegen eine analytische Funktion $f(z)$, obgleich Zähler und Nenner der Näherungsbrüche für sich betrachtet divergieren.

II. Konvergiert die Reihe $\sum_{1}^{\infty} a_\nu$, so konvergieren die vier Folgen von Polynomen $P_{2n}(z)$, $Q_{2n}(z)$, $P_{2n-1}(z)$, $Q_{2n-1}(z)$ in jedem ganz im Endlichen gelegenen Bereich der z-Ebene gleichmäßig gegen ganze transzendente Funktionen:

$$\lim_{n=\infty} P_{2n}(z) = p(z), \qquad \lim_{n=\infty} P_{2n-1}(z) = r(z)$$

$$\lim_{n=\infty} Q_{2n}(z) = q(z), \qquad \lim_{n=\infty} Q_{2n-1}(z) = s(z).$$

Außerdem ist

$$r(z)\,q(z) - s(z)\,p(z) = 1. \tag{4}$$

Es konvergieren also sowohl die geraden als auch die ungeraden Näherungsbrüche, aber gegen die wegen (4) voneinander verschiedenen Funktionen

$$f_1(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad f_2(z) = \frac{r(z)}{s(z)}.$$

Der Kettenbruch divergiert also.

4. Durch Grenzübergang gelangt Stieltjes von der Partialbruchzerlegung (3) der Näherungsbrüche zu einer fundamentalen Integraldarstellung der Grenzfunktionen $f(z)$, bzw. $f_1(z)$, $f_2(z)$ und zwar erhält er: im Falle I

$$\lim_{m=\infty} \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} = f(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{z+u}\text{[1]} \tag{5}$$

im Falle II

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = f_1(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi_1(u)}{z+u}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = f_2(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi_2(u)}{z+u} \tag{6}$$

[1]) Eine ausführliche Darstellung des Stieltjesschen Integralbegriffs siehe Stieltjes, VIII, S. 68—71; Perron, Lehrb., S. 362—374. — Der zit. Satz findet sich bei Stieltjes, VIII, S. 76—90; Perron, Lehrb., S. 402—410.

Hierbei bedeuten $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$ und $\varphi_2(u)$ im Intervall $0 < u < \infty$ definierte reelle, nirgends abnehmende Funktionen und die Integrale sind Stieltjessche.

Es gelten ferner die sogenannten Momentengleichungen; im Falle I:

$$c_\nu = \int_0^\infty u^\nu \, d\varphi(u) \text{[1]}, \tag{7}$$

im Falle II:

$$c_\nu = \int_0^\infty u^\nu \, d\varphi_1(u) = \int_0^\infty u^\nu \, d\varphi_2(u).$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich, daß die Funktionen $f(z)$, $f_1(z)$, $f_2(z)$ der Formeln (5) und (6) durch die Potenzreihe (1) asymptotisch dargestellt werden[2].

5. Das Problem zu einer vorgelegten Folge von Koeffizienten c_ν eine im Intervall $0 < u < \infty$ definierte reelle, nirgends abnehmende Funktion $\varphi(u)$ zu finden, die den Gleichungen (7) genügt, nennt Stieltjes das Momentenproblem. Man findet leicht eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Momentenproblems, indem man berücksichtigt, daß die mit den Koeffizienten (7) gebildeten quadratischen Formen

$$\sum_0^{n-1}{}_{\iota,\varkappa}\, c_{\iota+\varkappa}\, x_\iota x_\varkappa = \int_0^\infty (x_0 + u x_1 + \cdots + u^{n-1} x_{n-1})^2 \, d\varphi(u)$$

$$\sum_0^{n-1}{}_{\iota,\varkappa}\, c_{\iota+\varkappa+1}\, x_\iota x_\varkappa = \int_0^\infty u (x_0 + u x_1 + \cdots + u^{n-1} x_{n-1})^2 \, d\varphi(u)$$

für jedes n positiv definit, also ihre Determinanten C_n und B_n sämtlich > 0 sind.

Durch die bisher angegebenen Sätze ist aber auch bewiesen, daß, wenn die aus den vorgegebenen Koeffizienten c_ν gebildeten Determinanten C_m und B_m sämtlich positiv sind, das Momentenproblem immer mindestens eine Lösung besitzt, die durch Grenzübergang aus dem Kettenbruch (2) gewonnen wird.

---

[1] Stieltjes, VIII, S. 92—93; Perron, Lehrbuch, S. 410—411.

[2] Stieltjes, VIII, S. 35; Perron, Lehrbuch, S. 413.

Stieltjes beweist ferner, daß im Falle I außer der durch den Grenzübergang (5) gewonnenen Funktion $\varphi(u)$ keine weitere Lösung des Momentenproblems existiert[1]). Im Falle II gibt es außer den Funktionen $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ der Formeln (6) noch unendlich viele andere Lösungen des Problems. Im Falle I nennt Stieltjes das Momentenproblem bestimmt, im Falle II unbestimmt.

§ II.

6. An diese klassischen Resultate schließen sich die Ergebnisse der vorliegenden Mitteilung an.

Wir lassen die Voraussetzung $B_m > 0$ fallen, verzichten damit also auf $a_{2n} > 0$, $\omega_\nu^{(n)} > 0$, $\lambda_\nu^{(n)} > 0$; behalten aber die Voraussetzung $C_m > 0$ für alle m bei und damit auch die Beziehungen $a_{2n+1} > 0$ und die Partialbruchzerlegungen (3) mit reellen $\omega_\nu^{(n)}$, $\lambda_\nu^{(n)}$ und positiven $M_\nu^{(n)}$, $N_\nu^{(n)}$.

Für diesen Fall gilt ein Satz des Herrn Grommer[2]):

Aus der Folge der Näherungsbrüche $\dfrac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ kann eine Teilfolge $\dfrac{P_{m_p}(z)}{Q_{m_p}(z)}$ von der Beschaffenheit ausgewählt werden, daß diese Teilfolge in jedem abgeschlossenen Bereich der z-Ebene, der kein Stück der Achse der reellen Zahlen enthält, mit wachsendem p gleichmäßig gegen eine analytische Funktion $f(z)$ konvergiert, die sich wieder durch ein Stieltjessches Integral darstellen läßt. Doch wird sich dieses Integral in Anbetracht, daß jetzt die Näherungsbrüche auch für negative Werte von

---

[1]) Stieltjes, VIII, S. 97—104; Perron, Lehrbuch, S. 390—391 und S. 417.

[2]) Jakob Grommer, Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen. Diss., Göttingen 1914, abgedr. im Journ. f. r. u. angew. Mathematik, Bd. 144 (1914), S. 140—166; vgl. insbes. S. 137 ff. Herr Grommer betrachtet hier allerdings einen andern Kettenbruch, dessen Näherungsbrüche mit der Folge der Näherungsbrüche gerader Ordnung $\dfrac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$ übereinstimmen.

z Pole haben können, von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken. Es ergibt sich also

$$(8) \qquad \lim_{p=\infty} \frac{P_{m_p}(z)}{Q_{m_p}(z)} = f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u},$$

wo $\varphi(u)$ eine im Intervall $-\infty < u < +\infty$ definierte reelle, nirgends abnehmende Funktion bedeutet.

Außer dem Grommerschen Auswahltheorem war bisher über den Fall $C_m > 0$, $B_m \gtreqless 0$ nichts bekannt. Es läßt sich nun zunächst zeigen, daß die Integrale

$$(9) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} u^r \, d\varphi(u)$$

für alle ganzzahligen nicht negativen Werte von r existieren und gleich c_r werden. Demzufolge wird die Funktion $f(z)$ der Formel (8) durch die Potenzreihe (1) asymptotisch dargestellt; das heißt aber, das Momentenproblem, wobei die Momente jetzt die Gestalt (9) annehmen, besitzt immer mindestens eine Lösung, wenn die Determinanten C_m sämtlich positiv und die Determinanten B_m sämtlich von 0 verschieden sind.

Daß die Bedingung $C_m > 0$ für die Lösbarkeit des Momentenproblems in seiner neuen Gestalt auch notwendig ist, bemerkt man unmittelbar, wenn man die positiv definite Form

$$(10) \qquad \sum_{0}^{n-1}{}_{\iota,\varkappa}\, c_{\iota+\varkappa}\, x_\iota\, x_\varkappa = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_0 + u x_1 + \cdots + u^{n-1} x_{n-1})^2 \, d\varphi(u)$$

betrachtet.

7. Es bleibt jetzt noch übrig, die Frage nach der Bestimmtheit des Momentenproblems im Zusammenhang mit dem Problem der Konvergenz des Kettenbruchs $S(z)$ zu untersuchen. Während im Stieltjesschen Falle sich die Konvergenzeigenschaften des Kettenbruchs $S(z)$ direkt angeben lassen, und man aus der Konvergenz (Divergenz) von $S(z)$ auf die Bestimmtheit (Unbestimmtheit) des Momentenproblems (7) schließt, werden im Falle $B_m \gtreqless 0$ die Konvergenzeigenschaften von $S(z)$ erst aufgeklärt, nachdem über die Bestimmtheit oder Unbestimmtheit des Momentenproblems (9) entschieden ist.

Im folgenden soll ein Kettenbruch kurz als konvergent bezeichnet werden, wenn er in jedem abgeschlossenen Bereich der z-Ebene, der kein Stück der Achse der reellen Zahlen enthält, gleichmäßig konvergiert, in allen andern Fällen soll er divergent heißen.

Es gelten nun folgende Sätze: Man setze

$$\sigma_n = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}.$$

I'. Dann ist das Momentenproblem (9) bestimmt, wenn mindestens eine der beiden Reihen

$$(11) \qquad \sum_0^\infty {}^n a_{2n+1}, \quad \sum_1^\infty {}^n a_{2n+1} \sigma_n^2$$

divergiert.

II'. Konvergieren beide Reihen (11), so ist das Momentenproblem unbestimmt.

Im Falle I' ist der Kettenbruch konvergent, das heißt es ist

$$\lim_{m=\infty} \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} = f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(u)}{z+u},$$

während die $P_m(z)$ und $Q_m(z)$ für sich genommen nicht konvergieren.

Im Falle II' existieren gleichmäßig in jedem ganz im endlichen gelegenen Bereich der z-Ebene die Grenzwerte

$$(12) \qquad \lim_{n=\infty} P_{2n-1}(z) = r(z), \quad \lim_{n=\infty} Q_{2n-1}(z) = s(z),$$

wo $r(z)$ und $s(z)$ ganze transzendente Funktionen mit nur reellen einfachen Nullstellen sind.

Die Grenzwerte von Zähler und Nenner der Näherungsbrüche gerader Ordnung existieren im allgemeinen Falle nicht. Trotzdem gelingt es, die Polynome $P_{2n}(z)$ und $Q_{2n}(z)$ so aufzuspalten, daß ihre Konvergenzeigenschaften klar hervortreten. Setzt man nämlich

$$P_{2n}(z) = G_n(z) + \sigma_n P_{2n+1}(z), \quad Q_{2n}(z) = H_n(z) + \sigma_n Q_{2n+1}(z),$$

so konvergieren im Falle II′ die Polynome $G_n(z)$ und $H_n(z)$ in jedem ganz im endlichen gelegenen Bereich der z-Ebene mit wachsendem n gleichmäßig gegen ganze transzendente Funktionen mit nur reellen einfachen Nullstellen; es ergibt sich also

$$(13)\qquad \lim_{n=\infty} G_n(z) = g(z), \quad \lim_{n=\infty} H_n(z) = h(z).$$

Außerdem besteht zwischen den vier ganzen transzendenten Funktionen $r(z)$, $s(z)$, $g(z)$ und $h(z)$ in Analogie zu (4) die Beziehung

$$r(z)\,h(z) - s(z)\,g(z) = 1.$$

Die Polynome $P_{2n}(z)$ und $Q_{2n}(z)$ konvergieren also einzeln im Falle II′ dann und nur dann, wenn ein endlicher Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \sigma_n = \sigma$ existiert.

Ist $\lim\limits_{n=\infty} \sigma_n = \infty$, das heißt besitzt die Menge der Zahlen σ_n keinen im endlichen gelegenen Häufungspunkt, so wird

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \lim_{n=\infty} \frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = \frac{r(z)}{s(z)};$$

dann und nur dann ist also der Kettenbruch $S(z)$ konvergent für den Fall, daß das zugehörige Momentenproblem (9) unbestimmt ist.

Wenn alle $B_m > 0$ und damit auch alle $a_{2n} > 0$ sind, die Reihen (11) beide konvergieren und $\lim\limits_{n=\infty} \sigma_n = \infty$ ist, so ist nach den Stieltjesschen Sätzen I das Momentenproblem (7) bestimmt, das Momentenproblem (9) nach unsern Sätzen II′ unbestimmt.

8. Eine fast noch größere Rolle als der Kettenbruch der Gestalt (2) spielt in der mathematischen Literatur der Kettenbruch[1])

$$(14)\qquad K(z) = \frac{k_1}{z + l_1} + \frac{k_2}{z + l_2} + \cdots.$$

[1]) Vgl. z. B. Perron, Lehrbuch, S. 322—326 und S. 376.

wo die l_ν reell (auch Null), die k_ν reell, aber nicht Null sind. Der Kettenbruch (14) wird aus der Potenzreihe (1) durch ein dem Euklidschen Algorithmus nachgebildetes Divisionsverfahren gewonnen. Er hat vor dem Kettenbruch (2) voraus, daß er nicht an die Bedingung $B_m \neq 0$ gebunden ist, sondern immer dann und nur dann existiert, wenn sämtliche Derminanten $C_m \neq 0$ sind.

Dann und nur dann, wenn für alle m die Determinante $C_m > 0$ ist, ergibt sich $k_\nu < 0$ für alle $\nu > 2$, $k_1 > 0$. Mit dem Kettenbruch (2), falls dieser existiert, ist er durch die Beziehung

$$K_n(z) = \frac{U_n(z)}{V_n(z)} = \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$$

verbunden, wenn mit $K_n(z) = \dfrac{U_n(z)}{V_n(z)}$ der Näherungsbruch n-ter Ordnung von $K(z)$ bezeichnet wird.

Die Partialbruchzerlegung der Näherungsbrüche $K_n(z)$ dient zunächst dazu, eine Lösung des Momentenproblems auch für den Fall zu konstruieren, daß einige der Determinanten B_m verschwinden.

Außer den Näherungsbrüchen $K_n(z) = \dfrac{U_n(z)}{V_n(z)}$ betrachten wir auch die Quotienten

$$K_n(z;t) = \frac{U_n(z) + t\,U_{n-1}(z)}{V_n(z) + t\,V_{n-1}(z)} = \frac{k_1}{z+l_1} + \cdots + \frac{k_{n-1}}{z+l_{n-1}} + \frac{k_n}{z+l_n+t}\,{}^{1)}$$

wo t einen reellen Parameter bedeutet und nennen $K_n(z;t)$ einen verallgemeinerten Näherungsbruch n-ter Ordnung von $K(z)$.

Wir sagen ferner: der Kettenbruch $K(z)$ *konvergiert vollständig* gegen die Funktion $f(z)$, wenn zu jeder vorgegebenen, beliebig kleinen positiven Zahl ε und zu jedem abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}$, der kein Stück der Achse der reellen Zahlen enthält, sich eine Zahl $N = N(\varepsilon, \mathfrak{B})$ von der Beschaffenheit bestimmen läßt, daß, wenn $n > N$ ist, für alle Punkte z von $\mathfrak{B}$ und alle reellen Werte von t

$$|K_n(z;t) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{wird.}$$

[1]) Diese bequeme Schreibweise des Kettenbruches ist von Herrn Pringsheim eingeführt worden. Vgl. auch Perron, Lehrbuch, S. 3.

Nunmehr zeigt sich, daß *das Momentenproblem dann und nur dann bestimmt ist, wenn der Kettenbruch $K(z)$ vollständig konvergent ist.*

Setzt man unter Benutzung einer bekannten Fundamentalformel der Kettenbruchtheorie

$$\Delta_{n-1} = V_{n-1}(0)\,U_n(0) - V_n(0)\,U_{n-1}(0) = (-1)^{n-1} k_1 k_2 \ldots k_n;$$

so lassen sich die Polynome $P_{2n-1}(z)$, $Q_{2n-1}(z)$, $G_n(z)$ und $H_n(z)$ mit Hilfe der Polynome $U_n(z)$ und $V_n(z)$ durch die Formeln definieren:

$$(15)\quad \left|\begin{aligned} P_{2n-1}(z) &= \frac{V_{n-1}(0)\,U_n(z) - V_n(0)\,U_{n-1}(z)}{\Delta_{n-1}} \\ Q_{2n-1}(z) &= \frac{V_{n-1}(0)\,V_n(z) - V_n(0)\,V_{n-1}(z)}{\Delta_{n-1}} \\ G_n(z) &= -\frac{U_{n-1}(0)\,U_n(z) - U_n(0)\,U_{n-1}(z)}{\Delta_{n-1}} \\ H_n(z) &= -\frac{U_{n-1}(0)\,V_n(z) - U_n(0)\,V_{n-1}(z)}{\Delta_{n-1}}. \end{aligned}\right.$$

Diese Formeln gelten auch, wenn der Kettenbruch $S(z)$ der Form (2) nicht existiert, wofern nur sämtliche Determinanten $C_m \neq 0$ bzw., wie in unserm Falle, sogar > 0 sind, und liefern für den Fall, daß der Kettenbruch $S(z)$ existiert, dieselben Polynome $P_{2n-1}(z)$, $Q_{2n-1}(z)$, $G_n(z)$, $H_n(z)$ wie die alten Definitionen.

Andererseits ist offenbar

$$\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} = K_n\left(z;\, -\frac{V_n(0)}{V_{n-1}(0)}\right),\quad \frac{Q_n(z)}{H_n(z)} = K_n\left(z;\, -\frac{U_n(0)}{U_{n-1}(0)}\right)$$

d. h. die Quotienten

$$\frac{P_{2n-1}(z)}{Q_{2n-1}(z)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{G_n(z)}{H_n(z)}$$

ergeben sich als diejenigen verallgemeinerten Näherungsbrüche n-ter Ordnung von $K(z)$, die für $z = 0$ einen Pol haben bzw. dort verschwinden. Die Nenner in den Formeln (15) sind so bestimmt, daß $P_{2n-1}(0) = 1$ und $H_n(0) = 1$ wird.

Die Reihen $\sum_0^\infty{}_n\, a_{2n+1}$ bzw. $\sum_0^\infty{}_n\, a_{2n+1}\,\sigma_n^2$ lassen sich durch die allgemeineren Reihen

$$(16) \qquad \sum_0^\infty{}_n \frac{V_n^2(0)}{\Delta_n} \quad \text{bzw.} \quad \sum_0^\infty{}_n \frac{U_n^2(0)}{\Delta_n}$$

ersetzen, die für den Fall, daß der Kettenbruch $S(z)$ existiert, mit den Reihen (11) übereinstimmen.

Die alten über die Folge von Polynomen $P_{2n-1}(z)$, $Q_{2n-1}(z)$, $G_n(z)$ und $H_n(z)$ bzw. über die Reihen (11) bewiesenen Sätze gelten nunmehr auch für den Fall, daß beliebig viele der Determinanten B_m verschwinden, wofern man nur die Polynome bzw. die Reihen durch die allgemeineren Beziehungen (15) bzw. (16) definiert.

Aus unsern allgemeinen Sätzen lassen sich auch leicht notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz im gewöhnlichen Sinne von $K(z)$ ableiten.

Außerdem wird für beide Kettenbrüche der Gestalt (2) und (14) der Satz bewiesen:

Ist der Kettenbruch $S(z)$ (der Kettenbruch $K(z)$) für einen beliebigen reellen oder komplexen Wert von z konvergent, so konvergiert der Kettenbruch $S(z)$ (der Kettenbruch $K(z)$) gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Bereich der z-Ebene, der kein Stück der Achse der reellen Zahlen enthält.

9. Es soll jetzt dem Kriterium für die Bestimmtheit des Momentenproblems eine Form gegeben werden, die unmittelbar von den Eigenschaften der mit den c_ν gebildeten quadratischen Formen (10) $F_n(x) = \sum_0^{n-1}{}_{\iota,\varkappa}\, c_{\iota+\varkappa}\, x_\iota\, x_\varkappa$ ausgeht und nicht erst auf die zugehörigen Kettenbrüche $K(z)$ und $S(z)$ zurückgreift. Wegen $C_m > 0$ für alle m ist die quadratische Form $F_n(x)$ positiv definit, besitzt also für $x_0 = 1$ ein Minimum $M^{(n)} > 0$. Mit wachsendem n können nun aber die Zahlen $M^{(n)}$ nie zunehmen, es existiert also der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} M^{(n)} = M \geqq 0.$$

Die formale quadratische Form von unendlich vielen Veränderlichen $\sum_{0}^{\infty}{}_{\iota,\varkappa}\, c_{\iota+\varkappa}\, x_\iota\, x_\varkappa$, über deren Konvergenz nichts vorausgesetzt ist, wird eigentlich definit (uneigentlich definit) genannt, je nachdem die ihr zugehörige Zahl $M > 0$ ($M = 0$) ist.

Der Hauptsatz läßt sich nun auch in folgender Weise aussprechen:

Das Momentenproblem ist dann und nur dann bestimmt, wenn mindestens eine der beiden quadratischen Formen

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\iota,\varkappa}\, c_{\iota+\varkappa}\, x_\iota\, x_\varkappa, \quad \sum_{0}^{\infty}{}_{\iota,\varkappa}\, c_{\iota+\varkappa+2}\, x_\iota\, x_\varkappa$$

uneigentlich definit ist.

Oder damit gleichbedeutend:

Das Momentenproblem ist bestimmt oder unbestimmt, je nachdem der Grenzwert der stets abnehmenden positiven Determinantenquotienten $\dfrac{C_n}{C_n'}$ Null ist oder nicht.

Hierbei ist zur Abkürzung

$$C_n' = \begin{vmatrix} c_4, & c_5, & \ldots, & c_{n+1} \\ c_5, & c_6, & \ldots, & c_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n+1}, & c_{n+2}, & \ldots, & c_{2n-2} \end{vmatrix}$$

gesetzt.